Tema 7

MODELOS DISCRETOS MATRICIALES

7.1. Introducción

La dinámica de una población viene determinada por el número de nuevos nacimientos y la probabilidad de morir que tienen los individuos que componen la población. Por ello, es muy importante saber la estructura de edades de la población que estamos estudiando. Es decir, cómo se reparten los individuos en las diferentes clases de edad y lo que es más importante, conocer las probabilidades asociadas de supervivencia, mortalidad y fecundidad. Generalmente esta información se refleja en una tabla de vida, en la mayoría de los casos correspondiente a las hembras de la población, ya que son las que contribuyen a la dinámica de la población en términos de fecundidad.

El presente tema es una introducción al estudio de los modelos estructurados basados en el algebra matricial. Se inicia con un modelo probabilístico clásico como son las cadenas de *Markov* y se centra fundamentalmente en el estudio de uno de los modelos más conocidos como es el modelo de *Leslie*.

7.2. Cadenas de Markov

Los dos resultados que podemos obtener al realizar el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire los designaremos por $E_1 = \textit{salir cara}$ y $E_2 = \textit{salir cruz}$. Si repetimos t veces este experimento la probabilidad de que en uno de ellos obtengamos E_1 no depende de lo que haya salido en el experimento anterior; ambos sucesos son independientes. Sin embargo, existen muchos otros fenómenos representados por variables aleatorias dependientes. En 1907 *Markov* estudió estas situaciones en las cuales la probabilidad de que ocurra un suceso depende del suceso inmediatamente anterior, y son estas las que estudiaremos en esta sección.

Supongamos una secuencia de n pruebas o experimentos donde cada uno de ellos tiene un conjunto de resultados posibles (que consideraremos finito) y que designaremos por las letras E_1, E_2, E_3, $\cdots E_m$, mutuamente exclusivos. Si al realizar una prueba se obtiene el resultado E_i, entonces diremos que el sistema o el fenómeno se encuentra en el estado E_i. Utilizaremos E_i^t para representar al estado E_i al cabo de t pruebas. En consecuencia, $P[E_i^t]$ será la probabilidad de que después de t experiencias el sistema se encuentre en el estado E_i. Por otro lado, llamaremos P_{ij}^t a la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado E_i en la prueba t condicionada a que en la prueba anterior $t-1$ se encontrara en el estado E_j. Es decir,

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}]$$

DEFINICIÓN 7.2.1 *Una sucesión de estados E_1, E_2, E_3, $\cdots E_m$, mutuamente exclusivos constituyen una cadena de Markov cuando*

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}] = P[E_i^t/E_j^{t-1}.E_{j_{t-2}}^{t-2}.E_{j_{t-3}}^{t-3}.\cdots E_{j_1}^1.E_{j_0}^0]\,, \quad \forall\, i,\, j = 1,2,\cdots m\,.$$

Es decir, la probabilidad de que el objeto en el experimento t esté situado en el estado E_i sólo depende del estado E_j del experimento anterior $t-1$ y es independiente de los otros experimentos anteriores. En cierto modo, es como si el sistema no tuviese "memoria".

Es evidente que la probabilidad P_{ij}^t depende de tres variables: los sucesos E_i,E_j y el "tiempo "t. En general,

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}] \neq P_{ij}^{t'}\,.$$

DEFINICIÓN 7.2.2 *En el caso particular en el que la probabilidad P_{ij}^t sea independiente de la prueba t, diremos que la cadena de Markov es* **homogénea** *o* **estacionaria**, *en cuyo caso escribiremos $P_{ij}^t = P_{ij}$.*

Desde ahora y a lo largo del curso siempre consideraremos cadenas homogéneas.

Al ser P_{ij} una probabilidad se cumplirá:

$$P_{ij} \geq 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{m} P_{ij} = 1\,, \quad i,j \in \{1,2,\cdots,m\}\,. \tag{7.1}$$

7.2.1. Matrices estocásticas

Si p_j^t, $j=1,2,\cdots,m$ es la probabilidad de que el objeto esté situado en el experimento $t=1,2,\cdots,n$, en el estado E_j, entonces

$$p_j^t = p_1^{t-1}P_{j1} + p_2^{t-1}P_{j2} + \cdots + p_m^{t-1}P_{jm}\,, \quad j=1,2,\cdots,m\,. \tag{7.2}$$

Con los números p_j^t formamos un vector columna $\vec{X}(t)$, y con los P_{jk} una matriz cuadrada A. Ahora, las identidades (7.2) podemos expresarlas

$$\vec{X}(t) = A\,\vec{X}(t-1)\,, \quad t = 1, 2, \cdots n\,. \tag{7.3}$$

La cadena de *Markov* homogénea está representada por el sistema de ecuaciones lineales en diferencias anteriores. Observemos que por las condiciones (7.1) la matriz A cumplirá:

- La suma de los elementos de cada una de sus columnas vale la unidad. Sin embargo, no ocurre lo mismo con la suma de los elementos de sus filas

- Todos sus elementos P_{jk} son mayores o iguales que cero y menores o iguales que uno.

A una matriz de transición de este tipo se la conoce con el nombre de **matriz estocástica**. Aquellas matrices estocásticas donde la suma de los elementos de cada fila sea la unidad reciben el nombre de doblemente estocásticas.

7.2.2. Diagramas de estados

Podemos representar las diferentes relaciones entre los estados de una cadena por medio de un diagrama formado por nodos y flechas orientadas con las probabilidades de transición. A esta representación se la conoce con el nombre de diagrama de transición o de estados.

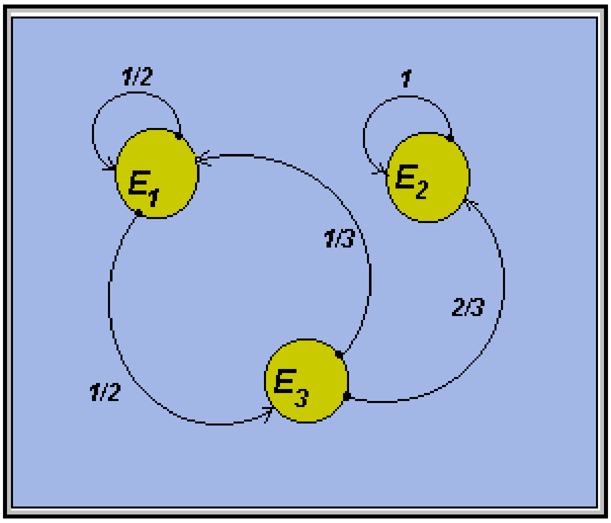


Figura 7.1. Diagrama de estados.

En la Figura 7.1 se ha dibujado el diagrama correspondiente a la matriz estocástica:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 7.1

Para beber agua un animal puede ir a un lago o a un río. Se sabe que no va al lago dos días seguidos y que si toma agua en el río la probabilidad de que el día siguiente beba agua en cada uno de los sitios es la misma.

- Estamos ante una cadena de *Markov* homogénea con dos estados, E_1 que representa al hecho de que el animal beba agua en el lago y E_2 que beba agua en el río.
- La matriz de transición es
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$
- Observemos que se trata de una cadena particular, ya que el paso de un estado al siguiente no depende de los anteriores, sino del primero de ellos.

EJEMPLO 7.2

Una tienda de animales que vende peces incluye una garantía por la que cualquier pez que muera antes de cumplir tres meses se reemplaza de forma gratuita. Una vez que el pez se ha reemplazado ya no queda cubierto por la garantía. Se sabe que:

1. El 3 % de los peces mueren durante su primer mes.
2. El 5 % de los peces que han cumplido un mes mueren durante el segundo.
3. El 7 % de los peces que han cumplido dos meses mueren durante el tercer mes.

- Podemos representar la situación anterior por medio de una cadena de *Markov* siendo los estados, E_i:= pez en el mes $i = 1, 2, 3$ de garantía, E_4:= pez sin garantía por haber sido repuesto, y E_5:= pez sin garantía por tener más de 3 meses.
- El diagrama de estados que representa a esta cadena aparece en la Figura 7.2.

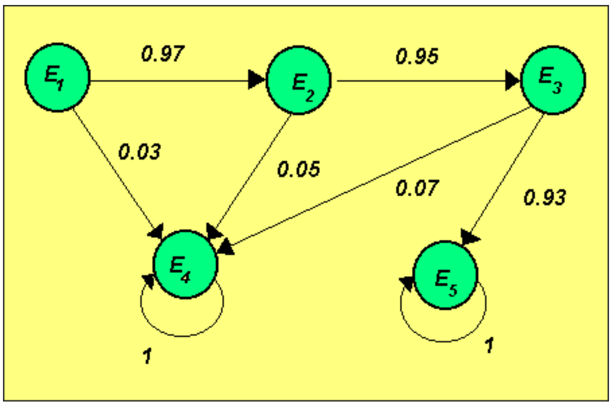


Figura 7.2. Diagrama de estados.

7.2.3. Cadenas de Markov regulares

Recordemos que estamos considerando un número finito de experimentos, no obstante podemos realizar un desarrollo similar considerando

$$\vec{X}(t) = A\,\vec{X}(t-1)\,, \quad t = 1, 2, 3, \cdots\,,$$

ya que uno de los objetivos que perseguimos al modelar una determinada situación real es el de poder conocer su comportamiento a largo plazo. Puesto que la matriz de transición A nos resuelve el problema de encontrar la ley de probabilidad, el límite de esta ley cuando el tiempo tiende a infinito, nos proporciona un método para estudiar el comportamiento a largo plazo de la cadena de *Markov*.

TEOREMA 7.2.3 *Si A^n representa a la potencia n-ésima de la matriz de transición A, entonces $P[E_i^n/E_j^0] = A^n(i,j)$.*

Demostración. Vamos a utilizar el método de inducción sobre la potencia n de la matriz de transición. Sean $i\,, j$ dos valores cualesquiera de $\{1,\, 2, \cdots, m\}$, por definición de los elementos de la matriz A tenemos

$$P[E_i^1/E_j^0] = P_{ij} = A(i,j)\,.$$

Supongamos ahora que el teorema sea cierto para el paso $n-1$, es decir

$$P[E_i^{n-1}/E_j^0] = A^{n-1}(i,j)\,. \tag{7.4}$$

Haciendo uso de la ley de la probabilidad total,

$$P[E_i^n/E_j^0] = \sum_{k=1}^{m} P[E_k^{n-1}/E_j^0]\, P[E_i^n/E_k^{n-1}.E_j^0]\,,$$

Por la hipótesis (7.4) de inducción $P[E_k^{n-1}/E_j^0] = A^{n-1}(k,j)$, y por la definición de cadena de *Markov* $P[E_i^n/E_k^{n-1}.E_j^0] = P[E_i^n/E_k^{n-1}] = P_{ik} = A(i,k)$. Es decir,

$$P[E_i^n/E_j^0] = \sum_{k=1}^{m} A(i,k)\, A^{n-1}(k,j)\ ,$$

que corresponde al elemento de la fila i columna j del producto de las matrices $A\,A^{n-1} = A^n$.

DEFINICIÓN 7.2.4 *Una cadena de Markov es* **regular** *si existe un número natural n tal que la potencia n-ésima de su matriz de transición A tiene todos sus elementos positivos.*

Observemos que si la cadena es regular, entonces la matrices A^m con $m > n$ también tendrán todos sus elementos positivos.

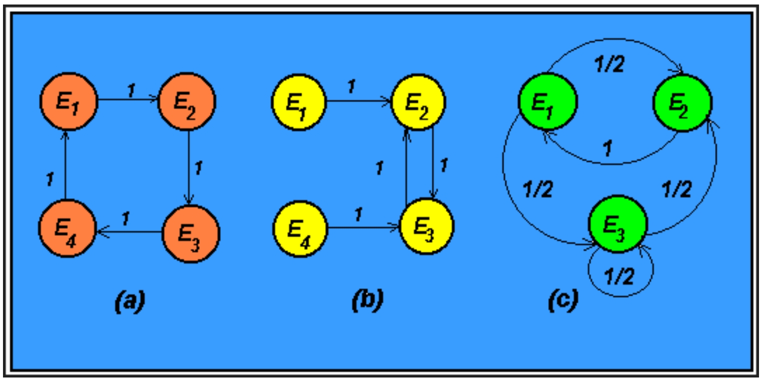


Figura 7.3. Ejemplos de cadenas de *Markov*.

Una manera alternativa de probar que una cadena es regular es:

- Viendo si todos los estados son accesibles.
- Comprobando que existan dos ciclos al menos uno de ellos impar.

Las cadenas (a) y (b) de la Figura 7.3 no son regulares, ya que en el primer caso sólo contiene un ciclo, y en el segundo el estado E_4 no es accesible. Sin embargo, la cadena (c) si es regular pues todos los estados son accesibles y además existen los ciclos $E_2E_1E_3E_2$ (impar) y $E_1E_2E_1$ (par). En este último caso (c), la potencia n-ésima de su matriz de transición es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

7.2.4. Propiedades de las matrices estocásticas

Las matrices estocásticas por la forma particular en el que han sido definidas cumplen cierto número de propiedades interesantes, de entre las cuales destacaremos por el uso que haremos de ellas, las siguientes.

TEOREMA 7.2.5 *Si A es una matriz de orden n estocástica, entonces tiene al uno como valor propio.*

Su demostración está basada en probar que el determinante $|A - I|$ es nulo. Para facilitar la notación consideraremos $n = 4$,

$$|A - I| = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

sumamos a la primera de las filas el resto de ellas

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{4} a_{j1} - 1 & \sum_{j=1}^{4} a_{j2} - 1 & \sum_{j=1}^{4} a_{j3} - 1 & \sum_{j=1}^{4} a_{j4} - 1 \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} .$$

Pero al ser A una matriz estocástica

$$\sum_{j=1}^{4} a_{j1} = \sum_{j=1}^{4} a_{j2} = \sum_{j=1}^{4} a_{j3} = \sum_{j=1}^{4} a_{j4} = 1 \, ,$$

y por tanto, todos los elementos de la primera fila del determinante anterior son ceros, lo cual implica que este determinante es nulo, tal y como deseábamos probar.

TEOREMA 7.2.6 *Si A es una matriz estocástica de orden n con todos sus elementos positivos (regular), entonces la sucesión de matrices $A^n \, , n = 1, 2, \cdots$ converge hacia una matriz que tiene todas sus columnas iguales que coinciden con $\vec{\Pi}$ tal que:*

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \Pi(\vec{j}) = 1.$

- *La distribución $\vec{\Pi}$ es el autovector asociado al autovalor 1 de la matriz estocástica A. Esto es, $A\vec{\Pi} = \vec{\Pi}$.*

La demostración de esta propiedad queda fuera del alcance del objetivo del curso pero puede consultarse en la página 264 del libro "*Modelos matemáticos y procesos dinámicos* "de *Santiago Pérez-Cacho y otros.*

Como aplicación inmediata del Teorema 7.2.6 anterior, observemos que en el Ejemplo 7.1 la matriz de transición A de la cadena de *Markov* regular tiene como valor propio $\lambda_1 = 1 \, , \lambda_2 = -0.5$ y autovectores $\vec{U}_1 = (1, 2) \, , \vec{U}_2 = (-1, 1)$. En consecuencia, $\vec{\Pi} = (1/3, 2/3)$ y por tanto

$$A^t \to \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} ,$$

cuando $t \to \infty$.

EJEMPLO 7.3

Sea la matriz de transición correspondiente a seis estados

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Supongamos que en el momento inicial el sistema se encuentra en el estado E_4.

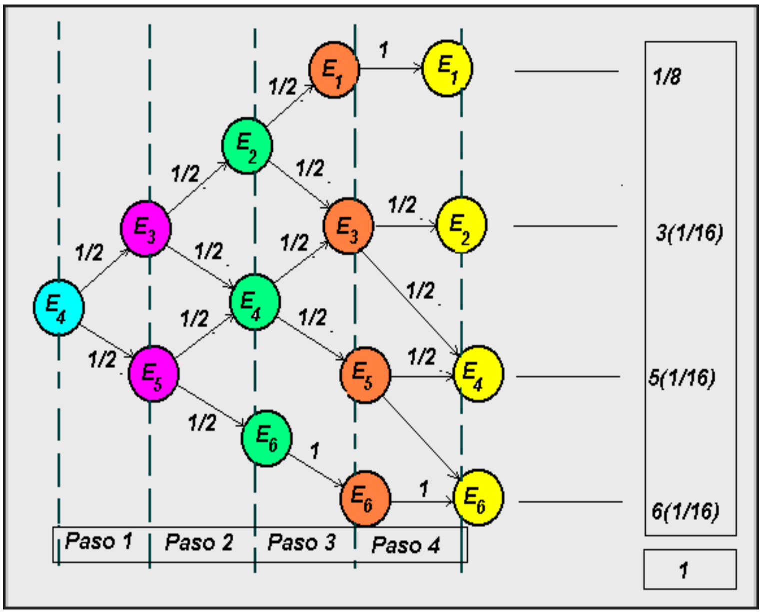


Figura 7.4.

- Veamos como podemos pasar del estado inicial E_4 al resto de los estados. Sabemos que

$$\vec{X}(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T .$$

Como puede apreciarse en la Figura 7.4, al cabo de un paso la probabilidad será,

$$\vec{X}(1) = (0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0)^T ,$$

o bien $\vec{X}(1) = A\,\vec{X}(0)$. Del mismo gráfico deducimos que,

$$\begin{aligned} \vec{X}(2) &= (0, 1/4, 0, 1/2, 0, 1/4)^T \\ \vec{X}(3) &= (1/8, 0, 3/8, 0, 1/4, 1/4)^T \\ \vec{X}(4) &= (1/8, 3/16, 0, 5/16, 0, 3/8) . \end{aligned}$$

O de forma matricial:

$$\vec{X}(2) = A\,\vec{X}(1) , \quad \vec{X}(3) = A\,\vec{X}(2) , \quad \vec{X}(4) = A\,\vec{X}(3) .$$

- Con el programa `Mathematica`® podemos encontrar A^{200},

  `A := {{1., 1/2, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0.5, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0}, {0, 0, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1/2, 1}}`
  `MatrixPower[A, 200]`

  {{1., 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.}, {0., 1.07909*10^{-19} , 0., 1.746 *10^{-19}, 0., 0.}, {0., 0., 2.82509*10^{-19}, 0., 1.746* 10^{-19}, 0.}, {0., 1.746*10^{-19}, 0., 2.82509*10^{-19}, 0., 0.}, {0., 0., 1.746*10^{-19}, 0., 1.07909*10^{-19}, 0.}, {0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.}}

- Del apartado anterior deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} A^n\, \vec{X(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

  Es decir, a largo plazo existe un 40 % de posibilidades de que partiendo del estado E_4 la cadena se encuentre en el estado E_1 y un 60 % de que esté en el E_6.

EJEMPLO 7.4

Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la Figura 7.5. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Sabiendo que semana tras semana todos los ratones cambian de ubicación y que los ratones cuando salen eligen un compartimento al azar, veamos cuál será su distribución de los ratones al cabo de "infinitas" semanas.

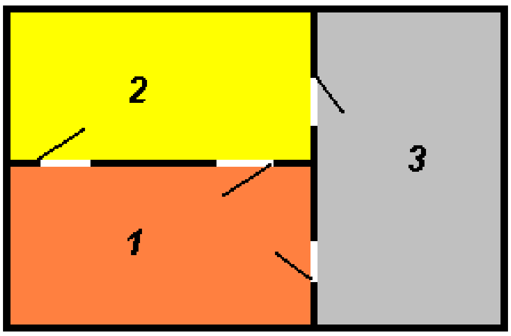
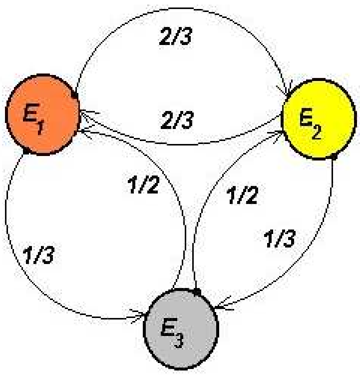


Figura 7.5.

- Observemos que estamos ante una cadena de *Markov* cuyo diagrama de estados es el siguiente:



A partir del diagrama es inmediato obtener la matriz de transición

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $X_i(t)$ representa al número de ratones en el compartimento $i = 1, 2, 3$ en la semana t y $\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$ es la distribución inicial, deducimos del enunciado que

$$\left\{ \begin{array}{llll} X_1(1) = & & \frac{2}{3}X_2(0)+ & \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_2(1) = & \frac{2}{3}X_1(0)+ & & \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_3(1) = & \frac{1}{3}X_1(0)+ & \frac{1}{3}X_2(0) & . \end{array} \right.$$

Sistema de ecuaciones lineales que podemos expresarlo matricialmente

$$\begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\vec{X}(1) = A\vec{X}(0)\,.$$

Razonando de la misma manera

$$\vec{X}(2) = A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0)\,.$$

En general

$$\vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0)\,, \quad t = 1,\, 2,\, \cdots\,.$$

En consecuencia, para obtener el número de ratones en cada uno de los compartimentos en la semana t, tendremos que encontrar el valor de la matriz potencia A^t. Una aproximación de este valor podemos obtenerla con el `Mathematica`®

```
A := {{0, 2/3, 0.5}, {2/3, 0, 0.5}, {1/3, 1/3, 0}}
MatrixPower[A, 100]
```

$\{\{0.375, 0.375, 0.375\}, \{0.375, 0.375, 0.375\}, \{0.250, 0.250, 0.250\}\}$.

- Ahora, estamos interesados en deducir este valor de una manera diferente. Observemos que si la matriz A fuese diagonal, entonces A^t sería muy fácil de encontrar, bastaría elevar a t los elementos de la diagonal. Por esta razón, en primer lugar procederemos a diagonalizar la matriz simétrica A.

  Los valores propios de la matriz A son los siguientes:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

  desarrollando obtenemos la ecuación característica

$$9\,\lambda^3 - 7\,\lambda - 2 = 0\,,$$

  cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2/3$, $\lambda_3 = -1/3$. Por tanto, la matriz A es diagonalizable siendo los subespacios propios asociados a estos valor propio

$$S_1 =< (3,3,2) >\,, \quad S_2 =< (-1,1,0) >\,, \quad S_3 =< (-1,-1,2) > \,.$$

  En consecuencia, la matriz de paso C es,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Para encontrar A^t, actuamos de la manera siguiente

$$D = C^{-1}AC \quad \Rightarrow \quad A = CDC^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^t = CD^tC^{-1}\,,$$

  que en nuestro caso

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

  Simplificando

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(3 + 4\left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{8}\left(3 - 4\left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{3}{8}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) \\ \frac{1}{8}\left(3 - 4\left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{8}\left(3 + 4\left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{3}{8}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) \\ \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{4}\left(1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) \end{pmatrix}.$$

  Finalmente hacemos que $t \to \infty$, entonces

$$A^t \to \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

  y en consecuencia después de infinitas semanas la distribución de los ratones tiende hacia

$$\left.\begin{array}{lcl} \textbf{Primero} & = & \frac{3}{8}X_1(0) + \frac{3}{8}X_2(0) + \frac{3}{8}X_3(0) = \frac{3}{8}(X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) = \frac{3}{8}\text{Total} \\ \textbf{Segundo} & = & \frac{3}{8}X_1(0) + \frac{3}{8}X_2(0) + \frac{3}{8}X_3(0) = \frac{3}{8}(X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) = \frac{3}{8}\text{Total} \\ \textbf{Tercero} & = & \frac{1}{4}X_1(0) + \frac{1}{4}X_2(0) + \frac{1}{4}X_3(0) = \frac{1}{4}(X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) = \frac{1}{4}\text{Total} \end{array}\right\}$$

- Un camino alternativo para llegar a la conclusión anterior es utilizar el Teorema 7.2.6.

  En efecto, la cadena de *Markov* es regular ya que todos los estados son accesibles y existen dos ciclos $E_1E_2E_3E_1$ y $E_1E_2E_1$ al menos uno de ellos impar (además A^2 tiene todos sus elementos positivos) . Sabemos que el vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ es $(3,3,2)$.

$$\vec{\Pi} = (3/8,\, 3/8,\, 1/8)\,,$$

  y en consecuencia si $t \to \infty$,

$$A^t \to \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

7.3. Cadenas de Markov y Genética

A continuación utilizaremos las cadenas de *Markov* para estudiar como se propaga un determinado rasgo hereditario en sucesivas generaciones.

7.3.1. Herencia autosómica

Los genes son las unidades más pequeñas de la herencia. Como es sabido, los genes son partes de la molécula de ADN que se encuentran en los cromosomas, los cuales codifican la secuencia de aminoácidos de una proteína. Además, el ADN no sólo lleva esta información, sino que es capaz de hacer nuevas copias de sí mismo. El cuerpo humano tiene un número aproximado de entre diez y cien billones de células. Cada una de las células tiene 46 cromosomas, con un número aproximado de 100.000 genes.

El rasgo que se va a heredar está regido por dos genes, cada uno de los cuales es usual representarlo con las letras A y a. Si el tipo de herencia es autosómica[1] los individuos de la población, independientemente del sexo poseen los dos genes, siendo AA, Aa y aa los diferentes pares que pueden formarse. A estos conjuntos de dos genes se les conoce como **genotipo** del individuo y determinan la forma en que el rasgo controlado por los genes se manifiesta en el individuo. Por ejemplo, en algunos tipos de flores determinan su color; el genotipo AA produce flores rojas, el Aa rosas, y el aa blancas. También el color de los ojos viene configurado por los genotipos, de esta manera AA y Aa dan lugar a personas que tienen los ojos color café y el genotipo aa de color azul. En este caso se dice que el gen A **domina** al a o que a es **recesivo** con respecto al A.

Si la herencia es autosómica un individuo forma su genotipo heredando un gen de

[1]Cualquier cromosoma con exclusión del cromosoma sexual; los que son comunes a los dos sexos.

los dos del padre y uno de los dos de la madre, siendo el azar el que determina cuál de los dos genes pasa a su descendiente. Si uno de los padres es del genotipo aa y el otro del Aa, el descendiente recibirá siempre un gen a del aa y un gen A o a, con igual probabilidad, del progenitor del genotipo Aa. Así, el descendiente tiene la misma probabilidad de ser del genotipo aa o Aa.

	$AA \times aa$	$AA \times Aa$	$AA \times aa$	$Aa \times Aa$	$Aa \times aa$	$aa \times aa$
AA	1	0.5	0	0.25	0	0
Aa	0	0.5	1	0.5	0.5	1
aa	0	0	0	0.25	0.5	1

Tabla 7.1.

En la tabla anterior aparecen las probabilidades de los posibles genotipos de los descendientes para todas las combinaciones posibles de los genotipos de los padres.

EJEMPLO 7.5

Supongamos que un agricultor tiene una gran población de plantas con una cierta distribución de tres tipos de genotipos, AA, Aa y aa. Este hombre desea iniciar un programa de cultivos en el que todas las plantas de la población sean fecundadas por una planta del genotipo AA. Queremos obtener la fórmula de la distribución de los tres posibles genotipos de la población, después de un cierto número de generaciones.

- Para $t = 0, 1, 2, \cdots$,
  - $X_1(t)$ representa la fracción de las plantas del genotipo AA que hay en la generación de orden t
  - $X_2(t)$ representa la fracción de las plantas del genotipo Aa que hay en la generación de orden t
  - $X_3(t)$ representa la fracción de las plantas del genotipo aa que hay en la generación de orden t

  En consecuencia, $X_1(0),\ X_2(0)$ y $X_3(0)$ son las fracciones de la distribución inicial de los tres genotipos. También se tiene que,

$$X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) = 1\ ; \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

  Por medio de la Tabla 7.1 se determina la distribución de los genotipos en cada generación a partir de la distribución en la generación anterior,

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(t) = X_1(t-1) + \frac{1}{2}X_2(t-1) \\ \\ X_2(t) = \frac{1}{2}X_2(t-1) + X_3(t-1) \quad , \qquad\qquad t = 1,\, 2,\, \cdots \\ \\ X_3(t) = 0 \end{array} \right.$$

Por ejemplo, la primera de las ecuaciones establece que todos los descendientes de una planta del genotipo AA serán también AA, si se sigue este programa de cultivo y que la mitad de las descendientes de una planta del genotipo Aa serán del genotipo AA. Estas ecuaciones podemos escribirlas de manera matricial,

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1)\ ; \quad t = 1, 2, \cdots$$

donde,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} ; \quad \vec{X}(t-1) = \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \\ X_3(t-1) \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

De la ecuación $\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1)$, se deduce:

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1) = A^2\vec{X}(t-2) = \cdots = A^t\vec{X}(0)\,.$$

Entonces, podemos encontrar una expresión explícita para A^t, aplicamos la ecuación anterior y obtenemos una expresión explícita para $\vec{X}(t)$. Para ello, primero se diagonaliza la matriz A. Es decir, buscamos una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que

$$A = CDC^{-1}\,.$$

Entonces, se tiene que

$$A^t = CD^tC^{-1}\,.$$

En nuestro caso,

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 0\,,$$

y los valores propios asociados son:

$$\vec{U}_1 = (1,\, 0,\, 0)^T\,, \quad \vec{U}_2 = (1,\, -1,\, 0)^T\,, \quad \vec{U}_3 = (1,\, -2,\, 1)^T\ .$$

Por lo tanto,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix} .$$

Es decir,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^t & 1-(\frac{1}{2})^{t-1} \\ 0 & (\frac{1}{2})^t & (\frac{1}{2})^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix} .$$

Multiplicando,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) - (\frac{1}{2})^t X_2(0) - (\frac{1}{2})^{t-1} X_3(0) \\ \\ (\frac{1}{2})^t X_2(0) + (\frac{1}{2})^{t-1} X_3(0) \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y como $X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) = 1$, se tiene, para $t = 1, 2, \cdots$:

$$\begin{cases} X_1(t) = 1 - (\frac{1}{2})^t X_2(0) - (\frac{1}{2})^{t-1} X_3(0) \\ \\ X_2(t) = (\frac{1}{2})^t X_2(0) + (\frac{1}{2})^{t-1} X_3(0) \\ \\ X_3(0) = 0 \end{cases}$$

Estas fórmulas proporcionan las fracciones de los genotipos de la generación de plantas de orden t, expresadas en función de las fracciones de los genotipos iniciales. Como $(\frac{1}{2})^t$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, de estas ecuaciones deducimos

$$X_1(t) \to 1, \qquad X_2(t) \to 0, \qquad X_3(t) = 0 \,.$$

Conclusión: Cuando t tiende a infinito, es decir, en el límite, todas las plantas de la población serán del tipo AA.

- Podemos considerar el ejemplo como una cadena de *Markov*, siendo los estados E_1, E_2 y E_3 los correspondientes a los genotipos AA, Aa y Aa respectivamente. Observemos que dicha cadena no es regular, ya que los estados E_1 y E_3 no son accesibles, y por tanto para estudiar el comportamiento a largo plazo de la matriz A^t no podemos hacer uso del Teorema 7.2.6.

Supongamos que p y q son las proporciones de los alelos A y a entre los machos y entre las hembras. Entonces, si suponemos que la población es grande, la probabilidad de que la descendencia reciba el alelo A de los dos padres es p^2. De manera similar, las probabilidades de los genotipos Aa y aa son $2pq$ y q^2, respectivamente. El término $2pq$ proviene del hecho de que los individuos Aa y aA tienen genotipos idénticos. Este resultado conduce al teorema siguiente, descubierto en forma independiente por *Hardy y Weinberg* en 1908.

RESULTADO 7.3.1 (Ley de Hardy-Weinberg) *Supongamos que en una gran población de padres, los alelos A y a de un gen particular se presentan en las proporciones p y $q = 1 - p$. Si suponemos que estas proporciones son las mismas para los machos y para las hembras y, además, que el apareo es aleatorio, la primera y todas las generaciones sucesivas se compondrán de los tres genotipos, AA, Aa y aa, en las proporciones $p^2, 2pq$ y q^2.*

EJEMPLO 7.6

- El color de la flor del chícharo está controlado por un par de genes. Los tres genotipos AA, Aa y aa se caracterizan por sus flores rojas, rosas y blancas, respectivamente. Si se cultiva un campo al azar con 60 % de flores rojas y 40 % de flores blancas, ¿qué proporciones de los tres genotipos estarán presentes en la cuarta generación?.

  En este ejemplo $p = 0.6$ y $q = 0.4$. Por la ley de *Hardy - Weinberg*, las proporciones de flores rojas, rosas y blancas en la primera generación y en todas las demás son de $p^2 = 0.36, 2pq = 0.48$ y $q^2 = 0,16$, respectivamente. Tengamos en cuenta que la Ley de *Hardy - Weinberg* sólo es válida cuando el apareo es aleatorio y cuando los tres genotipos son igualmente viables. Situaciones donde el apareo no es aleatorio, se presentan frecuentemente en experimentos biológicos controlados. Por ejemplo, la cría de caballos de carreras.

7.3.2. Herencia ligada al sexo

En la herencia ligada al sexo[2] por el cromosoma X, el macho posee un gen A o bien a y la hembra dos AA, Aa, o aa. Se emplea la expresión *ligada al sexo por el cromosoma X*, porque tales genes se encuentran en dicho cromosoma, del cual el macho tiene uno y la hembra dos, lo que determina su sexo. La herencia de tales genes funciona de la manera siguiente:

- Un descendiente macho recibe, con igual probabilidad, uno de los genes de su madre y una descendiente hembra recibe con igual probabilidad el gen de su padre y uno de los de su madre.

Del comentario anterior deducimos la Tabla 7.2.

	$A \times AA$	$A \times Aa$	$A \times aa$	$a \times AA$	$a \times Aa$	$a \times aa$
A	1	0.5	0	1	0.5	0
a	0	0.5	1	0	0.5	1
AA	1	0.5	0	0	0	0
Aa	0	0.5	1	1	1	0
aa	0	0	0	0	0.5	1

Tabla 7.2.

[2]Dos ejemplos muy conocidos de herencia ligada al sexo son el daltonismo, es decir, la imposibilidad de distinguir el rojo y el verde, y la hemofilia, la no coagulación de la sangre. Las dos enfermedades son producidas por dos genes recesivos que se encuentran en el cromosoma X. Para que un hombre sea daltónico tiene que recibir el gen de su madre a través del cromosoma X, mientras que en el caso de la mujer, tiene que recibir un gen del padre (daltónico) y otro de la madre. Esta es la causa de que existan más daltónicos entre los hombres que entre las mujeres.

Estamos interesados en un programa de fecundación o cruzamiento relacionado con la herencia ligada al sexo. Lo iniciamos con un macho y una hembra, se selecciona al azar dos de sus hijos, uno de cada sexo, y se cruzan repitiéndose sucesivamente el procedimiento. Con los animales es común hacer este tipo de cruzamientos. La pareja original macho-hembra puede ser cualquiera de los seis tipos que corresponden a las seis columnas de la Tabla 7.2.

$$A \times AA, \quad A \times Aa, \quad A \times aa, \quad a \times AA, \quad a \times Aa, \quad a \times aa$$

Las parejas de hermanos que se aparearán en las siguientes generaciones tienen una cierta probabilidad de ser alguno de estos seis tipos. Para calcularlas, siendo $t = 0, 1, 2, \cdots$, estableceremos lo siguiente:

- $x_1(t) =$ la probabilidad de que una pareja de hermano y hermana sea del tipo $A \times AA$ en la generación de orden t.
- $x_2(t) =$ ídem del tipo $A \times Aa$
- $x_3(t) =$ ídem del tipo $A \times aa$
- $x_4(t) =$ ídem del tipo $a \times AA$
- $x_5(t) =$ ídem del tipo $a \times Aa$
- $x_6(t) =$ ídem del tipo $a \times aa$

Con estas probabilidades se puede formar un vector columna

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t))^T, \qquad t = 0, 1, 2, \cdots$$

y se verificará que $\vec{x}(t) = A^t \vec{x}(0), \ t = 1, 2, \cdots$, donde $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}$ es la matriz de transición.

EJEMPLO 7.7

Para calcular la matriz $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}$ elegimos, por ejemplo, para la generación de los padres la opción $A \times Aa$. Las diferentes posibilidades para los machos son A o a y para las hembras AA o aa, con lo cual, las distintas posibilidades para los hijos son: $A\times AA$, $A\times Aa$, $a\times AA$, $a\times Aa$, con probabilidades respectivas $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$. Con estas cantidades construimos la segunda columna de la matriz A. Razonando de la misma manera deducimos que la matriz A buscada es la indicada en la Tabla 7.3.

	$A\times AA$	$A\times Aa$	$A\times aa$	$a\times AA$	$a\times Aa$	$a\times aa$
$A\times AA$	1	0.25	0	0	0	0
$A\times Aa$	0	0.25	0	1	0.25	0
$A\times aa$	0	0	0	0	0.25	0
$a\times AA$	0	0.25	0	0	0	0
$a\times Aa$	0	0.25	1	0	0.25	0
$a\times aa$	0	0	0	0	0.25	1

Tabla 7.3.

- Para calcular los valores y vectores propios de A recurrimos al programa `Mathema–tica`$_{®}$ de Wolfram Research Lt.

  En primer lugar procedemos a definir la matriz de transición A.

```
A:={{1,0.25,0,0,0,0},{0,0.25,0,1,0.25,0},{0,0,0,0,0.25,0},
{0,0.25,0,0,0,0}, {0,0.25,1,0,025,0},{0,0,0,0,0.25,1}};
```

  y calculamos los valores propios de la matriz A

  `Eigenvectors[A]`

  {1., 1., 0.809017, −0.5, 0.5, −0.309017}

  y sus vectores propios

  `Eigenvalues[A]`

  {{ 0, 0, 0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}, { -0.552272, 0.421898, 0.130374, 0.130374, 0.421898, -0.552272}, {0.104257, -0625543, -0.312772, 0.312772, 0.625543, -0.104257 }, { 0.288675, -0.57735, 0.288675, -0.288675, 0.57735, -0.288675 }, {-0.10385, 0.54377, -0.439919, -0.439919, 0.54377, -0.103851 }}

  Finalmente construimos la matriz de paso

  `C := Transpose[Eigenvectors[A]]`

  que nos permite diagonalizar la matriz A

  `diagonal := Inverse[C].A.C`

  El valor de A^t, para un valor de t grande podemos calcularlo haciendo

  `potencia := C.DiagonalMatrix[1., 1., 0.809017^t, (−0.5)^t, 0.5^t, (−0.309017)^t].Inverse[C]`
  `Limit[potencia, t → Infinity]`

  O bien de manera aproximada

  `MatrixPower[A, 100]`

  En ambos casos:

$$A^t \quad \to \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0.66 & 0.33 & 0.66 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0.66 & 0.33 & 0.66 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Conclusión:** Si suponemos, por ejemplo, que la pareja original es del tipo $A \times Aa$, entonces $\vec{X(0)} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$, multiplicamos $R\vec{X(0)}$ y obtenemos

$$(0.66, 0, 0, 0, 0, 033)^T.$$

  A largo plazo, la probabilidad de que la pareja hermano y hermana sean del tipo $A \times AA$ es 2/3, y la probabilidad de que sean del tipo $a \times aa$ es de 1/3.

EJEMPLO 7.8

Supongamos que al realizar estudios climáticos en una determinada zona de nuestra provincia obtenemos los siguientes datos. Si un día es caluroso, entonces la probabilidad de que el día siguiente sea también caluroso es 0.65, y 0.35 la probabilidad de que haga frío. Por otro lado, si un día es frío, entonces 0.7 es la probabilidad de que el día siguiente siga siendo frío y 0.3 de que sea un día caluroso.

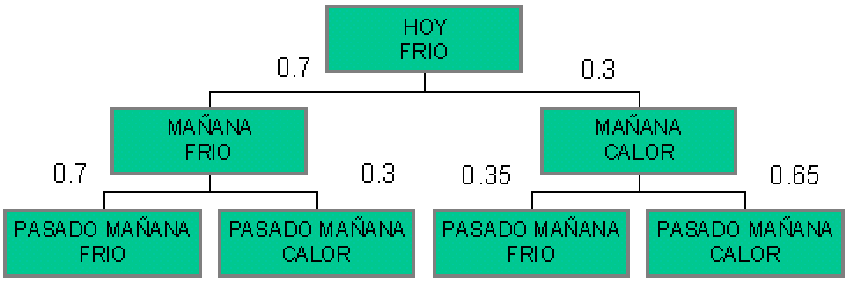


Figura 7.6. Diagrama en árbol.

- Si hoy hace frío, vamos a calcular la probabilidad de que pasado mañana haga frío. Para encontrar la solución podemos utilizar el diagrama de la Figura 7.6. En él observamos que la probabilidad pedida es:

$$0.7 * 0.7 + 0.3 * 0.35 = 0.595\,.$$

Es decir, existe casi un 60 % de posibilidades de que si hoy hace frío pasado mañana también lo siga haciendo. De forma similar, la probabilidad de que si hoy hace frío pasado mañana sea un día caluroso es

$$0.7 * 0.3 + 0.3 * 0.65 = 0.445$$

- El ejemplo también puede resolverse utilizando las cadenas de *Markov*. Existen dos estados E_1 que representa al día frío y E_2 al día caluroso, siendo la matriz estocástica

$$A = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.35 \\ 0.30 & 0.65 \end{pmatrix}.$$

Si hoy hace frío podemos representar esta situación por el vector $\vec{X}(0) = (1,0)^T$. El producto $\vec{X}(1) = A\vec{X}(0)$ nos dará las probabilidades del próximo día, y $\vec{X}(2) = A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0)$ las de pasado mañana

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.35 \\ 0.30 & 0.65 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 * 0.7 + 0.35 * 0.3 \\ 0.3 * 0.7 + 0.65 + 0.3 \end{pmatrix}$$

- Puede probarse fácilmente que La cadena de *Markov* es regular. Por tanto, para realizar un estudio a largo plazo de los diferentes escenarios que pueden presentarse debemos encontrar el valor de la matriz potencia A^n. Si utilizamos el programa `Mathematica`®

```
A := (0.7  0.35
      0.3  0.65)

MatrixForm[MatrixPower[A, 100]]

(0.538462  0.538462
 0.461538  0.461538)

Eigenvalues[A]

{1., 0.35}

Eigenvectors[A]

{{0.759257, 0.650791}, {-0.707107, 0.707107}}

0.759257 / (0.759257 + 0.650791)

0.538462

0.650791 / (0.759257 + 0.650791)

0.461538
```

Conclusión: independientemente de como sea el día de hoy, a largo plazo existe un 53.84 % de posibilidades de que el día sea frío y un 46.16 % de que sea caluroso.

- Si hoy es un día caluroso, ¿cuál es la probabilidad de que dentro de tres días sea un día frío?.

EJEMPLO 7.9

Representemos por $X_1(0)$ e $X_2(0)$ a las poblaciones iniciales de conejos y zorros respectivamente. Se sabe que el número de conejos en cualquier mes es la mitad de la población de conejos del mes anterior y que el número de zorros en dicho mes es la suma de las poblaciones de zorros mas la mitad de la de conejos en el mes anterior. Vamos a calcular las poblaciones de zorros y conejos al cabo de "mucho"tiempo para estudiar la evolución de las poblaciones a largo plazo.

- Sean $X_1(t)$ e $X_2(t)$ las poblaciones de conejos y zorros al cabo de t meses. Del enunciado del ejercicio se deduce

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(t+1) = 0.5X_1(t) \\ X_2(t+1) = 0.5X_1(t) + X_2(t) \end{array} \right. , \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$$

O bien en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} X_1(t+1) \\ X_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} , \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots .$$

Si llamamos

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} , \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots ,$$

entonces

$$\begin{aligned} \vec{X}(1) &= A\vec{X}(0) \\ \vec{X}(2) &= A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0) \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ \vec{X}(t) &= A\vec{X}(t-1) = A^t\vec{X}(0)\,. \end{aligned}$$

Para completar el resto del ejercicio utilizamos el ordenador.

```
A := {{0.5, 0}, {0.5, 1}}
Eigenvalues[A]
```

$\{0.5, \quad 1\}$

```
P := Transpose[Eigenvectors[[A]]
Q := P.DiagonalMatrix[(0.5)^k, 1].Inverse[P]
MatrixForm[Limit[Q, k → Infinity]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como sabemos, inicialmente $X_1(0)$ es la cantidad de conejos e $X_2(0)$ el número de zorros, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_1(0)+X_2(0) \end{pmatrix}.$$

Conclusión: A largo plazo desaparecerán los conejos y la cantidad de zorros será la suma inicial de zorros y conejos.

EJEMPLO 7.10

Supongamos que en una comunidad autónoma la población está dividida en cuatro clases, E_1, E_2, E_3 y E_4, ordenadas de mayor a menor de acuerdo con la riqueza. Una persona que pertenece a una clase en un momento dado puede ascender, mantenerse o descender en el siguiente con probabilidades dadas por la tabla:

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	0.7	0.2	0.1	0
E_2	0.2	0.4	0.1	0.3
E_3	0.1	0.3	0.4	0.2
E_4	0	0.1	0.4	0.5

siendo el elemento P_{ij} la probabilidad de que un individuo que en un momento dado pertenece a la clase j en el siguiente período pertenezca a la clase i.

- Si en el año 2000 el 17 % de la población pertenece a la clase E_1, el 24 % a la E_2, el 30 % a la E_3 y el 29 % a la E_4, podemos calcular la la distribución en el año 2001.

  Sea A a la matriz de transición de esta cadena de *Markov* y el vector $\vec{X}_k$ la situación correspondiente al año k, entonces

$$\vec{X}_{k+1} = A\vec{X}_k$$

$$\vec{X}_{2001} = A\vec{X}_{2000} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.24 \\ 0.30 \\ 0.29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.247 \\ 0.267 \\ 0.289 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo,

$$\vec{X}_{2002} = A\vec{X}_{2001} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.247 \\ 0.267 \\ 0.289 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.214 \\ 0.251 \\ 0.258 \\ 0.276 \end{pmatrix}$$

- Por otro lado, la distribución en 1999 puede calcularse de la siguiente manera,

$$\vec{X}_{2000} = A\vec{X}_{1999} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}_{1999} = A^{-1}\vec{X}_{2000}$$

EJEMPLO 7.11

Los trabajadores de un parque natural se clasifican en 3 categorías profesionales: científicos X_1, personal auxiliar X_2 y colaboradores X_3. En cada generación t representaremos a la fuerza de trabajo del parque por el número de personas incluidas en las tres categorías anteriores, es decir $(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$. Supongamos que

1. Cada trabajador activo sólo tiene un hijo que sigue trabajando en el parque.
2. La mitad de los hijos de los científicos lo son también, la cuarta parta pasa a ser personal auxiliar especializado y el resto es personal colaborador no especializado.
3. Los hijos del personal auxiliar se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes 30 %, 40 %, 30 %
4. Para los hijos de los colaboradores las proporciones de reparto entre las categorías son 50 %, 25 % y 25 %.

- Empezaremos el ejemplo planteando en forma matricial un modelo que represente la distribución de la fuerza de trabajo del parque de generación en generación. Para ello, sea $\vec{X}(0) = (X_1(0),\, X_2(0),\, X_3(0))^T$ el vector de distribución inicial y

$$\vec{X}(t) = (X_1(t),\, X_2(t),\, X_3(t))^T$$

el vector de distribución correspondiente a la generación de orden t. Del enunciado se deduce,

$$\begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.3 & 0.50 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix} \,, \quad \vec{X}(1) = A\vec{X}(0)\,, \cdots, \vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0)\,.$$

Estamos ante una cadena de *Markov* donde el estado E_1 representa a los científicos, E_2 al personal auxiliar, E_3 al personal colaborador y la matriz de transición es A. Es fácil ver que esta cadena es regular siendo el diagrama de estados el que aparece dibujado en la Figura 7.7.

Para estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo podemos calcular la matriz potencia A^t cuando $t \to \infty$. Un valor aproximado será

```
A:={{0.5,0.3,0.5},{0.25,0.4,0.25},{0.25,0.3,0.25}};
MatrixPower[A,500]
```

$\{\{0.44176, 0.44176, 0.44176\},\{0.294118, 0.294118, 0.294118\},$
$\{0.264706, 0.264706\, 0.264706\}\}$

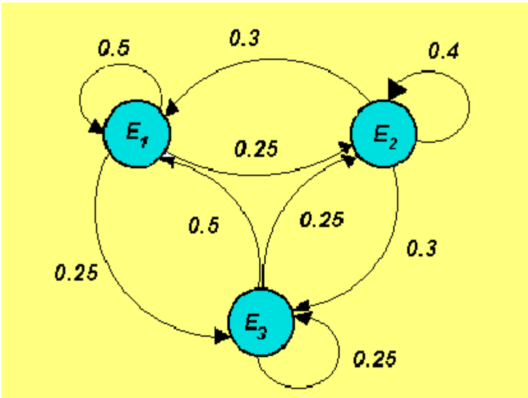


Figura 7.7. Diagrama de estados.

- Puesto que la cadena es regular, podemos utilizar el Teorema 7.2.6, para lo cual necesitamos conocer los valores y vectores propios de la matriz A.

  `Eigenvalues[A]`

  $\{1., 0.15, -1.68812\ 10^{-17}\}$

  `Eigenvectors[A]`

  $\{\{0.744438, 0.496292, 0.446663\},\{0.784465, 0.496292, 0.446663\},$
  $\{-0.707107, -3.18473\ 10^{-16}, 0.707107\}\}$

  La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1

  $$(0.744438,\ 0.496292,\ 0.446663)^T\ ,$$

  una vez normalizado $(0.44,\ 0.29,\ 0.27)^T$.

  Conclusión: La distribución de los trabajadores a largo plazo independientemente de la distribución inicial es

  - el 44 % serán científicos,
  - el 29 % serán personal auxiliar,
  - el 27 % serán personal colaborador.

EJEMPLO 7.12

Supongamos que disponemos de una casa, un granero, un gato y un ratón. Los animales pueden estar los dos en la casa, los dos en el granero o uno en el granero y otro en la casa. Realizamos de forma sucesiva la siguiente experiencia:

Lanzamos dos monedas al aire, si salen dos caras cambiamos al ratón del lugar donde se encuentre. Si salen una cara y una cruz, es el gato el que se cambia. Por último, si salen dos cruces, entonces cambiamos al gato y al ratón del sitio donde se encuentran.

- Si tenemos en cuenta las diferentes opciones para la casa, inmediatamente quedará también determinada las opciones para el granero. Los diferentes estados son:

  1. E_1: la casa está vacía.
  2. E_2: en la casa sólo se encuentra el gato.
  3. E_3: en la casa sólo está el ratón.
  4. E_4: los dos animales están en la casa.

  Observemos que podemos modelizar la situación anterior por medio de una cadena de *Markov* ya que la probabilidad P_{ij} de pasar del estado E_j al E_i sólo depende del i y del j. Por otro lado, como $1/4$ es la probabilidad de sacar dos caras o dos cruces y $1/2$ la probabilidad de que salga una cara y una cruz, entonces la matriz de transición para esta cadena es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Por ejemplo, la probabilidad P_{23} de pasar del estado E_3 al E_2 será pasar de la situación de que el ratón está en la casa y el gato en el granero a la nueva situación de que se permuten los dos animales, y esto obliga a que al lanzar las dos monedas salgan dos caras, cuya probabilidad es $1/4$. De manera similar, P_{43} es la probabilidad de pasar del estado E_3 (ratón el la casa) al estado E_4 (los dos animales están en la casa) y por ello es necesario que en una moneda salga una cara y en la otra una cruz, cuya probabilidad es $1/2$.

- Para estudiar la evolución a largo plazo de esta cadena tenemos que ver en primer lugar si es regular. Para ello al calcular

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 3/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

  observamos que todos sus elementos son no nulos y en consecuencia la matriz A es regular. Por tanto, podemos utilizar los Teoremas 7.2.5 y 7.2.6.

  `Eigenvalues[A]`

  $\{-1/2,\ -1/2,\ 0\ ,\ 1\}$

  `Eigenvectors[A]`

$\{\{0,\ 0,\ -1,\ 1\}, \{-1,\ 1,\ 0,\ 0\},\ \{-1,\ -1,\ 1,\ 1\}, \{1,\ 1,\ 1,\ 1\}\}$

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T\ ,$$

que una vez normalizado $(0.25,\ 0.25,\ 0.25,\ 0.25)^T$.

- Finalmente

$$A^t \longrightarrow \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \quad \text{cuando} \quad t \to \infty\,.$$

Si, por ejemplo, inicialmente la casa se encuentra vacía

$$\vec{X}(0) = (1,\ 0,\ 0,\ 0)^T\,,$$

entonces

$$\vec{X}(t) = A^t \vec{X}(0) = (0.25,\ .25,\ 0.25,\ 0.25)^T\,,$$

y es igual de probable que a largo plazo nos encontremos en cualquiera de los cuatro estados posibles.

EJEMPLO 7.13

- Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la Figura 7.1. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Sabiendo que de los ratones que había en cada compartimento, la mitad va a cada uno de los restantes, veamos como estarán distribuidos los ratones al cabo de "infinitas"semanas.

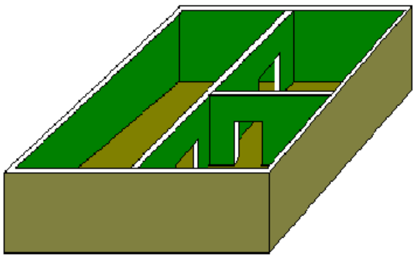


Figura 7.8.

Si $x_i(t)$ representa al número de ratones en el compartimento $i = 1, 2, 3$ en la semana t y $\vec{x}(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T$ es la distribución inicial, deducimos del enunciado que

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x_1(1) = & & \frac{1}{2}x_2(0)+ & \frac{1}{2}x_3(0) \\ x_2(1) = & \frac{1}{2}x_1(0)+ & & \frac{1}{2}x_3(0) \\ x_3(1) = & \frac{1}{2}x_1(0)+ & \frac{1}{2}x_2(0) & . \end{array} \right.$$

Sistema de ecuaciones lineales que puede ser expresado matricialmente de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\vec{x}(1) = A\vec{x}(0)\,.$$

Razonando de la misma manera

$$\vec{x}(2) = A\vec{x}(1) = A^2\vec{x}(0)\,.$$

En general

$$\vec{x}(t) = A^t\vec{x}(0)\,, \quad t = 1,\, 2,\, \cdots\,.$$

En consecuencia, para obtener el número de ratones en cada uno de los compartimentos en la semana t, tendremos que encontrar el valor de la matriz potencia A^t. Una aproximación de este valor podemos obtenerla con el `Mathematica`®

```
A := {{0, 0.5, 0.5}, {0.5, 0, 0.5}, {0.5, 0.5, 0}}
MatrixPower[A, 30] = {0.333333, 0.333333, 0.333333}
MatrixPower[A, 50] = {0.333333, 0.333333, 0.333333}
MatrixPower[A, 400] = {0.333333, 0.333333, 0.333333}
```

Ahora, estamos interesados en deducir este valor de una manera diferente. Observemos que si la matriz A fuese diagonal, entonces A^t sería muy fácil de encontrar, bastaría elevar a t los elementos de la diagonal. Por esta razón, en primer lugar procederemos a diagonalizar la matriz simétrica A (recordemos que toda matriz simétrica es diagonalizable) .

Los valores propios de la matriz A son los siguientes:

$$|A - \lambda\, I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

desarrollando obtenemos la ecuación característica

$$-\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow -4\lambda^3 + 3\lambda + 1 = 0\,,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$. Los vectores propios asociados a estos autovalores son:

$$S_1 =< (1,1,1) >$$

$$S_2 =< (-1,0,1), (-1,1,0) > \,.$$

La matriz de paso será:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la matriz A^t, actuamos de la manera siguiente

$$D = C^{-1}AC \quad \Rightarrow \quad A = CDC^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^t = CD^tC^{-1}\,,$$

que en nuestro caso será

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

simplificando

$$A^t = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1-2(-\frac{1}{2})^t & -1+(-\frac{1}{2})^t & -1+(-\frac{1}{2})^t \\ -1+(-\frac{1}{2})^t & -1-2(-\frac{1}{2})^t & -1+(-\frac{1}{2})^t \\ -1+(-\frac{1}{2})^t & -1+(-\frac{1}{2})^t & -1-2(-\frac{1}{2})^t \end{pmatrix}.$$

Si hacemos que $t \to \infty$, entonces

$$A^t \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

y en consecuencia después de infinitas semanas la distribución de los ratones tiende hacia

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{3}x_1(0) + \tfrac{1}{3}x_2(0) + \tfrac{1}{3}x_3(0) = \tfrac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = \frac{\text{Total}}{3} \\ x_2(t) &= \tfrac{1}{3}x_1(0) + \tfrac{1}{3}x_2(0) + \tfrac{1}{3}x_3(0) = \tfrac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = \frac{\text{Total}}{3} \\ x_3(t) &= \tfrac{1}{3}x_1(0) + \tfrac{1}{3}x_2(0) + \tfrac{1}{3}x_3(0) = \frac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = \frac{\text{Total}}{3} \end{aligned}$$

7.4. Modelo de Leslie

Recordemos que al construir un modelo matemático lo que se intenta es determinar un conjunto de ecuaciones que representen, lo mejor posible, a una situación real. Cuando la variación de una población se realiza en función del tiempo, se obtiene un proceso (continuo o discreto) que recibe el nombre de dinámica de la población, siendo sus objetivos principales el estudiar los cambios numéricos que sufren las poblaciones, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas. En concreto, en ecología de poblaciones interesa encontrar