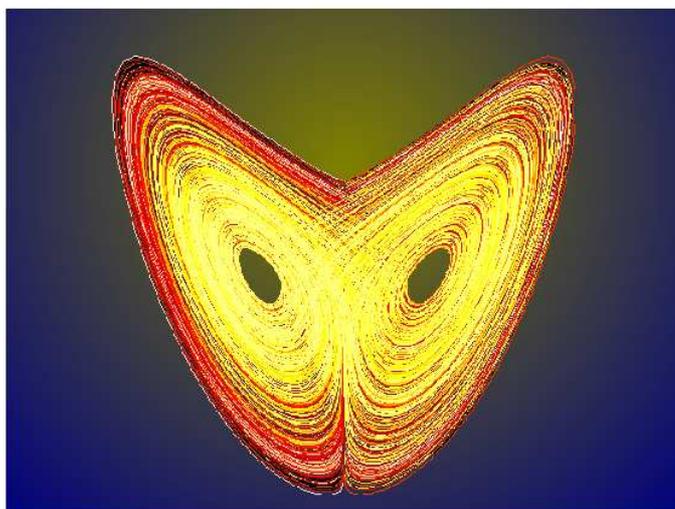


**Figura 10.9:** Diagrama de *Cobweb*.

## 10.5. Sistemas caóticos

En el Ejemplo 10.3 hemos tenido ocasión de comprobar que sistemas o modelos muy simples, pueden pasar de tener un comportamiento determinístico a un comportamiento caótico, modificando ligeramente los valores de un parámetro. En esta sección formalizaremos este concepto.

La teoría del caos fue introducida en ecología por *May* (1974, 1976) y *Oster* (1976) en el contexto de funciones reales de variable real está siendo estudiada con intensidad en los últimos años y aparece en casi todos los modelos discretos no lineales.



**Figura 10.10:** Mariposa o atractor de Lorenz.

Lo primero que nos llama la atención es el hecho de que vivimos inmersos en el caos. De manera usual, **llamamos caos a todo aquello que no somos capaces de sistematizar.**

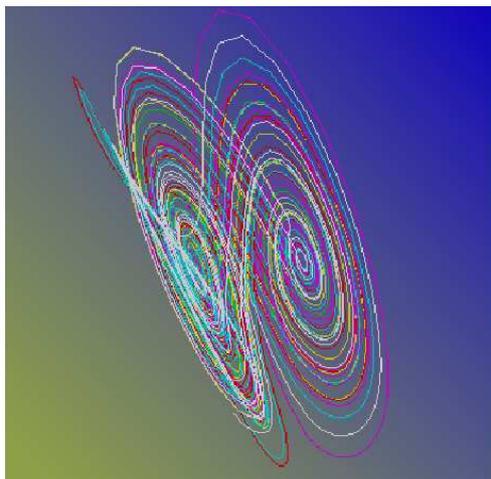
El primer investigador del caos fue un meteorólogo llamado *Edward Lorenz*. En 1960 utilizaba un modelo matemático para predecir el tiempo, que consistía en un

sistema de 12 ecuaciones no lineales. La simulación se realizaba con un ordenador, que daba como respuesta un comportamiento probable de la atmósfera. En cierta ocasión, quiso repetir de nuevo los cálculos anteriores, para ello volvió a introducir los números en el ordenador, pero para ahorrar papel y tiempo, solo utilizó 3 números decimales en vez de 6. Lo sorprendente fue que el resultado encontrado era totalmente diferente a los obtenidos en la vez anterior. Del análisis de esta situación surgió una nueva teoría que se conoce con el nombre de la teoría del caos.

Lo verdaderamente interesante era que diferencias muy pequeñas en las condiciones iniciales tenían una gran influencia en la resolución final del problema. A este efecto que tienen las pequeñas diferencias iniciales después se le dio el nombre de **efecto mariposa**:

*“El movimiento de una simple ala de mariposa hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma.”*

Como podemos comprender, este descubrimiento causó en *Lorentz* un gran impacto, ya que según esta nueva hipótesis, no sería posible predecir con exactitud el comportamiento de cualquier sistema, pues todas las medidas se ven afectadas por los errores de calibración de los instrumentos. Es imposible, por tanto, conocer las condiciones iniciales exactas de la mayoría de los sistemas dinámicos. Afortunadamente, *Lorentz* se dio cuenta de que las soluciones del sistema que parecían tener un comportamiento hecho totalmente al azar, después de verlas representadas en una gráfica sucedía algo sorprendente. El resultado siempre ocupaba una determinada región del espacio, y tenía forma de una espiral doble.



**Figura 10.11:** Atractor de Lorentz.

Antes de la aparición de esta nueva teoría, sólo había dos tipos de comportamientos conocidos para un sistema dinámico: un estado fijo, donde los variables nunca cambian, y el comportamiento periódico, donde el sistema está en un “circuito cerrado” y se repite infinitamente. Las soluciones del sistema de *Lorentz* son definitivamente ordenadas (siguen una espiral). Nunca se paran en un punto, ni se repiten, ni son periódicas. A su representación gráfica se la conoce con el nombre **Atractor de Lorentz**<sup>1</sup>. Estas gráficas deben cumplir otra condición: no puede cortarse a sí misma ya que, si así fuese, habría dos curvas diferentes a partir de ese punto de corte, lo cual significaría dos realidades simultáneas y diferentes.

Una curva de estas características no puede estar contenida en un plano, y por supuesto su dimensión es fraccionaria. Este tipo de atractores reciben el nombre de **atractores extraños**, ya que su representación gráfica es un **fractal**. Queremos insistir en la idea fundamental que encierra el concepto de atractor, como es la siguiente: mientras es casi imposible predecir exactamente el estado futuro de un sistema, es posible, y aún más, muchas veces es fácil modelar el comportamiento general del sistema.

A continuación, resumimos algunos de los rasgos característicos de los sistemas caóticos.

- Son muy sensitivos a las condiciones iniciales. Un cambio muy pequeño en los datos iniciales dan lugar a resultados totalmente diferentes.
- Parecen un desorden, o hechos al azar, pero no lo son, hay reglas que determinan su comportamiento. Los sistemas hechos al azar no son caóticos.

### 10.5.1. Diagramas de bifurcación

Podemos preguntarnos si la teoría del caos puede ser utilizada para estudiar el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos biológicos. En efecto, la ecuación en diferencias

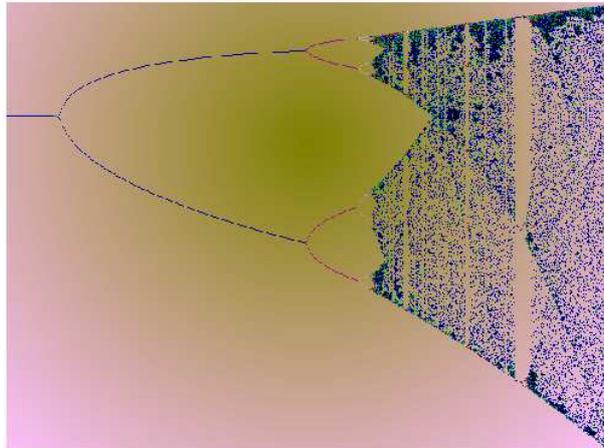
$$x_{t+1} = \mu x_t (1 - x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $x_t$  es la fracción de la población en el tiempo  $t$ , es una fórmula que hemos tenido ocasión de trabajar repetidamente con ella. Se trata de la curva logística, utilizada para estudiar la evolución de poblaciones en ecología.

Hemos visto en el Ejemplo 7.3 que al variar el valor del parámetro  $\mu$ , el sistema puede tender a un solo punto de equilibrio, a dos, a cuatro,  $\dots$ , o bien presentar un comportamiento caótico.

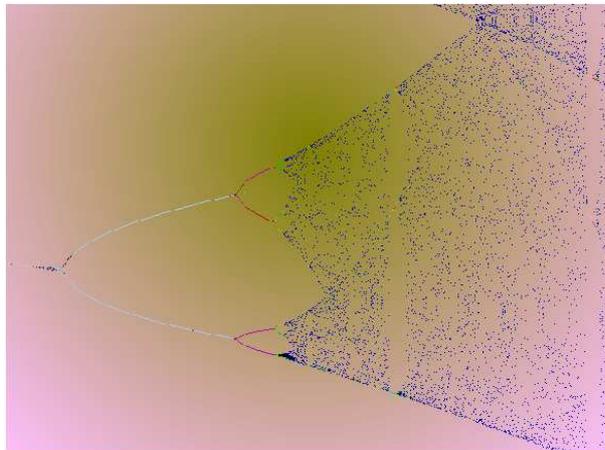
---

<sup>1</sup>El atractor es la región del espacio hacia la cual convergen las trayectorias posibles dentro de un sistema.



**Figura 10.12:** Diagrama de bifurcación del modelo de *May*.

Su diagrama de bifurcación se obtiene dibujando en el eje de abscisas los valores del parámetro  $\mu$  y en el eje de ordenadas los valores a los que tiende el sistema. Por ejemplo si  $\mu = 2.5$  entonces  $x_t \rightarrow 0.6$ , o bien, en el caso  $\mu = 3.3$  entonces  $x_t \rightarrow 0.823$  y  $x_t \rightarrow 0.479$ . La Figura 10.12 representa la gráfica obtenida. Si seleccionamos cualquiera de las zonas del diagrama de bifurcación de la Figura 10.12 y la ampliamos obtenemos la Figura 10.13. Podemos comprobar una de las propiedades que definen a un objeto fractal, como es la **autosemejanza**.



**Figura 10.13:** Autosemejanza del diagrama de bifurcación.

El diagrama de bifurcación tiene propiedades importantes. Entre ellas presentamos la siguiente: sabemos que a medida que aumentamos el valor del  $\mu$  el período se va duplicando.

PERIODOS	INTERVALOS	COCIENTES
2	$3 < C < 3.4495$	.....
4	$3.4495 < C < 3.5441$	4.75159
8	$3.5441 < C < 3.5644$	4.6601
<b>16</b>	$3.5644 < C < 3.5688$	4.61364

**Tabla 10.1**

La Tabla 10.1 muestra algunos de estos valores, y además los cocientes entre la amplitud de un intervalo y el inmediatamente anterior, por ejemplo  $(3.5441 - 3.4495)/(3.4495 - 3)$ . Lo llamativo de este hecho, es que los cocientes tienden al número trascendente:

$$4.669201609110299067185532038204662016\dots$$

que se conoce con el nombre de **constante de Feigenbaum**. Es un problema abierto el estudiar la importancia que este número juega en la naturaleza. Se piensa que puede tener un protagonismo similar al número  $e$ .

Las **aplicaciones de la teoría del caos** son múltiples y en campos muy diversos, en Biología, en Economía, en Medicina,... etc. Hasta ahora parecía que al estallar el caos no seríamos capaces de hacer nada, por ejemplo, si el avión empieza a moverse de una manera extraña pensamos que la catástrofe es inevitable; o bien, si el corazón empieza a latir rápidamente y sin ayuda inmediata puede ocurrir lo peor. En los últimos años, en el campo de la Medicina, las investigaciones actuales, nos ofrecen esperanzas de “domesticar” el caos. *Edward Ott*, *Ceslo Grebogi* (físicos) y *James A. Yorke* (matemático) han elaborado un algoritmo matemático que permite convertir un determinado tipo de caos en un proceso periódico sencillo. La idea que encierra el algoritmo, es que no es necesario comprender todo el movimiento caótico para poderlo regular. Lo que tenemos que hacer es “mirar” continuamente a que dirección tiende el proceso, y realizar perturbaciones pequeñas para volver a dirigirlo en el camino deseado. Naturalmente aquí no se termina de vigilar el sistema, porque después el caos aparecerá de nuevo. Por otro lado, el profesor *A. Garfinkel* de la Universidad de California, ha conseguido transformar el movimiento caótico de un corazón sacado a un conejo en un movimiento regular.

## 10.6. Modelos discretos con retardo

Hasta ahora en todos los modelos discretos estudiados hemos supuesto que cada miembro de la especie en el tiempo  $k$  contribuye al crecimiento de la población para el tiempo  $k + 1$  de la siguiente manera:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esto ocurre, por ejemplo en la mayoría de poblaciones de insectos, pero no para otros muchos animales, donde son fértiles en una época muy concreta del año. En tales casos, para analizar la dinámica del modelo, hemos de incorporar el efecto del retardo, que en cierta manera viene a jugar un papel parecido al estudio que realizamos de la población por estructura de edades. Si el retardo (por ejemplo, la madurez), es de un paso  $T$ , entonces nos aparece el siguiente modelo de ecuaciones en diferencias

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-T}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$