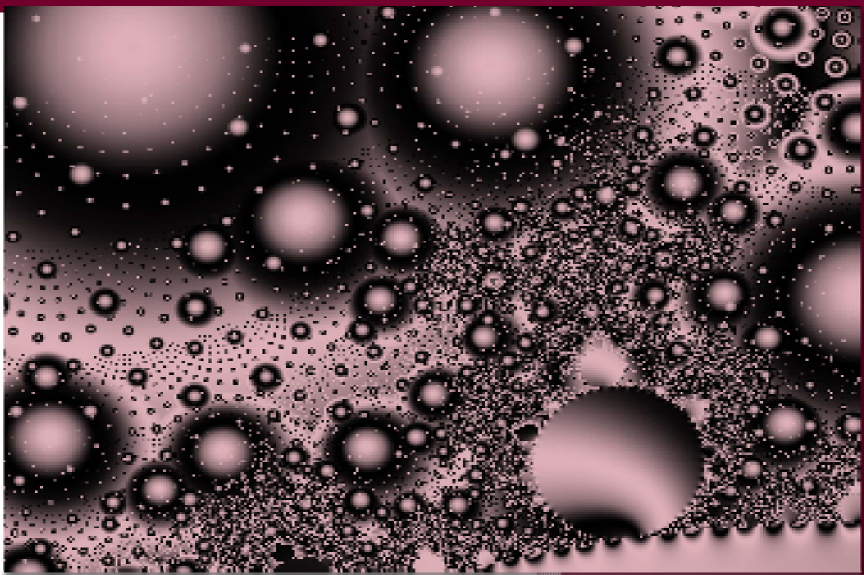
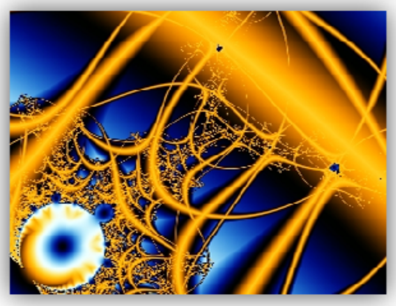
Fractales: la frontera entre el arte y las matemáticas



Juan Navas Ureña
José María Quesada Teruel
Universidad de Jaén



Introducción

"La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares."

Con estas rotundas palabras inicia el profesor *Michael Barnsley* su famoso libro sobre fractales. En efecto, una vez que conocemos esta nueva geometría es difícil contemplar la naturaleza, y el mundo que nos rodea, con los mismos ojos. La geometría fractal, no sólo es interesante por la belleza de las imágenes que crea, sino que en la actualidad es difícil encontrar una rama de conocimiento donde los fractales no estén presentes.

El significado de la palabra matemática es lo que se aprende, pero en el fondo de su filosofía se encuentra la búsqueda de patrones. En un principio, nuestros antepasados observaban los fenómenos naturales, como los eclipses, con verdadero terror. No podían entender cómo repentinamente el sol desaparecía del cielo y la más terrible oscuridad se cernía sobre ellos. Tenían que buscar explicaciones y al no encontrarlas, le atribuyeron a estos fenómenos naturales un carácter divino. Sin embargo, el poder del razonamiento de nuestra especie se impuso y algunos matemáticos griegos se dieron cuenta que la naturaleza estaba regida por leyes que eran necesarias conocer.

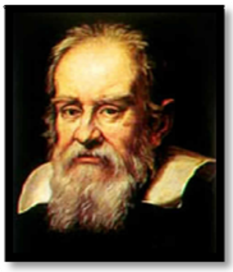
La búsqueda de estos patrones ha sido lenta, larga y complicada. Se inició con *Hiparco*, continuó con el modelo heliocéntrico de *Aristóteles* y *Ptolomeo*, fue revisado y mejorado por *Copérnico* y *Galileo*, posteriormente formalizado por *Newton* y modificado por *Einstein*. Lo importante es comprender que no es necesario recurrir a los dioses para entender los fenómenos naturales. Nuestro universo, se rige por unas leyes muy precisas y los científicos, los matemáticos entre ellos, se ocupan de descubrirlas. En la larga búsqueda de estos patrones, los matemáticos griegos encontraron una geometría que representaba perfectamente al orden y lo regular. Apoyándose en la herencia de las matemáticas egipcias y babilonias, los griegos construyeron los cimientos de nuestras matemáticas actuales, con la invención de unas matemáticas basadas en definiciones, axiomas, teoremas y demostraciones.

Desconocemos gran parte de la vida de *Euclides*, aunque la repercusión de su obra, en especial Los *Elementos*, ha sido crucial para la humanidad. Con la invención de la imprenta el libro de texto más reeditado ha sido la Biblia y a continuación Los *Elementos*, con más de mil ediciones. Los *Elementos* son 13 libros donde se recoge, estructura y organiza todo el saber conocido, especialmente en Geometría y en Teoría de Números.

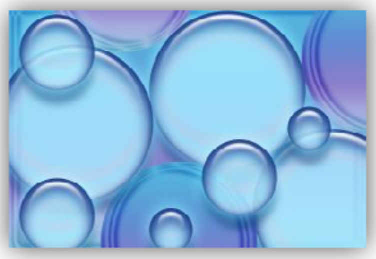
Los cuatros primeros axiomas son de enunciado muy simple que tienen que ver con puntos y rectas, mientras que el quinto es largo y complicado, conocido como el axioma de las paralelas. A pesar de la controversia que este último postulado ha generado en la historia de las matemáticas, en el siglo XX se pudo demostrar que no puede deducirse del resto de los axiomas.

Esta geometría, que se conoce con el nombre de euclídea, es ideal para representar a todos aquellos objetos construidos por el hombre. Está basada en puntos, rectas y planos que pueden describirse y manipularse mediante ecuaciones. A propósito de ello, a principios del XVII el gran científico *Galileo* comentaba en uno de sus trabajos:

"La filosofía está escrita en ese gran libro que es el Universo, siempre abierto ante nuestros ojos, pero imposible de leer salvo que uno aprenda a comprender el idioma en que está escrito. Ese idioma es el de la matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas…"



Uno de sus rasgos más significativo de la geometría euclídea es que a estos objetos se le puede asignar un número, conocido como su dimensión topológica, que sólo puede tomar valores enteros. De esta manera, un punto no tiene tamaño, su dimensión es cero, una recta tiene dimensión uno, un plano dimensión dos, y así sucesivamente. Otra característica de los objetos que representa la geometría euclídea es que cuando se amplían tienden a perder la forma que tienen inicialmente. Si se aumenta sucesivamente una parte de una circunferencia al final adopta la forma de una recta y no de una circunferencia.

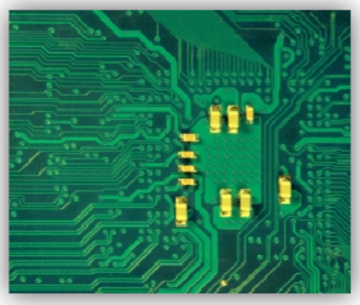


Sin embargo, *Galileo* no estaba en lo cierto. Existen otros objetos y situaciones que no son regulares o que son caóticos, ¿qué pasa con ellos?, ¿cómo pueden ser representados y manipulados?

Empecemos fijándonos en los sistemas caóticos. El caos es una apasionante teoría, surgida en los últimos años, que ocupa a un elevado número de científicos, con la esperanza de simplificar fenómenos complejos. Hasta finales del siglo XIX se creía que todo nuestro entorno estaba regido por leyes determinista. Los científicos estaban convencidos de que nuestro mundo era predecible, estable y se podía conocer completamente. De hecho *Laplace* se inventó un personaje, el demonio de *Laplace*, con tal poder que si conociera todas las leyes de la naturaleza y, en un instante dado, la velocidad y posición de todas las partículas de un sistema, entonces sería capaz de predecir con exactitud el comportamiento pasado y futuro del sistema. Pensemos en la amplitud de esta afirmación, puesto que este personaje podría conocer el más pequeño movimiento de una persona que viviera en el futuro. Puro determinismo, todo estaría escrito y no quedaría lugar para la improvisación.

Frente a esta posición tan inquietante, se encuentran las teorías científicas del siglo XX, en especial la mecánica cuántica, donde el principio de incertidumbre de *Heisenberg* afirma que es imposible determinar simultáneamente la posición y velocidad de una partícula. Teniendo en cuenta la naturaleza de nuestro universo, ninguna longitud menor de centímetros, ninguna masa inferior a gramos, ninguna duración menor de segundos puede existir. Por tanto, ¿cómo puede pretender el demonio de *Laplace* predecir el futuro, cuando es imposible medir exactamente la posición y velocidad de una sola partícula?

En la naturaleza existen muy pocos fenómenos tales que, el resultado al aplicarles una acción es proporcional a la causa que lo ha originado. En estos casos, el fenómeno se puede describir linealmente. Por desgracia, la mayoría de los fenómenos son no-lineales, y su estudio se hace terriblemente complicado ya que no pueden utilizarse las técnicas de resolución clásicas. De entrada suele ser imposible resolver de forma exacta las ecuaciones que los describen, siendo necesario utilizar el ordenador y hacer uso de métodos aproximados, pero la estabilidad de estas soluciones no puede asegurarse. De hecho, pequeñas variaciones en los datos iníciales dan

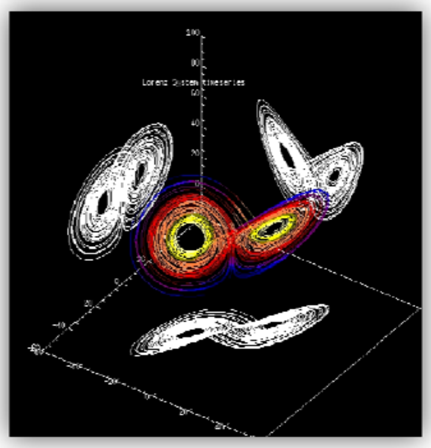


lugar a soluciones muy diferentes del problema. Es lo que se conoce con el nombre de efecto mariposa, y es una característica básica de los sistemas caóticos.

¿Pero qué relación existe entre los fractales y el caos? La respuesta está en que la geometría fractal es la herramienta ideal para describir y estudiar a los sistemas dinámicos caóticos que se encuentran en la naturaleza.

Un ejemplo típico de sistema caótico es el clima. En 1963 *Edward Lorenz* presentó un modelo climático, basado en la interrelación entre la temperatura, la presión y la velocidad del viento, titulado "*puede el aleteo de una mariposa en Brasil provocar un tornado en Texas*" que se convirtió en un artículo básico de la teoría del caos. El objetivo básico del trabajo era mostrar que el comportamiento de este modelo del clima era muy sensible a las condiciones iníciales, y además que la representación gráfica de la soluciones del modelo era una figura tridimensional, llamada atractor extraño, en forma de mariposa. Si se amplía alguna de las zonas de la mariposa de *Lorenz* se obtiene otra figura que es muy similar a la inicial. Es decir, la figura tiene estructura fractal.

En 1972 el matemático *J. Yorke* divulgó el trabajo de *Lorenz*, que había pasado desapercibido para la comunidad científica. Al mismo tiempo, el biólogo *R. May* descubrió, que un modelo muy simple como es el logístico, que describe cómo evoluciona una población de animales, predice que la población a largo plazo puede estabilizarse en un número, ó comportarse de manera periódica, o bien



tener un comportamiento caótico. Todo este rango de soluciones distintas se puede obtener con tan sólo variar el valor de un parámetro. Es decir, modelos simples pueden tener comportamientos muy complicados.

Insistimos en que en los sistemas caóticos un ligero cambio en las condiciones iníciales, a largo plazo, implica un comportamiento totalmente distinto del modelo. Pero por lo visto anteriormente, es imposible medir con total precisión ninguna variable, es decir, y según esta teoría, aunque mejore la capacidad de cálculo de los ordenadores, será imposible predecir a largo plazo el comportamiento del sistema, en particular el meteorológico.

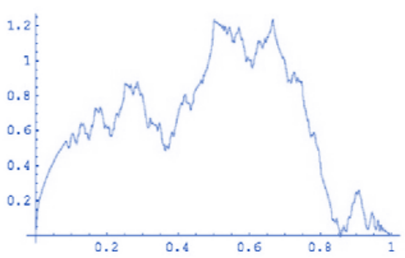
Antecedentes históricos

Como se ha comentado, los matemáticos podían abordar con ciertas garantías de éxito todos aquellos problemas relacionados con "lo regular" y "lo lineal". ¿Qué pasa entonces con lo irregular?

Los fractales se presentaron, a mediados del siglo XX, como una nueva herramienta de trabajo con el objetivo de poder analizar y modelizar los objetos irregulares de la naturaleza. En realidad existen aplicaciones y conceptos que son anteriores a esta fecha y que aparecieron con otros objetivos y en contextos distintos. *Richard Bentley* en el siglo XVII escribió:

" ...no hemos de creer que las orillas del mar sean realmente deformes por no tener la forma de un baluarte regular; que las montañas no son exactamente como conos o pirámides, ni las estrellas están situadas desmañadamente por no estar a una distancia uniforme.."

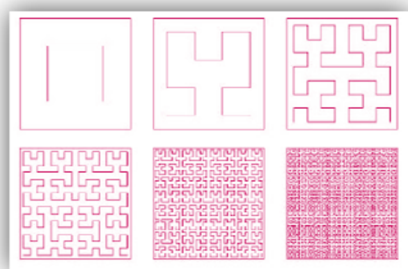
En 1875 el matemático *Reymond* llamó la atención a la comunidad científica de una extraña función propuesta por *Riemann* que podía dibujarse sin levantar el lápiz del papel (era continua) pero que estaba llena de irregularidades (no tiene derivada en ninguno de sus puntos). Esto era algo que aborrecían el resto de sus compañeros. Sin embargo, a pesar de lo extraño de esta función, lo sorprendente es que su gráfica (figura de la izquierda) representa muy bien a fenómenos de la vida cotidiana, como por ejemplo las cotizaciones en bolsa de las acciones de un banco español (figura de la derecha).

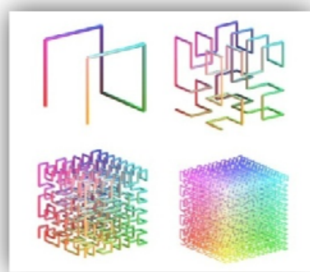


Eran tiempos de crisis en los fundamentos de las matemáticas y rápidamente muchos matemáticos, *Cantor*, *Peano*, *Lebesgue*, *Hausdorff*, *Besicovitch*, *Koch*, entre otros, investigaron sobre este tipo de funciones. Sin embargo, para analizar estas estructuras eran necesarias unas “nuevas matemáticas” puesto que no encajaban dentro de la geometría euclídea.

Aparecieron curvas como la de *Hilbert* que eran capaces “de llenar” todo un cuadrado, o un cubo. Pero esto daba lugar a la siguiente paradoja: una curva, según la geometría euclídea, debía tener dimensión uno, pero al “llenar” todo el espacio tendría dimensión dos en el caso del cuadrado y tres en el del cubo.

Estas nuevas extrañas estructuras fueron bautizadas por el gran matemático francés *Poincaré* como “*monstruos matemáticos*”, curvas que estaban en contra de toda intuición.





La comunidad matemática focalizó todo su esfuerzo en estudiar estas funciones llenas de irregularidades, hasta tal punto que el famoso matemático *Hermite* dirigió una carta a su buen amigo *Stieljes* diciendo, "*…abandono con espanto y horror esta lamentable plaga de funciones sin derivada…*". En este mismo sentido *Poincaré* comentaba "*…cuando uno inventaba una nueva función, estaba en vista de alguna meta conveniente; ahora se inventan intencionalmente para poner los defectos de los razonamientos de nuestros padres*".

Hay que esperar hasta mediados del siglo XX con la aparición de *Norbert Wiener* cuando, analizando el movimiento bowniano de las partículas, construye un modelo matemático totalmente irregular. En este trabajo aparece por primera vez la palabra caos.

En la introducción del trabajo comenta:

"La geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de la geometría euclídea o el cálculo diferencial de Newton…"

Como hemos tenido oportunidad de ver, en el ambiente se respiraba la necesidad de acometer urgentemente y de una manera más detallada el estudio de los objetos irregulares. Esta labor la desarrolló, en torno al 1975, el matemático *Benoit Mandelbroit*. Las siguientes palabras, en la línea de las pronunciadas por *Bentley* y *Wiener*, dieron origen al inicio de la geometría fractal tal y como hoy en día la entendemos:

“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta,... La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad”.

En la actualidad, matemáticos como *Barnsley, Devanay, Hubbarc* y *Sullivan*, estudian los fractales tanto desde el punto de vista teórico como el aplicado. Desde finales de los años 70 y con la ayuda de los ordenadores, los fractales han estado presentes en la investigación matemática.

La geometría fractal

La palabra fractal la acuñó *Mandelbrot*, procede del adjetivo latino *fractus*, y puede traducirse como fragmentado e irregular. Los fractales son objetos matemáticos que se sitúan en el campo de la teoría geométrica de la medida cuya definición exacta está por establecer.

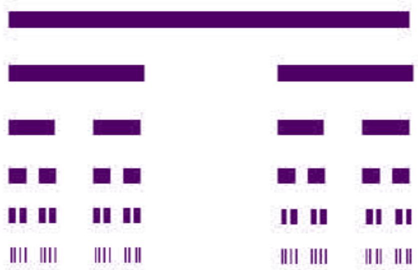
Es muy difícil dar una definición exacta de un fractal, puesto que requiere de un nivel muy elevado de abstracción. Por otro lado, el número de sus aplicaciones es tan enorme y en materias tan distintas, que según sea la disciplina a estudiar ofrecerá una definición u otra. Evidentemente la definición propuesta por un artista no será igual a la de un matemático.

Existe un gran consenso en que bajo el nombre de fractales se incluyen aquellos objetos matemáticos con los mismos rasgos, si bien la definición concreta no es aplicable a todos ellos. Por este motivo, la mejor manera de poderlos describir es señalando una serie de propiedades que tienen en común.

- Tienen el mismo aspecto a cualquier escala de observación.
- Tienen longitud infinita.
- No son diferenciable. Esto es, están lleno de irregularidades.
- Tienen dimensión no entera.

Para comprender mejor algunas de estas propiedades, vamos a centrarnos en un tipo concreto de fractales, los llamados deterministicos o matemáticos, que se obtienen a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado.

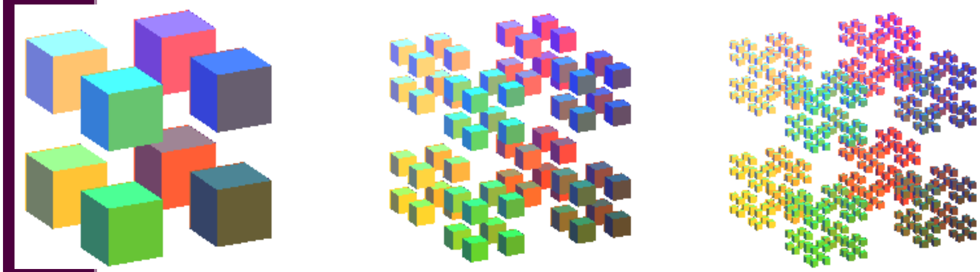
El proceso geométrico suele ser de enunciado muy simple pero que al final da lugar a una estructura compleja, obtenida mediante la repetición infinita del proceso. En este tipo de fractales, es muy evidente la propiedad de **autosemejanza**, ya que una pequeña sección del fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el objeto.



El **conjunto de *Cantor*** es un clásico fractal matemático que se obtiene de la siguiente manera: se parte de un segmento unitario, se divide en tres partes y se elimina la parte central. Cada uno de los dos nuevos segmentos de longitud un tercio se divide en tres partes y se vuelve a quitar el segmento central, y así sucesivamente.

Después de infinitos pasos se obtiene un conjunto que recibe el nombre de polvo de Cantor, debido a que la longitud de los segmentos en cada una de las sucesivas etapas tiende a cero. De hecho el número de puntos del conjunto es infinito y sin embargo su longitud total es cero.

Observemos que el mismo procedimiento, de iterar de forma infinita un proceso geométrico concreto, puede aplicarse a un cubo en lugar de a un segmento. En la figura puede apreciarse su aspecto después de 1, 2 y 3 iteraciones.



Una de las características básicas de las matemáticas es la capacidad de aplicación de los conceptos teóricos introducidos. El conjunto de *Cantor* se inventó estudiando un problema muy complicado, resuelto hace pocos años, conocido con el nombre de la hipótesis del continuo. De entrada da la impresión que poco tiene que ver este conjunto con nuestra vida cotidiana, pero eso no es así.

En efecto, la información circula de ordenador a ordenador a través de las líneas telefónicas, pero este tráfico se ve afectado por un ruido de fondo que se produce en la transmisión. Hace unos años, los ingenieros informáticos se enfrentaban al problema de eliminar o mitigar este ruido y no lograban encontrar un método para ello, puesto que el ruido aparecía sin un patrón fijo, parecía producirse de una manera aleatoria.

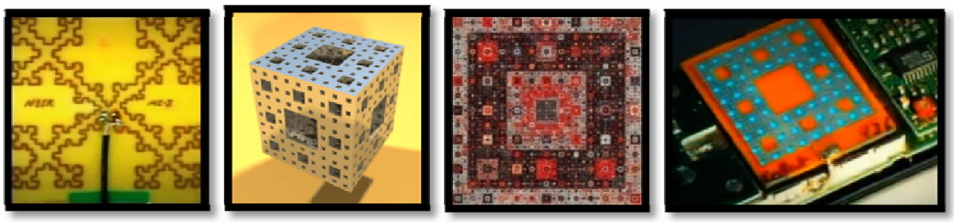
Mandelbrot tuvo noticias del problema y empezó dividiendo el tiempo en períodos de días, posteriormente en horas, y de esta manera encontró una hora que no tenía errores. Posteriormente dividió la hora que contenía errores en períodos de media hora y de nuevo apareció un intervalo con error y otro sin error. Es decir, la secuencia de los errores seguía el mismo patrón que el conjunto de *Cantor*. Con esta información, basada en este patrón de comportamiento, los ingenieros pudieron construir filtros electrónicos que mejoraron la calidad de la transmisión.

El conjunto de *Cantor* también se utiliza como modelo matemático para analizar la estructura de los anillos de Saturno, o el espectro de algunas moléculas orgánicas. Además, a partir del conjunto de Cantor se puede construir una asombrosa función, de nombre escalera del diablo, con la curiosa propiedad de subir de 0 a 1 de manera continua, pero siempre desplazándonos horizontalmente (derivada nula en casi todo los puntos).

Otro fractal matemático importante es el conocido con el nombre de **triangulo de *Sierpinski*.** Su método de construcción es muy sencillo puesto que se parte de un triángulo, tal y como aparece en la figura, se unen los puntos medios de sus tres lados y se elimina el triángulo central. Tenemos ahora tres triángulos y en cada uno de ellos se aplica el procedimiento descrito en el triangulo inicial. Se reitera este proceso geométrico hasta el infinito, y el conjunto teórico que se obtiene es el triángulo de *Sierpinski*.

Por supuesto que el mismo razonamiento puede aplicarse a un cuadrado, o a un cubo, en lugar del triángulo. En este caso, el conjunto obtenido se llama la **alfombra de *Sierpinski***, y tiene la sorprendente particularidad de que el área (o el volumen en el caso del cubo) de esta alfombra es cero. Es decir, una maravillosa alfombra que nunca estaría sucia ya que no podría acumular polvo, al carecer de área.

Al igual que hemos comentado en el fractal anterior, también este conjunto está presente en nuestra vida diaria. Se encuentra con frecuencia en los diseños más variados, como por ejemplo, una alfombra, o bien en las antenas receptoras de nuestros teléfonos móviles.



Para terminar con los ejemplos de fractales matemáticos presentamos al conocido con el nombre de copo de nieve o **curva de *Koch***. Se obtiene tomando un triángulo equilátero, cada uno de sus lados se divide en tres partes, y se sustituye el segmento central por dos segmentos de la misma longitud en forma de triángulo equilátero. En la figura puede apreciarse las primeras iteraciones del proceso.

En teoría, al ser el proceso infinito, el resultado que se obtiene es una figura tremendamente compleja e irregular, que tiene área finita, siendo su perímetro una poligonal de longitud infinita.

Una variante del copo de nieve de *Koch* se utiliza como forma básica para diseñar el corte de un pulmón, o para mejorar la forma de una costa.

Como hemos tenido oportunidad de ver en estos ejemplos de fractales, la potencia de la geometría fractal radica en la posibilidad de construir una estructura geométrica muy complicada a través de un proceso muy simple. Por esta razón, es especialmente útil para modelizar los fenómenos naturales donde la complejidad de su estructura viene originada por la repetición de procesos muy sencillos. Como tendremos ocasión de comprobar, ésta es una de las características más destacada de los fractales, objetos de tremenda complejidad pero que sin embargo para su descripción y su construcción requieren de muy poca información.

El ordenador, con su potencia de cálculo, ha sido el culpable del gran auge que ha experimentado en los últimos años la geometría fractal. Recordemos que la idea básica de los fractales está en la iteración, la repetición infinita de un proceso simple, y para esta tarea nada mejor que el ordenador, teniendo además la posibilidad de representaciones gráficas cada vez más precisas.

Los fractales matemáticos que hemos introducido, los lineales, son demasiados perfectos para poder representar a los objetos de la naturaleza, como la hoja de un árbol o el rayo. Por tal motivo se introducirán más adelante los fractales no lineales entre los que se encuentran los obtenidos por un algoritmo de escape.

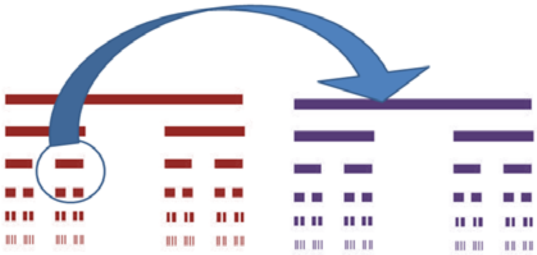
Autosemejanza

"… un naturalista observa que una pulga tenía pequeñas pulgas en ella y éstas a su vez otras más pequeñas que las mordían. Así se procede hasta el infinito."

De esta manera tan sencilla el escritor *Jonathan Swift* (autor de la conocida obra *Los Viajes de Gulliver*) describe el concepto de autosimilitud o autosemejanza.

La autosemejanza es una de las características de los objetos fractales, por la cual una de estas imágenes puede ser descompuesta en trozos más pequeños cada uno de los cuales es idéntico al objeto completo.

Podemos dar una definición matemática más precisa que puede simplificarse diciendo que la autosemejanza es una transformación que conserva la forma y las proporciones, pero que puede variar en tamaño, posición y orientación. Lo importante es que cada uno de los trozos se obtenga de la estructura completa a través de las mismas transformaciones.

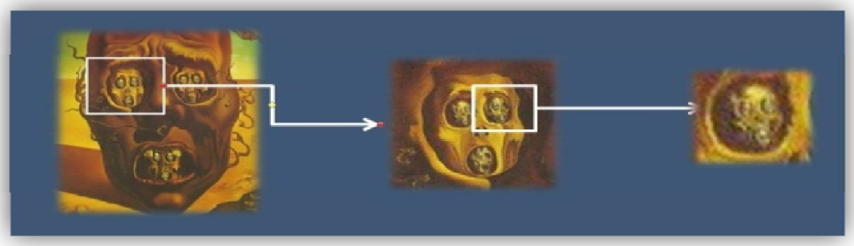


Se puede realizar el siguiente experimento: se toma la curva de *Koch* y se sacan cuatro fotocopias con un factor de reducción de 1/3, posteriormente se pegan y se obtendrá la curva original. Para ello, lo importante es que cada una de estas cuatro copias tenga el mismo factor de reducción.

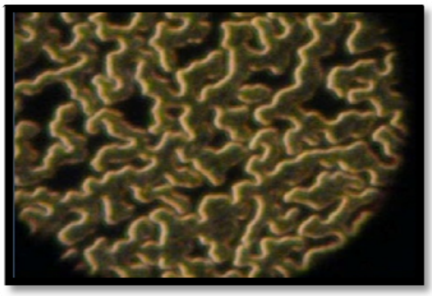
No pensemos que el concepto de autosemejanza es una idea novedosa, en realidad había sido estudiada por muchos científicos en siglos anteriores, *Leibniz* entre ellos, cuando propuso esta hermosa idea sobre la estructura del universo. Una gota de agua contenía todo un universo, que a su vez contenía gotas de agua más pequeñas; cada una de estas pequeñas gotas encerraba a su vez un universo que tenía en su interior otras gotas de agua, todavía más pequeñas y así sucesivamente.

En la naturaleza es fácil encontrarse con esta propiedad, por ejemplo la coliflor o el brócoli la posee. Si tomamos un trozo podemos observar que ésta ramita es idéntica a la coliflor completa. Esta misma experiencia podemos hacerla con la hoja de un helecho, o en mucho más diferente como es el sistema vascular.

También el arte y la publicidad han hecho uso repetidamente de la propiedad de tener el mismo aspecto a cualquier escala de observación. En la figura siguiente se ha seleccionado un detalle de un cuadro de *Salvador Dalí* donde puede observarse este concepto.

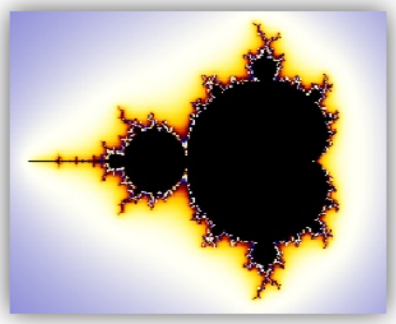


El efecto de repetición de formas a distintas escalas hace que sea muy difícil distinguir imágenes cuando no hay referencia de su tamaño. En la siguiente figura aparecen dos imágenes que a simple vista son muy parecidas, sin embargo representan a dos cosas totalmente diferentes. La imagen de la izquierda corresponde a una gota seca de leche mirada a través de un microscopio, mientras que la imagen de la derecha es un trozo de la marisma de *Doñana*.



A pesar del parecido existente entre ellas, hay una relación de tamaño de un millón de veces entre una y otra fotografía, pero, como puede observarse, la estructura básica de ambas es muy parecida.

Pero tenemos que ser muy cuidadoso a la hora de hablar de fractales ya que sería un error creer que todas las estructuras geométricas que tengan la propiedad de autosemejanza tienen que ser un fractal. Pensemos en una línea recta o en un cuadrado, es claro que tienen la propiedad de autosemejanza pero son figuras regulares y por lo tanto no son fractales.



El conjunto de Mandelbrot

*A*unque en la actualidad un gran número de personas se han acercado a la geometría fractal por la belleza de las imágenes que genera existen otras razones, tanto matemáticas como su amplio campo de aplicación, que justifican el estudio y la atención a este tipo de estructuras. Como ejemplo de belleza y complejidad se encuentra el mundialmente famoso fractal de *Mandelbrot*.

Benoit Mandelbrot nació en Polonia en 1924, se le considera el padre de la geometría fractal y su aplicación a la elaboración de modelos que representan a los elementos de la naturaleza. A causa de la segunda guerra mundial emigró, en un primer momento a Francia en 1936 para estudiar con su célebre tío, el matemático *Szolem Mandelbrot*, y posteriormente a Estados Unidos al Instituto de Estudios Avanzados de Princenton, siendo el último alumno de doctorado del famoso matemático *John von Neuman*. En 1955 regresó a Francia, al *Centro Nacional de Investigaciones Matemáticas,* donde permaneció muy poco tiempo ajeno al tipo de matemáticas que el grupo *Bourbaki* elaboraba en ese momento. Afortunadamente recabó en New York en la empresa IBM formando parte de su centro de investigación *Watson Research Center*, donde encontró el ambiente y las herramientas adecuadas para poner en prácticas sus numerosas ideas.

En 1945 su tío *Szolem* le entregó un manuscrito escrito por el matemático francés *Gaston Maurice Juliá* donde se estudiaba desde un punto muy teórico la iteración de funciones racionales. *Mandelbrot* se enfrentó al mismo problema pero desde un punto de vista geométrico. Sus resultados dieron lugar al primer trabajo sobre fractales que llevó por título "*Les objets fractals, forn hasard et dimension*" y fue completado en 1982 con la aparición de su célebre libro "*La geometría fractal de la naturaleza*".

Para construir el conjunto de Mandelbrot es necesario trabajar con pares de números reales, llamados números complejos, cuya representación gráfica son los puntos del plano, por ejemplo el punto (3, 2).

Con estos números complejos se puede operar de forma similar a como se hace con números reales, se pueden sumar, multiplicar,…, etc. Además de estos números es necesaria una fórmula, que no tiene que ser complicada, en el caso que nos ocupa es , donde es un número complejo fijo.

A partir de un valor inicial de (llamado semilla) se eleva al cuadrado y se le suma el número obteniéndose el número . Ahora repetimos el proceso y obtenemos otro número complejo , y así sucesivamente. De esta forma se ha conseguido una sucesión de números

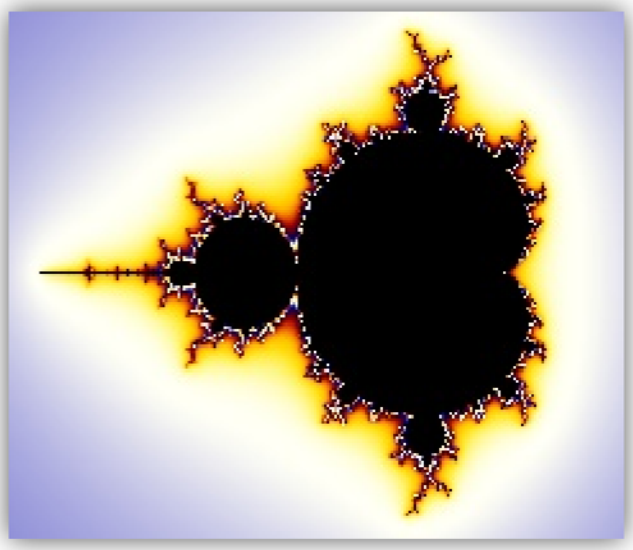
{ ,}

que recibe el nombre de órbita. Si todos los elementos de este conjunto de puntos permanecen a menos de dos unidades del origen de coordenadas, entonces el punto , pertenecerá al conjunto de *Mandelbrot*, si la distancia es mayor de dos unidades no formará parte del conjunto.

Es decir, el conjunto de *Mandelbrot* es el conjunto de puntos cuyas órbitas generadas por la fórmula anterior nunca escapan de un círculo centrado en el origen de radio dos.

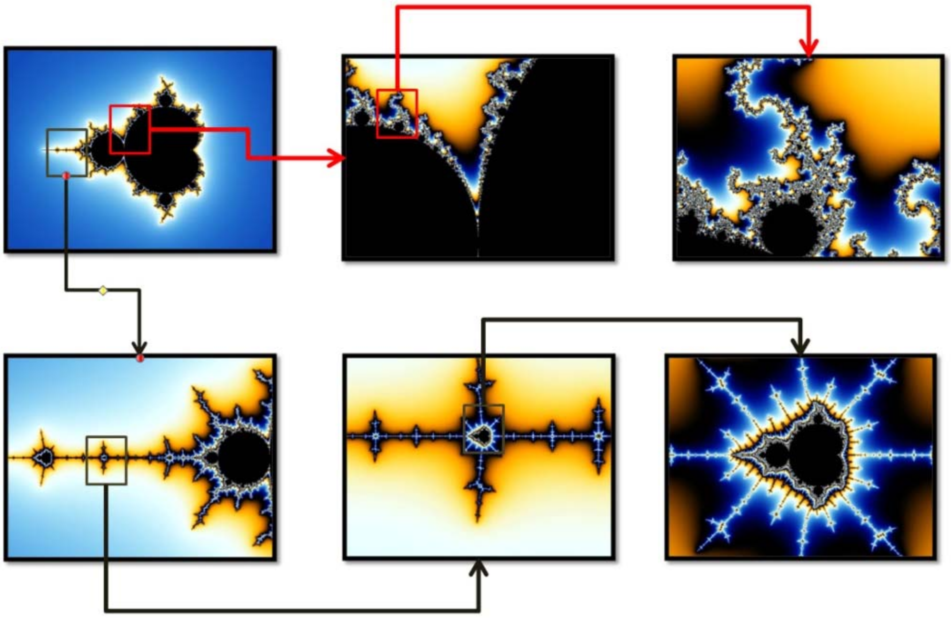
La genial idea de *Mandelbrot*, que pudo hacer porque la tecnología estaba a punto, fue la de pintar en color negro los puntos del conjunto de *Mandelbrot* y en blanco los que estaban fuera. Después de un largo tiempo de espera el resultado obtenido es el que puede apreciarse en la figura.

Por supuesto que una vez conocido el proceso, éste puede ser mejorado. Cuando los números no pertenezcan al conjunto de *Mandelbrot* (el exterior del fractal) entonces se le asignará un algoritmo de color, consistente en asociar colores diferentes a cada punto, de acuerdo a “la rapidez” del incremento de la órbita. Por ejemplo, si la sucesión se incrementa lentamente, entonces la semilla se puede pintar de color azul, por el contrario si crece más rápidamente, tendrá un color amarillo, naranja o verde en función de la velocidad de este crecimiento. Los primeros que utilizaron esta técnica fueron *Peiten* y *Ritchter*



A mediados de los años 80**,** *A. Douady* y *J.H. Hubbard* probaron que este conjunto y su complementario son conexos. Es decir, de un solo trozo, aunque al ampliar la frontera del conjunto de la sensación de lo contrario.

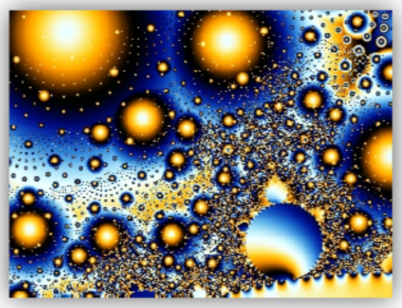
Debido a que siempre hemos estado acostumbrado a lo “regular” y a las estructuras representadas por la geometría euclídea, al analizar la frontera de este fractal, percibimos que es un tipo de curva que desafía nuestra capacidad de entendimiento, puesto que cuanto más cerca se mire más se ramifica.



En la figura anterior puede apreciarse dos de las características básicas de los fractales. La primera es que la frontera del conjunto de *Mandelbrot* es una curva irregular tremendamente complica, y la segunda que tiene la propiedad de autosemejanza, es decir, existen miles de réplicas del fractal a menor escalas.

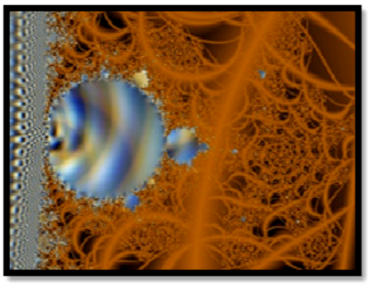
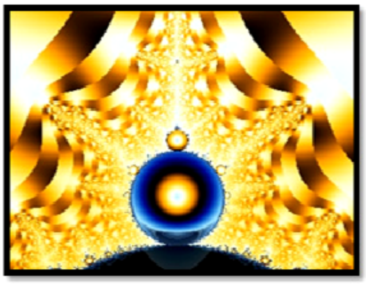
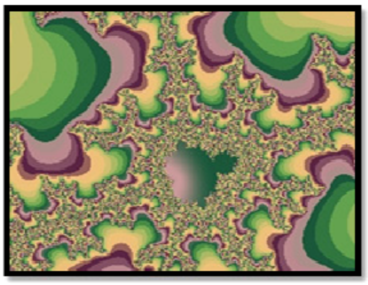
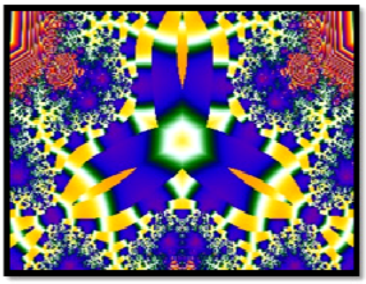
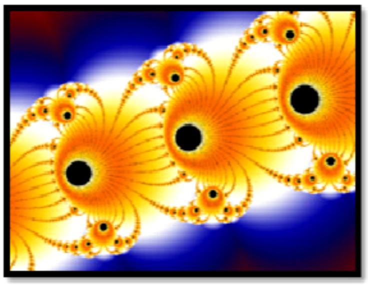
Es posible obtener otro tipo de fractales, ya que bastara con cambiar la fórmula inicial con la salvedad de que ésta no puede ser lineal. Precisamente el hecho de no linealidad implica la aparición del caos matemático y de la geometría fractal.

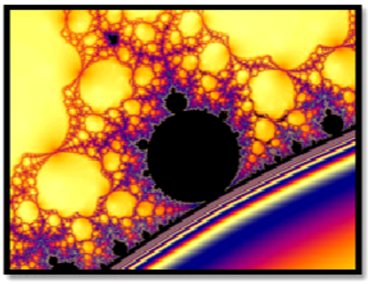
Otra manera alternativa de modificar un fractal, como el de *Mandelbrot*, es alterar los algoritmos de color para representar su exterior o interior. Existen en el mercado un número variado de programas informáticos con los que es posible construir hermosas imágenes. De entre ellos, uno de los más apropiados, por su sencillez de manejo y potencia de resultados, es *Ultra Fractal*. El programa tiene la ventaja de que no sólo se puede construir bonitos fractales, sino que es posible realizar espectaculares animaciones de los mismos, así como fondos fractales con movimiento.



Precisamente la belleza de las imágenes obtenidas junto con la sencillez de su creación ha acercado al mundo de las Matemáticas a un gran número de personas. En boca de *Mandelbrot:* "*ayudan a tender puentes en el abismo que separa las cuestiones matemáticas de la gente de la calle*".

Las hermosas imágenes que vemos a continuación, son algunas de las obras realizadas por los alumnos del Programa de Mayores de la Universidad de Jaén, realizadas en los cursos 2010/11 y 2011/12. El impacto de estas imágenes puede despertar el interés de nuevas personas en este arte digital y pone de manifiesto la conexión profunda entre el arte y las matemáticas.

La dimensión fractal

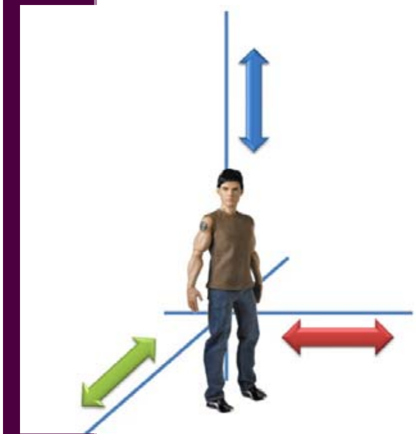
*U*no de los objetivos que ha perseguido la Geometría desde sus inicios ha sido el de encontrar patrones y formas, por un lado, y por el otro, buscar métodos para asignar una medida a estas formas. Es conocido que no es posible medir la diagonal de un cuadrado tomando como unidad el lado de dicho cuadrado. Este problema de medida originó la aparición de los números irracionales. Del mismo modo, los intentos por encontrar la longitud exacta de una circunferencia llevaron a los matemáticos al descubrimiento del número π, o el problema de encontrar el área encerrada por dos curvas dio origen al cálculo diferencial e integral.

En la actualidad muchas personas creen que el cálculo de longitudes, áreas o volúmenes está totalmente resuelto, pero la realidad es que no es así. Es fácil comprobar, buscando el dato en distintas publicaciones, que existe una gran divergencia entre la longitud de la frontera entre dos países, o de un río, aportada por una publicación u otra. En enciclopedias españolas se dice que la longitud de la frontera entre España y Portugal es de 985 kilómetros, mientras que en una enciclopedia portuguesa es de 1212 kilómetros. La razón de esta discrepancia se encuentra en que no es posible dar un número exacto, puesto que al tratarse de una curva totalmente irregular, es imposible medirla, lo que resulta contradictorio con el hecho de que la isla tiene un área finita. Este era el argumento central del famoso artículo de *Benoit Mandelbrot* titulado "*¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña*?

Para poder medir el perímetro de la costa se toma, en primer lugar, una unidad de longitud. En este caso, el perímetro se estima a partir del número de veces que es necesario llevar el segmento para cubrir toda la costa. Es evidente, que al disminuir el tamaño del segmento unidad, la longitud de la costa aumenta. Los objetos irregulares carecen de medida exacta, puesto que la longitud dependerá de la unidad de medida elegida.

Al no poderse caracterizar la frontera de un fractal por una longitud, es necesario centrarse en un concepto diferente como es el de dimensión, procedente del latín *dimensio*, que significa medida. La idea es buscar un parámetro que, en cierto modo, mida el grado de irregularidad del fractal, y eso será la dimensión fractal.

Desgraciadamente no hay una única definición de dimensión. Existe una definición intuitiva de la **dimensión euclídea** que coincide con el número de valores reales que son necesarios para situar a un punto en el espacio donde nos encontremos trabajando. Una línea tiene dimensión uno, puesto que sólo se necesita un número real para localizar cualquier punto de la línea. Pensemos, por ejemplo, que cuando deseamos dar nuestra situación en una autopista aportamos sólo un número, su punto kilométrico, aunque esta carretera no sea una línea recta.



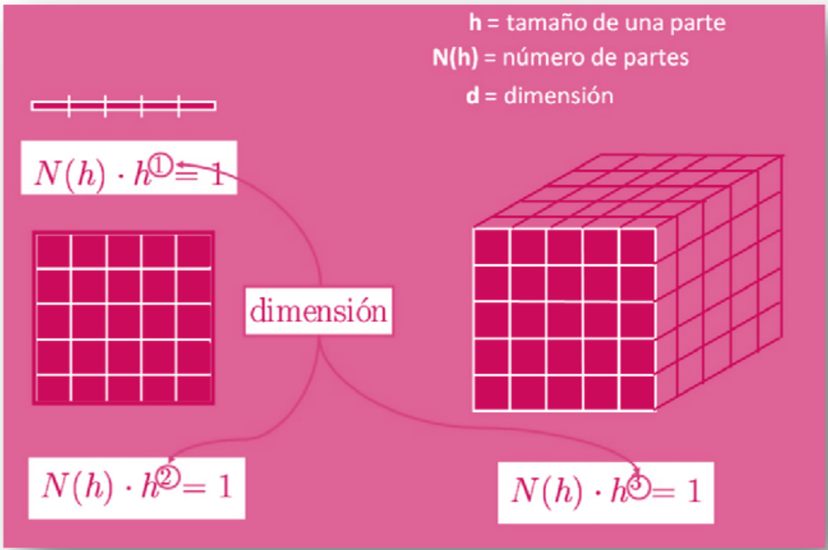
Otra definición intuitiva de dimensión euclídea hace referencia al número de direcciones perpendiculares diferentes que se pueden tomar. En nuestro mundo cotidiano contamos con tres direcciones: izquierda-derecha, adelante-atrás, y arriba-abajo; por este motivo decimos que el espacio en que nos movemos es tridimensional.

Pero la aparición de los "monstruos matemáticos", aquellas curvas que llenaban todo el espacio, desafiaba la idea intuitiva del concepto de dimensión. Este tipo de objetos fractales fueron estudiados dentro de una nueva rama de las matemáticas creada por *Poincaré* que recibe el nombre de Topología. Una curiosa ciencia que trata sobre la manera en que los objetos pueden ser deformados como si pareciesen de goma. Un círculo puede estirarse y convertirse en un triángulo, o en el copo de nieve de *Knoch*. Desde el punto de vista topológico no es posible distinguir una línea recta de la curva de *Hilbert*, o una hoja de papel plana de aquella que se encuentra completamente arrugada.

Definir el concepto de dimensión de manera rigurosa fue una tarea larga y complicada que desafió a los mejores matemáticos de finales del siglo XIX y principios del XX, entre los que se encontraban, *Poincaré, Lebesgue, Brouwer, Cantor, Menger, Peano,* y *Hilbert*. Era inevitable que tan intenso trabajo diese como resultado un número elevado de definiciones, todas ellas relacionadas pero distintas: dimensión topológica, dimensión por conteo por cajas, dimensión de autosimilitud, dimensión euclídea,..., etc.

Por los comentarios anteriores queda claro que estudiar a fondo el concepto de dimensión no es una tarea fácil, pero para el propósito que nos ocupa podemos simplificarlo de la siguiente manera. Si tomamos un segmento de longitud uno y lo dividimos en cinco partes iguales, es evidente que obtendremos 5 segmentos cada uno de ellos de longitud 1/5. De la misma manera, si partimos de un cuadrado de lado unidad y dividimos sus lados en cinco partes iguales, obtenemos 25 cuadrados de lado 1/5. Por último, si elegimos un cubo de lado unidad y dividimos los lados en cinco partes iguales, aparecerán 125 cuadrados más pequeños de lados 1/5.

Para cada uno de los casos anteriores siempre se cumple que el producto del número de partes por el tamaño de las partes elevado a uno (en el primer caso), dos (en el segundo) y tres (para el tercero) siempre es la unidad. Es decir, se obtiene la fórmula , siendo el tamaño de las partes, el número de partes y *D* la dimensión. Lo comentado anteriormente puede verse de forma esquemática en la siguiente figura.



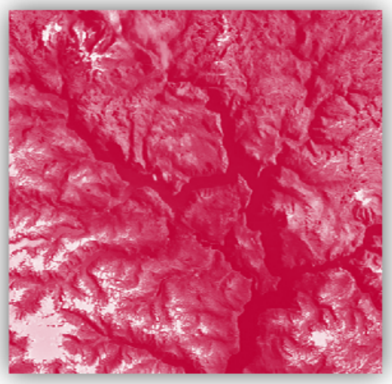
La fórmula anterior se conoce con el nombre de **ley de potencia**, puesto que el número de partes) cambia como si fuese potencia de . Con unos básicos conocimientos matemáticos es posible despejar de esta expresión la dimensión, siendo su valor

.

De esta manera, la dimensión fraccionaria o fractal del Conjunto de *Cantor* es aproximadamente 0.63093, número que se obtiene del cociente log(2)/log(3), y la dimensión de la curva de *Koch* es log(3)/log(2)=1.26186.

Tenemos que darnos cuenta de la importancia de estos resultados, ya que a través de la dimensión fractal disponemos de un parámetro que caracteriza, de alguna manera, lo sinuoso e irregular de un objeto. Si el fractal es relativamente "suave" su dimensión fractal estará próxima a su dimensión euclídea que es uno, por el contrario si se "retuerce" hasta ocupar la forma de un cuadrado, su dimensión fractal estará próxima a dos. La costa de Inglaterra tiene dimensión fractal 1.25, mientras que la dimensión fractal de la costa de Australia es 1.13. En conclusión, la costa de Inglaterra es mucho más sinuosa e irregular que la de Australia.

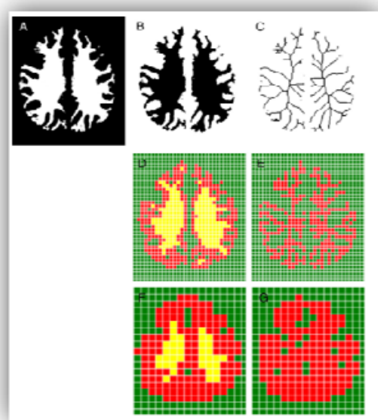
Una vez conocidos los conceptos de dimensión euclídea y dimensión fractal de un objeto, tenemos una manera alternativa y algo más precisa de definir a un fractal, ya que será aquél objeto donde su dimensión euclídea sea menor que su dimensión fraccionaria.



Ahora bien, hasta ahora hemos estados refiriéndonos a un tipo de fractales muy concretos como los obtenidos a través de un algoritmo matemático, pero ¿qué pasa con aquellos objetos de la naturaleza con estructura fractal? Es evidente que su dimensión no se puede obtener a través de la fórmula que hemos deducido anteriormente, puesto que no estamos ante una curva que pueda medirse con escalas diferentes y además no es autosemejante, aunque posee "ciertas propiedades de escala". Es decir, son semejantes estadísticamente.

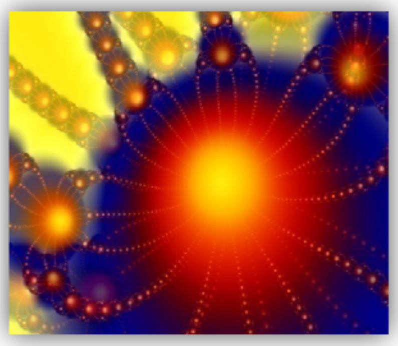
Los matemáticos *Hausdorff* y *Besicovitch* publicaron en 1919 un artículo donde se generalizaba la fórmula para el cálculo de la dimensión fraccionaria para este tipo de objetos. Su cálculo es extremadamente complejo, pero existe un algoritmo, con el nombre de *Box-Counting (método de conteo de cajas)*, implementado en la mayoría de los programas informáticos que trabajan con imágenes, como por ejemplo *Harfa* o *ImageJ*.

El algoritmo de *Box-Counting* consiste en lo siguiente: a partir de la imagen del objeto se obtiene una versión binaria de la misma, a cada punto brillante se le asocia el valor 1 y un 0 al resto. Posteriormente se obtiene una imagen del contorno y se superpone una malla de un tamaño dado. El proceso consiste en contar el número de veces que la imagen corta al cuadrado de la malla. A continuación se hace disminuir el lado del cuadrado y se representa el logaritmo del número de intersecciones en función del logaritmo de la inversa del lado. La dimensión del objeto coincide con la pendiente de la recta de regresión definida por los puntos.



Hemos visto como la longitud de formas irregulares depende de la escala de medida. Este hecho origina un verdadero problema a los biólogos, ya que los lagos que tienen orillas muy irregulares tienen más área con aguas poco profundas y esto produce comunidades más rica en vida animal. Hasta hoy, no ha sido posible caracterizar las comunidades de un lago con parámetros que relacione la longitud de la orilla con la superficie del agua.

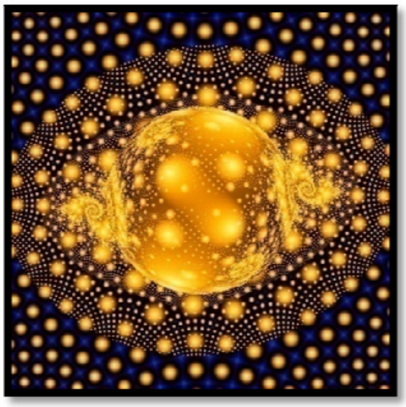
La aparición de la dimensión fractal ha llevado a muchos científicos de campos muy diferentes a interesarse por el tema, con la intención de aplicarla a estructuras muy complejas. Sin embargo, tenemos que comentar que hay que ser cuidadoso con su uso, puesto que existen limitaciones en su aplicación. Existen objetos muy complejos que son una mezcla de diferentes fractales, cada uno de los cuales tiene una dimensión distinta.

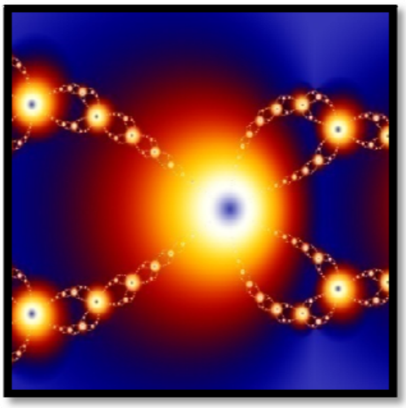


Tipos de fractales

*A*unque existe una primera clasificación muy general de los fractales, llamados **lineales**, como la curva de *Koch*, y **no lineales**, los que se generan a partir de una fórmula no lineal como el conjunto de *Mandelbrot*. Sin embargo, podemos hacer una clasificación un poco más detallada de los mismos.

Fractales construidos a partir de un **algoritmo de escape**. Un ejemplo clásico de ellos es el fractal de *Mandelbrot* obtenido, como sabemos, de la manera siguiente: para cada punto del plano (la semilla), se calcula una serie de valores (su órbita), mediante la repetición de una fórmula hasta que se cumpla una determinada condición, y en ese momento al punto inicial se le asigna un color relacionado con el número de repeticiones.

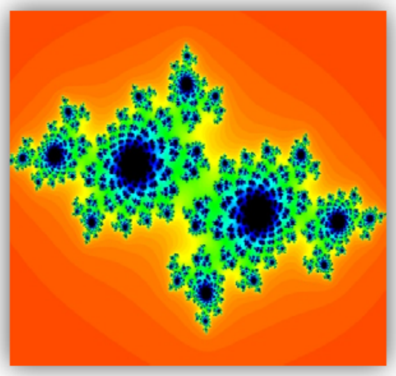


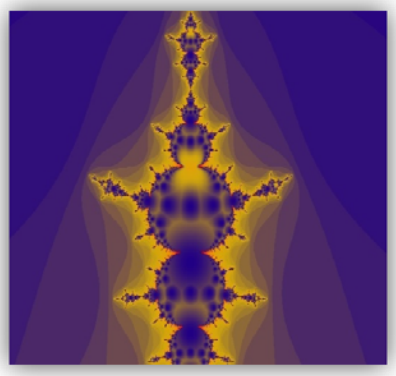


Para poder construir un fractal de este tipo es imprescindible realizar miles de millones de operaciones, por lo cual requieren la ayuda de un ordenador.

Uno de los más famosos fractales correspondiente a este tipo es el conocido como **conjunto de *Julia***, en honor del matemático francés *Gaston Maurice Julia*. Nació el 3 de Febrero de 1893 en *Sidi Bel Abbés* (Argelia) y falleció en *París* el 19 de Marzo de 1978. Con solo 25 años publicó un manuscrito titulado "*Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles*", con el cual ha llegado a ser uno de los matemáticos más famosos de los que se han dedicado al estudio de los fractales. Fue soldado en la Primera Guerra Mundial, y cayó herido en un ataque en el frente francés, donde perdió parte de su nariz, lo cual le obligó a llevarla tapada durante el resto de sus días. Por sus importantes investigaciones fue nombrado profesor titular en la Escuela Politécnica de París.

En el artículo que hemos citado dio una descripción precisa de los conjuntos, que llevan su nombre, para los cuales la enésima iteración de un número complejo permanece acotada, cuando el número de iteraciones tiende a infinito.

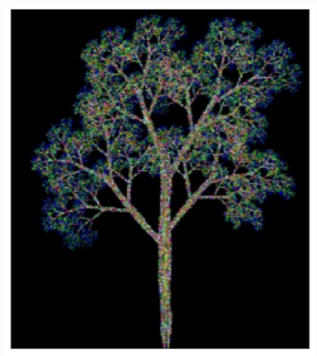




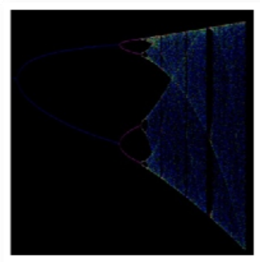
Por este trabajo recibió el gran premio de la Academia de las Ciencias. Durante los años 20 disfrutó de gran fama, pero posteriormente su trabajo fue olvidado, hasta que *B. Mandelbrot* lo puso de actualidad en 1970 con sus experimentos con los ordenadores.

Otro tipo de fractales muy interesantes son los obtenidos por medio de un **Sistema de Funciones Iteradas** (IFS). Es un método creado por *M. Barnsley*, basándose en el principio de autosemejanza. En un fractal IFS siempre se puede encontrar una parte de la figura que guarda una relación de semejanza con la figura completa. Esa relación es a menudo muy difícil de apreciar, pero en el caso del helecho de la figura siguiente es bastante clara: cualquier hoja es una réplica exacta de la figura completa.





Existen fractales asociados con la teoría del caos que reciben el nombre de **fractales caóticos**. Entre ellos, el más conocido es el atractor de *Lorenz (*izquierda) y el diagrama de bifurcación (centro).

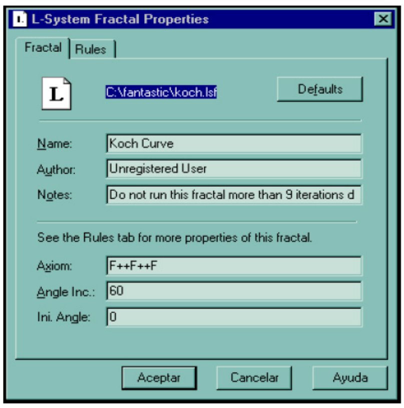



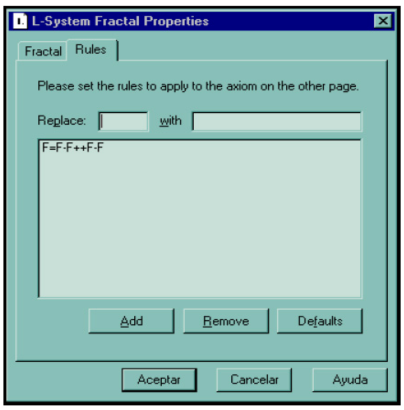

Merece la atención detenerse sobre un tipo particular de fractales obtenidos a través de un método conocido con el nombre de ***L-System***. El método fue creado por *Lindemayer* en 1968 y publicado en el Journal *of Theoretical Biology*, como un modelo matemático para la construcción de un filamento celular de la bacteria *Anabaena Catenula*.

Básicamente el algoritmo consiste en suponer un sistema celular con dos posibles estados citológicos, *A* y *B*, y la regla de crecimiento: una célula en el estado *A* se divide y da lugar a una en el estado *A* y otra célula en el estado *B*; que se representa por *AB*. En el siguiente paso, una célula en el estado *B* se divide en una célula en el estado *B* y otra en el estado *A*, es decir *BA*. En la tabla se ha representado el resultado de la división para las cuatro primera fases, tomando como célula de partida del tipo *A*.

Fase	Núm. células	Resultado división
1	1(*A*)	*AB*
2	2(*AB*)	*ABBA*
3	4(*ABBA*)	*ABBABAAB*
4	8(*ABBABAAB*)	*ABBABAABBAABABBA*

Estos fractales se pueden generar utilizando como software *Fantastic-Fractal*. En la figura siguiente aparecen los parámetros con los que se genera la curva de *Koch*.

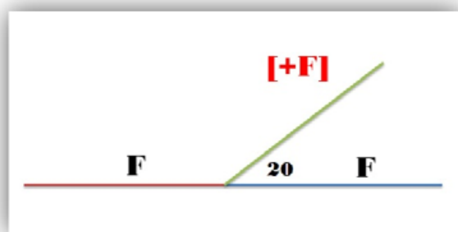




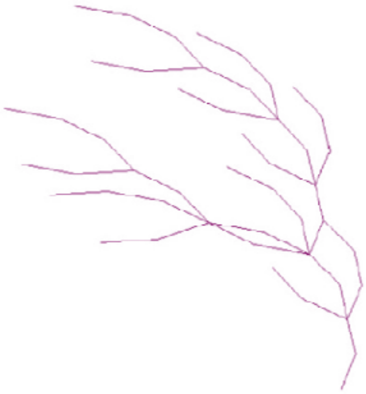
El signo + representa un giro de 60 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj, y el signo - un giro de 60 grados en la dirección de las agujas del reloj. Para poder dibujar el fractal es necesario indicar la regla, que en nuestro caso viene dada por, F=F-F++F-F.

Es decir, F estará definida como: se traza un segmento unitario, en su extremo giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y dibujamos un segundo segmento; después giramos 120 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj y dibujamos otro segmento finalmente giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y trazamos el último de los segmentos. Una vez ejecutado el programa la figura que aparecerá será la que puede verse a la izquierda.

Los *L-systems* son muy adecuados para modelar muchos sistemas biológicos, especialmente aquellos que presentan bifurcaciones o ramificaciones en su desarrollo. El esquema básico para dibujar una bifurcación con un ángulo dado (por ejemplo 20 grados) es el siguiente: F=F[+F]F, donde los corchetes indican que al final se debe retroceder a la posición donde empezaba la bifurcación.

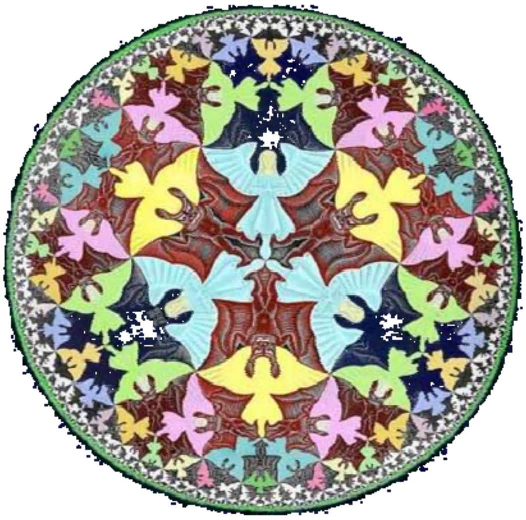


Naturalmente, se puede definir una regla más complicada y obtener un modelo mucho más realista. Por ejemplo, para representar un árbol se ha elegido como Regla: F=F+F+[+F-F-]-[-F+F+F] y un ángulo de 22 grados. En la figura siguiente pueden verse los resultados para un número diferente de iteraciones.



Por último, y aunque no son exactamente fractales, se encuentra algunas de las obras de grandes pintores. Por ejemplo, *M. C. Escher* que aunque seguramente no conocía el concepto de fractal, sin embargo hacia uso de estructuras matemáticas complejas.

Parte de su obra incluye elementos relacionados con el infinito. Según comentó, su aproximación al infinito surgió del denominado círculo de *Poincaré*, en el cual se pretende representar la totalidad de una superficie infinita encerrada en un área finita.



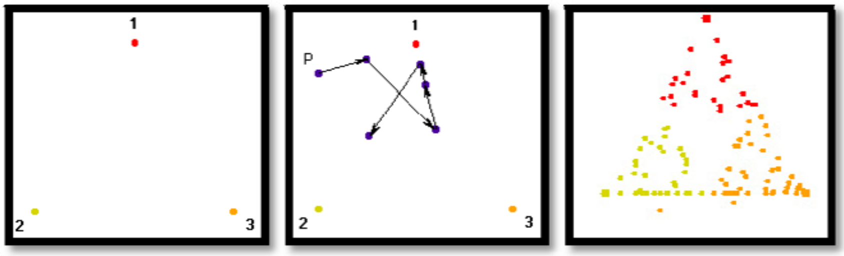
Otro pintor con algunas de sus obras relacionadas, de alguna manera, con los fractales es *Vicent Van Gogh*, en su obra el cielo estrello puede apreciarse que el cielo tiene estructura caótica o fractal.

En el programa de televisión Redes, el divulgador científico *Eduardo Punset*, entrevistó a *Mandelbrot*, donde comentó que se sentía muy impresionado por los cuadrados del pintor japonés *Katsushika Hokusai*, puesto que sin ser consciente de ello, el pintor había sabido captar las propiedades básicas de los fractales. En las imágenes que presentamos se aprecia como un río se divide y subdivide hasta formar la catarata, o bien como una ola está formada por muchas otras olas más pequeñas, propiedad que conocemos con el nombre de autosemejanza.

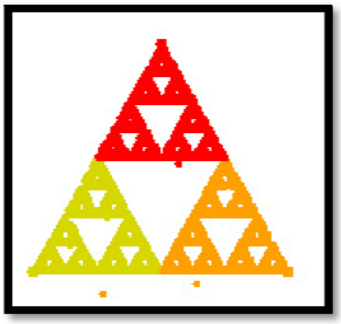
El juego del caos

*T*odos hemos sufrió la desagradable experiencia de que al coger una bolsa de legumbres se caigan al suelo adoptando una forma caprichosa debido al azar. Si repetimos la experiencia, las legumbres describirán un patrón final distinto. Éste fue el punto de partida de *Michael Barnsley* para la construcción de fractales sin hacer uso del proceso de iteración. Partiendo del azar obtuvo una manera diferente de generar patrones fractales, y a esta técnica la denominó el juego del caos.

Para ejecutar el juego es aconsejable utilizar un ordenador o en su defecto una hoja de papel cuadriculada y un dado. Existen muchas variantes del mismo pero el juego clásico consiste en generar el triangulo de *Sierpinsky*. Se colocan tres puntos numerados del 1 al 3 formando un triángulo equilátero.



A continuación identificamos los lados 1 y 2 del dado con el punto 1, los lados 3 y 4 con el punto 2 y los lados 5 y 6 con el tercer punto. Ahora se elige un punto cualquiera P de la hoja y lo desplazamos de la manera siguiente: lanzamos el dado y movemos el punto P hasta la mitad de la distancia existente entre el punto P y el vértice que indique el dado. Por ejemplo: si ha salido un 1 en el dado, entonces situamos el punto P en la mitad de la distancia entre P y el vértice 1, si en el segundo lanzamiento sale un 5, situamos el punto en la mitad de la última posición de P y el vértice 3, y así sucesivamente.



Como se ha podido comprobar el azar puede generar patrones, como el triángulo de *Sierpinski*, u otro diferente como el de un helecho.

Aplicaciones de la Geometría Fractal

Para muchas personas el gran atractivo de los fractales reside en la belleza de las imágenes que genera, de hecho mucha gente se acerca a esta rama de las matemáticas atraídas únicamente por lo impactante y plasticidad de los resultados gráficos obtenidos. Sin embargo, y como tendremos oportunidad de ver en esta sección, lo verdadero importante de la geometría fractal es el amplio rango de aplicaciones en campos muy diferentes.

Aunque la geometría fractal fue concebida hace unos años, ha sido recientemente cuando se han logrado los avances más notables. En un principio, *Mandelbrot*, los utilizó en el ámbito de la Economía con la intención de analizar las fluctuaciones bursátiles.

Ahora bien tenemos que empezar preguntándonos; ¿qué significado tiene decir que un objeto real, tal como una costa o la red capilar del sistema venoso, es un fractal? Lo que queremos decir con ello, es que puede definirse un modelo matemático que se aproxima bastante bien al objeto. Aunque al ser sólo una aproximación tiene que estar limitada a una franja de escalas limitada por ciertos valores máximo y mínimo. Es evidente, entonces, que en el mundo real no existen fractales perfectos, como tampoco existen esferas perfectas, cuando se pretende representar a la tierra.

Como sabemos, los modelos no lineales son el origen del comportamiento caótico de los sistemas dinámicos, y que la geometría fractal es la herramienta adecuada para estudiar el caos. Por este motivo empezaremos comentando algunas aplicaciones de esta teoría.

- **Economía**: en el estudio errático e imprevisible de la bolsa y del flujo del dinero.
- **Amplificadores de sonido**: se producen cortas descargas eléctricas dentro de los circuitos, debido a la electricidad estática, lo que origina que el sonido tenga períodos caóticos.
- **Rotación de la tierra**: se ha descubierto, por medio de relojes atómicos, que la tierra sufre alteraciones en su movimiento de rotación, no funciona con la perfección de un reloj suizo. Como consecuencia de ello el paso de la tierra no es totalmente regular y se producen fases intermitentes de caos.
- **Lavadoras**: en 1993 la empresa *Goldstar* construyó una revolucionara lavadora, donde la el ritmo de rotación del tambor de la-

vado no era regular, sino caótico. La eficacia del lavado superó con creces a las construidas por la competencia.

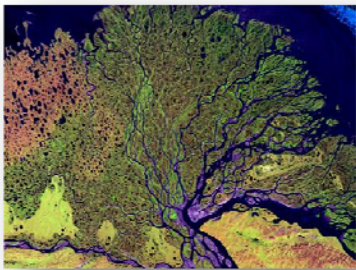
- **El cuerpo humano**: son abundantes los ejemplos donde el caos está presente en nuestro cuerpo.
    - Para que el sistema inmunológico tenga un funcionamiento eficaz es necesario que su comportamiento sea no lineal y caótico, para que tengan la posibilidad de adaptarse a los cambios externos. Si un sistema, que rige nuestra salud, fuese totalmente determinista, al producirse cualquier cambio en su evolución nuestro cuerpo enfermaría.
    - Provocando el caos en determinas zonas del cerebro, mediante la generación de turbulencias eléctricas, se puede bloquear la aparición de ataques epilépticos.
    - En cuerpo humano es un sistema caótico. Constantemente estamos sustituyendo nuestras células de tal manera que cada siete años se produce la regeneración de todas las células de nuestro cuerpo. La razón de que conservemos nuestra forma es debido a que el cuerpo humano es un atractor, y por tanto, a largo plazo tiende a mantener la misma estructura.
    - El ritmo cardiaco es caótico, de hecho cuanto más regular sea el ritmo más enfermo estará una persona. En 1983, *R. Ideker*, estudiando los ciclos biológicos, comprobó que la actividad eléctrica, que es la hace contraer los músculos del corazón, presenta períodos de orden dos, cuatro, ocho, dieciséis, y así hasta llegar a ser caótico. De hecho éste es el estado del corazón cuando sufre un ataque de fibrilación, por tal motivo se somete al enfermo a un shock eléctrico que hace volver al ritmo periódico y regular. Sorprendentemente, las pequeñas alteraciones de la cadencia del corazón es síntoma de buena salud.
    - Por último, una aplicación curiosa de la dinámica caótica está relacionada con el movimiento de los ojos. A partir de la masa del ojo, la viscosidad del humor vítreo, y otros parámetros es posible construir un modelo matemático no lineal del movimiento de los ojos. Cuando a una persona

sana mira la oscilación de un péndulo, sus ojos siguen continuamente el movimiento. Por el contrario, cuando un esquizofrénico realiza el mismo experimento sus ojos se mueven de forma caótica.

También los fractales tienen un amplio número de aplicaciones. De hecho, es difícil encontrar en la actualidad una disciplina científica donde no hayan sido aplicados.

FRONTERAS DE SEPARACIÓN.

Las fronteras entre diferentes medios físicos o biológicos dan lugar a buenos ejemplos de sistemas que se pueden modelizar mediante fractales. Un ejemplo clásico, que responde a ciertos modelos de curvas fractales, es el de las costas, pero también los son los bordes de una nube, la superficie montañosa, la orilla de un río o la frontera entre dos países diferentes. La evolución y construcción a lo largo de la historia de una frontera entre dos naciones sigue un proceso muy parecido a como se construye un fractal lineal, como la curva de *Koch*. Lo mismo le ocurre a la formación de la línea de costa puesto que el contacto entre el agua del mar y la tierra modifica constantemente su perfil.

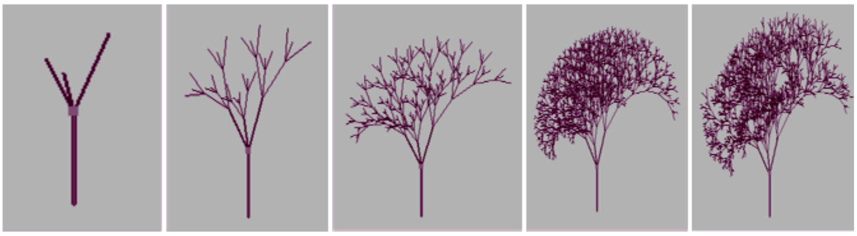


No obstante, la construcción de la curva de Koch es un proceso matemático, mientras que en la formación de una línea de costa están presentes procesos aleatorios. A pesar de ello, la dimensión fractal es de 1.26128 para la curva de koch y 1.3 el valor aproximado para la costa de Gran Bretaña, ó, 1.5 para la costa de Noruega (mucho más irregular).

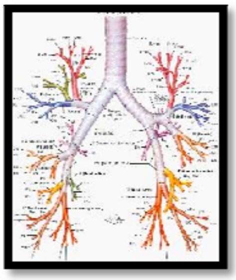
Tenemos que hacer una llamada de atención sobre el hecho de que no todos los objetos de la naturaleza tienen estructura fractal. En la naturaleza aparecen espontáneamente figuras regulares como círculos, esferas o rectas. Por ejemplo, las formas de algunas hojas, las gotas de lluvia, etc., pero en estas ocasiones la forma adoptada es consecuencia de un problema de optimización. Es conocido que una esfera presenta, a igual volumen, una superficie mínima. Por esta razón, y como resultado de optimizar la tensión superficial, una gota de agua adopta la forma de una esfera.

RAMIFICACIONES.

Desde el punto de vista matemático, se entiende por árbol a un conjunto de puntos (vértices) unidos entres sí por arcos (ramas). Bajo este epígrafe ubicaremos no sólo a los árboles con sus ramas, sino que extenderemos el concepto para incluir otros objetos de la naturaleza que adoptan esta forma, o el sistema arterial y bronquial de un mamífero.

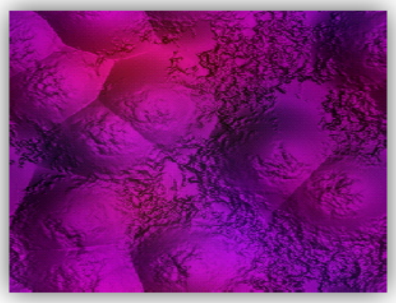


El proceso mediante el cual una rama principal se divide y subdivide sucesivamente es el culpable de que el objeto tenga estructura fractal. La clave se encuentra en la propiedad de autosemejanza por la cual se añade la misma estructura a escala cada vez más pequeña. Pensemos, por ejemplo, en la red de afluentes de una cuenca hidrográfica, donde el agua de lluvia tiene que ser desaguada, o en el sistema arterial, donde la sangre tiene que llegar a todos los tejidos del cuerpo ocupando sólo un 5% del volumen total. Estos procesos pueden modelarse por un tipo de curva (dimensión uno) que ocupa una superficie (dimensión dos), es decir, un fractal.



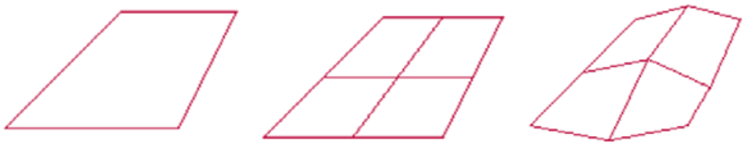
TEXTURAS Y PAISAJES FRACTALES.

La geometría fractal es la herramienta perfecta para la creación de paisajes imaginarios utilizados en cine y juegos de ordenador. También es posible elaborar texturas diferentes mediante la creación de un espacio tridimensional coloreado que rodea a un objeto digital utilizando una fórmula matemática iterativa.

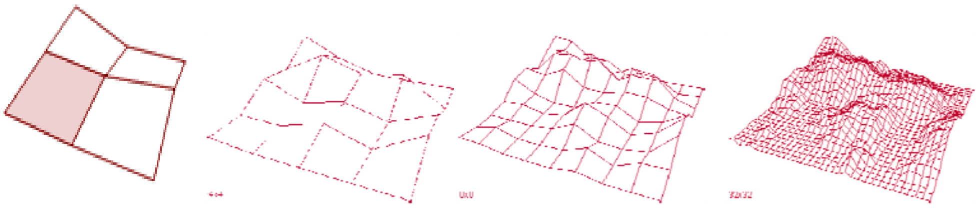


El análisis de la textura de una imagen es un campo de investigación abierto y de continua expansión, especialmente en medicina como herramienta de diagnóstico, o en imágenes de reconocimiento, como el estudio de las fracturas del terreno.

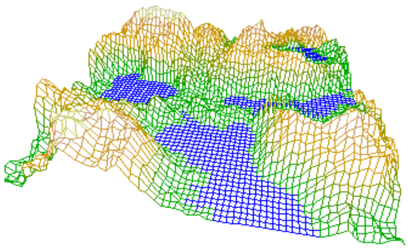
De manera resumida, la forma de construir un paisaje fractal es la siguiente: se parte de un cuadrado y se unen los puntos medios de los lados para obtener otros cuatro cuadrados más pequeños. Antes de la siguiente iteración, se le aplica una transformación a los vértices, de tal forma que se eleven o desciendan una cantidad aleatoria.



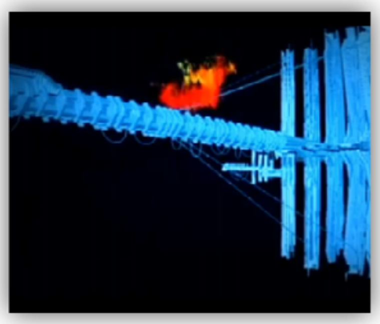
Una vez conocido el proceso geométrico, el ordenador repite (itera) el mismo esquema un número elevado de veces.



Por último, se aplica el color, la textura, y un programa de animación se encarga del resto de la película.



Mediante una técnica parecida la productora Lucasfilms recreó los efectos especiales de la película "*Star Trek 2*", la saga de "*La guerra de las galaxias*", o el mar en la película "*Titanic*".

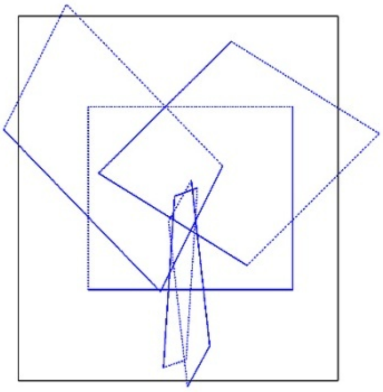
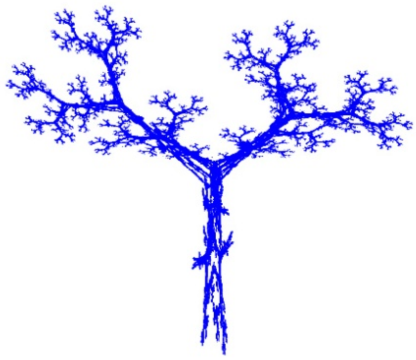
 

COMPRESIÓN DE IMÁGENES DIGITALES.

Cuando realizamos la clasificación de los fractales, vimos que algunos de ellos podían generarse a través de un Sistema de Funciones Iteradas (IFS). Esto es, un conjunto de funciones que repetidas sucesivamente generan al objeto fractal.

Uno de los grandes problemas en el uso de la información digital es el de su manipulación, sobre todo cuando el volumen de transmisión es grande. Por ejemplo, si se desea enviar por Internet una imagen de alta resolución es posible que tengamos problema de capacidad de memoria. Entonces, ¿cómo podemos resolver esta cuestión? Existen muchas técnicas diferentes relacionadas con la compresión de imágenes, pero una de ellas está basada en la geometría fractal.

En efecto, por medio de un Sistema de Funciones Iteradas podemos eliminar una gran parte de la información a transmitir puesto que sólo se necesita la función generadora del objeto fractal, en lugar de todos los pixeles de la imagen.

De esta manera, si por ejemplo, deseamos remitir la figura de árbol de la izquierda, bastará con enviar la imagen geométrica de la derecha junto con su función generadora.

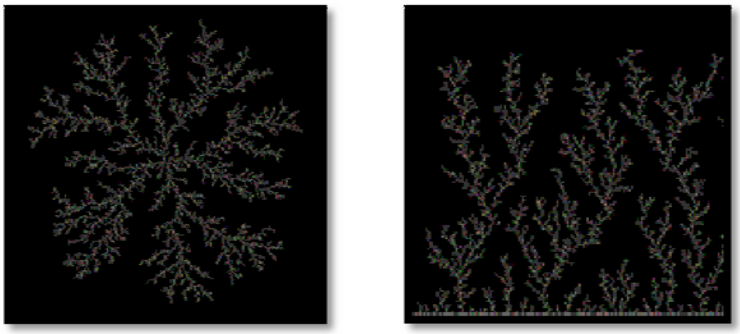
A este método de tratar digitalmente una imagen, con el objetivo de reducir el tamaño de su archivo, se le conoce con el nombre de **proceso de transformación fractal.** Fue inventado en 1987 por *Barnsley* y la cuestión clave está en saber si a una imagen cualquiera se le puede aplicar dicha técnica. La respuesta es afirmativa y se conoce con el nombre de teorema del collage, a partir de una imagen es posible encontrar la fórmula que la genera.

MODELADO DE MEDIOS POROSOS.

En trabajos de geología se hace necesaria la construcción de modelos matemáticos relacionados con el movimiento de aguas subterráneas, la explotación de bolsas de petróleo o la contaminación de acuíferos.

Cuando la naturaleza desea crear una estructura actúa de dos maneras diferentes. Puede consistir en la formación de una estructura ordenada y cristalina, para lo cual cuando se añade una nueva molécula, ésta se lleva su tiempo puesto que prueba en distintas disposiciones y finalmente se aloja en el sitio más óptimo, que suele ser el más estable. En otras ocasiones el tiempo de respuesta en la agregación tiene que ser mucho más corto y la agregación se realiza de “una manera desordenada”.

En este segundo caso se encuentra el llamado **proceso de agregación limitada por difusión**, creado en 1981 por *Leonard Sander* y *Thomas Witten*. De entre los puntos de una circunferencia se toma un punto al azar que se desplaza con un movimiento browniano (aleatorio), y se detiene cuando llega al centro de la circunferencia. En ese momento se desprende de la circunferencia una nueva partícula con el mismo tipo de movimiento hasta que se encuentra con la primera, y así sucesivamente. Existen en el mercado programas de ordenador, como *Fractint*, que son capaces de realizar estas simulaciones y generar figuras como las siguientes.



Estas figuras fractales tienen una dimensión fraccionaria en torno a 1.71, que es un valor muy aproximado a la de los objetos creados mediante digitación viscosa.

El **proceso de digitación viscosa** se produce cuando un líquido de baja viscosidad desplaza a otro más viscoso en un medio poroso. Por ejemplo, cuando se trata de extraer el crudo mediante la introducción de agua a presión en yacimientos petrolíferos situados en terrenos porosos.

Existe un experimento muy sencillo para crear fractales por medio de esta técnica que se conoce como célula de *Hele-Shaw*. Consiste en un fluido viscoso, como la glicerina, que se encuentra encerrado entre dos láminas de cristal, y se le inyecta otra sustancia menos viscosa, como el agua, que es el culpable de que desplace la glicerina. Se creará una burbuja muy irregular que es tiene estructura fractal.

MEDICINA.

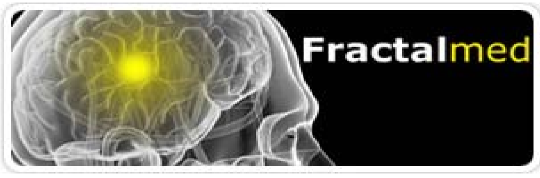
*E*s en este campo donde se han logrado grandes progreso con el uso de la geometría fractal. El número de aplicaciones es inmenso como puede comprobarse si se realiza una búsqueda en la base de datos más prestigiosa de publicaciones médicas *PubMed*.

Sin querer ser exhaustivo se han aplicado los fractales en los siguientes campos de la medicina:

- La distribución del flujo sanguíneo pulmonar.
- La estructura alveolar de los pulmones.
- Las superficies de las proteínas.
- Los patrones de formas en las mamografías.
- Al estudio del cáncer de mamas y al de próstata.
- Al análisis de fracturas de huesos.
- La regeneración de tejidos.
- Al estudio de enfermedades degenerativas del cerebro.

Comentaremos de una manera más detallada algunas de estas aplicaciones.

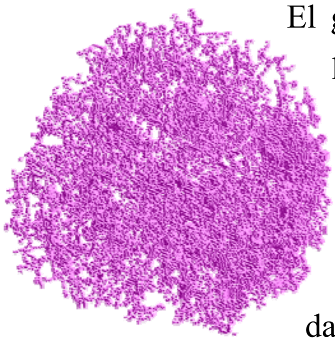
En 2003 un grupo de científicos del *Harvard Medical School* y el *Massachusetts Institute of Tecnology* presentaron un método para obtener un órgano vivo de un paciente a partir de sus mismas células, y de esta manera minimizar el problema del rechazo. El objetivo del trabajo reside en construir un esqueleto, semejante al sistema arterial, que permite a los nutrientes llegar a todas las partes del tejido. El esqueleto se obtuvo a partir de patrones de crecimiento fractal y se introdujeron en unos chips de silicio. Los resultados fueron esperanzadores puesto que fue posible mantener células de hígado vivas durante dos semanas, debido a que había sido posible construir una estructura irregular muy resistente a las roturas.



Durante los últimos años un grupo de investigación interdisciplinar, liderado por el profesor *Francisco J. Esteban* del Departamento de Biología Experimental de la Universidad de Jaén, ha trabajado intensamente en la aplicación de la dimensión fractal de imágenes de Resonancia Magnética para la detección precoz de algunas enfermedades neurodegenerativas. El proyecto tiene el nombre de *Fractalmed* y se ha centrado, en un primer momento, en la Esclerosis Múltiple.

La Esclerosis Múltiple es una enfermedad autoinmune, inflamatoria y neurodegenerativa que afecta principalmente a la Sustancia Blanca del Sistema Nervioso Central (cerebro y médula espinal). Es, después de la epilepsia, la enfermedad neurológica más frecuente entre los jóvenes, afectando aproximadamente a 1 de cada 1000 personas, en particular a las mujeres.

Se desconocen las causas que la producen aunque se cree que hay diversos mecanismos autoinmunes involucrados. La manera de actuación es la siguiente. El organismo lanza un ataque defensivo contra sus propios tejidos, y se origina una inflamación en áreas de la Sustancia Blanca del Sistema Nervioso Central, en regiones que se distribuyen aleatoriamente. A continuación se produce la destrucción de la mielina, que es una lámina envolvente de las fibras nerviosas que facilita la transmisión de los mensajes entre cerebro, la médula espinal y el resto del cuerpo. Desgraciadamente, cuando hay daño de la mielina, la transmisión neurológica de los mensajes ocurre más lentamente o queda bloqueada, lo que lleva a una movilidad reducida e invalidez, en los casos más severos, de la persona.



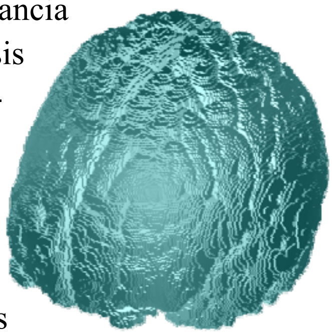
El gran problema para su tratamiento es que sólo puede ser diagnosticada con fiabilidad mediante una autopsia post-mortem o una biopsia, aunque existen criterios no invasivos para diagnosticarla con aceptable certeza Sin embargo, su detección precoz es muy importante puesto que se puede empezar el tratamiento más rápidamente, con el consiguiente aumento de la calidad de vida, y retraso en la aparición de nuevos brotes. No hay ningún síntoma típico de la Esclerosis Múltiple que ayude en el diagnóstico inicial. Es frecuente que el primer brote pase desapercibido sin que la persona consulte con su médico.

Hasta ahora se había descrito un único método capaz de detectar cambios en la sustancia blanca aparentemente normal, la tasa de transferencia de magnetización, el cual, además de ser costoso y difícil de realizar en la gran mayoría de los centros hospitalarios, presenta resultados contradictorios en cuanto a su sensibilidad.

Se ha demostrado que, aunque están teniendo lugar procesos que contribuyen al desarrollo de la enfermedad a nivel de la sustancia blanca cerebral, dicha sustancia blanca se observa en las imágenes de Resonancia Magnética Nuclear como aparentemente normal.

En la mayoría de los casos el diagnóstico de la degeneración de la sustancia blanca depende de la experiencia del médico en la observación de las imágenes, debido a la carencia de medidas objetivas. Pero muchas de las alteraciones son muy sutiles y difíciles de apreciar.

Los miembros del proyecto *Fractalmed* han demostrado que la aplicación de la dimensión fractal a imágenes de resonancia magnética del cerebro de enfermos de Esclerosis Múltiple es una herramienta muy útil en el diagnóstico precoz de esta enfermedad degenerativa. Los pacientes en un estado inicial de desarrollo, sin lesiones aparentes**,** mostraron un valor menor de la dimensión fractal a nivel de sustancia blanca cuando se compararon con los controles sanos.



La caracterización y cuantificación de la morfología del cerebro mediante el análisis de la dimensión fractal es un área de creciente interés desde hace unos años. La gran mayoría de los trabajos se centran en el análisis de la dimensión fractal de imágenes a nivel de dos dimensiones. Son muy pocas y puntuales las iniciativas de extender los resultados para estructuras en tres dimensiones.

Recientemente el grupo de investigación de la universidad de Jaén, ha ampliado el rango de aplicaciones del método, siendo pioneros en la construcción de un programa informático para el cálculo de la dimensión fractal en tres dimensiones y su aplicación otras enfermedades neurodegenerativas con resultados muy positivos. A nivel tridimensional se ha demostrado que existe un aumento significativo del valor de dimensión fractal de la materia gris del cerebro aparentemente normal en enfermos de Esclerosis Múltiple que sufren los primeros ataques de la enfermedad.

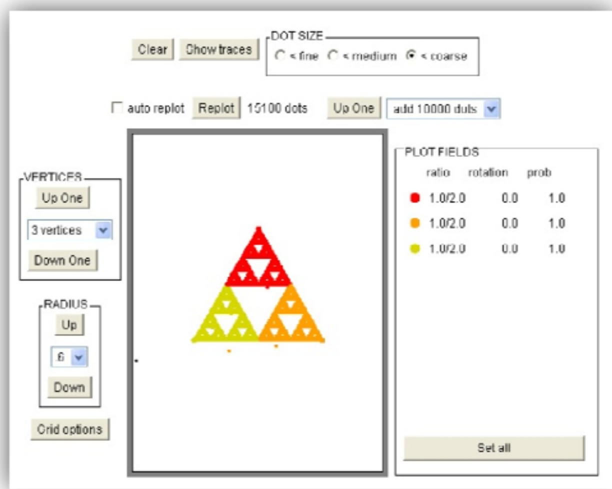
Para acabar el apartado de las aplicaciones, nos gustaría volver a recordar las palabras de *Michael Barnsley*, *"… la geometría fractal cambiará su visión de las cosas…"*. En efecto, aunque no seamos conscientes, los fractales se utilizan cotidianamente, por ejemplo, en el diseño de algunas zapatillas para el baño. En la siguiente foto puede apreciarse dos zapatillas donde la planta para el pie es diferente. En la inferior el trazado es regular, mientras que en la superior su configuración es fractal, lo que produce una evacuación mucho más rápida del agua.

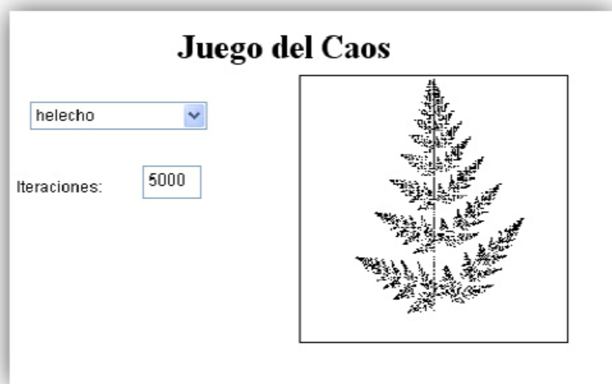
Del mismo modo, actividades aparentemente tan ajenas de las matemáticas como es la gastronomía, también están presentes los fractales. Recientemente el gran cocinero *J.M. Arzak* ha elaborado un postre, de nombre fractal, donde sobre un fondo de hidromiel (agua, miel y azúcar) se deposita una cucharada de colorante (cochinilla) adoptando instantáneamente la forma irregular típica de los fractales.

Programas para trabajar con fractales

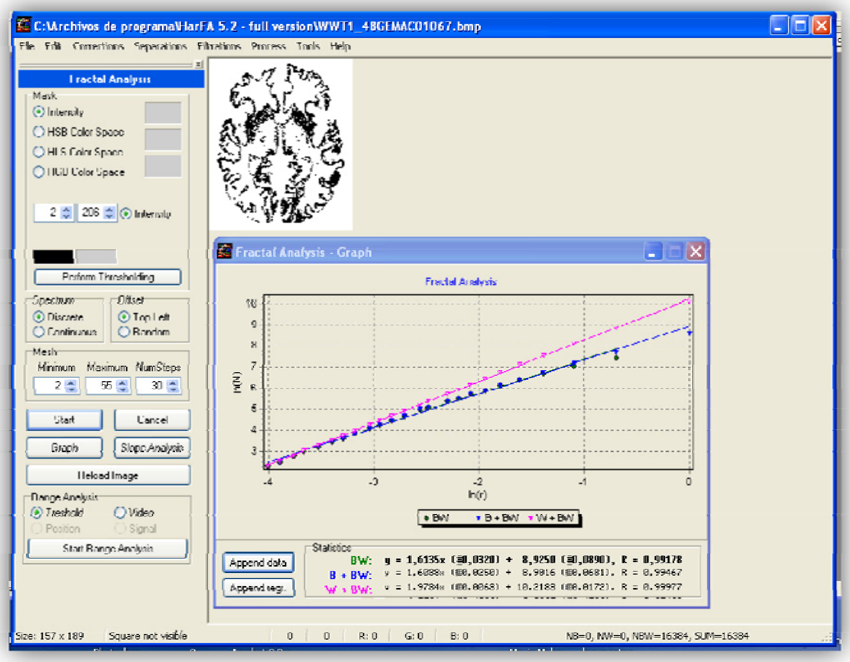
*E*xisten diferentes páginas en Internet donde se puede ejecutar de forma interactiva el juego del caos, por ejemplo:

http://www.eduteka.org/MI/master/fractal/software/Sierpinski.html, http://www.dma.fi.upm.es/java/geometriafractal/clasicos-I/app_caos.html

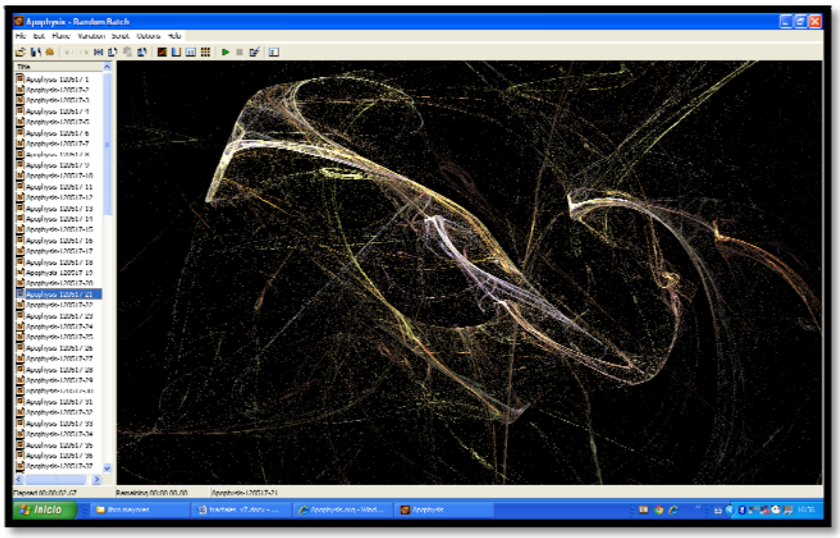




De entre los programas gratuitos más populares para poder encontrar la dimensión fractal de un objeto bidimensional se encuentra *Harfa*. Ha sido desarrollado en el Instituto de Física y Química Aplicada de la Universidad de Brno de la República Checa y se puede descargar en la dirección: http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/

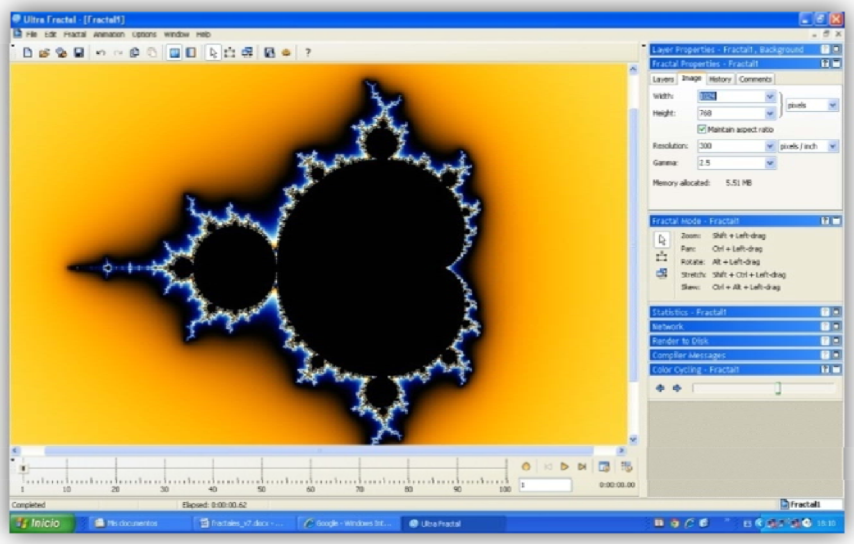


Apophysis es un software que permite generar imágenes basadas en la geometría fractal, es gratuito, de código abierto, muy reciente, de fácil manejo y que genera imágenes, a través de algoritmos aleatorios, muy impactantes. http://apophysis.org/

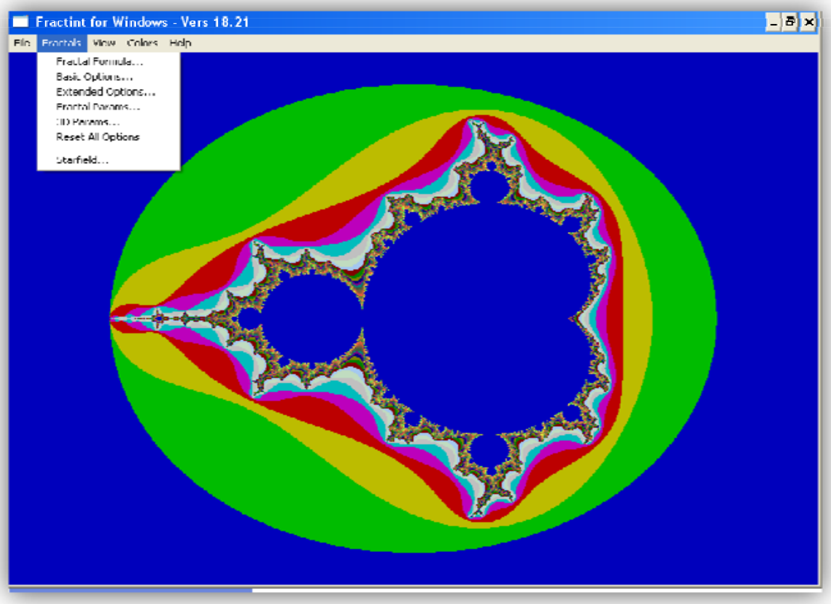


Sin lugar a dudas, el programa más popular para construir y manipular fractales es *Ultra Fractal*. Como dice su web de presentación:

"Ultra Fractal es la mejor herramienta para crear arte fractal y animaciones fractales. Ya seas un diseñador gráfico, un artista fractal profesional, un productor de vídeos, o un completo principiante, con Ultra Fractal es muy fácil crear hermosas imágenes fractales, texturas animadas, y fondos fractales con movimiento". http://www.ultrafractal.com/spanish.html



Fractint es un software de libre distribución para construir fractales muy popular entre los aficionados al arte fractal. En principio está diseñado para ejecutarse en MsDos, aunque se puede trabajar en el entorno Windows, bajo el nombre de Winfract. Contiene predefinidos más de 100 tipos de fractales y además se pueden construir fractales tipos IFS y de Lindenmayer.


Fractint for Windows - Vers 18.21
File
Fractals
View
Colors
Help
Fractal Formula...
Basic Options...
Extended Options...
Fractal Params...
3D Params...
Reset All Options
Starfield...

.