Tema 10

SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

10.1. Introducción

La teoría de sistemas dinámicos es una rama de las Matemáticas que se ocupa del estudio del movimiento, y proporciona un lenguaje común para la Matemática, la Biología, la Ecología, la Física, la Historia y la Literatura. Esta disciplina académica fue creada en 1960 por *J.W. Forrester* del MIT (*Massachussetts Institute of Technology*) para ser empleada en la Administración y en las Ingenierías, pero en los últimos años se ha extendido a campos muy diversos.

En la teoría de los sistemas dinámicos, un **sistema** se define como una colección de elementos que continuamente interactuan para formar un conjunto unificado. A las relaciones internas y las conexiones entre los componentes de un sistema se les llama la **estructura del sistema**. Un ejemplo de un sistema es un ecosistema. La estructura de un ecosistema está definida por las relaciones entre la población animal, nacimientos y muertes, cantidad de comida, y otras variables específicas para un ecosistema particular.

El término dinámico hace referencia al cambio a lo largo del tiempo. Si algo es dinámico, es porque se está modificando constantemente. Un sistema dinámico es aquel en el cual las variables se modifican para producir cambios a lo largo del tiempo. La manera por la cual los elementos o las variables de un sistema cambian con el tiempo se denomina **comportamiento del sistema**. En el ejemplo del ecosistema, el comportamiento está descrito por la dinámica que se produce como consecuencia de los nacimientos y las muertes de la población. El comportamiento está expuesto a la influencia de comida adicional, los depredadores, y al medio ambiente, los cuales son todos elementos del sistema.

Los sistemas dinámicos también pueden usarse para analizar, como pequeños cambios en una parte del sistema, pueden afectar al comportamiento del sistema completo. Si nos referimos al ejemplo del ecosistema, podemos analizar el impacto de la sequía en el ecosistema o analizar el impacto de la eliminación de una determinada especie animal en el comportamiento del ecosistema completo.

En relación con los sistemas dinámicos discretos, fue *H. Poincaré* en 1899 el primero en utilizarlos al intentar simplificar un modelo continuo, pero ha sido en la década de los cincuenta donde han sido estudiados y aplicados en problemas muy diversos. En 1976 *R. May*, analizando el comportamiento de las ecuaciones en diferencias en el modelo que lleva su nombre, observó que aún para el caso determinista, el modelo podía presentar comportamientos "muy complicados". En 1963 el meteorólogo *E. Lorentz* descubre el caos matemático en un sistema dinámico continuo, presentando a la comunidad científica el atractor que lleva su nombre. Poco después, en 1973, *M. Heron* estudia el caso discreto, descubriendo un tipo de atractor muy parecido al de *Lorentz*. Dos años después, *Feigenbaum* presentó por primera vez el diagrama de bifurcación correspondiente al modelo logístico. Actualmente la teoría de las bifurcaciones es un campo donde se investiga intensamente.

10.1.1. Ejemplos de sistemas dinámicos

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos:

1.- **La ecuación de** *Malthus*. Queremos estudiar la evolución de la población de una determinada especie. Llamamos x_k al número de individuos de la población en el instante temporal k. Si suponemos que por cada individuo existente en el período k habrá, por término medio, α individuos en el período $k+1$, se tendrá

$$x_{k+1} = \alpha x_k \,, \quad k = 0, 1, \cdots \,. \tag{10.1}$$

Esta ecuación en diferencias lineal de primer orden, es la llamada ecuación de *Malthus*, economista y pensador del siglo XIX, propuesta para estimar la evolución de la población humana.

Si $\alpha > 1$, es decir, si existe algún crecimiento vegetativo en la población, los valores de x_k crecen en progresión geométrica y se disparan de forma exponencial, razón por la que esta ecuación desató una fuerte polémica entre los contemporáneos de *Malthus*, suponiendo la primera llamada de atención sobre el problema de la sobrepoblación del planeta.

2.- **La parábola logística de** *May***.** En 1976 el biólogo *Robert May* formuló otra ecuación para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema aislado, diferente de la de *Malthus*. *May* tuvo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema. Cuando la población se acerca al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, entonces el parámetro α debe disminuir, lo que equivale a considerar este parámetro función del número de individuos. Con ello se llega a una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = \alpha(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Podemos tomar como unidad de medida el máximo posible de la población, de manera que x_k expresa la fracción de población existente en el período k con respecto al nivel máximo de población. *May* formuló la hipótesis de que $\alpha(x_k)$ debería decrecer linealmente cuando x_k creciera, hasta hacerse nulo cuando x_k tomara el valor 1. Es decir que $\alpha(x_k)$ fuera de la forma $\mu(1 - x_k)$, llegando así a la ecuación de la **parábola logística de** *May*

$$x_{k+1} = \mu(1 - x_k)x_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,. \tag{10.2}$$

Observemos que para valores pequeños de x_k se tiene $1 - x_k \approx 1$, con lo que la ecuación (10.2) es equivalente a la ecuación de *Malthus* (10.1) con parámetro μ.

3.- **Modelo matricial.** Supongamos que una especie de aves que vive muchos años, resulta capaz de reproducirse a partir del segundo año de vida y que, por término medio, cada pareja de aves en edad reproductora cría anualmente una nidada de la que sobreviven dos crías, una de cada sexo. Se supone que a partir del segundo año todas las aves han emparejado. Se suelta una pareja de aves en una región sin depredadores. ¿Cuál es la ley de evolución para la población de aves?.

Ante un problema de esta naturaleza, el primer paso consiste en seleccionar las variables. Debido a las diferentes condiciones de reproducción, conviene considerar dos segmentos en la población de aves: las de un año y las de dos o más. Tomamos como variable $x_1(k)$ el número de parejas adultas en el período k. Debido a que existe siempre el mismo número de machos que de hembras, la población de aves de un año puede también contarse por el número $x_2(k)$ de parejas que pueden formarse entre ellas. Se tienen entonces las siguientes relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1(k+1) & = & x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) & = & x_1(k) \end{array} \right.$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

10.1.2. Conceptos de dinámica discreta

Un sistema dinámico discreto es simplemente, desde un punto de vista matemático, una ecuación en diferencias de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

donde f es una aplicación $f : X \to X$ definida en cierto conjunto X, que recibe el nombre de **espacio de fases o espacio de los estados**. Salvo que digamos lo contrario, siempre consideraremos funciones f suficientemente suaves, es decir, con derivadas continuas de todos los órdenes necesarios. Así, por ejemplo, cuando se quiere traducir un problema como los descritos en el apartado anterior al lenguaje de los sistemas dinámicos, se empieza por determinar el espacio de fases del problema que no es sino un conjunto cuyos elementos describen todos los posibles estados del sistema que se trata de analizar.

- En el modelo de *Malthus* se podría considerar como espacio de los estados el conjunto de los números reales no negativos (no son posibles poblaciones con un número negativo de individuos). Cuando el espacio de fases de un sistema es $\mathbb{R}$ o algún subconjunto de $\mathbb{R}$ se trata de un **sistema dinámico unidimensional**

- En el ejemplo la parábola logística de *May*, donde se estudia una única variable, que es la fracción de población con respecto a la máxima población posible, un espacio de fases adecuado es $X = [0, 1]$

- En el caso de la población de aves, el estado del sistema se describe a través de dos variables de estado $x_1(k)$ e $x_2(k)$ por lo que el espacio de los estados adecuado es un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$, el de todos los pares de números enteros no negativos. En sistemas más complejos, se hacen necesarias más variables para describir completamente el estado del sistema, por lo que $\mathbb{R}^m$, o un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, es un espacio de fases adecuado para muchos problemas. Por ejemplo, en mecánica se requieren 10 variables para describir completamente una partícula: tres para fijar su posición espacial, otras seis para conocer su velocidad y aceleración y una más para determinar su masa.

Las variables que describen un sistema, se llaman **variables de estado**. Se agrupan en un vector, que se conoce como **vector de estado**, y que almacena la información completa acerca del estado del sistema. El espacio de fases es entonces el conjunto de todos los posibles vectores de estado del sistema.

La ecuación de un sistema dinámico puede interpretarse de la siguiente forma: si el sistema adopta en un instante k un estado descrito a través de un cierto elemento $x_k \in X$, entonces en el instante $k+1$ el estado del sistema será x_{k+1}. La aplicación f representa por consiguiente la **ley de evolución del sistema dinámico** que transforma cada estado en el siguiente estado que el sistema adopta.

Si el sistema se encuentra en un estado inicial x_0, su evolución temporal corresponde a la sucesión $x_0, x_1, x_2, \cdots$, también llamada **solución con condición inicial** x_0. Se obtiene recursivamente

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),$$

y en general

$$x_k = f^k(x_0)\,.$$

La expresión $f^k(x)$, es la **solución general o flujo de los sistemas dinámicos discretos**. Permite conocer el estado del sistema en cualquier instante a partir de su posición inicial. El conjunto de valores

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \cdots ,\}$$

recibe el nombre de **órbita de** x, (se diferencia de la solución $x, f(x), f^2(x), \cdots$ en que ésta última es una sucesión ordenada cuyos términos son los elementos de la órbita).

Es fácil realizar el siguiente experimento: marquemos un número en una calculadora, por ejemplo 0.25, y pulsemos de forma reiterativa la tecla 10^x, con lo cual obtendremos la órbita correspondiente,

$$0.25,\ 10^{0.25},\ 10^{10^{0.25}},\ \cdots$$

Si continuamos con este proceso la calculadora nos dará un mensaje de error. La causa de este comportamiento es que la órbita tiende a infinito. Si repetimos el proceso tomando como semilla cualquier número y como función el seno o el coseno, observaremos que en este caso las órbitas son convergentes.

EJEMPLO 10.1

- Puede comprobarse fácilmente que la ecuación de *Malthus* admite por solución general la expresión
$$\Phi_x(k) = \alpha^k x$$
El comportamiento de esta expresión es sencillo de comprender. Si $x > 0$ entonces
$$\lim_{k\to\infty} \alpha^k x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1 \\ x & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

- Menos sencillo resulta el problema de encontrar una fórmula explícita para el problema de las aves. Se obtiene
$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$
Si calculamos las sucesivas potencias de la matriz, nos aparece un hecho curioso como es la aparición en estas matrices de los célebres números de *Fibonacci* $1, 1, 2, 3, 5, 8$,....

- Para el modelo de *May* la situación es más complicada, como tendremos ocasión de comprobar cuando estudiemos los modelos discretos no lineales. Podemos encontrar las primeras iteraciones de la solución general $f^k(x)$ y nos convenceremos de la enorme complicación de los cálculos involucrados. Ello nos ayuda a comprender la imposibilidad de obtener expresiones explícitas para las soluciones generales de los sistemas dinámicos no lineales (modelo de *May*), cuya conducta se pueda entender de forma global, como sucede en el caso (lineal) de la ecuación de *Malthus*.

El campo de **aplicaciones** de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales es muy amplio, y en los últimos años continúan aumentando. A continuación mostramos algunas de ellas.

- **En Matemáticas para la resolución numérica de ecuaciones.** Recordemos que el método del punto fijo nos permite encontrar la raíz de una ecuación $f(x) = 0$. El proceso se inicia reescribiendo la ecuación como $g(x) = x$, se toma un valor x_0 próximo a la solución buscada, y se reitera el proceso $x_{k+1} = g(x_k)$. Si la órbita correspondiente

$$\{x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1) = g(g(x_0)),\, \cdots ,\} ,$$

  converge a cierto valor x^*, entonces el método es convergente.

  Recordemos que gráficamente el punto fijo $g(x^*) = x^*$ se encuentra como la intersección de la función $g(x)$ con la bisectriz del primer cuadrante.

- **Elaboración de modelos matemáticos.** Por ejemplo, el modelo logístico (del francés logis = alojamiento), que suele ser el punto de partida de los sistemas dinámicos unidimensionales,

$$x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k) , \quad k = 0, 1, 2, \cdots , \tag{10.3}$$

  se puede obtener de la manera siguiente: Supongamos que x_0 es la población relativa inicial, esto es, el cociente entre la población inicial y la población máxima que puede soportar el habitat. Sea x_k la población relativa al cabo de k años El crecimiento relativo de la población en cada año será

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} ,$$

  que según las hipótesis de *Verhulst* (1845), es proporcional a $1 - x_k$. Es decir,

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = \alpha(1 - x_k) ,$$

  despejando

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(1 - x_k)x_k = x_k(1 + \alpha)(1 - x_k) .$$

  Si llamamos $\mu = 1 + \alpha$, entonces obtenemos la expresión (10.3)

- **Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.** Sea la ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = f(x)\,,$$

que podemos expresarla como

$$x(t + dt) - x(t) = f(x)dt\,.$$

Si sustituimos dt por un valor numérico h, obtenemos

$$x_{k+1} - x_k = hf(x_k) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k + hf(x_k)\,,$$

tomando h suficientemente pequeño, podemos entonces dibujar la solución que pasa por un punto inicial dado.

10.2. Modelos dinámicos discretos lineales.

En general, obtener la expresión explícita de la solución general $f^k(x)$ es bastante complicado. Con ayuda de un ordenador podemos conseguir numéricamente cuantas iteraciones deseemos en esa expresión, pero esto no resulta en general de mucha ayuda para entender la conducta global del sistema. Un instrumento que resulta en muchas ocasiones adecuado en el caso de sistemas unidimensionales es el análisis gráfico, a través del llamado **diagrama de Cobweb**.

Supongamos una árida isla cerca de la costa de un rico continente. Estamos interesados en una especie particular de pájaros que anidan en estas islas. Desgraciadamente el habitat de la isla es muy desfavorable ya que si los pájaros estuvieran aislados su población disminuiría un 20 % cada año. Esta situación podemos reflejarla utilizando el modelo de *Malthus* (exponencial)

$$x_{k+1} = 0.80x_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,,$$

donde x_k es la población de pájaros en el tiempo k. Hay una colonia de pájaros en el continente y cada año 1000 pájaros emigran a nuestra isla. Entonces, el cambio de población en la isla puede ser descrito por el modelo

$$x_{k+1} = 0.80x_k + 1000\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,.$$

Observemos que el modelo es lineal en el sentido de que la función $f(x) = 0.80x + 1000$ representa a una línea recta.

Ahora descubriremos y probaremos un teorema sobre sistemas dinámicos lineales discretos, que corresponden al tipo

$$x_{k+1} = mx_k + b\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,,$$

donde m y b son constantes. Recordemos que los sistemas dinámicos discretos están descritos por una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

En el caso particular de sistemas dinámicos discretos lineales, la función f es del tipo $f(x) = mx + b$, y estamos interesados en puntos de equilibrio del sistema dinámico discreto. Aquellos puntos x tales que $f(x) = x$. Estos puntos se llaman de equilibrio porque si un término es uno de estos puntos, cada sucesión de términos siguientes permanece en el mismo punto. De esta manera decimos que el sistema se encuentra en equilibrio. Es inmediato comprobar el siguiente resultado.

RESULTADO 10.2.1 *Si m no vale 1 entonces hay un único punto de equilibrio*

$$x^* = \frac{b}{1-m}$$

Los modelos dinámicos discretos pueden comportarse de manera sorprendente. Algunas veces una sucesión obtenida del sistema dinámico lineal discreto tiende directamente al punto de equilibrio. En otras ocasiones saltan alrededor de él, con saltos cada vez más pequeños hasta tender al punto de equilibrio. O por el contrario los saltos son cada vez más grandes y no tienden al punto de equilibrio.

Nuestro objetivo es formular y probar un teorema que nos determine cuando ocurre cada una de estas clases de comportamiento. Comenzamos la construcción del diagrama de *Cobweb* dibujando las gráficas

$$f(x) = mx + b\,, \quad g(x) = x$$

Dibujamos el punto x_1 en el eje OX. A continuación marcamos el valor $f(x_1) = x_2$ y obtenemos el punto (x_1, x_2). El próximo paso es trazar una línea horizontal desde el punto (x_1, x_2) hasta que corte a la recta $g(x) = x$ en el punto (x_2, x_2). Calculamos $x_3 = f(x_2)$ y repetimos sucesivamente este proceso.

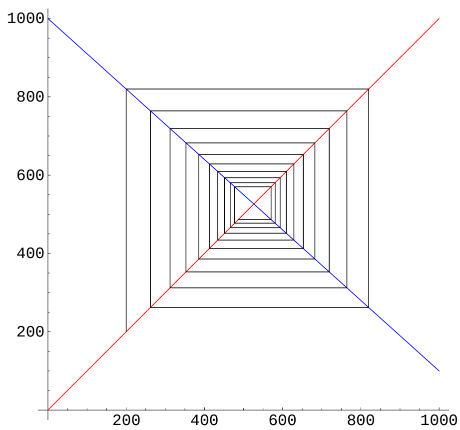

Figura 10.1: Diagrama de *Cobweb*.

Observemos en la Figura 10.1 que en este caso "la red de araña" nos lleva al punto de equilibrio. En la Figura 10.2 hemos representado en el eje de abscisas el tiempo y en el eje de ordenadas el número de individuos. Puede verse que si el tiempo aumenta la población tiende al punto de equilibrio. Se trata por tanto de un punto de equilibrio estable.

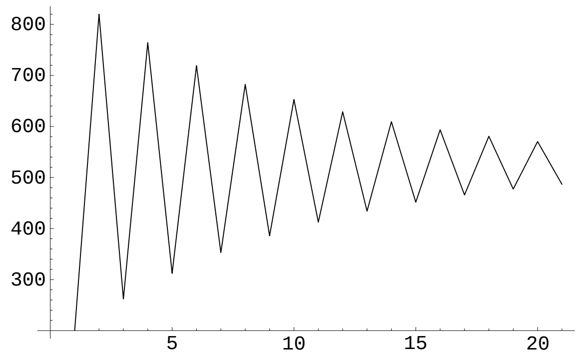

Figura 10.2: Punto de equilibrio estable.

EJEMPLO 10.2

- Vamos a calcular y dibujar $x_2, x_3, \cdots$, para el modelo $x_{k+1} = 0.80x_k + 1000$ y el valor inicial $x_0 = 500$.

  El modelo anterior podemos escribirlo como

  $$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

  donde $f(x) = 0.80x + 1000$. Esta es una buena manera de representar a nuestro modelo porque la función $f(x)$ nos describe como la población, en cada año está determinada por la población en el año anterior.

  Los dos gráficos $f(x) = 0.8x + 1000$ y $g(x) = x$ se cortan en el punto $x^* = 5000$. Este punto se llama **punto de equilibrio** ya que la población en los próximos años será la misma que la población actual.

  $$f(5000) = 0.8 \times 5000 + 1000 = 5000$$

  Podemos encontrar este valor también de manera algebraica

  $$f(x) = x \;\Rightarrow\; x = 0.8x + 1000 \;\Rightarrow\; x = 5000$$

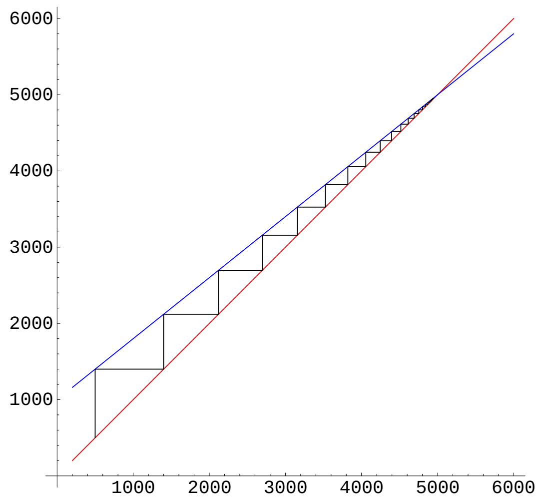

Figura 10.3: Estudio del punto de equilibrio.

La Figura 10.3 nos muestra como determinamos gráficamente el punto de equilibrio.

A continuación nos centraremos en la clasificiacación de los puntos de equilibrio o en el análisis de la estabilidad. En el análisis de la evolución de poblaciones el problema principal es:

- Evaluar la estabilidad de la población usando modelos matemáticos.
- Examinar los efectos de diferentes factores sobre la estabilidad de la población.

Hemos tenido ocasión de ver que en los sistemas dinámicos lineales discretos, el punto de equilibrio

$$x^* = \frac{b}{1-m},$$

en algunas ocasiones es un **punto de equilibrio atractivo**, (aquel que a largo plazo los términos x_k tienden al x^* cuando k tiende a ∞), y otras veces es un **punto de equilibrio repulsivo**, (aquel donde x_k tiende a mas o menos infinito). A continuación presentamos un teorema que nos permitirá determinar cuando un punto de equilibrio es atractivo o repulsivo.

TEOREMA 10.2.2 *Sea el sistema dinámico lineal discreto*

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad f(x) = mx + b$$

con $m \neq 1$. Sea $x^* = b/(1-m)$ el punto de equilibrio,

- *si $|m| < 1$ entonces x^* es atractivo, en el sentido de que para cualquier condición inicial x_0*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

- *si* $|m| > 1$, *entonces* x^* *es repelente, y al menos que* $x_0 = x^*$ *se cumple*

$$\lim_{k\to\infty} |x_k| = \infty\,.$$

Demostración. Comenzamos calculando el valor de x_k

$$\begin{array}{l}
x_2 = mx_1 + b \\
x_3 = mx_2 + b = m^2x_1 + b(m+1) \\
x_4 = mx_3 + b = m(m^2x_1 + b(1+m)) + b = m^3x_1 + b(1+m+m^2) \\
\cdots \\
x_k = m^{k-1}x_1 + b(1+m+m^2+\cdots+m^{k-2}) = m^{k-1}x_1 + b\displaystyle\sum_{j=0}^{k-2} m^j\,.
\end{array}$$

Si suponemos que $|m| < 1$ entonces al hacer que k tienda a infinito

$$\lim_{k\to\infty} m^{k-1}x_1 = 0\,.$$

Por otro lado,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k-2} m^k = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \frac{1}{1-m}\,,$$

por ser la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $|m| < 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{b}{1-m} = x^*\,.$$

Por un razonamiento similar, si $|m| > 1$ se cumple que $m^{k-1}x_1$ y $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-2} m^j$ no están acotados cuando $k \to \infty$. ■

10.3. Modelos dinámicos discretos no lineales

Para un sistema de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{10.4}$$

donde ahora la función f no es lineal, la situación es diferente a lo estudiado en la sección anterior. Lo que debemos tener en cuenta, es que pueden existir muchos puntos de equilibrio. En el caso lineal el tipo de punto de equilibrio nos lo daba el parámetro m de la recta. En el caso no lineal el carácter de cada punto está determinado por la pendiente de la curva $f(x)$ en el punto x^*, y sabemos que este valor puede determinarse por la derivada de la función f en el punto x^*.

TEOREMA 10.3.1 *Consideremos el sistema dinámico* (10.4) *siendo* x^* *un punto de equilibrio* $f(x^*) = x^*$. *Entonces*

- *si* $|f'(x^*)| < 1$ *el punto de equilibrio es atractivo, en el sentido de que si* x_0 *está suficientemente cerca de* x^* *entonces*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* .$$

Algunas veces a un equilibrio de esta características se le dice equilibrio estable, ya que si el sistema se mueve ligeramente del punto de equilibrio, al final retorna al mismo.

EJEMPLO 10.3

- Consideremos el sistema dinámico discreto no lineal de *May*

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k)\,, \quad \alpha > 0\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2\cdots .$$

1.- Encontrar los puntos de equilibrio y clasificarlos.

2.- Sea $\alpha = 2.5$ y $x_0 = 0.1$. Utilizando el diagrama de *Cowbew.* clasificar el punto de equilibrio del sistema.

3.- Repetir el proceso para $\alpha = 3.3,\, 3.55$

4.- Cuando α aumenta de 3 a 4 ¿observas algún cambio en el tipo de soluciones obtenidas?.

- Empezamos encontrando los puntos de equilibrio. En este caso la función f no lineal que nos define el modelo es

$$f(x) = \alpha x(1 - x)\,.$$

Por tanto, tendremos que resolver la ecuación $f(x) = x$, que tiene por soluciones,

$$x^* = 0, \qquad x^* = 1 - \frac{1}{\alpha}\,.$$

Para clasificar estos puntos de equilibrio, tenemos que hacer uso del Teorema 10.3.1. La derivada de la función $f(x)$ vale $f'(x) = \alpha - 2\alpha x$. Por tanto, el primero de los puntos es asintóticamente estable si

$$|f'(0)| = |\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha < 1\,.$$

En cuanto al segundo, será estable si

$$\left| f'\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right| = |2 - \alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < \alpha < 3\,.$$

- Si consideramos el modelo no lineal $f(x) = 2.5x(1 - x)$ y como semilla o valor inicial $x_0 = 0.8$, podemos encontrar su órbita haciendo uso del software `Mathematica`®.

Empezamos definiendo la función,

`f[k_][x_] := k * x * (1 - x)`

posteriormente, encontramos los puntos de equilibrio

`NSolve[p[2.5][x] == x, x]`

{{x→ 0, x→ 0.6 }} y finalmente la órbita

`NestList[p[2.5], 0.8, 25]`

{{ 0.8, 0.4, 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 }}
En consecuencia, $x^* = 0.6$ es un punto de equilibrio estable. Podemos comprobarlo si dibujamos su diagrama de *Cobweb*.

```
iters = NestList[p[2.5], 0.8, 20]
gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{iters,
iters}]], 2, 1], PlotJoined → True, DisplayFunction
→ Identity]
fg = Plot[{x, p[0.5][x]}, {x, 0, 1},
PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
DisplayFunction → Identity]
Show[fg, gi, AspectRatio ->1, DisplayFunction →
DisplayFunction]
```

Obteniéndose como respuesta

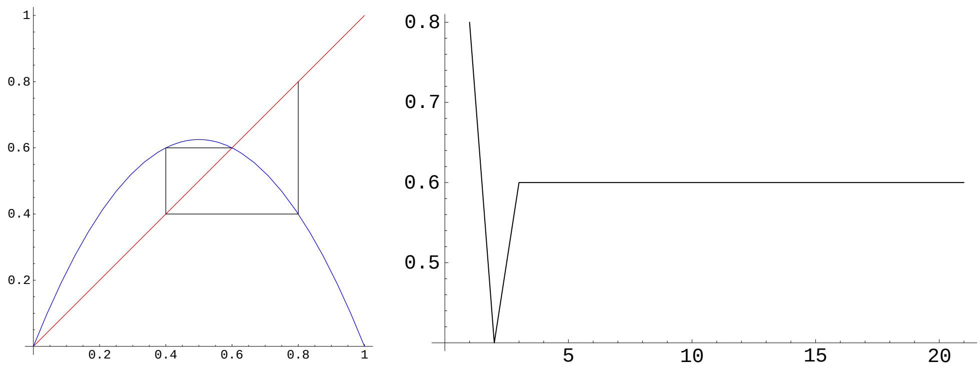

Figura 10.4: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 2.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Ahora, consideramos el diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.3\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$. Los primeros 25 elementos de su órbita son:

{ 0.8, 0.52799, 0.82241, 0.48196, 0.82392, 0.47873, 0.82350, 0.47963, 0.82363, 0.47936, 0.82359, 0.47944, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47946, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942 } .

Es decir, en este caso la población tiene un comportamiento periódico de orden dos tendiendo a los valores $x_1^* \approx 0.4794270$ y $x_2^* \approx 0.823603$.

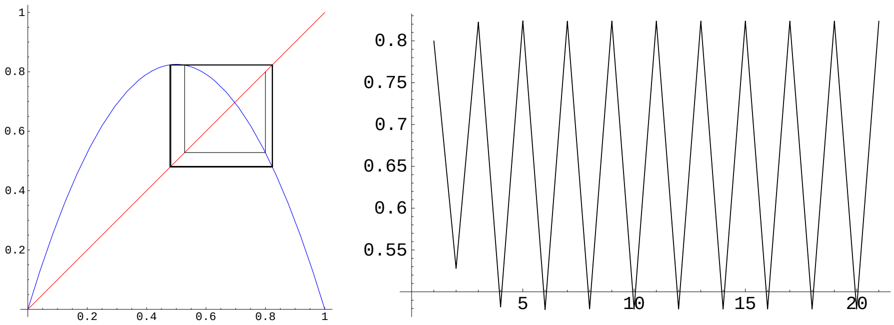

Figura10.5: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.3\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Repitiendo los cálculos para $f(x) = 3.5\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$, se obtiene la órbita:

  {{ 0.8, 0.559999, 0.8624, 0.41533, 0.84990, 0.44647, 0.86497, 0.40878, 0.84587, 0.45628, 0.86831, 0.40021, 0.84014, 0.47004, 0.87185 , 0.391, 0.83343, 0.48587, 0.87430, 0.38464, 0.82842 } } .

  La población se comporta de manera periódica de orden 4.

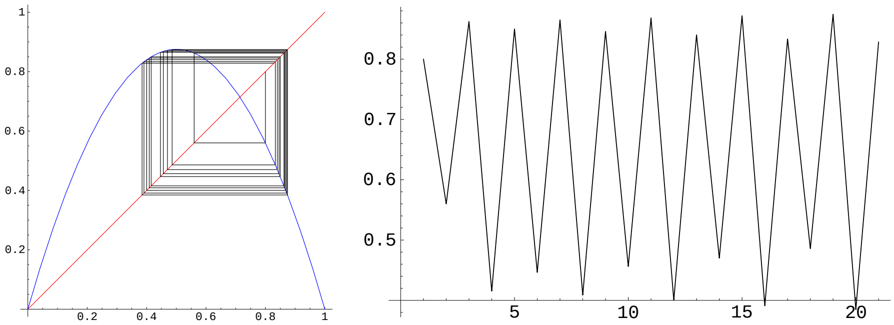

Figura 10.6: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.5\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Por último, si consideramos $f(x) = 4\,x\,81-x)$ y $x_0 = 0,8$, ahora la población se comporta caóticamente.

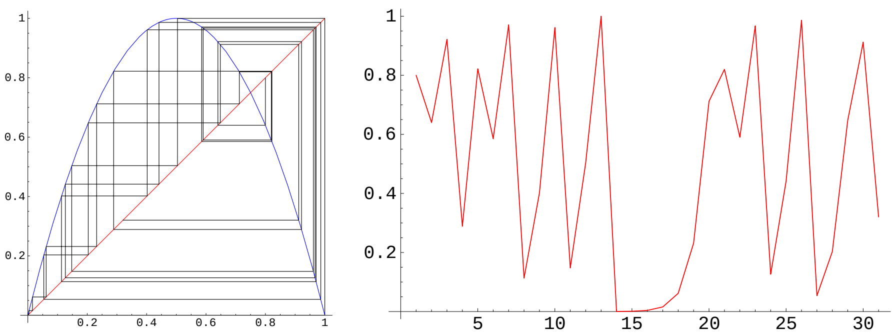

Figura 10.7: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 4\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

Tendremos ocasión de volver sobre este ejercicio cuando estudiemos los sistemas caóticos.

10.4. Puntos de equilibrio y periódicos de un sistema dinámico

En esta sección trataremos de sistematizar y formalizar los resultados obtenidos en las secciones anteriores, para estudiar los puntos de equilibrio y periódicos de un **sistema dinámico discreto unidimensional**.

Dado un sistema dinámico

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f : X \to X\,,$$

se dice que $x^* \in X$ es un punto de equilibrio del sistema si $f(x^*) = x^*$. Si x^* es un punto de equilibrio, la solución cuya condición inicial es $x_0 = x^*$ cumple $f^k(x_0) = x^*$. Esto significa que los puntos de equilibrio son estados fijos: una vez el sistema entra en ellos, permanece invariable en todos los instantes futuros.

Los puntos de equilibrio se clasifican según el comportamiento de las soluciones con condiciones iniciales cercanas a ellos, en **puntos de equilibrio atractivos, repulsivos e indiferentes**. En lo que sigue, consideraremos el siguiente sistema dinámico unidimensional

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- **Puntos de equilibrio atractivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es atractivo si $|f'(x^*)| < 1$
- **Puntos de equilibrio repulsivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es repulsivo si $|f'(x^*)| > 1$
- **Puntos de equilibrio indiferentes.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es indiferente si $|f'(x^*)| = 1$
- **Puntos cíclicos.** Se dice que x^* es un punto periódico o cíclico del sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$, si existe un n tal que $f^n(x^*) = x^*$. Un punto es periódico si su órbita se "cierraz vuelve a comenzar por su valor inicial. El mínimo entero k tal que $f^k(x^*) = x^*$, se llama **orden del punto periódico**. En tal caso la órbita

  $$\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \cdots, f^{k-1}(x^*)\}$$

  recibe el nombre de **período o ciclo de orden** k.

10.4.1. Estabilidad

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico representa un estado fijo del sistema. Ahora bien, no todos los estados de equilibrio tienen la misma naturaleza.