Tema 9

ECUACIONES Y SISTEMAS EN DIFERENCIAS

9.1. Introducción

En ocasiones, al construir un modelo matemático interesa elegir una variable que tome valores discretos. Así ocurre, por ejemplo, con el tiempo, ya que es común realizar mediciones regulares a la hora de controlar un experimento. Estos datos constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente. Para este tipo de modelos determinísticos discretos, las herramientas matemáticas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias. El presente tema es una breve introducción a su estudio. Comenzaremos con los conceptos y definiciones básicas y nos centraremos en el estudio de las ecuaciones en diferencias lineales de primer y segundo orden con coeficientes constantes, así como en los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes.

A lo largo del capítulo llamaremos t a la variable independiente, y supondremos que sólo toma los valores enteros $t = 0, 1, 2, \cdots$. Generalmente, t representa el número de generaciones (años, trimestres, meses, días, $\cdots$) que han transcurrido desde un momento inicial $t = 0$. Del mismo modo, $\{y_0, y_1, y_2, \cdots\}$ es una sucesión, donde y_t corresponde a un valor concreto de t.

DEFINICIÓN 9.1.1 *Llamamos ecuación en diferencias a una expresión del tipo*

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, y_{t+n-2}, \cdots, y_{t+1}, y_t, t) = 0\,.$$

Una solución de la misma, es toda sucesión y que la cumpla.

El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de **solución general**. Esta solución general presenta cierto número de parámetros, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes **soluciones particulares**.

DEFINICIÓN 9.1.2 *Llamamos orden de la ecuación, a la diferencia entre el mayor y el menor de los índices que afectan a y.*

La expresión $-2y_{t+3}+3y_t = t+1$, es una ecuación en diferencias de orden $t+3-t = 3$, o de tercer orden.

La ecuación en diferencias $y_{t+1} - y_t = 2$, es de primer orden y tiene por solución general a todas las progresiones aritméticas de razón 2, es decir

$$y_t = y(t) = 2t + C,$$

siendo C una constante cualquiera. Una solución particular, es la progresión aritmética

$$\{1,\, 3,\, 5,\, 7,\, \cdots, 2t+1,\, \cdots\}\,.$$

EJEMPLO 9.1

- Vamos a construir el modelo que corresponde a la siguiente situación. Supongamos que una población de insectos crece el triple, en cada período de tiempo que transcurre entre dos medidas, de lo que creció en el período inmediatamente anterior.

  Si llamamos y_t al número de individuos en el instante t; del enunciado del ejemplo se deduce,

  $$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t)\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \cdots$$

  simplificando obtenemos,

  $$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0\,, \tag{9.1}$$

  que es una ecuación en diferencias de segundo orden. Si por ejemplo, conocemos el número inicial de insectos, $y_0 = y(0) = 100$, podemos sustituir y obtendríamos

  $$y_2 - 4y_1 + 300 = 0\,,$$

  lo cual nos indica que debemos saber otra medida, por ejemplo y_1, para poder encontrar el resto de los valores. En las próximas secciones aprenderemos a resolver este tipo de ecuaciones, y volveremos sobre (9.1).

9.2. Ecuaciones lineales de primer orden

DEFINICIÓN 9.2.1 *Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como*

$$p_1(t)y_{t+1} + p_2(t)y_t = q(t)\,, \tag{9.2}$$

donde $p_i(t)$, $i = 1, 2$ *y* $q(t)$ *son funciones en la variable discreta* t. *Si la sucesión* $q(t)$ *es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre de* **ecuación homogénea** *asociada a* (9.2). *Cuando las funciones* $p_1(t)$ *y* $p_2(t)$ *son constantes, se dice que la ecuación lineal* (9.2) *es de* **coeficientes constantes**.

Este tipo de ecuaciones son muy interesantes en el estudio de dinámica de poblaciones. Suelen aparecer escritas como

$$y_{t+1} = p(t)y_t + q(t)\,,$$

donde $p(t)y_t$ representa el crecimiento de la población en el tiempo t y $q(t)$ el número de individuos que en el tiempo t se incorporan a la población como consecuencia de la inmigración.

EJEMPLO 9.2

- Supongamos que una determinada población de insectos con 100 individuos, duplica su número en cada generación, y que además, 10 nuevos individuos se incorporan en cada generación procedente de otro lugar. Vamos a construir una ecuación en diferencias que modele a esta situación y posteriormente la resolveremos.

  Del enunciado se deduce,

  $$y_t = 2y_{t-1} + 10, \quad y_0 = y(0) = 100\,,$$

  lo que nos permite escribir,

  $$\begin{aligned}
  y_1 &= 2 \times 100 + 10\\
  y_2 &= 2(2 \times 100 + 10) + 10 = 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 10 + 10\\
  y_3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 2 \times 10 + 2 \times 10 + 10\\
  &\vdots\\
  y_t &= \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t)} \times 100 + \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t-1)} \times 10 + \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t-2)} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10\\
  &= 2^t \times 100 + 2^{t-1} \times 10 + 2^{t-2} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10\\
  &= 2^t \times 100 + \left(2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2^1 + 2^0\right) \times 10\\
  &= 2^t \times 100 + (2^t - 1) \times 10 = 110 \times 2^t - 10\,,
  \end{aligned}$$

  donde en el último de los pasos hemos utilizado la fórmula que nos da la suma de t términos de una progresión geométrica de razón 2. La solución es, por tanto,

  $$\boxed{y_t = 110 \times 2^t - 10\,.}$$

9.3. Ecuaciones lineales de segundo orden

DEFINICIÓN 9.3.1 *Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden es aquella que puede expresarse como*

$$p_1(t)y_{t+2} + p_2(t)y_{t+1} + p_3(t)y_t = q(t)\,, \tag{9.3}$$

donde $p_i(t)$, $i = 1,\,2,\,3$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t.

Si la función $q(t) = 0$, entonces (9.3) es su ecuación lineal en diferencias homogénea de segundo orden asociada. Además, si todas las funciones $p_i(t)$ son constantes, entonces (9.3) es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, y será en la que nos centraremos.

Veamos en primer lugar un teorema de existencia y unicidad de solución para una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n.

TEOREMA 9.3.2 *Dada la siguiente ecuación lineal en diferencias homogénea de orden n*

$$y_{t+n} + p_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + p_n(t)y_t = 0\,,$$

y dados n números reales $k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}$, existe una única solución, cumpliendo

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1}\,.$$

Demostración. Comenzamos definiendo la siguiente sucesión:

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1}\,,$$

y para los valores de t mayores que $n-1$, procedemos de la siguiente manera

$$y_n = -p_1(0)y_{n-1} - \cdots - p_n(0)y_0 = -p_1(0)k_{n-1} - \cdots - p_n(0)k_0\,,$$

$$y_{n+1} = -p_1(1)y_n - \cdots - p_n(1)k_1\,.$$

De esta manera, y_t queda definida por la ley de recurrencia anterior. Puede comprobarse que y_t es solución de la ecuación pedida y cumple las condiciones iniciales. Además, es la única solución, ya que si w_t es otra solución que cumple

$$w_0 = k_0, \quad w_1 = k_1, \quad \cdots \quad w_{n-1} = k_{n-1}\,,$$

la ley de recurrencia que hemos encontrado anteriormente, determina el resto de los valores de w_t. ■

Consideremos la ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

$$a\,y_{t+2} + b\,y_{t+1} + c\,y_t = 0\,, \tag{9.4}$$

cualquier combinación lineal de soluciones de (9.4) sigue siendo otra solución.

TEOREMA 9.3.3 *Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de* (9.4)*, entonces $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, con k_1 y k_2 constantes, sigue siendo solución de* (9.4)*.*

Demostración. Es inmediata, basta llevar $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$ en (9.4). ■

Del mismo modo, también es evidente la demostración del siguiente resultado.

TEOREMA 9.3.4 *Si y_t^c es una solución de*

$$a\, y_{t+2} + b\, y_{t+1} + c\, y_t = q(t)\,, \tag{9.5}$$

e y_t^h es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_t = y_t^h + y_t^c$ es solución de la ecuación completa (9.5)*.*

A continuación veremos las condiciones bajo las cuales la combinación lineal de dos soluciones particulares de la ecuación homogénea dan lugar a su solución general.

TEOREMA 9.3.5 *Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de* (9.4)*, entonces*

$$y = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

con k_1 y k_2 constantes, es la solución general de (9.4) *si*

$$\begin{vmatrix} y_0^1 & y_0^2 \\ y_1^1 & y_1^2 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 y_0^1 + \alpha_2 y_0^2 = \beta_1 \\ \alpha_1 y_1^1 + \alpha_2 y_1^2 = \beta_2\,, \end{array} \right.$$

cualesquiera que sean los valores de β_1 y β_2, por hipótesis del teorema, el sistema es compatible determinado. Pero por el Teorema 9.3.2 existe una única solución de la ecuación homogénea que puede ser escrita como $y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, pues basta tomar $\beta_1 = y_0$ y $\beta_2 = y_1$, y calcular α_1 y α_2. Para finalizar asignamos los siguientes valores, $k_1 = \alpha_1$ y $k_2 = \alpha_2$. ■

A dos soluciones y_t^1 y y_t^2 cumpliendo las hipótesis del Teorema 9.3.2 le daremos el nombre de **sistema fundamental de soluciones**. Siguiendo un razonamiento similar al realizado en el Teorema 9.3.2, podemos demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 9.3.6 *Si y_t^p es una solución particular de*

$$a\, y_{t+2} + b\, y_{t+1} + c\, y_t = q(t)\,, \tag{9.6}$$

e y_t^1, y_t^2 forman un sistema fundamental de soluciones, entonces

$$y_t^p + k_1\, y_t^1 + k_2\, y_t^2\,,$$

es la solución general de (9.6)*.*

9.3.1. Resolución de la ecuación homogénea

El Teorema 9.3.6 nos dice que para resolver una ecuación en diferencias lineal de segundo orden, tenemos que empezar encontrando la solución general de su ecuación homogénea asociada, y para ello hemos de localizar dos soluciones particulares que den lugar a un sistema fundamental. Supongamos por tanto, la ecuación homogénea

$$a\, y_{t+2} + b\, y_{t+1} + c\, y_t = 0\,,$$

que admitirá la solución $y_t = \lambda^t$ si

$$a\, \lambda^{t+2} + b\, \lambda^{t+1} + c\, \lambda^t = \lambda^t \big(a\, \lambda^2 + b\, \lambda + c\big) = 0\,,$$

es decir,

$$\boxed{a\, \lambda^2 + b\, \lambda + c = 0.} \tag{9.7}$$

A esta ecuación se la conoce con el nombre de **ecuación característica** de la ecuación en diferencias.

A continuación, presentamos un procedimiento para resolver la ecuación en diferencias homogénea, basado en el estudio de las raíces de (9.7).

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces reales diferentes** λ_1, λ_2, entonces

  $$\boxed{y_t^1 = \lambda_1^t\,, \qquad y_t^2 = \lambda_2^t\,,}$$

  forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación (9.7) tiene **una raíz real doble** λ, entonces

  $$\boxed{y_t^1 = \lambda^t\,, \qquad y_t^2 = t\, \lambda^t\,,}$$

  forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces complejas conjugadas**

  $$\lambda_1 = \alpha + i\,\beta\,, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\,\beta\,,$$

  entonces

  $$y_t^1 = \lambda_1^t\,, \qquad y_t^2 = \lambda_2^t\,,$$

  forman un sistema fundamental de soluciones. En este último caso, podemos escribir la solución general de la ecuación homogénea de la siguiente manera,

  $$y_t = k_1\, \lambda_1^t + k_2\, \lambda_2^t\,,$$

  y expresando los números complejos en su forma módulo argumental, teniendo en cuenta que poseen el mismo módulo y argumentos opuestos,

  $$y_t = k_1 \rho^t (\cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta) + k_2 \rho^t (\cos t\theta - i \operatorname{sen} t\theta)\,.$$

Al formar $\lambda_1^t = \rho^t(\cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta)$ y $\lambda_2^t = \rho^t(\cos t\theta - i \operatorname{sen} t\theta)$ un sistema fundamental de soluciones, también lo será cualquier combinación lineal de ellas, en particular

$$\tfrac{1}{2}\left(\lambda_1^t + \lambda_2^t\right) = \rho^t \cos t\theta$$

$$\tfrac{1}{2i}\left(\lambda_1^t - \lambda_2^t\right) = \rho^t \operatorname{sen} t\theta\,,$$

la solución general será entonces

$$\boxed{y_t = k_1\rho^t \cos t\theta + k_2\rho^t \operatorname{sen} t\theta\,.}$$

EJEMPLO 9.3

- Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias:

  1.- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$

  2.- $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2y_t = 0$

  3.- $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 0$

  1.- La ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, tiene como raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. En consecuencia, 2^t y 1, forman un sistema fundamental de soluciones, siendo la solución general

  $$\boxed{y_t = k_1 + k_2\, 2^t.}$$

  2.- En el segundo de los casos, las raíces de la ecuación característica $\lambda^2+2\lambda+2 = 0$ son $\lambda_1 = -1+i$ y $\lambda_2 = -1-i$. Los módulos de estos números complejos son $\sqrt{2}$ y el argumento $3\pi/4$, por consiguiente, la solución general es

  $$\boxed{y_t = k_1\left(\sqrt{2}\right)^t \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + k_2\left(\sqrt{2}\right)^t \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}t\right), \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

  3.- La ecuación $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene a $\lambda = -1$ como raíz doble. La solución general de la ecuación propuesta es

  $$\boxed{y_t = k_1(-1)^t + k_2\, t\,(-1)^t, \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

9.3.2. Resolución de la ecuación completa

Para encontrar la solución general de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$a\, y_{t+2} + b\, y_{t+1} + c\, y_t = q(t)\,, \quad a,\, b,\, c\, \in \mathbb{R}\,, \tag{9.8}$$

podemos hacer uso de dos métodos diferentes.

Método de variación de parámetros.

Es también conocido como método de **coeficientes indeterminados**. Se empieza encontrando la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2 \,, \quad k_1,\, k_2 \,\in \mathbb{R}\,,$$

y se supone que las constantes k_1 y k_2 dependen de t, es decir

$$y_t = k_1(t) y_t^1 + k_2(t) y_t^2 \,. \tag{9.9}$$

De esta expresión deducimos inmediatamente

$$y_{t+1} = k_1(t+1) y_{t+1}^1 + k_2(t+1) y_{t+1}^2 \,,$$

que sumando y restando $k_1(t)\, y_{t+1}^1 + k_2(t)\, y_{t+1}^2$, puede escribirse

$$\begin{aligned} y_{t+1} \;&=\; k_1(t)\, y_{t+1}^1 + k_2(t)\, y_{t+1}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+1}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+1}^2 \,. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior hacemos

$$[k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+1}^1 + [k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+1}^2 = 0 \,, \tag{9.10}$$

y nos queda la ecuación

$$y_{t+1} = k_1(t)\, y_{t+1}^1 + k_2(t)\, y_{t+1}^2 \,, \tag{9.11}$$

que permite ser tratada utilizando el mismo procedimiento anterior

$$\begin{aligned} y_{t+2} \;&=\; k_1(t)\, y_{t+2}^1 + k_2(t)\, y_{t+2}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+2}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+2}^2 \,. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Llevando (9.9), (9.11) y (9.12) en (9.8),

$$\begin{aligned} &a k_1(t)\, y_{t+2}^1 + a k_2(t)\, y_{t+2}^2 + a\,[k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+2}^1 \\ &+ a\,[k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+2}^2 + b k_1(t)\, y_{t+1}^1 + b k_2(t)\, y_{t+1}^2 \\ &+ c k_1(t) y_t^1 + c k_2(t) y_t^2 = q(t) \,. \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} &k_1(t)\, \left[a y_{t+2}^1 + b y_{t+1}^1 + c y_t^1\right] + k_2(t)\, \left[a y_{t+2}^2 + b y_{t+1}^2 + c y_t^2\right] \\ &+ a\,[k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+2}^1 + a\,[k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+2}^2 = q(t) \,. \end{aligned}$$

Al ser y_t^1 y y_t^2 solución de la ecuación homogénea, la expresión anterior adopta la forma

$$a\,[k_1(t+1) - k_1(t)]\, y^1_{t+2} + a\,[k_2(t+1) - k_2(t)]\, y^2_{t+2} = q(t)\,. \qquad (9.13)$$

Las ecuaciones (9.10) y (9.13) dan lugar a un sistema lineal, siendo $k_1(t+1)-k_1(t)$ y $k_2(t+1)-k_2(t)$ las incógnitas. Al ser y_t^1 y y_t^2 un sistema fundamental de soluciones, ocurre que

$$\begin{vmatrix} y^1_{t+1} & y^2_{t+1} \\ a\,y^1_{t+2} & a\,y^2_{t+2} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Usando la Regla de Cramer, podemos resolver el sistema anterior

$$\begin{aligned} k_1(t+1) - k_1(t) &= \frac{-q(t)}{a y^1_{t+1}(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ k_2(t+1) - k_2(t) &= \frac{q(t)}{a y^2_{t+1}(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{aligned} \qquad (9.14)$$

y nos permite encontrar los valores de $k_1(t)$ y $k_2(t)$. ■

EJEMPLO 9.4

- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, partiendo de 100 individuos, se llega el primer año a 110 y que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Deseamos determinar la ecuación general de la evolución de efectivos.

  El problema a estudiar es el siguiente:

  $$y_{t+2} - y_{t+1} = 2(y_{t+1} - y_t) + 10, \quad y_0 = 100, \quad y_1 = 110\,.$$

  Tenemos que resolver la ecuación en diferencias lineal de segundo grado

  $$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 10\,,$$

  con las condiciones iniciales $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$. Para ello, empezamos encontrando las raíces de la ecuación característica

  $$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2\,.$$

  Es decir, la solución general de la ecuación homogénea es

  $$y_t^h = k_1 + k_2\, 2^t\,.$$

  Para poder resolver la ecuación completa utilizamos el método de variación de las constantes. Teniendo en cuenta (9.14), deducimos

  $$\left\{ \begin{aligned} k_1(t+1) - k_1(t) &= -10 \\ k_2(t+1) - k_2(t) &= 10/2^{t+1} \end{aligned} \right.$$

De la primera ley de recurrencia obtenemos

$$\begin{array}{rll} k_1(1) = & k_1(0) - 10 & \\ k_1(2) = & k_1(1) - 10 & = k_1(0) - 2 \times 10 \\ \vdots & \vdots & \\ k_1(t) = & k_1(0) - 10t & \end{array}$$

De manera similar, de la segunda de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} k_2(1) & = & k_2(0) + 10/2 \\ k_2(2) & = & k_2(1) + 10/2^2 = k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 \\ \vdots & & \vdots \\ k_2(t) & = & k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 + 10/2^3 + \cdots + 10/2^t = \\ & = & k_2(0) + 10(1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \cdots + 1/2^t \\ & = & k_2(0) + 10(1 - 1/2^t)\,. \end{array}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación completa es

$$\boxed{y_t = k_1(0) - 10 \times t + \left[k_2(0) + 10(1 - 1/2^t)\right]\, 2^t\,.}$$

Las constantes $k_1(0)$ y $k_2(0)$ pueden encontrarse haciendo uso de las condiciones iniciales $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$ en y_t,

$$100 = k_1(0) + k_2(0), \quad 110 = k_1(0) - 10 + (k_2(0) + 5)\,2\,,$$

que dan como solución $k_1(0) = 90$, $k_2(0) = 10$. La ecuación de los efectivos de la población es:

$$\boxed{y_t = 80 - 10\,t + 10 \times 2^{t+1}, \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots}$$

Segundo método.

Para encontrar la solución general de una ecuación lineal completa de segundo orden nos fijaremos en el término independiente $q(t)$, y según sea, procederemos de una manera u otra. Los casos más usuales que suelen presentarse son:

- Si $q(t) = \alpha^t$, entonces para encontrar la solución de la ecuación completa probamos con la solución particular $\beta\alpha^t$ (excepto si α es raíz de la ecuación característica).

- Si $q(t)$ es un polinomio de grado n, entonces ensayamos con un polinomio del mismo grado. Si el 1 es raíz de la ecuación característica, tomaremos un polinomio de grado $n+1$, si además tiene grado de multiplicidad γ, probaremos con un polinomio de grado $n + \gamma$.

- Si $q(t)$ es seno o coseno de αt, entonces tomaremos $\beta \operatorname{sen} \alpha t + \gamma \cos \alpha t$ y determinaremos los valores de las constantes β y γ.

EJEMPLO 9.5

- Hallar la solución general de las ecuaciones en diferencias,

1.- $2y_{t+2} - y_t = 2^t$

2.- $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3t^2$

3.- $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t + 1.$

1.- Empezamos resolviendo la ecuación característica

$$2\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

que nos permite escribir la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t^h = k_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t + k_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t .$$

Ahora, para poder encontrar la solución de la ecuación completa, ensayamos con la solución particular $y_t^p = \beta 2^t$. Sustituyendo en la ecuación inicial

$$2\beta 2^{t+2} - \beta 2^t = 2^t \quad \Rightarrow \quad 2\beta 2^2 - \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1/7\,.$$

La solución general buscada es

$$\boxed{y_t = k_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t + k_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t + \frac{1}{7}\,2^t\,.}$$

2.- Para el segundo de los casos, es inmediato comprobar que $\lambda = 2$ es una raíz doble de la ecuación característica. En consecuencia, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_t^h = k_1\,2^t + k_2\,t\,2^t\,.$$

Al ser el término independiente un polinomio de segundo grado y el 1 no es raíz del polinomio característico, probamos con una solución particular del tipo

$$y_t^p = at^2 + bt + c\,,$$

llevando este valor en la ecuación en diferencias propuesta, e identificando coeficientes, se obtiene $a = 3$, $b = 12$ y $c = 24$.

La solución buscada es

$$\boxed{y_t = k_1\,2^t + k_2\,t\,2^t\, + 3t^2 + 12t + 24\,.}$$

3.- Al coincidir la ecuación homogénea con la del caso anterior, lo único que tenemos que hacer es encontrar una solución particular. Para ello, buscamos una solución particular de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t\,,$$

y otra de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 1\,.$$

Para la primera de ellas, al ser $\lambda = 2$ una raíz doble, ensayamos con la solución $y_t^1 = kt^2\,2^t$.

$$k(t+2)^2\,2^{t+2} - 4k(t+1)^2\,2^{t+1} + 4kt^2\,2^t = 2^t\,,$$

que una vez resuelto da $k = 1/8$.

Para la segunda de las ecuaciones, el término independiente es una constante (un polinomio de grado cero), y probamos como solución particular con otra constante, $y_t^2 = k$.

$$k - 4k + 4k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1\,.$$

La solución de la ecuación propuesta es

$$\boxed{y_t = k_1\,2^t + k_2\,t\,2^t + \tfrac{1}{8}\,t^2\,2^t + 1\,.}$$

9.4. Sistemas de ecuaciones en diferencias

Hemos visto en las secciones anteriores que cuando se analizan fenómenos biológicos dinámicos discretos, aparecen las ecuaciones en diferencias. Del mismo modo, cuando en estos fenómenos el número de variables es mayor que uno, entonces nos aparecerán los sistemas de ecuaciones en diferencias.

Como ya hemos tenido ocasión de comentar, el estudio que estamos realizando es una breve introducción a las ecuaciones y a los sistemas en diferencias. Por este motivo, solo abordaremos aquellos sistemas de ecuaciones en diferencias lineales y de primer orden. Además, este tipo de sistemas son los que con más frecuencia se presentan en las aplicaciones biológicas.

DEFINICIÓN 9.4.1 *Un sistema en diferencias lineal con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \\ \vdots \\ y_{t+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

De entre este tipo de sistemas, el caso más elemental (aunque para casos más generales, el procedimiento a seguir es similar) consiste en dos ecuaciones y dos variables

$$\left\{\begin{array}{l} y^1_{t+1} = a_{11}y^1_t + a_{12}y^2_t + f_1(t) \\ y^2_{t+1} = a_{21}y^1_t + a_{22}y^2_t + f_2(t) \end{array}\right.$$

La clave para resolver este tipo de sistemas, es intentar expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. En efecto, de la primera de las ecuaciones

$$y^1_{t+2} = a_{11}y^1_{t+1} + a_{12}y^2_{t+1} + f_1(t+1)\,, \tag{9.15}$$

sustituimos el valor de la segunda de las ecuaciones del sistema en (9.15)

$$y^1_{t+2} = a_{11}y^1_{t+1} + a_{12}\left(a_{21}y^1_t + a_{22}y^2_t + f_2(t)\right) + f_1(t+1)\,,$$

en la que sólo aparece un término $a_{12}\,a_{22}\,y^2_t$, en el que no intervenga la función y^1_t. Despejando de la primera de las ecuaciones del sistema

$$a_{12}y^2_t = y^1_{t+1} - a_{11}y^1_t - f_1(t)\,,$$

sustituyendo

$$y^1_{t+2} = a_{11}y^1_{t+1} + a_{12}a_{21}y^1_t + a_{22}(y^1_{t+1} - a_{11}y^1_t - f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1)\,,$$

y sacando factor común, se obtiene finalmente,

$$y^1_{t+2} = (a_{11}+a_{22})y^1_{t+1} + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y^1_t - a_{22}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1)\,,$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden.

EJEMPLO 9.6

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ el número de individuos de dos poblaciones de animales en el mes t, que conviven en un ecosistema en el que realizamos un control cada mes. Supongamos que inicialmente tenemos $x_0 = 150$ e $y_0 = 325$, y que el desarrollo de la convivencia está gobernado por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\left\{\begin{array}{l} x_{t+1} = 3x_t - y_t + 1 \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t + 3 \end{array}\right.$$

- Para encontrar el valor de x_t e y_t procedemos de la manera siguiente: De la primera de las ecuaciones

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - y_{t+1} + 1\,,$$

sustituimos la segunda de las ecuaciones en la expresión anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - (-x_t + 2y_t + 3) + 1 = 3x_{t+1} + x_t - 2y_t - 2\,,$$

que sigue dependiendo de y_t, pero podemos despejarlo de la primera de las ecuaciones y sustituir este valor en la ecuación anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} + x_t - 2(-x_{t+1} + 3x_t + 1) - 2 = 5x_{t+1} - 5x_t - 4\,,$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que puede ser escrita

$$\boxed{x_{t+2} - 5x_{t+1} + 5x_t = -4\,.} \tag{9.16}$$

Es fácil ver que las raíces de la ecuación característica de su ecuación homogénea son:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\,,$$

dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea

$$x_t = k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t .$$

Para encontrar una solución particular de la solución completa, al ser el término independiente una constante, ensayamos con $x_t = a$. Sustituyendo en (9.16)

$$a - 5a + 5a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = -4\,,$$

la solución general de la ecuación completa será

$$\boxed{x_t = k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 4\,.}$$

- Ahora, tendremos que sustituir en la primera de las ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned}
y_t &= -x_{t+1} + 3x_t + 1 \\
&= -k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} - k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} + 4 + 3k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t \\
&\quad +3k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 12 + 1\,. \\
y_t &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 7\,.
\end{aligned}$$

- Para encontrar los valores de k_1 y k_2, imponemos las condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} 150 = k_1 + k_2 - 4 \\ 325 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) k_1 + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) k_2 - 7\,, \end{array}\right.$$

sistema de ecuaciones lineales que tiene por solución $k_1 = 77 - 45\sqrt{5}$ y $k_2 = 77 + 5145\sqrt{5}$. En consecuencia, la solución particular para estas condiciones iniciales es:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = (77 - 45\sqrt{5})\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + (77 - 51\sqrt{5})\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 4 \\[2em] y_t = (151 - 61\sqrt{5})\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + (166 - 64\sqrt{5})\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 7 \end{array}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 8

1.- **Sea la ecuación en diferencias:**

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t)\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3\cdots \tag{9.17}$$

siendo y_t el número de individuos de una población en el año t.

- **Interpretar demográficamente (9.17).**
- **Comprobar que $y_t = 2 + 5(3^t)$ es una solución particular de (9.17).**
- **Encontrar la población al cabo de 4 años, sabiendo que $y_0 = 2$, $y_1 = 4$.**

2.- **En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Plantear y resolver la ecuación en diferencias que modeliza la situación planteada.**

3.- **Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma,**

$$y_{t+2} - y_{t+1} = \frac{1}{5}\,(y_{t+1} - y_t) + \left(\frac{1}{5}\right)^t\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots\,,$$

probar que la población se estabiliza a largo plazo.

4.- **Supongamos que si no intervienen factores externos, el incremento del número de conejos en un mes es la tres cuartas partes del incremento del mes anterior. Inicialmente el número de conejos es de 10 y al finalizar el primer mes es de 30, además cada mes se incorporan 25 conejos a la población. Determinar la población de conejos al finalizar el segundo año ¿Cuál será su comportamiento a largo plazo?**

5.- **Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:**

- **Sea la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$, donde y_t representa a la cantidad de individuos en el año t. Si el número inicial de individuos es 2 y al cabo de un año es 5, ¿cuál será el valor de la población al cabo de 10 años?**
- **Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias**

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 8$$

6.- **Estamos interesados en un determinado tipo de aves que viven en una laguna. La dinámica de la población está gobernada por la siguiente ecuación en diferencias,**

$$6x_{t+2} + x_{t+1} = x_t + \left(\frac{1}{5}\right)^t , \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{9.18}$$

siendo $x_0 = 2$ **y** $x_1 = 5$**.**

- **Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias (9.18)**
- **¿Aumentará esta población a largo plazo?**

7.- **La evolución de dos especies que comparten un mismo territorio viene dada por el sistema de ecuaciones en diferencias,**

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t \\ y_{t+1} = x_t - 2y_t \end{array} \right.$$

donde $x_t\,, y_t$ **representan al número de animales de la primera y segunda especie en el año** t **¿Cuál es el comportamiento a largo plazo de estas poblaciones?**