

MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA ANIMAL, BIOLOGÍA VEGETAL Y ECOLOGÍA

El Thar del Himalaya¹



El Thar del Himalaya², es un ungulado que se introdujo hace justo un siglo en los Alpes de Nueva Zelanda a partir de 13 individuos fundadores, los cuales provenían de una población de 29 individuos mantenidos en cautividad. Este modelo se presenta como un buen ejemplo de reintroducción de especies en cautividad a partir de pequeñas poblaciones iniciales.

Se conocen las Tablas de Vida generadas de datos procedentes del seguimiento durante un año de las hembras de dos grupos poblacionales de Thar en diferentes regiones de los Alpes Neozelandeses: el valle Godley y el valle Rangitata.

- La frecuencia $f(x)$ es el número de individuos al inicio de la edad x
- La supervivencia nos indica la probabilidad de estar vivo un individuo desde la edad cero hasta la edad x . Es decir, $l(x) = f(x)/205$, siendo $f(x)$ la frecuencia y 205 el número de ejemplares iniciales del valle Godley.

Conocidas la frecuencia $f(x)$ y la fertilidad $b(x)$, nuestro objetivo será doble, por un lado analizar la tabla de vida y en segundo lugar estudiar el comportamiento a largo plazo utilizando para ello el modelo de Leslie que se deduce de la tabla de vida.

¹Basado en [7]

²Modificado de [6]

Comenzaremos analizando los datos correspondientes al valle Godley.

Edad x	$f(x)$	$b(x)$	$l(x)$	$l(x)b(x)$	$xl(x)b(x)$	b_i	a_i
0	205	0	1	0	0	-	-
1	96	0.005	0.468	0.002	0.002	0.468	0.002
2	94	0.135	0.458	0.061	0.122	0.978	0.132
3	89	0.440	0.434	0.191	0.573	0.947	0.416
4	79	0.420	0.385	0.162	0.648	0.887	0.372
5	68	0.465	0.331	0.154	0.770	0.859	0.399
6	55	0.425	0.268	0.114	0.684	0.809	0.343
7	43	0.460	0.209	0.096	0.672	0.779	0.358
8	32	0.485	0.156	0.075	0.604	0.746	0.361
9	22	0.500	0.107	0.053	0.477	0.685	0.342
10	15	0.500	0.073	0.037	0.370	0.682	0.341
11	10	0.470	0.048	0.022	0.242	0.657	0.308
12	6	0.470	0.029	0.013	0.156	0.604	0.283
> 12	0	0	0	-	-	0	0
Total				0.9809	5.3211		

Para conocer la evolución de la población encontramos en primer lugar la tasa de reproducción,

$$R_0 = l(0)b(0) + l(1)b(1) + \dots + l(13)b(13) = \sum_{x=0}^{13} l(x)b(x) = 0,9809,$$

que es un valor muy próximo a uno. Es decir, la población se mantendrá prácticamente constante en el tiempo.

Si suponemos que la población sigue un modelo exponencial del tipo $P(t) = P(0)e^{rt}$, y calculamos el tiempo de generación,

$$G = \frac{\sum_{x=0}^{13} l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^{13} l(x)b(x)} = \frac{5,3211}{0,9809} = 5,4247,$$

podemos encontrar la tasa r como,

$$r = \frac{\ln R_0}{G} = \frac{\ln 0,9809}{5,4247} = -0,003554 \quad (1)$$

y en consecuencia, $P(t) = P(0)e^{-0,0035t}$.

El modelo matricial de Leslie que se deduce de la tabla de vida es, $\vec{X}(t+1) = L\vec{X}(t)$

siendo la matriz de Leslie,

$$L = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,13 & 0,41 & 0,37 & 0,39 & 0,34 & 0,35 & 0,36 & 0,34 & 0,34 & 0,30 & 0,28 & 0 \\ 0,46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,68 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,68 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,60 & 0 \end{pmatrix}$$

Al no tener en la primera fila dos ceros consecutivos (dos clases no fértiles), esta matriz posee un valor propio positivo estrictamente dominante $\lambda_1 = 0,995933$.

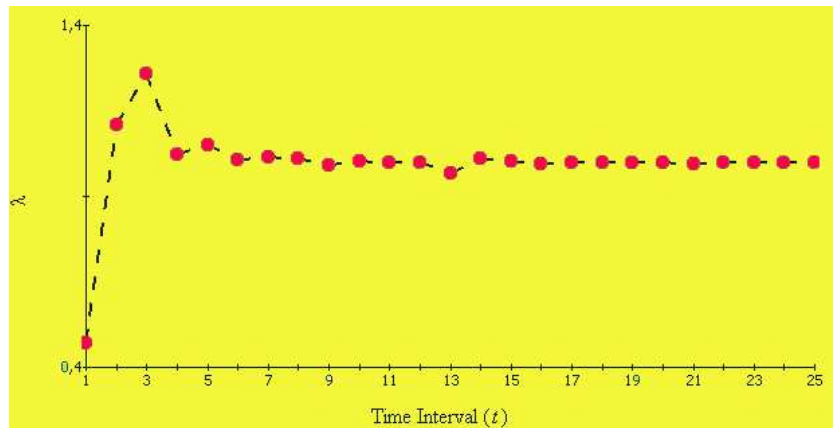


Figura 3.25. Representación de $\lambda_1 = 0,995933$

A partir del valor $\lambda_1 = 0,995933$ se puede encontrar el parámetro r del modelo exponencial $P(t) = P(0)e^{rt}$ ya que $r = \ln \lambda_1 = \ln 0,995933 = -0,0040$ que es un valor muy próximo al calculado en (1).

A largo plazo, la población permanecerá prácticamente constante (ya que $\lambda_1 \approx 1$, o bien, $r \approx 0$) y además el porcentaje de cada una de las clases también lo será y coincidirá con el siguiente autovalor asociado al λ_1 ,

$$\vec{V}_= (0,25, 0,12, 0,11, 0,11, 0,09, 0,08, 0,07, 0,05, 0,04, 0,03, 0,02, 0,01, 0,01)$$

que tiene la propiedad que la suma de sus componentes vale 1, y cuya representación gráfica puede verse en la Figura 3.26

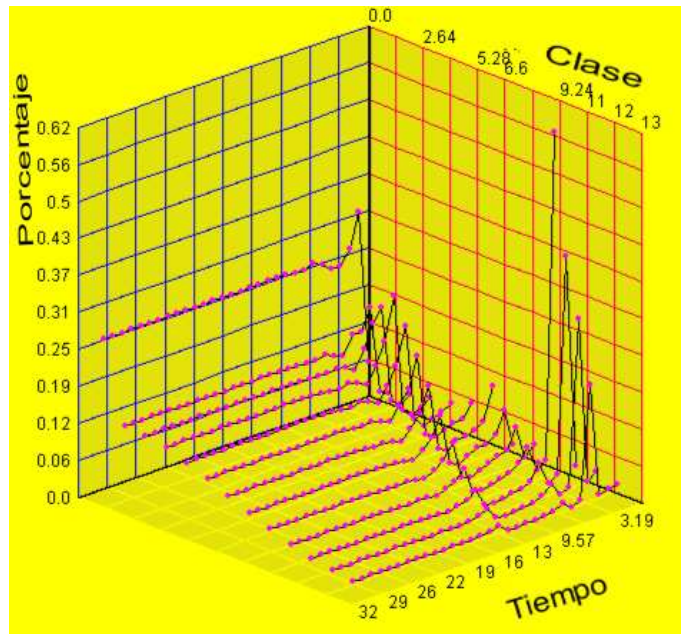


Figura 3.26. Proporciones por clases.

Bibliografía

- [1] ALLMAN E.S.; RHODES J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press, (2004)
- [2] ARANA J. Seminario impartido en Palencia el 5 de abril de 2001.
- [3] BATSCHELET E.; BRAND L.; STEINER A. *On the Kinetics of lead in the human body*. Journal of Mathematical Biology 15-23, (1979).
- [4] BORRELLI R.; COLEMAN C.S. *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico, (2002).
- [5] BRITTON N.F. *Essential Mathematical Biology*. Springer-Verlag, London, (2003).
- [6] CAUGHLEY G. *Mortality patterns in mammals*. Ecology, **47**, 906-918, (1966).
- [7] CAUGHLEY G.; GUNN A. *Conservation Biology in Theory and Practice*. Blackwell Science, Massachusetts, 147-149, (1996).
- [8] CONEJERO C.M.; MARTÍNEZ FUNES J.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Aplicación de la Geometría fractal a la Ecología de Paisajes*. Departamentos de Matemática y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [9] DE L HAZA I.; COBO-MOLINOS J.; GARRIDO-GARCÍA M. NAVAS J.; RUEDA P.; TORRES C.; CARÚZ A.; ESTEBAN F.J. *Fractal dimension of U373 astrocytoma cells in DMEM or RPMI cultures*. HarFA -Harmonic and Fractal Image Analysis 94-96, (2005). [http : //www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/22_I.Haza.pdf](http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/22_I.Haza.pdf)
- [10] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; JIMÉNEZ J.P.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P. *System Dynamics as a tool in Stem Cells/Tissue Engineering*. Histology and Histopathology, Suppl. 1, 150-151, (2005).
- [11] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; QUESADA J.M. *Aplicaciones bioinformáticas en la docencia de Modelos Matemáticos en Biología*. II Reunión de la Red de Bioninformática de Andalucía. Baeza, ESPAÑA.
- [12] FOLLARI, R. *Interdisciplinariedad, espacio ideológico*. Simposio sobre Alternativas Universitarias, UAM-Azcapotzalco, México, (1980).
- [13] FONTDEVILA, A. M. *Introducción a la genética de poblaciones*. Síntesis, Madrid 112-117,(1999).

- [14] FORESTER, J.W. *Principles of Systems*. SMIT Press, Cambridge, M.A.(1968).
- [15] GALACH, M. *Dynamics of the tumor-immune system competition. The effect of time delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., Vol. 13, n^o 3, 395-406, (2003).
- [16] GARCÍA CASTRO A.; GARRIDO PALOMERA E., ENDRINO M.I.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Dimensión Fractal de Imágenes MRI-T2 en la enfermedad de Alzheimer*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [17] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 82-86, (1997).
- [18] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 65-68, (1997).
- [19] HARTLOVE J.; SHAFFER D.; RAGAN S. *Glucose-Insuline Model*. The Maryland Virtual High School of Science and Mathematics, (2001).
- [20] HORN H.S. *The ecology of secondary succession*. Annual Review of Ecology and Systematics 5:25-37, (1974).
- [21] LEMAIRE V.; TOBIN F.L.; GRELLER L.D.; CHO C.R.; SUVA L.J. *Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling*, Journal of Theoretical Biology, 229, 293-309, (2004).
- [22] LI B.L. *Ecological Modelling*, 132, 33-50, (2000).
- [23] MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*, Eds. W.H.Freeman and Company, New York, (1983).
- [24] MARTÍN-GARCÍA J. *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*, Barcelona, (2003).
- [25] NOWAK M.A.; MAY R.M. *Virus Dynamics*, Oxford University Press, New York 16-26, (2000).
- [26] MARUSIC M., BAJZER Z., FREYER J.P.; VUC-PAVLOVIC, S. *Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models*. Cell, Prolif., **27**, 73-94, (1994).
- [27] NAVAS J.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P.; ESTEBAN F.J. *Glioma-Immune evasion: a system dynamics approach*. proceedings of the II International Conference on Computational Bioengineering, 699-710, Rodrigues et al. (Eds.), IST Press, ISBN: 972-8469-37-3, (2005).
- [28] ORTEGA H. *Un modelo logístico para el crecimiento tumoral en presencia de células asesinas*. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, volumen **XX**, n^o 3, 61-67, (1999).
- [29] RIOS, S. *Modelización*, Alianza Universidad, Madrid, (1995).

- [30] SERRANO C.; RODRÍGUEZ I.; MARTOS D.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Geometría Fractal de la Sustancia Blanca Cerebral durante el desarrollo de Esclerosis Múltiple*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [31] WARTON D.A.; GRAHAM W. *An approach to the teaching of host-parasite population modelling*. International Journal for Parasitology vol. 19; 451-45, (1989).
- [32] WERNER P.A.; CASWELL H. *Population growth rates and age vs. stage distribution models for teasel (*Dipsacus sylvestris*) Huds.* Ecology 58: 1103-1111, (1977).