Tema 8

OTROS MODELOS MATRICIALES

8.1. Introducción

En este tema mostramos algunos ejemplos más elaborados de modelos matriciales que los estudiados en el tema anterior. Se inicia con dos casos prácticos en dinámica de poblaciones. En el primero se realiza una proyección para los próximos años de una colonia de pájaros, tomando como punto de partida los datos reales correspondientes al período 1991 - 1994. En el segundo se prueba como la reducción de una población de ardillas modifica la tasa de crecimiento de la población.

A continuación se presenta un modelo elemental que simula la producción de células rojas del cuerpo humano. Finalmente, se ofrece un modelo que puede ser utilizado en la gestión de un coto de caza o una granja para la explotación duradera de una población de animales y otro modelo para explotar de una forma racional la madera de un bosque.

8.2. Dinámica de una población de pájaros

El Helmeted Honeyeater (*Lichenostomus melanops cassidix*) es un tipo de pájaro de Australia que actualmente se encuentra en peligro de extinción. En esta sección construiremos un modelo matricial con el objetivo de estudiar la evolución de la población en los próximos años, basándonos en los datos que aparecen en la siguiente tabla, correspondientes al período 1991-1994.

Edad	1991	1992	1993	1994
0	26	28	27	29
1	16	17	20	20
2	12	11	13	14
3	9	8	9	10
4	7	6	6	8
5	5	4	5	5
6	4	3	3	4
7	3	3	2	3
8	2	2	2	2
9	1	1	1	2
Total	85	83	88	97

Empezamos definiendo las hipótesis básicas sobre las que construiremos nuestro modelo.

- Dividiremos la población en cinco clases de edades. En la primera de ellas se encontrarán los pájaros hembras de edad 0, es decir de 0 a 12 meses, y en la última las hembras de 4 años o más (de 48 meses en adelante).
- Por la información de que disponemos, supondremos que las hembras de la primera clase no son fértiles y las fertilidades del resto de las clases son iguales.
- Los parámetros de natalidad y supervivencia se mantienen constantes.

En la tabla 8.1 hemos dispuesto el número de pájaros hembras para cada una de las cinco clases en el período 1991-1994.

Clase	1991	1992	1993	1994
1	26	28	27	29
2	16	17	20	20
3	12	11	13	14
4	9	8	9	10
5	22	19	19	24
Total	**85**	**83**	**88**	**97**

Tabla 8.1

Una rápida mirada al número total de individuos, nos permite conjeturar que la población tiende a crecer con el paso del tiempo. Podemos encontrar una primera aproximación de este crecimiento haciendo la media aritmética de los datos que disponemos. Es decir,

$$\frac{\frac{83}{85}+\frac{88}{83}+\frac{97}{88}}{3} = 1.04633\,,$$

la población crece año tras año a una media aproximada del 4.63 %.

Como sabemos, la primera fila de la matriz de transición del modelo, está formada por las tasas de natalidad,

$$a_{11} = 0\,, \quad a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = \frac{\frac{28}{85-26} + \frac{27}{83-28} + \frac{29}{88-27}}{3} = 0.480298\,.$$

Por otro lado, el elemento a_{21} representa al porcentaje de individuos de la primera clase que sobreviven al pasar un año para llegar a la segunda,

$$a_{21} = \frac{\frac{17}{26} + \frac{20}{28} + \frac{20}{27}}{3} = 0.702958\,.$$

De forma similar, el resto de las tasas de supervivencia serán,

$$a_{32} = \frac{\frac{11}{16} + \frac{13}{17} + \frac{14}{20}}{3} = 0.717402$$

$$a_{43} = \frac{\frac{8}{12} + \frac{9}{11} + \frac{10}{13}}{3} = 0.751338$$

$$a_{54} = \frac{\frac{6}{9} + \frac{6}{8} + \frac{8}{9}}{3} = 0.7682\,.$$

Por último, encontramos la probabilidad de que una hembra de la última clase siga permaneciendo a la misma clase en el año próximo,

$$a_{55} = \frac{\frac{13}{22} + \frac{13}{19} + \frac{16}{19}}{3} = 0.705433\,.$$

En consecuencia, el modelo matricial $\vec{X}(t) = A\,\vec{X}(t-1)\,, t = 1, 2, \cdots$ que representa a la dinámica de esta población de Helmeted Honeyeater es:

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \\ X_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 \\ 0.702 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7682 & 0.705 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \\ X_3(t-1) \\ X_4(t-1) \\ X_5(t-1) \end{pmatrix}$$

Si tomamos como vector inicial

$$\vec{X}0) = (26, 16, 12, 9, 22)^T\,,$$

podemos saber la "bondad"del modelo, calculando el número de individuos en las siguientes generaciones. De esta manera, para el año 1992 el modelo predice

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \\ X_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 \\ 0.702 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7682 & 0.705 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 16 \\ 12 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 28 \\ 18 \\ 11 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix}$$

En la tabla siguiente pueden verse las proyecciones de la población para distintas generaciones,

Clase	1991	1992	1993	1994	1995	2011	2012
1	26	28	29	31	32	69	73
2	16	18	20	21	22	47	49
3	12	11	13	14	15	32	33
4	9	9	9	10	11	23	24
5	22	22	23	23	23	51	53
Total	**85**	**88**	**94**	**99**	**103**	**222**	**232**

El modelo prevé un crecimiento de la población con una tasa

$$\frac{\frac{88}{85}+\frac{94}{88}+\frac{99}{94}+\frac{103}{99}}{4}=1.048\,,$$

del 4.8 %, muy parecida a la obtenida con los datos reales de los primeros años. Además, en el período 2011 - 2012 la población se espera que crezca $232/222 = 1.04505$, un 4.5 %.

Si utilizamos el programa `Mathematica`® para conocer los valores y vectores propios de la matriz A, obtenemos $\lambda_1 = 1.04897$ como valor propio dominante y

$$\vec{U}_1 = (0.659,\, 0.441,\, 0.301,\, 0.216,\, 0.482)^T\,,$$

su vector propio asociado. En consecuencia, a largo plazo, la población crecerá a un ritmo del 4.897 % anual, y los porcentajes de hembras en cada una de las clases se mantendrán constantes, tal y como puede observarse en la Figura 8.1.

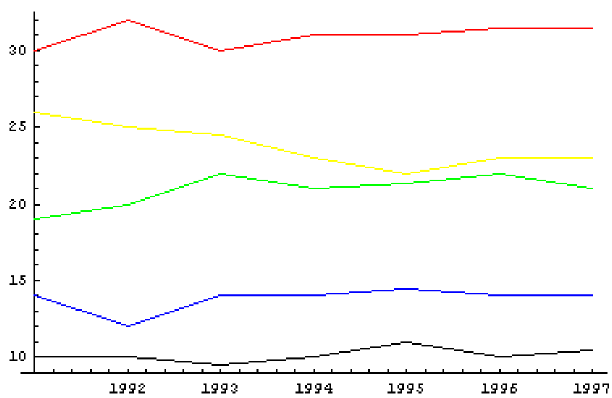

Figura 8.1. Rojo=clase 1, verde=clase 2, azul=clase 3, negro=clase 4, amarillo=clase 5

8.3. Dinámica de una población de ardillas

Recordemos que entendemos por dinámica de la población a la variación del número de individuos de una población en función del tiempo. Como un caso particular de este tipo de dinámica, mostraremos un ejemplo concreto que corresponde a la evolución a largo plazo de una población de ardillas (*Spermophilus armatus*).

Estas ardillas pueden encontrarse en el estado de Utah en USA, y suelen despertarse de la invernación cada año a finales de Marzo o primeros del mes de Abril, dependiendo de las condiciones climatológicas. Las hembras paren muy rápidamente después de despertar y establecer su territorio. En los primeros días de Mayo nacen las crías y las ardillas jóvenes dejan sus madrigueras aproximadamente tres semanas después. Durante los meses de Junio y Julio todas las clases de edades y sexos son activas. Finalmente, los adultos comienzan la hibernación a finales de Julio, de tal manera que en Septiembre todas las ardillas están de nuevo invernando en sus madrigueras.

La investigación se realizó en dos fases, la primera de ellas se desarrolló desde 1964 a 1968, y se dejó plena libertad a la población. En este caso, el número de ardillas fluctuó entre 178 y 255, con una media de 205. La primera parte de la tabla 8.2 corresponde a la tabla de vida durante esa primera etapa.

La segunda fase se desarrolló entre los años 1968 - 1971 y los investigadores intervinieron reduciendo la población a 100 ardillas. La segunda parte de la tabla 8.2 muestra su tabla de vida, para esta segunda etapa.

x(año)	l(x)	b(x)	l(x)	b(x)
0.00	1.000	0.00	1.000	0.00
0.25	0.662	0.00	0.783	0.00
0.75	0.332	1.29	0.398	1.71
1.25	0.251	0.00	0.288	0.00
1.75	0.142	2.08	0.211	2.24
2.25	0.104	0.00	0.167	0.00
2.75	0.061	2.08	0.115	2.24
3.75	0.026	2.08	0.060	2.24
4.75	0.011	2.08	0.034	2.24
5.75	0.000	0.00	0.019	2.24
6.75	-	-	0.010	2.24
7.75	-	-	0.000	0.00

Tabla 8.2.

Si analizamos los resultados utilizando como software `Populus`®, observamos que durante la primera de las fases las tasas de nacimientos y muertes estaban equilibradas, generando una tasa de crecimiento negativo (r=-0.0207 ardillas/(ardillas× año)).

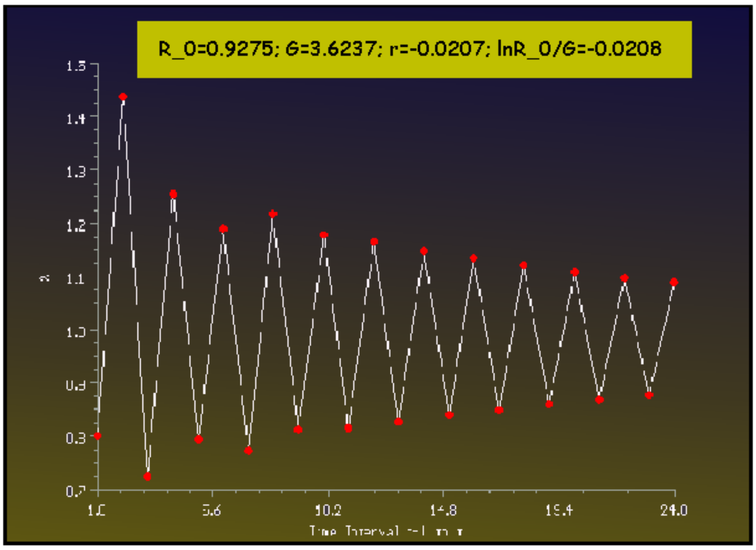

Figura 8.2 Evolución de $\lambda = e^r$ (primer caso)

En la Figura 8.2 se aprecia que a medida que aumentamos el número de años, $\lambda = e^r$ tiende al valor 0.979512.

La Figura 8.3 representa la distribución estable de clases

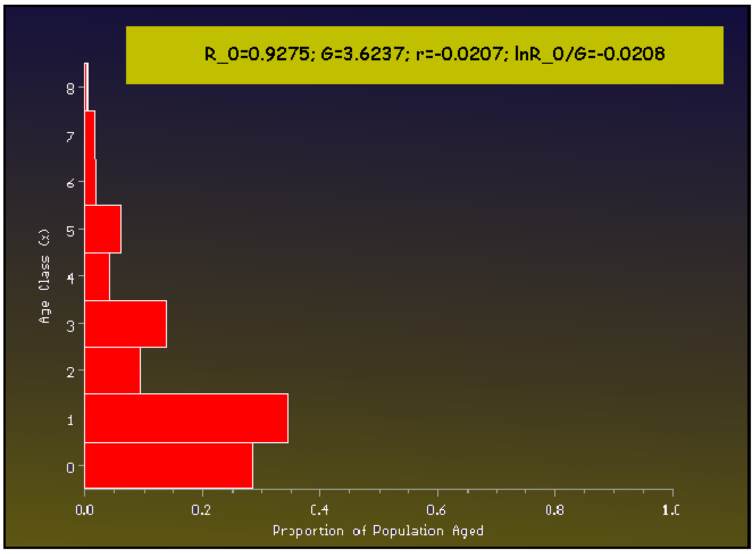

Figura 8.3. Distribución por edades (primer caso)

Cuando se reduce la densidad de población de ardillas, la natalidad supera a la mortalidad y se produce un aumento considerable en la tasa de crecimiento (r=0.1267 ardillas/(ardillas× año))

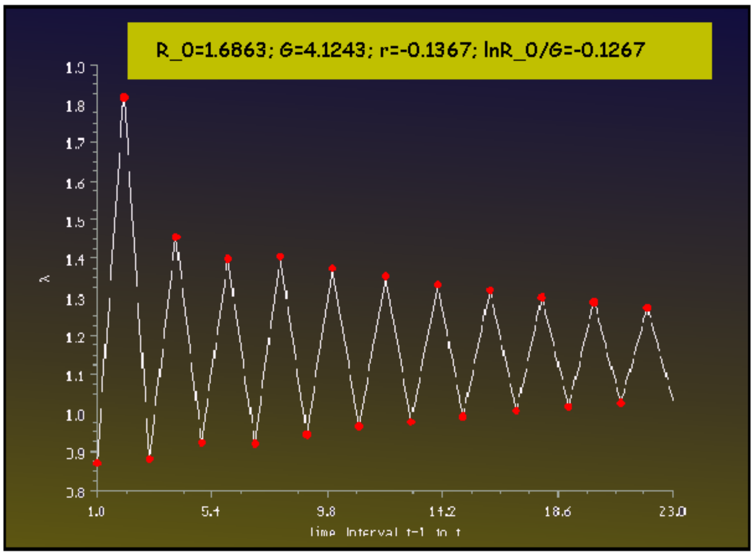

Figura 8.4. Representación gráfica de λ (segundo caso)

La Figura 8.4 muestra como ahora la estabilidad en las clases de edad tiene una tendencia diferente a la primera de las fases estudiadas.

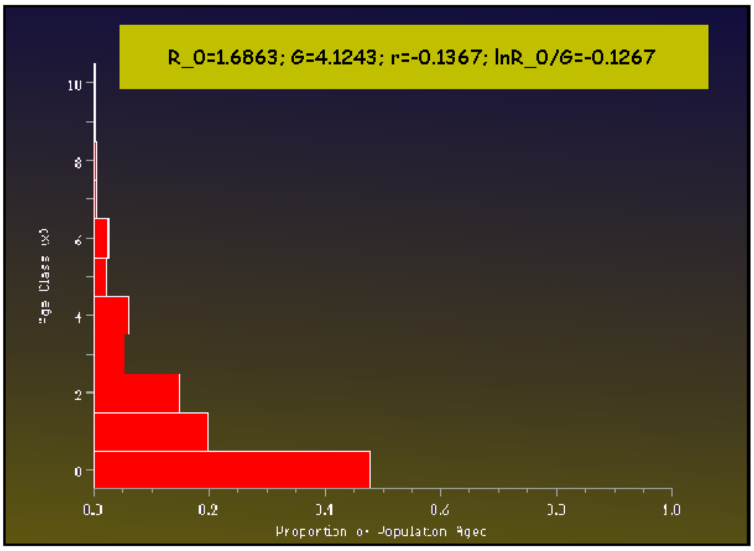

Figura 8.5. Distribución por edades (segundo caso)

En conclusión, la reducción en la densidad de la población pone de manifiesto que el agrupamiento tiene muchos efectos escondidos detrás de una determinada tasa de crecimiento. Por ejemplo, la natalidad, la mortalidad y la estabilidad en la estructura de edad, son muy sensibles a la densidad de la población.

8.4. Modelo para la producción de células rojas

En el sistema circulatorio las células rojas son las encargadas de transportar el oxígeno a través del cuerpo. En este proceso son destruidas y reemplazadas de forma constante, por lo que su número debe mantenerse en un nivel fijo. Nos proponemos construir un modelo muy simple que simule la producción de estas células rojas en el cuerpo, para lo cual empezamos considerando unas hipótesis básicas de partida.

1.- El bazo filtra y destruye una cierta fracción de células al día.

2.- La médula ósea produce un número proporcional al número de células perdidas en el día anterior.

Tomando a estas restricciones como punto de partida, nuestro objetivo será determinar el número de células rojas existente para un día cualquiera k Para ello, representaremos por,

- R_k al número de células rojas en circulación en el día k.
- M_k al número de células rojas producidas por la médula en el día k.
- α a la fracción destruidas por el bazo.
- γ a la producción constante (número producido por número perdido.)

De las hipótesis y definiciones anteriores se deduce que,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} R_{k+1} & = & (1-\alpha)R_k + M_k \\ M_{k+1} & = & \gamma\alpha R_k \end{array} \right.$$

o bien, matricialmente

$$\begin{pmatrix} R_{k+1} \\ M_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \gamma\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_k \\ M_k \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(k+1) = A\vec{X}(k), \quad k = 1, 2, 3, \cdots .$$

Para estudiar su evolución en el tiempo, es necesario encontrar la potencia de la matriz A, ya que $\vec{X}(k) = A\vec{X}(k-1) = A^k\vec{X}(0)$. Necesitamos conocer, en primer lugar, los valores propios de la matriz A.

$\texttt{A} := \{\{\texttt{1} - \alpha\}, \{\gamma\alpha, \texttt{0}\}\}$
$\texttt{Eigenvalues[A]}$

$$\{\frac{1-\alpha-\texttt{Sqrt}[(-1+\alpha)^2+4\alpha\gamma]}{2}\}, \frac{1-\alpha+\texttt{Sqrt}[(-1+\alpha)^2+4\alpha\gamma]}{2}\} \tag{8.1}$$

Veamos a continuación que el comportamiento del modelo dependerá de los valores propios de la matriz de transición A.

- **Si los dos autovalores son menores que uno** y $D = C^{-1}AC$ es la matriz diagonal, entonces D^k tiende a la matriz nula cuando $k \to \infty$. En consecuencia, $A^k = CD^kC^{-1}$ tiende a largo plazo a la matriz nula, y **en el cuerpo no quedarán células rojas**.

- **Si al menos uno de los autovalores es más grande que uno**, entonces D^k crecerá cuando $k \to \infty$, y A^k también lo hará. Esto significa que **el número de células rojas aumentará de forma continua con el tiempo** y llegará un momento en el que el individuo fallecerá.

- Entonces la única forma de **mantener constante el número de células rojas, sería cuando existiese un valor propio dominante que valiese uno**.

Pero teniendo en cuenta (8.1), esto último ocurrirá si y sólo si $\gamma = 1$. Supongamos, por tanto, que $\gamma = 1$ con $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\alpha$, si calculamos los vectores propios asociados

$$\vec{U}_1 = (1,\, \alpha), \quad \vec{U}_2 = (1,\, -1)\,.$$

que nos permiten escribir

$$A^k = CD^kC^{-1} = \frac{1}{1+\alpha}\begin{pmatrix} 1+\alpha(-\alpha)^k & 1-(-\alpha)^k \\ \alpha(1-(-\alpha)^k) & \alpha+(-\alpha)^k \end{pmatrix},$$

y deducir

$$R(k) = \frac{1}{1+\alpha}\left((1+\alpha(-\alpha)^k)R(0) + (1-(-\alpha)^k)M(0)\right)\,.$$

Como la fracción de células rojas α es reemplazada por el bazo cada día, si k es suficientemente grande, entonces $R(k)$ tiende al valor de equilibrio R^*, siendo

$$R^* = \frac{R(0)+M(0)}{1+\alpha}\,. \tag{8.2}$$

Conclusiones:

1.- Al ser $(-\alpha)$ negativo, al calcular $(-\alpha)^k$ con $k \to \infty$, el número de células rojas oscilará (dependiendo de que k sea par o impar) para aproximarse al punto de equilibrio (8.2). Una posible explicación biológica de este hecho puede deberse al efecto de retardo, ya que el número de células rojas que la médula ósea produce hoy está en función de las que se destruyeron ayer.

2.- La convergencia hacia el punto de equilibrio (8.2) será muy rápida si α es pequeño, y esto significaría que el bazo filtra pocas células rojas del día anterior.

3.- Cuando se extrae sangre se reducen las cantidades $R(0)$ y $M(0)$ y hay una reducción en el punto de equilibrio que no se recupera con el tiempo. Este comportamiento del modelo entra en contradicción con la realidad, y por ello es necesario modificarlo. Una posible mejora sería

$$\left\{\begin{array}{lcl} R_{k+1} & = & (1-\alpha)R_k + \varepsilon \\ M_{k+1} & = & \gamma\alpha R_k \end{array}\right.,$$

ya que ahora el punto de equilibrio sería constante de valor ε/α.

8.5. Explotación de una población de animales

Entendemos por explotación a la separación de algunos animales para su venta o sacrificio. Nosotros nos limitaremos a lo que se conoce como política de explotación duradera, lo cual significa:

- *Diremos que una explotación es duradera, si el rendimiento que se obtiene al término de cada período es el mismo y la distribución de las edades de la población se conserva al separar el rendimiento de cada período.*

Por tanto, la población animal no se agota, solo se explota el excedente debido al crecimiento. La idea básica del modelo que queremos construir es el siguiente. Se parte de una población con una determinada distribución de las edades. Esta población tiene un período de crecimiento descrito por una matriz de *Leslie*. Al término de este período, se obtiene como rendimiento una fracción de cada una de las clases de edades. La duración del período de separación de los animales que conforman el rendimiento, debe ser breve en comparación con el período de crecimiento (para que el crecimiento o los cambios de la población sean despreciables en dicho período de separación). Finalmente, la población debe quedar con la misma distribución de las edades que la población original. Este ciclo se repite después de cada separación y por tanto, el rendimiento es duradero. Sea:

$$\vec{X} = (X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4,)^T \ ,$$

el vector de distribución de las edades de la población al inicio del período de crecimiento; X_i es el número de hembras de la clase de orden i que sigue formando parte de la población (que no se separan como rendimiento). La duración de cada clase debe ser igual a la duración del período de crecimiento. Por ejemplo, si el rendimiento se separa una vez al año, la población tendrá que dividirse en clases de un año.

Sea L la matriz de *Leslie* que describe el crecimiento de la población; por lo tanto, $L\vec{X} =$ será el vector de la distribución de las edades de la población al término del período de crecimiento (esto es, inmediatamente antes de la separación). Sea h_i con $i = 1, 2, 3, 4$, la fracción de hembras que se va a separar de las clases de orden i. Entonces en la primera clase, después de un período de crecimiento se pasa de X_1 hembras a,

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4\,,$$

siendo el número de hembras que se separan

$$h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4)\,,$$

y en consecuencia

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 - h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4)\,,$$

serán las hembras que quedan en la primera clase después de la separación. Por tanto,

$$X_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 - h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4)\,.$$

Del mismo modo, en la segunda clase

$$b_1X_1 - h_2b_1X_1 = X_2\,,$$

y en la tercera y cuarta clase

$$\begin{array}{c} b_2X_2 - h_3b_2X_2 = X_3 \\ b_3X_3 - h_4b_3X_3 = X_4\,. \end{array}$$

Las ecuaciones anteriores podemos expresarlas matricialmente,

$$\begin{array}{rcl} (1-h_1)(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) & = & X_1 \\ (1-h_2)b_1X_1 & = & X_2 \\ (1-h_3)b_2X_2 & = & X_3 \\ (1-h_4)b_3X_3 & = & X_4 \end{array} \tag{8.3}$$

Es posible realizar un razonamiento similar de forma más simplificada, haciendo uso del álgebra matricial. Sea

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{pmatrix},$$

la matriz de separación de cada una de las clases. Si tenemos en cuenta lo que entendemos por una política duradera tenemos:

- La distribución de las edades al final del período de crecimiento ($L\vec{X}$) menos el rendimiento ($HL\vec{X}$) será igual a la distribución de las edades al comienzo del período de crecimiento ($\vec{X}$).

O bien,

$$L\vec{X} - HL\vec{X} = \vec{X} \quad \Rightarrow \quad (I-H)L\vec{X} = \vec{X}\,. \tag{8.4}$$

Las ecuaciones (8.3) y (8.4) son idénticas e indican que $\vec{X}$ es un vector propio de la matriz $(I-H)L$ asociado al valor propio $\lambda = 1$. Por esta razón, los valores de h_i y $\vec{X}$ que aparecen en el modelo no pueden tomar cualquier valor, sino que por el contrario estarán sometidos a ciertas restricciones que a continuación analizaremos.

Sabemos que la matriz de *Leslie* es,

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $(I-H)L$ vale,

$$\begin{pmatrix} (1-h_1)a_1 & (1-h_1)a_2 & (1-h_1)a_3 & (1-h_1)a_4 \\ (1-h_2)b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-h_4)b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos, que esta matriz es del mismo tipo que una matriz de *Leslie* y sabemos que la condición necesaria y suficiente para que una matriz de este tipo tenga como valor propio la unidad es que su tasa neta de reproducción R sea igual a 1. En nuestro caso:

$$\begin{array}{ll} (1-h_1)(a_1 + a_2b_1(1-h_2) + a_3b_1b_2(1-h_2)(1-h_3) & \\ +a_4b_1b_2b_3(1-h_2)(1-h_3)(1-h_3)) & = 1 \end{array} \tag{8.5}$$

Esta ecuación, proporciona unas restricciones para las fracciones h_i de separación de los animales. Solo aquellos valores que cumplan esta ecuación y pertenezcan al intervalo $(0,1)$ dan origen a un rendimiento duradero.

Si h_i con $i=1,2,3,4$ satisfacen la ecuación (8.5), la matriz $(I-H)L$ tiene como valor propio $\lambda_1 = 1$ y además este valor propio tiene grado de multiplicidad 1 (ya que el valor propio positivo de una matriz de *Leslie* tiene siempre multiplicidad uno). Por tanto, solo existe un vector propio $\vec{X}$ linealmente independiente que cumple la ecuación,

$$(I-H)L\vec{X} = \vec{X}\,,$$

de valor,

$$\vec{X} = \vec{U}_1 = (1,\, b_1(1-h_2),\, b_1b_2(1-h_2)(1-h_3),\, b_1b_2b_3(1-h_2)(1-h_3)(1-h_4))^T\,.$$

Este vector, determinará la fracción de hembras que quedará en cada una de las 4 clases después de la separación si se sigue una política de explotación duradera. El número de animales suele estar condicionado por restricciones, por ejemplo del tipo ecológico (espacio, tipo de especies) o económico (precio de venta de los animales de cada clase).

8.5.1. Explotación uniforme

Suele ocurrir con frecuencia que en muchas poblaciones es difícil distinguir o capturar animales de una determinada edad. Por este motivo, es razonable pensar que la captura se realiza al azar, lo que equivale suponer que se separa la misma fracción en cada una de las clases. En consecuencia, un primer caso de estudio es

$$h = h_1 = h_2 = h_3 = h_4\,.$$

Entonces, la ecuación $(I-H)L\vec{X} = \vec{X}$, se convertirá en

$$(1-h)L\vec{X} = \vec{X} \quad \Rightarrow \quad L\vec{X} = \left(\frac{1}{1-h}\right)\vec{X}\,.$$

De este modo, $1/(1-h)$ debe ser el valor propio único positivo λ_1 de la matriz de crecimiento de *Leslie*, L

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-h}\,.$$

Despejando h se obtiene

$$\boxed{h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}\,.}$$

El vector $\vec{X}$ es, en este caso, igual al vector propio de L correspondiente al valor propio λ_1

$$\boxed{\vec{X} = \left(1,\, \frac{b_1}{\lambda_1},\, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2},\, \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3}\right)^T\,.}$$

Del valor de h encontrado, podemos deducir que, cuanto mayor sea λ_1, mayor será la fracción de los animales que se pueden separar de la población sin agotarla. Se observa también que si $\lambda_1 > 1$, la fracción a separar h se encuentra en el intervalo $(0,1)$. Esto era de esperar ya que $\lambda_1 > 1$ significa que la población aumenta con el paso del tiempo.

8.5.2. Separación de la clase de menor edad

En algunas poblaciones, las hembras más jóvenes son las únicas que tienen valor económico. Por ello, sólo se separan las hembras de la clase de menor edad y por ello,

$$h_1 = h\,, \qquad h_2 = h_3 = h_4 = 0\,.$$

Bajo estas consideraciones, la ecuación (8.5) se transformará en

$$(1-h)(a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_4 b_1 b_2 b_3) = 1\,,$$

o lo que es lo mismo $(1-h)R = 1$, siendo R la tasa neta de reproducción de la población, correspondiente a la matriz L. Luego,

$$\boxed{h = 1 - \frac{1}{R}\,.}$$

En esta ecuación se observa que una política de explotación duradera se logra cuando $R > 1$, lo que equivale a que crezca la población.

El vector de la distribución de las edades después de la separación es proporcional al vector

$$\boxed{\vec{X} = (1,\, b_1,\, b_1 b_2,\, b_1 b_2 b_3)^T\,,}$$

ya que $\lambda_1 = 1$. En efecto, $(I-H)L\vec{X} = \vec{X}$,

$$\begin{pmatrix} (1-h)a_1 & (1-h)a_2 & (1-h)a_3 & (1-h)a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \vec{X} = \vec{X}\,.$$

En este caso la tasa neta de reproducción $R' = 1$ será

$$R' = (1-h)[a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_4 b_1 b_2 b_3] = (1-h)R = 1\,.$$

EJEMPLO 8.1

Una cierta población de animales está dividida en tres clases de edades de un año de duración y la matriz de *Leslie* correspondiente es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0, & 1/4, & 0 \end{pmatrix}$$

- **Separación uniforme.** Como hemos demostrado, en este caso la fracción que debemos separar, viene dada por la expresión

  $$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}\,.$$

  Necesitamos conocer los valores propios de la matriz L

  $$|L - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1.5\ ,\ \lambda_2 = -1.31\ ;\ \lambda_3 = -0.19\,,$$

  y en consecuencia, la fracción buscada es

  $$h = 1 - \frac{1}{1.5} = \frac{1}{3}\,.$$

  Es decir, de cada una de las clases de edades, debemos elegir la tercera parte de los animales.

  Para encontrar el vector de distribución que quedaría después de cada separación,

  $$\vec{X} = \left(1,\, b_1/\lambda_1,\, b_1 b_2/\lambda_1^2\right)^T = (1,\, 1/3,\, 1/18)^T\ .$$

- **Separación de la clase de menor edad**. Actuamos de la misma manera que en el caso anterior, pero teniendo en cuenta que

  $$h = 1 - \frac{1}{R}\,,$$

  siendo R la tasa neta de reproducción de la matriz L

  $$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 = 0 + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{8}\,.$$

  Luego,

  $$h = 1 - \frac{8}{19} = \frac{11}{21}\,.$$

  El vector de distribución de las edades será:

  $$\vec{X} = (1,\, b_1,\, b_1 b_2)^T = \left(1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{8}\right)^T\ .$$

EJEMPLO 8.2

Para una cierta especie de ovejas domésticas de Nueva Zelanda, cuyo período de crecimiento es de un año, se encontró la siguiente matriz de *Leslie*

$$
L = \begin{pmatrix}
0.0 & 0.045 & 0.391 & 0.472 & 0.484 & 0.546 & 0.543 & 0.502 & 0.468 & 0.459 & 0.433 & 0.421 \\
0.845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.691 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.561 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.370 & 0
\end{pmatrix}
$$

En cada uno de los casos estudiados, encontraremos la fracción h a separar, y el vector de la distribución de las edades de las ovejas, después de cada separación.

- **Separación uniforme.** Para conocer la fracción h necesitamos en primer lugar saber el valor propio positivo λ_1. Para ello, utilizamos el ordenador y puede comprobarse que $\lambda_1 = 1.17557$

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1} = 1 - \frac{1}{1.17557} = 0.15\,.$$

Entonces, la política de explotación uniforme consiste en separar, cada año, el 15 % de las ovejas en cada una de las doce clases.

A continuación encontramos la distribución de las edades de las ovejas, después de cada separación. En este caso, es proporcional al vector

$$\vec{X} = \left(1,\, \frac{b_1}{\lambda_1},\, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2},\, \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3}, \cdots, \frac{b_1 \cdots b_{11}}{\lambda_1^{11}}\right)^T = (1,\, 0.719,\, 0.59619,\, \cdots)^T\,.$$

Por cada 1000 ovejas cuya edad está comprendida entre 0 y 1 año después de la separación, hay 719 ovejas cuya edad está comprendida entre 1 y 2 años, 596 entre 2 y 3 y así sucesivamente.

- **Separación de la clase de menor edad.** El segundo caso se resuelve con la misma técnica empleada en el ejemplo anterior. La tasa neta de reproducción es

$$
\begin{aligned}
R &= a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1} = \\
&= (0 + (0.045)(0.845) + \cdots + (0.421)(0.845) \cdots = 2.513
\end{aligned}
$$

La fracción que se separa de la primera clase es

$$h = 1 - \frac{1}{R} = 1 - \frac{1}{2.513} = 0.602\,.$$

La distribución de las edades de la población de ovejas, después de la separación, es proporcional al vector

$$\vec{v_1} = (1, 0.845, 0.824, 0.795, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.060)^T\,.$$

Si hacemos el producto $L\vec{U}_1$ obtenemos

$$(2.513, 0.845, 0.824, 0.795, 0.755, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.060)^T\,,$$

que es el vector de la distribución de las edades inmediatamente antes de la separación. La suma total de todas ellas es 8.518, por lo que la primera, 2.513 supone el $29,5\,\%$ del total. Esto significa que, inmediatamente antes de la separación, el $29.5\,\%$ de la población está en la clase de menor edad. Como en esta clase se separa el $60.2\,\%$, se concluye que cada año el rendimiento equivale al $17.8\,\%$ de la población total de ovejas.

EJEMPLO 8.3

Supongamos que disponemos de una granja con una capacidad para 1760 cerdas. Hemos dividido la población en tres clases de edad: jóvenes, medianas y adultas, cuyos precios de venta son 36 euros, 30 euros y 42 euros respectivamente.

La tabla siguiente corresponde a la distribución en las tres clases en los años 1998 y 2000:

Edad	Núm. en 1998	Núm. crías 1998-2000	Núm. 2000
$[0,2)$	160	160	1360
$[2,4)$	300	1200	80
$[4,6]$	100	0	0

Realizaremos un estudio para deducir si es más rentable económicamente sacrificar el mismo número de animales de cada una de las clases o si por el contrario interesa sólo sacrificar una parte de los animales más jóvenes.

- Para saber el crecimiento de la población es necesario conocer la matriz de *Leslie*, y en concreto los parámetros de natalidad y supervivencia de la población.

  $$a_1 = \frac{160}{160} = 1\,, \quad a_2 = \frac{1200}{300} = 4\,, \quad a_3 = \frac{0}{100} = 0\,, \quad b_1 = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}\,, \quad b_2 = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}\,.$$

  El modelo matricial será,

  $$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \\ X_3(t-1) \end{pmatrix}$$

- Para la **separación uniforme** de las hembras, es necesario encontrar el valor propio estrictamente dominante de matriz de *Leslie* así como su vector propio asociado.

  $$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2/3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\, \lambda_2 = 0,\, \lambda_3 = -1\,.$$

  Como el valor propio dominante es $\lambda_1 = 2$, la fracción que debemos separar de cada una de las clases es

  $$h = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

  el $50\,\%$. A continuación necesitamos el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$,

  $$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 2/3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x - 2y & = & 0 \\ \frac{2}{3}y - 2z & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 4\alpha \\ y = \alpha \\ z = \frac{1}{3}\alpha \end{array}\right.$$

Por tanto, el subespacio unidimensional de vectores propios asociados al $\lambda_1 = 2$ viene expresado por

$$S = \{(4\alpha,\, \alpha,\, 1/3\alpha) \,:\, \alpha \neq 0\}\,,$$

el cual es generado por el vector (4, 1, 1/3), o bien uno proporcional (12, 3, 1).

Recordemos que una manera alternativa de encontrar este vector propio es,

$$\vec{U}_1 = \left(1,\, \frac{b_1}{\lambda_1},\, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}\right)^T = \left(1,\, \frac{1/2}{2},\, \frac{1/2 * 2/3}{2^2}\right)^T = \left(1,\, \frac{1}{4},\, \frac{1}{12}\right)^T\,.$$

A la vista del vector propio, debemos repartir los 1760 animales entre las tres clases en la proporción 12 : 3 : 1,

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1760}{16} * 12 & = & 1320 & \text{animales en la primera clase} \\[2ex] \dfrac{1760}{16} * 3 & = & 330 & \text{animales en la segunda clase} \\[2ex] \dfrac{1760}{16} * 1 & = & 110 & \text{animales en la tercera clase}\,. \end{array}$$

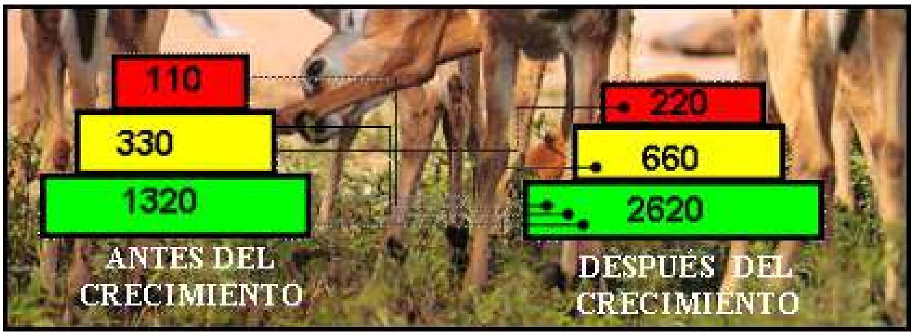

Figura 8.6. Distribución de las hembras antes y después de un período de crecimiento.

Ahora, debemos esperar un período de crecimiento (dos años),

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1320 \\ 330 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2620 \\ 660 \\ 220 \end{pmatrix}.$$

Finalmente el número de animales que separamos de la primera clase será de,

$$2620 - 1320 = 2620 * \frac{1}{2} = 1320\,,$$

de la segunda,

$$660 - 330 = 660 * \frac{1}{2} = 330\,,$$

y de la tercera

$$220 - 110 = 220 * \frac{1}{2} = 110\,.$$

De esta manera, el beneficio obtenido es de

$$1320 * 36 + 330 * 30 + 110 * 42 = 62040 \quad \text{euros}\,.$$

- Para conocer la fracción a separar en el segundo tipo correspondiente a la separación de la **clase de la menor edad**, calculamos la tasa neta de reproducción,

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 = 1 + \frac{4}{2} = 3\,,$$

entonces $h = 1 - 1/R = 1 - 1/3 = 2/3$, es decir un 66 % de las cerdas más pequeñas.

Al igual que en el caso anterior es necesario repartir los 1760 animales en las tres clases, por ello

$$\vec{X} = (1,\, b_1,\, b_1 b_2)^T = \left(1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}\right)^T\,,$$

lo cual indica que la proporción buscada es 6 : 3 : 2. Estos porcentajes obligan a que 960 de los 1760 cerdas deben corresponder a las jóvenes, 480 a las medianas y 320 a las adultas. Por tanto, después de dos años el número de animales en cada una de las clases será de

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 960 \\ 480 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2880 \\ 480 \\ 320 \end{pmatrix}.$$

El número de animales jóvenes que debemos separar será de $2880 - 960 = 2880 * 2/3 = 1920$, cuya venta supone un beneficio de $1920 * 36 = 69120$ euros.

- **Conclusión:** Interesa vender el 66 % de las hembras más jóvenes.

Para terminar, insistimos en el hecho de que es posible establecer muchas políticas diferentes de explotación duradera, todas aquellas que cumplan la restricción dada por la ecuación (8.5). Es evidente, que cada una de estas políticas dará lugar a un beneficio distinto y una cuestión básica es conocer cuál de ellas proporciona un beneficio máximo. Este problema es muy interesante de responder pero su resolución escapa de los objetivos del curso ya que para poderlo abordar es necesario tener nociones de programación lineal.

8.6. Modelo para la explotación de un bosque

Supongamos que disponemos de un bosque de pinos que deseamos explotarlo como árboles para madera. Para ello, cada período de tiempo (dependiendo de la matriz de crecimiento) cortamos y vendemos algunos de estos árboles. Por cada pino cortado, se planta en el mismo lugar otro. De esta manera, el número de árboles del bosque se conserva constante[1]. Como es natural, los árboles de diferentes alturas tendrán diferentes precios. Para concretar, dividimos los árboles en cuatro clases de alturas,

[1] *En este modelo simplificado no se tendrá en cuenta los árboles que mueren entre dos temporadas de corte. Supondremos que cada árbol del almácigo que se planta, sobrevive y crece hasta que se corta para su venta*

siendo p_i con $i = 1, 2, 3, 4$ el precio de un árbol que se encuentra en la clase i.

La primera clase está formada por los árboles cuya altura está comprendida en el intervalo $[0, h_1)$ y es normal suponer que no tienen valor económico ($p_1 = 0$). La clase de orden 4 está formada por los árboles de altura igual o mayor que h_3. Representaremos por X_i con $i = 1, 2, 3, 4$ al número de árboles comprendido en la clase de orden i, que quedan sembrados después de cada temporada de corte. Con estos números puede formarse un vector

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T ,$$

que se conoce con el nombre de vector de árboles no cortados.

Para que la explotación del bosque sea duradera, éste tiene que recuperar después de cada temporada de corte, la configuración fija dada por el vector de árboles no cortados, $\vec{X}$.

Uno de los objetivos fundamentales de esta sección será encontrar los vectores de árboles no cortados $\vec{X}$, que hagan posible la explotación duradera. Como el número total de árboles del bosque es fijo, se cumple

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N ,$$

donde la cantidad N dependerá, por ejemplo, del terreno disponible y del espacio requerido por cada árbol. Entre dos temporadas de corte, los árboles crecen dando una configuración al bosque igual a la de antes de cada temporada de corte. En esta temporada, se cortan un cierto número de árboles de cada clase. Finalmente, se planta un árbol en el lugar de cada uno de los árboles cortados de forma que el bosque recupere la configuración inicial.

Si nos encontramos entre dos temporadas de corte, un árbol de la clase i puede crecer de forma que pase a ser de una clase de mayor altura o bien, tener por alguna razón un crecimiento retardado y permanecer dentro de la misma clase. En consecuencia, es necesario definir los siguientes parámetros de crecimiento, g_i, para $i = 1, 2, 3, 4$:

1.- g_i = la fracción de árboles de la clase de orden i que crecen y pasan a la clase de orden $i + 1$ durante un período de crecimiento.

2.- $1 - g_i$ = la fracción de árboles de la clase de orden i que permanecen dentro de la clase de orden i durante su crecimiento.

- Después de un período de crecimiento, el número de árboles en cada una de las clases será,

$$\begin{aligned}
\text{Primera} &= (1 - g_1)X_1 \\
\text{Segunda} &= g_1X_1 + (1 - g_2)X_2 \\
\text{Tercera} &= g_2X_2 + (1 - g_3)X_3 \\
\text{Cuarta} &= g_3X_3 + X_4
\end{aligned}$$

- Supongamos que en una temporada se cortan Y_i, $i = 1, 2, 3, 4$ árboles de la clase de orden i. Al vector $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)^T$ se conoce con el nombre de vector de árboles cortados,

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1-g_1)X_1 - Y_1 \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1-g_2)X_2 - Y_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1-g_3)X_3 - Y_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 - Y_4 \end{array}$$

- Y plantamos el mismo número de árboles cortados

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1-g_1)X_1 - Y_1 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1-g_2)X_2 - Y_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1-g_3)X_3 - Y_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 - Y_4 \end{array}$$

- Finalmente la configuración del bosque debe coincidir con la que tenía antes del período de crecimiento,

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1-g_1)X_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = X_1 \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1-g_2)X_2 - Y_2 = X_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1-g_3)X_3 - Y_3 = X_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 - Y_4 = X_4 \end{array}$$

Simplificando las ecuaciones anteriores,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_1X_1 & = & Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ g_1X_1 - g_2X_2 & = & Y_2 \\ g_2X_2 - g_3X_3 & = & Y_3 \\ g_3X_3 & = & Y_4 \end{array} \right. \tag{8.6}$$

A este mismo resultado se llega de una manera más simplificada si hacemos uso del álgebra matricial. Para ello, si G es la matriz de crecimiento,

$$G = \begin{pmatrix} 1-g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 1-g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1-g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$G\vec{X} = \begin{pmatrix} (1-g_1)X_1 \\ g_1X_1 + (1-g_2)X_2 \\ g_2X_2 + (1-g_3)X_3 \\ g_3X_3 + X_4 \end{pmatrix}$$

nos da el número de árboles que hay en cada una de las 4 clases después del período de crecimiento.

Como sabemos, en cada temporada de corte, se cortará un total de $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$ árboles. Este es también el número total de árboles agregados a la primera clase (los nuevos árboles) después de cada temporada de corte. Si se define la siguiente matriz de reforestación,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el vector columna

$$R\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1+Y_2+Y_3+Y_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

podemos escribir la ecuación que caracteriza a una política de explotación duradera.

- *Configuración al terminar el período de crecimiento, menos los árboles cortados, más la reforestación con nuevos árboles de almácigo será igual a la configuración al inicio de un período de crecimiento.*

O bien, en forma matemática

$$G\vec{X} - \vec{Y} + R\vec{Y} = \vec{X}\,,$$

ecuación que también puede escribirse

$$(I-R)\vec{Y} = (G-I)\vec{X}\,,$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos la ecuación matricial anterior, obtenemos el mismo sistema de ecuaciones (8.6),

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_1X_1 & = & Y_2+Y_3+Y_4 \\ g_1X_1 - g_2X_2 & = & Y_2 \\ g_2X_2 - g_3X_3 & = & Y_3 \\ g_3X_3 & = & Y_4 \end{array} \right.$$

Podemos ver que la primera de las ecuaciones es la suma de las tres ecuaciones restantes. Como $Y_i \geq 0$ para $i = 2,3,4$, las ecuaciones anteriores requieren que

$$g_1X_1 \geq g_2X_2 \geq g_3X_3 \geq 0$$

8.6.1. El rendimiento óptimo duradero

Como se cortan Y_i árboles de la clase de orden i con $i = 2, 3, 4$ y como el precio de estos árboles es p_i, el rendimiento total en una temporada estará dado por

$$B = p_2 Y_2 + p_3 Y_3 + p_4 Y_4. \tag{8.7}$$

Ahora, combinando las distintas ecuaciones se puede enunciar el problema de la maximización del rendimiento del bosque para todas las posibles política de explotación que sean duraderas:

- **Obtener los valores no negativos X_1, X_2, X_3, X_4 que hagan máxima la expresión:**

$$\begin{array}{rcl} B & = & p_2\,(g_1X_1 - g_2X_2) + p_3\,(g_2X_2 - g_3X_3) + p_4 g_3 X_3 \\ & = & p_2 g_1 X_1 + (p_3 - p_2) g_2 X_2 + (p_4 - p_3) g_3 X_3 \end{array}$$

  sujetos a $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N$ **y** $g_1X_1 \geq g_2X_2 \geq g_3X_3 \geq 0$

Este problema pertenece al campo de la programación lineal, sin embargo, en nuestro caso sólo necesitaremos el siguiente resultado,

- **El rendimiento óptimo duradero se logra cortando todos los árboles de la misma clase y ninguno de las demás clases**

A continuación lo "comprobaremos"sin recurrir a la teoría de la programación lineal. Para ello, vamos a suponer que R_3 es el rendimiento que se obtiene al cortar todos los árboles de la tercera clase y ninguno de las demás.

Como los únicos árboles que se cortan son los de la tercera clase, se tendrá que

$$Y_1 = Y_2 = Y_4 = 0\,. \tag{8.8}$$

Además, como se cortan todos los árboles de la clase de orden 3, a largo plazo, nunca se tendrán árboles de mayor altura que los de esa clase. En consecuencia,

$$X_3 = X_4 = 0\,.$$

Así, con la sustitución en las ecuaciones (8.6) de la explotación duradera, se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_3 & = & g_1X_1 \\ 0 & = & g_1X_1 - g_2X_2 \\ Y_3 & = & g_2X_2 \\ 0 & = & 0\,, \end{array} \right.$$

que también podemos escribirlas

$$Y_3 = g_1X_1 = g_2X_2 \quad \Rightarrow \quad X_2 = \frac{g_1X_1}{g_2}\,. \tag{8.9}$$

Si sustituimos en

$$X_1 = X_2 + X_3 + X_4 = N\,,$$

puede despejarse X_1 y se obtiene

$$X_1 + \frac{g_1 X_1}{g_2} = N \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{g_2}{g_1 + g_2} N = \frac{1}{1 + \frac{g_1}{g_2}} N\,. \tag{8.10}$$

El beneficio de la venta es $R_3 = p_3 Y_3$, pero por (8.9), $R_3 = p_3 g_1 X_1$, y teniendo en cuenta (8.10),

$$R_3 = p_3 g_1 \frac{1}{1 + \dfrac{g_1}{g_2}} N = \frac{p_3 N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2}}$$

O bien, haciendo un estudio similar para n clases y cortando todos los árboles de la clase k, el beneficio viene dado por la expresión,

$$\boxed{R_k = \frac{p_k N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}}}$$

Esta ecuación determina a R_k en función de los parámetros ya conocidos del crecimiento y el valor económico, para cualquiera que sea el valor de k ($k = 2, 3, \cdots, n$). Resumiendo, el rendimiento óptimo, duradero se obtiene como sigue

TEOREMA 8.6.1 *El rendimiento óptimo duradero es el valor más grande de*

$$\frac{p_k N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}}$$

para $k = 2, 3, \cdots, n$. El valor correspondiente de k es el número que determina la clase de árboles que deben cortarse por completo.

EJEMPLO 8.4

Los árboles de cierto bosque están divididos en tres clases de alturas y tienen una matriz de crecimiento, entre dos temporadas de corte como sigue,

$$G = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Si el precio de los árboles de la segunda clase es de 30 euros, el de los de la tercera de 50 euros, deseamos saber la clase de árboles que debe cortarse por completo para lograr el rendimiento óptimo duradero.

- De la matriz de crecimiento obtenemos $g_1 = 1/2$ y $g_2 = 2/3$. Sustituyendo en
$$R_k = \frac{p_k N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{2}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}},$$
obtenemos su valor, para el caso en que se cortasen los árboles de la segunda y tercera clase
$$R_2 = \frac{30N}{2} = 15N, \quad R_3 = \frac{50N}{2+1.5} = 14N\,.$$
Conseguiremos un mayor beneficio si cortamos todos los árboles de la segunda clase.

- Si la plantación tuviese N=1000 árboles, entonces el beneficio de la venta es
$$R_2 = 15N = 15 \times 1000 = 15000\,\text{euros}$$

EJEMPLO 8.5

Para un bosque de pinos escoceses con período de crecimiento de seis años se encontró la siguiente matriz de crecimiento
$$G = \begin{pmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 1.00 \end{pmatrix}$$
Supongamos que los precios de las cinco clases de árboles de mayor altura, son
$$p_2 = 50\,, \quad p_3 = 100\,, \quad p_4 = 150\,, \quad p_5 = 200\,, \quad p_6 = 250$$

- Interesa conocer la clase de árboles que debe cortarse por completo con el objetivo de obtener el rendimiento óptimo duradero. De la matriz G se obtiene
$$g_1 = 0.28, \quad g_2 = 0.31, \quad g_3 = 0.25, \quad g_4 = 0.23, \quad g_5 = 0.37\,.$$
Por el Teorema (8.6.1) deducimos
$$\begin{aligned} &R_2 = 50N/(0.28^{-1}) = 14.0N \\ &R_3 = 100N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1}) = 14.7N \\ &R_4 = 150N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1}) = 13.9N \\ &R_5 = 200N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1}) = 13.2N \\ &R_6 = 250N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1} + 0.37^{-1}) = 14.0N \end{aligned}$$
Se ve que R_3 es la cantidad mayor y por tanto, son los árboles de la tercera clase los que deben cortarse por completo cada seis años, para maximizar el rendimiento duradero.

- El rendimiento óptimo duradero es de $14.7N$, siendo N el número total de árboles que hay en el bosque.

EJEMPLO 8.6

En el Ejemplo anterior, deseamos conocer la relación entre los precios p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 para que los rendimientos R_k, con $k = 2, \cdots, 6$ sean iguales.

- En este caso, cualquier política de explotación racional y duradera producirá el mismo rendimiento). Para obtener esta relación debemos comparar cualquiera de las clases con la segunda, esto es

$$R_2 = R_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\frac{1}{28}} = \frac{p_3 s}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_3}{p_2} = 1.9$$

$$R_2 = R_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 N}{\frac{1}{28}} = \frac{p_4 N}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31} + \frac{1}{25}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_4}{p_2} = 3.02$$

  Y así sucesivamente hasta conseguir la relación

$$1 : 1.9 : 3.02 : 4.24 : 5$$

EJEMPLO 8.7

Si los parámetros de crecimiento $g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}$ son todos iguales, vamos a encontrar la relación entre los precios $p_2, p_3, \cdots, p_n$, para que cualquier política de explotación racional y duradera sea óptima.

- Suponiendo que $g_1 = g_2 = \cdots = g_{n-1}$, debemos de ir comparando tal y como hicimos en el ejercicio anterior.

$$R_2 = R_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 N}{\dfrac{1}{g_1}} = \frac{p_3 N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2}} = \frac{p_3 N}{\dfrac{2}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_3}{p_2} = 2$$

$$R_2 = R_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\dfrac{1}{g_1}} = \frac{p_4 N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + \dfrac{1}{g_3}} = \frac{p_4 N}{\dfrac{3}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_4}{p_2} = 3$$

  Y así sucesivamente con el resto de las clases.

  Es fácil obtener la siguiente relación

$$1 : 2 : 3 : \cdots : n - 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 7

1.- **Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 18 años y que esta población se divide en tres clases de edades iguales con intervalos de 6 años, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de crecimiento de *Leslie* viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra y una mediana dos, además el 50 % de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 25 % de las medianas se hacen adultas.**

El precio de venta de cada una de las clases es 15 euros las hembras jóvenes, 25 las medianas y 32 las adultas. Si disponemos de 1000 animales y cada 6 años separamos la misma fracción de cada una de las clases, ¿cuál es el importe de la venta?

2.- **Sea el modelo matricial de Leslie,**

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

siendo la unidad de tiempo del sistema igual a un año

- **Probar que para cualquier valor positivo de α la población siempre crece.**
- **Hallar el valor de α para que la población crezca cada año un 27 %.**
- **Para el valor de α encontrado, cuál será el total de la venta, en el caso particular de la separación uniforme, si disponemos inicialmente de 530 hembras y el precio de venta de las hembras de la primera clase es de 10 euros, 15 euros para los de la segunda clase y 5 euros para las hembras de la tercera clase?.**

3.- **Disponemos de una población de animales dividida en clases de edad de 6 meses de duración. De las siguientes matrices de Leslie,**

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

selecciona aquella que sea adecuada para realizar la siguiente explotación racional y duradera. La población inicial es de 500 animales, siendo el precio de venta de los animales más jóvenes de 10 euros. Calcular el importe de las ventas realizadas después de cinco años sabiendo que separación la realizamos sólo en la clase de menor edad.