10.4. Puntos de equilibrio y periódicos de un sistema dinámico

En esta sección trataremos de sistematizar y formalizar los resultados obtenidos en las secciones anteriores, para estudiar los puntos de equilibrio y periódicos de un **sistema dinámico discreto unidimensional**.

Dado un sistema dinámico

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f : X \to X\,,$$

se dice que $x^* \in X$ es un punto de equilibrio del sistema si $f(x^*) = x^*$. Si x^* es un punto de equilibrio, la solución cuya condición inicial es $x_0 = x^*$ cumple $f^k(x_0) = x^*$. Esto significa que los puntos de equilibrio son estados fijos: una vez el sistema entra en ellos, permanece invariable en todos los instantes futuros.

Los puntos de equilibrio se clasifican según el comportamiento de las soluciones con condiciones iniciales cercanas a ellos, en **puntos de equilibrio atractivos, repulsivos e indiferentes**. En lo que sigue, consideraremos el siguiente sistema dinámico unidimensional

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- **Puntos de equilibrio atractivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es atractivo si $|f'(x^*)| < 1$
- **Puntos de equilibrio repulsivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es repulsivo si $|f'(x^*)| > 1$
- **Puntos de equilibrio indiferentes.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es indiferente si $|f'(x^*)| = 1$
- **Puntos cíclicos.** Se dice que x^* es un punto periódico o cíclico del sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$, si existe un n tal que $f^n(x^*) = x^*$. Un punto es periódico si su órbita se "cierraz vuelve a comenzar por su valor inicial. El mínimo entero k tal que $f^k(x^*) = x^*$, se llama **orden del punto periódico**. En tal caso la órbita

  $$\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \cdots, f^{k-1}(x^*)\}$$

  recibe el nombre de **período o ciclo de orden** k.

10.4.1. Estabilidad

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico representa un estado fijo del sistema. Ahora bien, no todos los estados de equilibrio tienen la misma naturaleza.

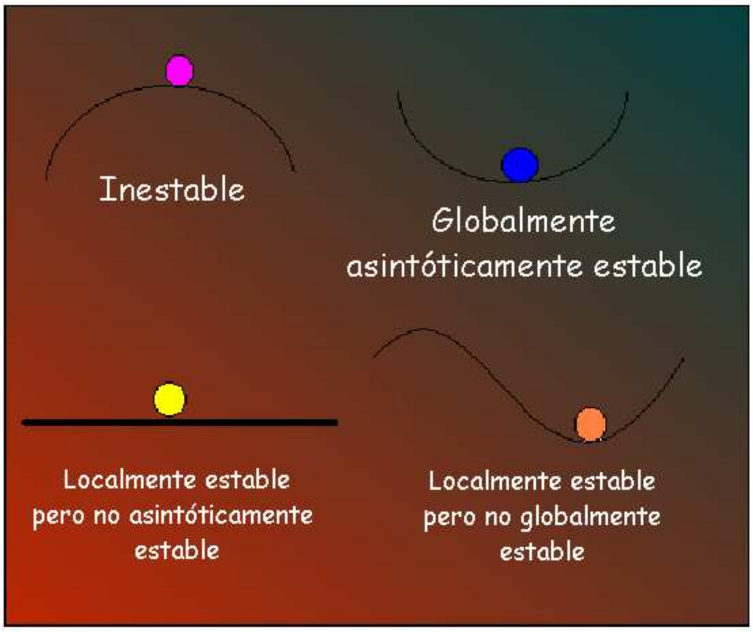

Figura 10.8: Tipos de estabilidad.

Si se deja rodar una bola en el cuenco de una copa, terminará deteniéndose en el centro de la misma. Si se desplaza la bola ligeramente de su posición de equilibrio, retornará a ella. Este es un equilibrio robusto frente a perturbaciones, conocido como **equilibrio asintóticamente estable**. Los puntos de equilibrio atractivos presentan esta forma de equilibrio.

La forma de equilibrio opuesta es el **equilibrio inestable**, representado por una pelota en el borde del tejado: basta una ligera perturbación para romper el equilibrio. Los puntos de equilibrio repulsivos presentan este tipo de equilibrio. Finalmente existe una forma intermedia de equilibrio, técnicamente conocido como **equilibrio estable**. Este se halla representado por un péndulo sin rozamiento en posición de reposo. Si se somete al péndulo a una pequeña perturbación, éste permanecerá oscilando indefinidamente en torno a la posición de equilibrio, sin alejarse mucho de ella, pero sin retornar a ella de forma definitiva.

EJEMPLO 10.4

- Comprobemos que el origen es un punto de equilibrio estable para el sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$ si $f(x) = -x$.

  Es evidente que $x^* = 0$ es solución de la ecuación $f(x) = x$, por lo tanto, es un punto de equilibrio. Para comprobar que su equilibrio es estable, perturbamos este valor tomando $x_0 = 0.5$. La Figura 10.9 muestra que la órbita sólo toma los valores -0.5 y 0.5.

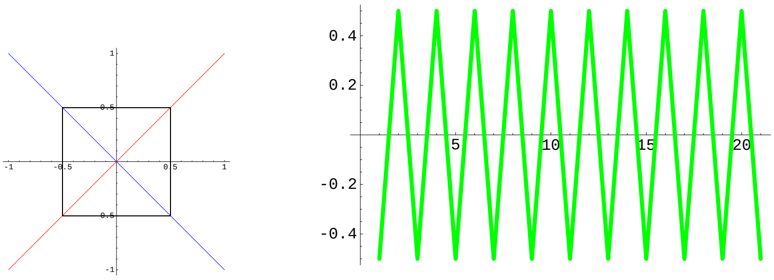

Figura 10.9: Diagrama de *Cobweb*.

10.5. Sistemas caóticos

En el Ejemplo 10.3 hemos tenido ocasión de comprobar que sistemas o modelos muy simples, pueden pasar de tener un comportamiento determinístico a un comportamiento caótico, modificando ligeramente los valores de un parámetro. En esta sección formalizaremos este concepto.

La teoría del caos fue introducida en ecología por *May* (974, 1976) y *Oster* (1976) en el contexto de funciones reales de variable real está siendo estudiada con intensidad en los últimos años y aparece en casi todos los modelos discretos no lineales.

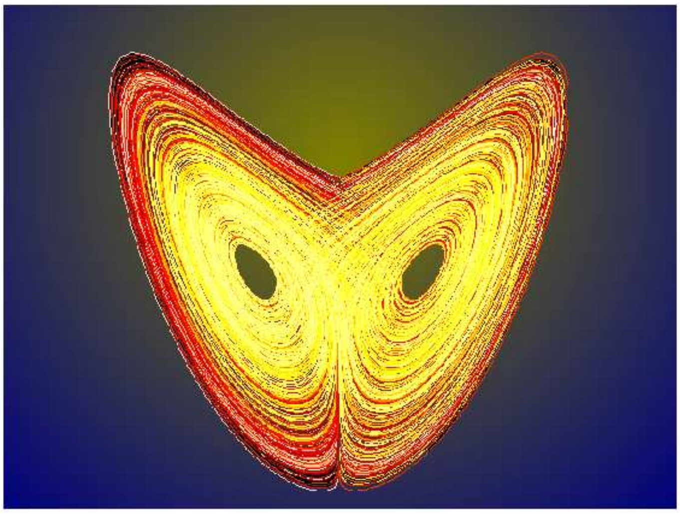

Figura 10.10: Mariposa o atractor de Lorentz.

Lo primero que nos llama la atención es el hecho de que vivimos inmersos en el caos. De manera usual, **llamamos caos a todo aquello que no somos capaces de sistematizar**.

El primer investigador del caos fue un meteorólogo llamado *Edward Lorentz*. En 1960 utilizaba un modelo matemático para predecir el tiempo, que consistía en un