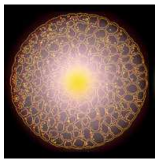


Tema 2

ECUACIONES DIFERENCIALES

2.1. Introducción

Gran parte de los sistemas que nos rodean están sometidos al **cambio**, por tanto, es un hecho cotidiano para todos nosotros. Las Matemáticas son muy útiles para investigar, entre otros, fenómenos como el movimiento de los planetas, la desintegración de sustancias radiactivas, la velocidad de las reacciones químicas y los patrones meteorológicos. Por otro lado, los biólogos investigan en campos tales como la contaminación o la dinámica de poblaciones. Incluso en áreas, aparentemente alejadas de la Matemáticas, como las Ciencias Políticas o la Medicina, es frecuente que recurran a los modelos matemáticos, en los cuales la clave está en el cambio.

Muchos de estos modelos se expresan a través de una ecuación diferencial. Si $y = f(t)$ es una función que relaciona las variables t e y, entonces su derivada

$$y' = \frac{dy}{dt},$$

nos indica la **tasa de cambio o velocidad de cambio** de la variable y con respecto de la variable t.

Cuando estudiamos un problema del mundo real necesitamos usualmente desarrollar un marco matemático. Sabemos que el proceso por el que se crea y evoluciona este marco es la construcción de un modelo matemático, siendo algunos de ellos muy precisos, especialmente los de la Física. Sin embargo, otros lo son menos, concretamente los que tratan de problemas de Biología o Ciencias Sociales. No obstante, en los últimos años los enunciados de estas materias se han vuelto lo suficientemente precisos como para poder expresarlos matemáticamente.

Un ejemplo de creación de un modelo continuo lo tenemos en la predicción del tiempo. En teoría, si pudiésemos programar en un ordenador todas las hipótesis correctas, así como los enunciados matemáticos apropiados sobre las formas en que las condiciones climáticas operan, tendríamos un buen modelo para predecir el tiempo mundial. En el modelo del clima global, un sistema de ecuaciones calcula los cambios que dependen del tiempo, siendo las variables el viento, la temperatura y la humedad, tanto en la atmósfera como en la tierra. El modelo[1] puede predecir también las alteraciones de la temperatura en la superficie de los océanos.

Por todo lo comentado anteriormente, hemos puesto de manifiesto que en los modelos matemáticos del mundo real tienen gran importancia el estudio de las ecuaciones diferenciales. En cualquier lugar donde se lleve a cabo un proceso que cambie continuamente en relación al tiempo (rapidez de variación de una variable con respecto a otra), suele ser apropiado el uso de las ecuaciones diferenciales.

EJERCICIO 1

Escribir una ecuación diferencial que describa la situación dada.

1 **La cantidad de bacterias en un cultivo crece, en cada momento, a un ritmo que es proporcional al número de bacterias presentes.**

2 **Cuando los factores ambientales imponen un límite superior sobre su tamaño, la población crece a un ritmo que es conjuntamente proporcional a su tamaño actual y a la diferencia entres u límite superior y su tamaño actual.**

3 **La razón a la que las personas oyen hablar sobre un nuevo aumento de precios es proporcional al número de personas en la ciudad que no han oído hablar al respecto.**

4 **El ritmo con el que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional a la cantidad de residentes que han sido infectados y al número de residentes propensos a la enfermedad que no han sido infectados.**

5 **Si es cierto que en una economía estable la velocidad de disminución del número de personas y, con un salario de por lo menos x euros, es directamente proporcional al número de personas e inversamente proporcional a su salario, obténgase la ley de Pareto, es decir la expresión de y en función de x.**

2.2. ¿Qué es una ecuación diferencial?

Aunque no sepamos que es una ecuación diferencial, sin embargo estamos familiarizados con el problema de resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas. Además, sabemos lo que se entiende por solución de la ecuación, aunque en

[1]En el Centro Nacional de Investigación Atmosférica de EEUU tienen un superordenador con el nombre de CRAY que puede ejecutar un modelo parecido.

ecuaciones polinómicas de grado elevado o en ecuaciones donde aparecen funciones trascendentes no podamos encontrar su valor exacto.

De manera general, $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$, siendo F una función vectorial de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, representa a un sistema de m ecuaciones en las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Si utilizamos el lenguaje del cálculo diferencial podemos escribir ecuaciones donde aparezcan una función $y = y(t)$, definida sobre un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$, la variable t, y las derivadas de diferentes órdenes de y. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} y' = 6t + 5 & y' = 6y \\ y' + 3y + t = 0 & (y'')^2 + 2ty + \operatorname{sen} t = 0\,. \end{array}$$

Llamemos la atención sobre el hecho de que ya hemos tenido ocasión de estudiar este tipo de situaciones, concretamente cuando se realizó el estudio de las integrales indefinidas. En efecto, dada la ecuación $y'(t) = \operatorname{sen} t$ la idea básica era encontrar una función $y(t) = -\cos t + C$ que cumpla la igual anterior.

Los siguientes ejemplos tratan de mostrar como las ecuaciones diferenciales aparecen al modelar situaciones muy simples.

EJEMPLO 2.1

- Un zoológico planea llevar un león marino a otra ciudad. El animal irá cubierto durante el viaje con una manta mojada. En cualquier tiempo t, la manta perderá humedad debido a la evaporación, a una razón proporcional a la cantidad $y(t)$ de agua presente en la manta. Inicialmente, la sábana contendrá 40 litros de agua de mar. Estamos interesados en encontrar una ecuación diferencial que describa este problema.

  Al ser $y(t)$ la cantidad de agua en la manta en el tiempo t, del enunciado deducimos que la razón de cambio de $y(t)$ (su derivada $y'(t)$), es proporcional a $y(t)$. Entonces $y'(t) = ky(t)$, donde la constante de proporcionalidad k es negativa, ya que la cantidad de agua disminuye con el tiempo. Por tanto, nuestro modelo será

$$y'(t) = ky(t)\,, \quad k \leq 0\,, \quad y(0) = 40\,.$$

EJEMPLO 2.2

- La tabla siguiente:

Horas	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Conc.(mg/l)	12.0	10.0	7.0	5.0	3.5	2.5	2.0	1.5	1.0	0.7	0.5

  muestra la concentración de teofilina, una droga común para combatir el asma, en el torrente sanguíneo, como una función del tiempo después de la aplicación de una dosis inicial.

  Si representamos la concentración de teofilina en función del tiempo nos aparece una gráfica que disminuye de manera exponencial (Figura 2.1 izquierda)

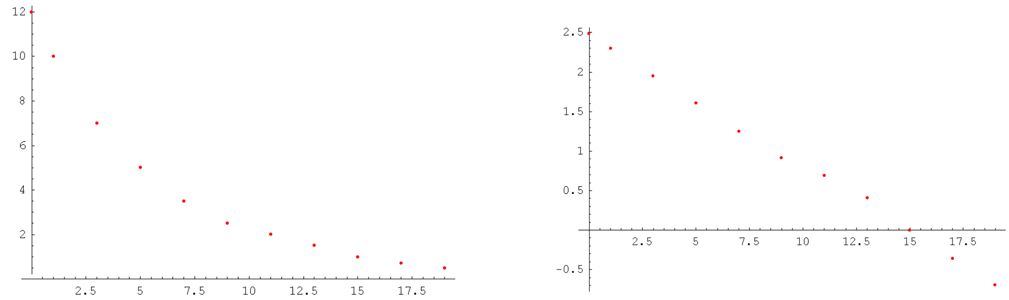


Figura 2.1. Izquierda: escala normal. Derecha: escala logarítmica

Si tomamos logaritmos neperianos (Figura 2.1 derecha) de los valores de la concentración, podemos ajustar esta nueva nube de puntos por una recta. Este proceso lo llevamos a cabo con el programa `Mathematica`® y su solución es la recta $2.45337 - 0.164264t$, que corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 2.45337)$ y su pendiente es -0.164264. Por lo tanto, si la solución del modelo es del tipo exponencial $y(t) = Ce^{kt}$, entonces $\ln y = \ln C + kt$. En consecuencia,

$$\ln C = 2.45338 \quad \Rightarrow \quad C = e^{2.45338} = 11.6275\,; \qquad k = -0.164265$$

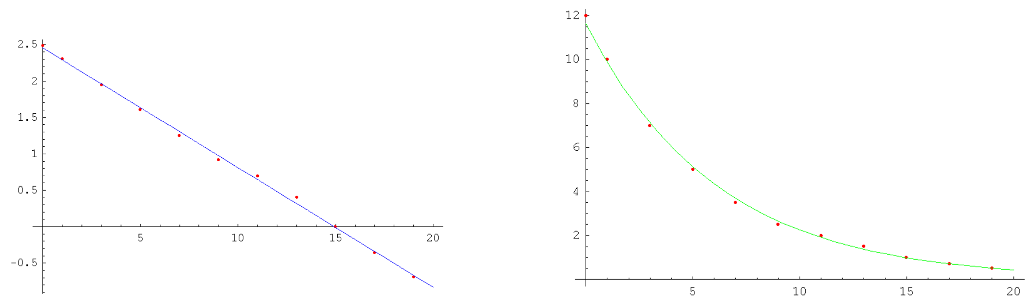


Figura 2.2. Izquierda: ajuste lineal. Derecha: ajuste exponencial $y(t) = 11.6275e^{-0.164264\,t}$

Pasemos ahora a precisar algunos de los conceptos sugeridos.

Una **ecuación diferencial** es aquella en la que aparece una función desconocida y una o más de sus derivadas. Cuando la función desconocida depende de dos o más variables, entonces las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial serán derivadas parciales, y en este caso diremos que se trata de una **ecuación en derivadas parciales**. Si la función depende sólo de una variable independiente, entonces la ecuación recibe el nombre de **ecuación diferencial ordinaria** (E.D.O.). En este curso estudiaremos algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n que representaremos por

$$F(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dt^n}) = F(t, y, y', \cdots, y^{n)}) = 0\,,$$

donde F es una expresión matemática en la que aparecen la variable t, una función desconocida y, y las derivadas de y hasta el orden n.

EJEMPLO 2.3

- Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$-2y'' + 3y' - y = e^t$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

$$-2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

- Las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}\,, \quad u = u(x,y,z,t)\,,$$

son ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales.

El **orden** de una ecuación diferencial es el que corresponde a la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. De esta manera, $y' = ay - by^2$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, mientras que

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\,,$$

es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

EJEMPLO 2.4

- Clasificar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales como ordinarias o en derivadas parciales. Determinar el orden y la linealidad o no linealidad en cada caso.

(a) $y' + t^2 y = te^t$ **(b)** $y''' + 4y'' - 5y' + 3y = \operatorname{sen} t$

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ **(d)** $t^2 dy + y^2 dt = 0$

(e) $\dfrac{dy}{dt} + 3\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^5 + 5y = 0$ **(f)** $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$

(g) $y'' + y \operatorname{sen} t = 0$ **(h)** $\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\dfrac{d^2r}{ds^2} + 1}$

(i) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + t \operatorname{sen} y = 0$ **(j)** $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{c} = 0$

(k) $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$

Las soluciones son:

1. $\boxed{y' + t^2 y = te^t}$

   Ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

2. $\boxed{y''' + 4y'' - 5y' + 3y = \operatorname{sen} t}$

   Ecuación diferencial ordinaria lineal de tercer orden.

3. $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$

   Ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

4. $\boxed{t^2 dy + y^2 dt = 0}$

   Ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal.

5. $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + 3\left(\dfrac{d^2 y}{dt^2}\right)^5 + 5y = 0}$

   Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal.

6. $\boxed{\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0}$

   Ecuación diferencial en derivadas parciales de cuarto orden.

7. $\boxed{y'' + y \operatorname{sen} t = 0}$

   Ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden.

8. $\boxed{\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\dfrac{d^2 r}{ds^2} + 1}}$

   Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.

9. $\boxed{\dfrac{d^2 y}{dt^2} + t \operatorname{sen} y = 0}$

   Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.

10. $\boxed{L\dfrac{d^2 q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{c} = 0}$

    Ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden.

11. $\boxed{\dfrac{d^2 \rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}}$

    Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden

2.3. Solución de una ecuación diferencial

Antes de desarrollar esta sección consideremos la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$. Cuando nos planteamos el problema de encontrar soluciones de esta ecuación estamos suponiendo que existe un conjunto X donde la variable x puede tomar valores. En general, la ecuación no es válida para todo valor $x \in X$ y el problema de resolver la ecuación consiste en encontrar $S \subset X$ tal que $x^2 - 4x + 3 = 0$. Entonces S será el conjunto de soluciones, que en nuestro caso es $\{1, 3\}$, y por tanto decimos que 1 y 3 son soluciones.

DEFINICIÓN 2.3.1 *Una solución de la ecuación diferencial*

$$F(t, y, y', \cdots, y^{n)}) = 0,$$

es cualquier función $y = \varphi(t)$, definida en un cierto intervalo $I \subset I\!R$, con derivada de orden n en ese intervalo y tal que

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi(t)^{n)}) = 0\,, \quad \forall t \in I\,.$$

El proceso de determinar todas las funciones que son soluciones de una ecuación diferencial se llama **resolver** la ecuación diferencial. Por ejemplo, la integración es un tipo muy simple de resolución de ecuaciones diferenciales.

A diferencia de las ecuaciones algebraicas, las ecuaciones diferenciales tienen por solución una función. Además, una ecuación diferencial tiene generalmente un número infinito de soluciones que recibe el nombre de **solución general**. Algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que no pueden obtenerse de la solución general y en este caso reciben el nombre de **soluciones singulares**.

En ocasiones, se desea encontrar una solución particular que satisfaga ciertas condiciones adicionales llamadas condiciones iniciales. Las condiciones iniciales especifican los valores de una solución y de cierto número de sus derivadas en un valor concreto de la variable t (con frecuencia es $t = 0$, pero puede ser cualquier otro). El problema de determinar una solución de una ecuación diferencial que satisfaga ciertas condiciones iniciales se llama un **problema de valores iniciales o de Cauchy**.

EJEMPLO 2.5

- La ecuación diferencial $(y'(t))^2 + 1 = 0$ no tiene solución real, ya que no existe un número real que elevado al cuadrado y sumado con uno valga cero.

- La ecuación $t^2 + y^2 - 4 = 0$ define en forma implícita una solución de la ecuación diferencial $t + yy' = 0$ en el intervalo $-2 < t < 2$. En efecto, si derivamos en forma implícita la expresión $t^2 + y^2 - 4 = 0$ obtenemos,

  $$2t + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad t + yy' = 0\,.$$

  Si despejamos en la solución el valor de y observamos que $y = \pm\sqrt{4 - t^2}$ sólo está definida en $-2 < t < 2$.

- Si derivamos la función
$$y = \begin{cases} -t^4 & \text{si} \quad t < 0 \\ t^4 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$
podemos comprobar que es solución de la ecuación diferencial $ty' - 4y = 0$ en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

EJEMPLO 2.6

- Estudiar si la función $\mathtt{y = 1/t}$ es una solución de la ecuación $\mathtt{y' = -y^2}$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

  La función $y = 1/t$ es derivable en el intervalo $(0, +\infty)$ y su derivada viene dada por $y' = -1/t^2$. Por lo que resulta inmediato que la función $y = 1/t$ satisface la ecuación diferencial $y' = -y^2$.

2.3.1. Existencia y unicidad de soluciones

Una vez que sabemos lo que se entiende por ecuación diferencial y solución de la misma, podemos preguntarnos:

- ¿Toda ecuación diferencial tiene solución?
- En el caso de que ésta exista, ¿cuántas tiene?, ¿quiénes son?

Antes de responder a estas preguntas, veamos el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 2.7

- La ecuación diferencial $(y'(t))^2 + (y(t))^2 + 1 = 0$ no tiene solución ya que $(y'(t))^2 + (y(t))^2 \geq 0$ para cualquier pareja de valores reales que tomen las funciones $y'(t)$ e $y'(t)$.
- Es inmediato comprobar que
$$y(t) = t^3 + C\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$
es solución de la ecuación diferencial $y'(t) = 3t^2$, para cualquier valor de la constante C. Por tanto, existe un número infinito de soluciones.
- En cuanto a la ecuación $y''(t) = 0$, cualquier función cuya gráfica sea una recta será solución. También en este caso existe un número infinito de soluciones.

Es bastante corriente que si una ecuación diferencial tiene solución, tenga infinitas soluciones. En efecto, en el proceso de resolver la ecuación diferencial tenemos que hacer al menos una integral y en consecuencia nos aparecerá una constante que, al tomar diferentes valores, nos definirá una gama infinita de soluciones.

A partir de este momento, y salvo que no lo indiquemos, nos centraremos en las ecuaciones diferenciales de primer orden $F(t, y, y') = 0$, donde supondremos que podemos expresarlas como $y' = f(t, y)$.

Consideremos el problema de valores iniciales (P.V.I.):

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,, \tag{2.1}$$

estamos interesados en saber si dicho problema tiene solución y en caso afirmativo si ésta es única.

EJEMPLO 2.8

- Es fácil ver que la ecuación diferencial $ty' + y = 1$ admite como solución general $y = c/t + 1\,, c \in \mathbb{R}$, en cualquier intervalo que no contenga al cero. En efecto, derivando la función $y(t)$ se tiene

  $$y' = -\frac{c}{t^2} \quad \Rightarrow \quad ty' + y = -\frac{c}{t} + \frac{c}{t} = 1\,.$$

  Si queremos determinar la solución que pasa por el punto $(1, 2)$ tenemos que imponer la condición $y(1) = 2$. El valor de c que cumple con el requisito anterior es $c = 1$, con lo cual la solución particular pedida es

  $$y = \frac{1}{t} + 1\,. \tag{2.2}$$

  En consecuencia, la función (2.2) es una solución del problema de valores iniciales

  $$ty' + y = 1\,, \quad y(1) = 2\,, \tag{2.3}$$

  en el intervalo $(0, +\infty)$. Puesto que en

  $$y = \frac{c}{t} + 1\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

  están todas las soluciones de la ecuación diferencial $ty' + y = 1$, entonces el problema (2.3) **tiene solución única**.

  En cambio, no es posible encontrar una solución que pase por el punto $(0, 2)$. Por tanto, en este caso diremos que el problema de valores iniciales

  $$ty' + y = 1\,, \quad y(0) = 2\,, \tag{2.4}$$

  no tiene solución.

- Es inmediato comprobar que el problema de valores iniciales

$$(y')^2 = 4y\,, \quad y(0) = 1\,, \tag{2.5}$$

tiene dos soluciones: (a) $y = (t-1)^2\,,$ (b) $y = (t+1)^2\,.$

TEOREMA 2.3.2 (Teorema de Cauchy-Peano) *Sea $(t_0, y_0) \in I\!R^2$ y supongamos que existe un rectángulo cerrado*

$$R = \{(t,y) \in I\!R^2 \,:\, |t - t_0| \leq a\,,\, |y - y_0| \leq b\}$$

en el que la función f es continua. Entonces el problema de valores iniciales

$$y' = f(t,y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,,$$

tiene al menos una solución definida en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, donde

$$\delta = \text{mín}\left(a,\, \frac{b}{M}\right)\,, \quad M = \max_{(t,y)\in I\!R^2} |f(t,y)|\,. \tag{2.6}$$

Hemos visto en el teorema de *Cauchy-Peano* que la continuidad de la función $f(t,y)$ en una región R garantiza que por cada punto de R pasa una solución de la ecuación diferencial $y' = f(t,y)$ ¿Será también cierto que la continuidad de la función $f(t,y)$ obliga a que por cada punto de R pase una única solución? El siguiente ejemplo nos dará la respuesta a esta pregunta.

EJEMPLO 2.9

- Supongamos la ecuación diferencial $y' = f(t,y) = y^{\frac{2}{3}}$, que podemos escribirla

$$y'y^{-\frac{2}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(3y^{\frac{1}{3}}) = 1\,.$$

Integrando

$$3y^{\frac{1}{3}} = t + c \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{t}{3} + k\right)^3\,, \quad k = \text{cte.}$$

El problema de valores iniciales

$$y' = y^{\frac{2}{3}}\,, \quad y(0) = 0\,,$$

no tiene solución única, ya que $y = t^3/27$, e $y = 0$ son dos soluciones del mismo.

Este ejemplo muestra una ecuación diferencial con una función $f(t,y) = y^{2/3}$ continua en un rectángulo R que contiene al punto $(0,0)$, y sin embargo no tiene una única solución. Si queremos conseguir este último objetivo será necesario exigir a la función f nuevas condiciones.

TEOREMA 2.3.3 (Teorema de Picard) *Sea $(t_0, y_0) \in I\!R^2$ y supongamos que existe un rectángulo cerrado*

$$R = \{(t,y) \in I\!R^2 \, : \, |t - t_0| \le a \, , \, |y - y_0| \le b\}$$

en el que las funciones f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas. Entonces el problema de valores iniciales

$$y' = f(t,y) \, , \quad y(t_0) = y_0 \, ,$$

tiene solución única definida en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, donde δ está dado por (2.6)*.*

OBSERVACIÓN 2.3.4

- Los Teoremas 2.3.2 y 2.3.3 nos dan condiciones suficientes pero no necesarias para garantizar la existencia y unicidad de soluciones para un problema de valores iniciales.
- La solución de un problema de valores iniciales puede existir en un intervalo mayor que el mencionado en los Teoremas 2.3.2 y 2.3.3.
- En los Teoremas 2.3.2 y 2.3.3 hemos considerado rectángulos R cerrados y acotados. Pueden enunciarse teoremas análogos utilizando rectángulos abiertos

  $$R = \{(t,y) \in I\!R^2 \, : \, |t - t_0| < a \, , \, |y - y_0| < b\} \, ,$$

  o bien rectángulos del tipo

  $$R = \{(t,y) \in I\!R^2 \, : \, t_0 \le t < t_0 + a \, , \, |y - y_0| < b\} \, .$$

  En estos casos tenemos que añadir la hipótesis de que las funciones f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ estén acotadas.

EJEMPLO 2.10

- En el problema de valores iniciales

  $$t y' = 2y \, , \quad y(0) = 0 \, , \tag{2.7}$$

  las funciones

  $$f(t,y) = \frac{2y}{t} \, , \qquad \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \frac{2}{t} \, ,$$

no están definidas en los puntos de la recta $t = 0$. Por tanto, no es posible encontrar un rectángulo R que contenga al punto $(0, 0)$ en el cual la función f sea continua. No podemos aplicar el Teorema 2.3.2 y, en consecuencia, no podemos asegurar nada sobre la existencia de solución del problema de valores iniciales (2.7). Sin embargo, es fácil ver que las funciones $y = c\,t^2$ con $c \in \mathbb{R}$ son soluciones del problema (2.7) en el intervalo $-\infty < t < \infty$. El problema de valores iniciales tiene infinitas soluciones.

2.4. Análisis geométrico de $y' = f(t, y)$

Recordemos que estamos considerando ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden $F(t, y, y') = 0$, donde F es una función de tres variables, y que será posible expresarla

$$y'(t) = f(t, y)\,. \tag{2.8}$$

2.4.1. Campo de direcciones

Las soluciones de (2.8) son funciones y las podemos representar gráficamente como una curva en el plano Oty. Supongamos que D sea el dominio de la función f, y $(t_0,\, y_0) \in D$ siendo $y(t)$ una solución de (2.8) de tal manera que su gráfica pasa por el punto $(t_0,\, y_0)$, por tanto $y(t_0) = y_0$. En consecuencia, la ecuación (2.8) expresa que $f(t_0,\, y_0)$ es el valor de la pendiente de la tangente a la gráfica de $y(t)$ en $(t_0,\, y_0)$.

De esta manera, para cada uno de los puntos del dominio D podemos dibujar un pequeño segmento con la dirección que $f(t, y)$ determina. Un subconjunto del plano $O\,t\,y$ en el que para cada punto se ha definido una dirección se conoce con el nombre de **campo de direcciones**.

Resumiendo, lo que hemos hecho al plantear la ecuación (2.8) es definir un campo direccional y el problema de encontrar sus soluciones es el de encontrar aquellas curvas con la propiedad de ser tangentes a cada punto del campo de direcciones.

EJEMPLO 2.11

- Para dibujar el campo de direcciones y poder trazar algunas de las soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^2$, veamos qué información podemos extraer de nuestra ecuación diferencial.

  1. Es evidente que para cualquier valor de y su derivada y' es positiva. Por tanto, las curvas solución son crecientes
  2. Para estudiar la concavidad de las curvas solución necesitamos su segunda derivada $y'' = 2yy' = 2y^3$. En consecuencia, si $y > 0$, las curvas solución son convexas, mientras que si $y < 0$ son cóncavas.

3. Campo de direcciones. Nuestra ecuación diferencial define un campo de direcciones en todo el plano Oty cuyas direcciones son constantes a lo largo de rectas paralelas al eje de abscisas t.

   Podemos construirlo (véase Figura 2.3) con ayuda del Mathematica®.

   ```
   << Graphics`PlotField`
   PlotVectorField[{1, y^2}, {t, -3, 3}, {y, -3, 3}]
   ```

   Como la dirección que define el campo de la ecuación $y' = y^2$, en cada punto del plano depende sólo de la coordenada y, entonces para cualquier y_0 los puntos de la forma (t, y_0) con $t \in \mathbb{R}$, se encuentran rodeados de un campo direccional idéntico. En consecuencia, las soluciones pueden obtenerse una de otra haciendo traslaciones en la dirección del eje t

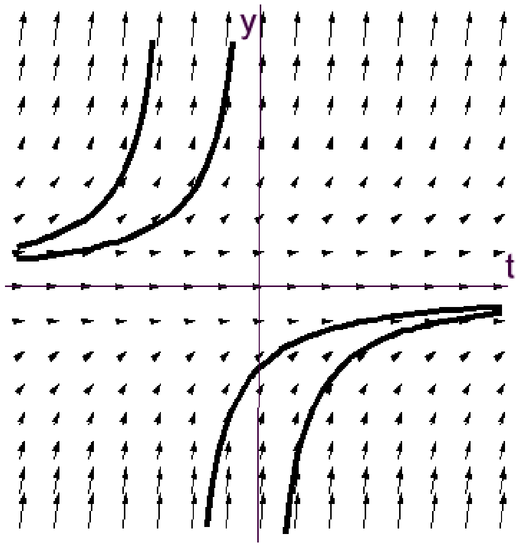


Figura 2.3. Campo de direcciones de $y' = y^2$.

4. Este hecho puede comprobarse si encontramos la solución explícita de la ecuación diferencial. Es inmediato comprobar que $y(t) = -1/(t + c)$. Observemos que esta familia de soluciones no contiene la solución $y = 0$ para cualquier c finita.

Para este ejemplo ha sido muy fácil encontrar la solución de la ecuación diferencial, pero esto no es lo más frecuente. Por tanto, en gran parte de los casos será necesario hacer un estudio geométrico para conocer, al menos, el comportamiento de las soluciones. Tengamos en cuenta que en muchos de los modelos que analizaremos estaremos interesados no en la solución concreta del problema, sino en su comportamiento a “largo plazo”.

2.5. Teoría cualitativa de EDO autónomas

2.5.1. Introducción.

A finales del 1600 *I. Newton* y *G. Leibnitz* descubrieron el Cálculo y pusieron las bases para el estudios de los Sistemas Dinámicos. En un principio y hasta momentos recientes se ha intentado encontrar de forma exacta la solución de la ecuación diferencial que modeliza a una determinada situación. Sin embargo, existen modelos aparentemente sencillos donde esto no es posible, por ejemplo el problema propuesto a finales del siglo XIX por Poincaré[2] conocido con el nombre de los tres cuerpos. Los matemáticos probaron que para este problema de atracción gravitatoria no era posible dar su solución explícita.

Por tanto, el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales ha seguido dos caminos diferentes. El primero, se caracteriza por una búsqueda de soluciones explícitas, bien sea en fórmulas exactas (lo que rara vez es posible) o bien en términos de series de potencias. En el segundo, se abandona toda intención de resolver las ecuaciones diferenciales en sentido tradicional y se intenta obtener información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones.

En esta sección realizaremos un estudio geométrico para obtener información sobre el comportamiento de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales llamadas autónomas. En las próximas secciones estudiaremos la forma de resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. En general, resolver una ecuación diferencial es un problema difícil, sin embargo, en muchas ocasiones es posible dar información sobre las soluciones sin necesidad de calcularlas.

2.5.2. Ecuaciones diferenciales autónomas

Ahora, nos centraremos en el problema de aprender cuanto sea posible sobre las características esenciales de las soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = g(y)$ por análisis directo de la propia ecuación. Este tipo de ecuaciones diferenciales recibe el nombre de autónomas pues el segundo miembro de la ecuación es "independiente del tiempo", en el sentido de no aparecer t. Además, si $y(t)$ es solución de una ecuación autónoma también lo es la función $y(t+c)$, para cualquier constante c.

DEFINICIÓN 2.5.1 *Los puntos $c \in \mathbb{R}$ tales que $y(t) = c$ es solución de la ecuación diferencial se llaman puntos de equilibrio.*

Si suponemos que el comportamiento dinámico de un sistema biológico está modelado matemáticamente por las curvas solución de una ecuación diferencial autónoma

[2] A.H. Poincaré (1854 - 1912) se le consideró como el matemático más grande de su época. Fundó la dinámica topológica y la topología. En sus trabajos sobre la mecánica celeste elaboró la teoría de los desarrollos asintóticos, la cual, en la actualidad es una de las herramientas más poderosa del matemático aplicado

y estamos interesados por el comportamiento a largo plazo de las trayectorias (es decir, de las curvas solución), son de especial interés los estados de equilibrio, que son aquellos estados $y(t)$ que no cambian con el tiempo. Matemáticamente esto significa que $y(t) = c$ es una solución de la ecuación $y' = g(y)$.

EJEMPLO 2.12

- Dada la ecuación diferencial $y' = 7.5 - 24.25y + 22.25y^2 - 8y^3 + y^4$. Para encontrar los puntos de equilibrio resolvemos la ecuación $y' = 0$ y obtenemos $y = 0.5,\ 2,\ 2.5,\ 3$. Por tanto, las funciones $y = 0.5$, $y(t) = 2$, $y = 2.5$, $y(t) = 3$ son soluciones constantes. Por el Teorema 2.3.2 y Teorema 2.3.3 sabemos que la solución es única. En consecuencia, ninguna otra solución puede tomar los valores 0.5, 2, 2.5 o 3. De este modo, el plano Oty quedará dividido en regiones horizontales de tal manera que una solución que comience en una región no podrá salir de ella.

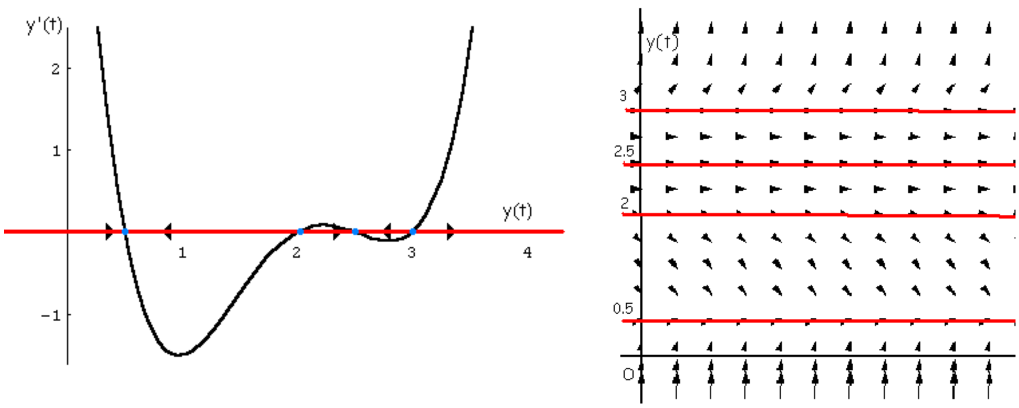


Figura 2.4. Línea fase de $y' = (y - 0.5)(y - 2)(y - 2.5)(y - 3)$.

Si la condición inicial y_0 es menor de 0.5 tendremos que $y'(t_0)$ es positiva y la solución será creciente. Si y está entre 0.5 y 2 o entre 2.5 y 3, entonces la derivada será negativa y la función decrecerá . Finalmente, si una solución comienza entre 2 y 2.5 o se encuentra por encima de 3 será creciente. En general se cumple la siguiente propiedad.

RESULTADO 2.5.2 *Si g es una función con derivada continua en todo $\mathbb{R}$ y consideramos la ecuación diferencial $y' = g(y)$. Entonces:*

- *Para cada una de las raíces de $g(y) = 0$, existe una solución constante de la ecuación diferencial. Si $g(c) = 0$ entonces $y = c$ es una solución.*

- *Las soluciones constantes dividen al plano Oty en franjas horizontales. Cualquier otra solución no constante estará contenida en una franja y será estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

- *Cada solución no constante es asintótica a una solución constante, o bien, crece o decrece sin límite.*

En nuestro ejemplo, observamos que si la condición inicial está próxima al 0.5 ó 2.5, entonces se tiene que la solución del problema de valores iniciales tiende a 0.5 ó 2.5 cuando t tiende a infinito. Por el contrario, si la condición inicial está próxima al 3 pero sin serlo, entonces la solución del problema de valores iniciales crece sin límite o decrece hacia 2.5. De alguna manera las soluciones constantes 0.5 y 2.5 **atraen** a las soluciones mientras que las soluciones constantes 2 y 3 las **repelen**.

Las ideas anteriores conducen a los conceptos de **estabilidad e inestabilidad**. Así, las soluciones $y(t) = 0.5$ e $y = 2.5$ son estables mientras que $y(t) = 2$ o $y(t) = 3$ tienen un comportamiento inestable.

Intuitivamente, desde un punto de vista físico solo interesan los puntos de equilibrio que son "estables ". Un péndulo en la posición vertical superior está en equilibrio, pero es muy improbable que eso ocurra. Además, la menor perturbación alterará completamente el comportamiento del péndulo. Tal equilibrio es inestable. En cambio, la posición de reposo inferior es estable; si la perturbamos ligeramente, el péndulo oscilará a su alrededor y (a causa del rozamiento) se aproximará gradualmente a ella de nuevo. De aquí nace la idea intuitiva de fuente y sumidero.

DEFINICIÓN 2.5.3 *Decimos que un punto de equilibrio y_0 es:*

- *Un sumidero si cualquier solución con condición inicial "suficientemente cercana" a y_0 es asintótica a y_0 cuando t aumenta.*

- *Una fuente, cuando todas las soluciones que comienzan cerca de y_0 se alejan de y_0 cuando t aumenta.*

- *Un nodo si no es fuente o sumidero.*

En nuestro caso, el eje de ordenadas recibe el nombre de **línea fase**, siendo los puntos 0.5 y 2.5 sumideros y los puntos 2 y 3 fuentes.

Por lo comentado anteriormente, si c es un punto de equilibrio y $g'(c) < 0$ entonces el cambio de signo es de positivo a negativo y las condiciones iniciales justo por debajo de c dan lugar a funciones crecientes hacia c y las por encima de c funciones decrecientes a la solución constante. En el caso en que $g'(c) = 0$ no podemos asegurar nada y es necesario ver si se produce cambio de signo. Si no se produce cambio de signo tendremos que las soluciones por encima y por debajo de la constante son ambas crecientes o decrecientes, es decir, por un lado se alejarán de la solución constante y por otro se acercarán.

RESULTADO 2.5.4 *En general, se cumple:*

- *Si $g(a) = 0$ y $g'(a) < 0$, entonces a es un estado de equilibrio estable para la ecuación diferencial autónoma $y' = g(y)$.*
- *Si $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$, entonces implica que a es un estado de equilibrio inestable para la ecuación diferencial autónoma $y' = g(y)$.*
- *Si a es un estado de equilibrio para $y' = g(y)$ en el cual $g'(a) = 0$, debemos estudiar la situación con más cuidado. Podemos encontrar ejemplos donde a sea estable o inestable.*

EJEMPLO 2.13

- En el estudio de los efectos de la selección natural sobre una población aparece la siguiente ecuación diferencial,

$$y'(t) = 0.01y^2(t)(1 - y(t)) \tag{2.9}$$

donde $y(t)$ representa a la frecuencia con que se presenta cierto gen a, ¿contrá quien va la presión selectiva?

Para conocer el comportamiento a largo plazo del modelo bastará con realizar un estudio cualitativo de la ecuación diferencial autónoma (2.9)) y para ello será necesario encontrar y clasificar sus puntos de equilibrio.

Los puntos de equilibrio son las soluciones $y(t)$ constantes, por tanto aquellas funciones donde $y'(t) = 0$, es decir $y(t) = 1$, $y(t) = 0$.

Las soluciones constantes dividen a la región $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \, / t \geq 0 \, , y \geq 0\}$ en dos franjas (Figura 2.5 colores verde y amarillo). Para valores iniciales de $y(t)$ pertenecientes a la primera región $0 < y(t) < 1$, la derivada es positiva y en consecuencia las soluciones $y(t)$ son crecientes. Sin embargo, en la segunda región $1 < y(t)$ (aunque sin sentido biológico) la derivada $y'(t)$ es negativa lo que indica que las funciones soluciones $y(t)$ son decrecientes. Estos resultados nos permiten decir que el punto de equilibrio $y(t) = 0$ es inestable, mientras que $y(t) = 1$ es asintóticamente estable (sumidero). A largo plazo, y para cualquier valor inicial $0 < y(0) < 1$ las soluciones $y(t) \to 1$

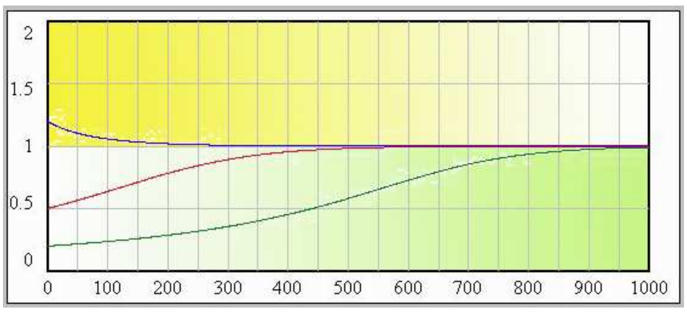


Figura 2.5.

EJERCICIO 2

1 **En el estudio de los efectos de la selección natural sobre una población aparecen las siguientes ecuaciones diferenciales,**

$$y'(t) = y(t)(1 - y(t))(0.15 - 0.5y(t))$$

$$y'(t) = 0.05y(t)(1 - y(t))(2y(t) - 1)$$

donde $y(t)$ representa a la frecuencia con que se presenta cierto gen a. Trazar las soluciones representativas considerando distintas condiciones iniciales entre 0 y 1 y discutir posible interpretaciones genéticas para estas curvas.

2 **Obtener y clasificar los puntos de equilibrio de las ecuaciones diferenciales autónomas.**

$$y'(t) = (1 - y)(y + 1)^2$$

$$y'(t) = y(y - 1)(8y - 2)$$

$$y'(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)$$

3 **La dinámica de una población viene dada por el siguiente modelo**

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.25\left(\frac{y(t)}{10} - 1\right)\left(1 - \frac{y(t)}{200}\right)$$

donde $y(t)$ representa al número de individuos en el tiempo t.

a) **Encuentra los valores de $y(t)$ para que la población se encuentre en equilibrio.**

b) **Encuentra los valores de $y(t)$ para los que decrece la población.**

2.6. Resolución de E.D.O. de primer orden

2.6.1. Ecuaciones diferenciales en variables separables

Una importante clase de ecuaciones diferenciales está formada por aquellas que pueden expresarse de la forma: $y' = p(t)q(y)$, donde $p(t)$ es una función únicamente de la variable t y $q(y)$ es una función únicamente de la variable y.

Si $y' = p(t)q(y)$ entonces (si $q(y) \neq 0$) dividimos por $q(y)$ e integramos respecto de t, obteniendo:

$$\int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(t)dt\,.$$

EJEMPLO 2.14

- Si deseamos resolver

$$\frac{dy}{dt} = y\cos t\,, \quad y(\pi/2) = 1.$$

Estamos ante una ecuación diferencial de variables separables. Procediendo tal y como hemos comentado anteriormente llegamos a

$$\frac{dy}{y} = \cos t\, dt, \quad (y \neq 0).$$

Calculamos cada una de estas dos integrales

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos t\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \operatorname{sen} t + c\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

O bien

$$|y| = e^{\operatorname{sen} t + c} = e^{\operatorname{sen} t}\, e^{c} \quad \Rightarrow \quad y = k\, e^{\operatorname{sen} t}\,, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad (k = \pm\, e^{c}), \tag{2.10}$$

Observemos que hemos podido separar las variables cuando y era distinto de cero. No obstante, es inmediato comprobar que la función $y = 0$ también es solución de la ecuación diferencial. Dicha solución también podemos obtenerla de (2.10), si admitimos que k pueda tomar el valor 0. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial viene dada por

$$y = k\, e^{\operatorname{sen} t}\,, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Ahora, si deseamos conocer la solución particular que pasa por el punto $(\pi/2, 1)$, sustituimos los valores en (2.11),

$$y(\pi/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = k\, e^{\operatorname{sen} \pi/2} \quad \Rightarrow \quad k = 1/e.$$

La solución del problema de valores iniciales vendrá dada por

$$y = e^{\operatorname{sen} y - 1}$$

EJEMPLO 2.15

- En ciertas situaciones se plantea determinar la relación entre algún estímulo físico y la reacción correspondiente que se produce en el sujeto. Supongamos que la fuerza de un estímulo es s y que la intensidad de la reacción es una función de s, $f(s)$. Algunos datos experimentales sugieren que la razón de cambio de la intensidad de la reacción con respecto al estímulo es directamente proporcional a la intensidad de la reacción e inversamente proporcional a la fuerza del estímulo.

De los comentarios anteriores se desprende que $f(s)$ satisface la ecuación diferencial

$$f'(s) = k\frac{f(s)}{s}$$

para alguna constante positiva k. Es inmediato comprobar que la solución general de esta ecuación diferencial de variables separables viene dada por

$$f(s) = c\, s^k$$

EJEMPLO 2.16

- La tasa de variación de una población de bacterias viene dada por la ecuación diferencial $y'(t) = (1-t)y(t)$, siendo $y(t)$ el número de bacterias en el minuto t. Si inicialmente el número de bacterias es y_0, ¿cuántas bacterias habrá después de t minutos?

  La ecuación diferencial es de variables separadas

  $$\frac{dy}{y} = (1-t)dt \quad \Rightarrow \quad \ln y = \left(t - \frac{t^2}{2}\right) + C \quad \Rightarrow \quad y = ke^{t-\frac{t^2}{2}}$$

  Ahora encontramos la solución particular correspondiente al valor $y(0) = y_0$, es decir $k = y_0$. Por tanto

  $$y(t) = y_0 e^{t-\frac{t^2}{2}}$$

EJEMPLO 2.17

- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

  $$(1) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{2y}\,; \qquad\qquad (2) \quad y' = \frac{e^y t}{e^y + t^2 e^y}$$

  $$(3) \quad y' + y = y(te^{t^2} + 1), \quad y(0) = 1$$

  1. $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{e^t}{2y}}$ Se trata de una ecuación de variables separables,

     $$\frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{2y} \quad \Rightarrow \quad 2y\,dy = e^t\,dt,$$

     que se resuelve integrando en ambos términos de la ecuación

     $$\int 2y\,dy = \int e^t\,dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^2 = e^t + c\,, \quad c \in \mathbb{R}}$$

  2. $\boxed{y' = \dfrac{e^y t}{e^y + x^2 e^y}}$

Simplificando se reduce a una ecuación diferencial inmediata

$$y' = \frac{e^y t}{e^y + t^2 e^y} = \frac{e^y t}{e^y(1+t^2)} = \frac{t}{1+t^2},$$

que se resuelve por integración,

$$y = \int \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. $\boxed{\mathtt{y' + y = y(te^{t^2} + 1), \quad y(0) = 1}}$

Simplificando la expresión, la ecuación diferencial se reduce a una de variables separables,

$$y' = y\,t\,e^{t^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = y\,t\,e^{t^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = t\,e^{t^2}\,dt, \quad (y \neq 0).$$

Integrando en ambos términos, se obtiene

$$\int \frac{dy}{y} = \int t\,e^{t^2}\,dt, \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}e^{t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

que puede expresarse en forma explícita como

$$y = k\,e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad (k = \pm e^c). \tag{2.12}$$

La división por y al separar las variables nos lleva a considerar la función $y = 0$ que también resulta ser solución de la ecuación diferencial. Dicha solución se obtiene de (2.12) si admitimos el valor $k = 0$. La solución general vendrá definitivamente dada por

$$y = k\,e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Para determinar la solución particular que verifica la condición inicial $y(0) = 1$, sustituimos los valores $t = 0$, $y = 1$ en (2.13),

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = k\,e^{1/2} \quad \Rightarrow \quad k = e^{-1/2}.$$

Sustituyendo en (2.13) obtenemos la solución

$$\boxed{y = e^{\frac{1}{2}\left(e^{7^2}-1\right)}}.$$

2.6.2. Ecuaciones diferenciales exactas.

Una forma de obtener una ecuación diferencial es suponer $F(t,y) = C$ y calcular su diferencial total. En efecto,

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t}\,dt + \frac{\partial F(t,y)}{\partial y}\,dy = 0\,. \tag{2.14}$$

Es frecuente encontrarnos con ecuaciones diferenciales escritas en la forma

$$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0\,,$$

y por comparación con (2.14), podemos preguntarnos si existirá una función $F(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = M(t,y)\,, \quad \frac{\partial F(t,y)}{\partial y} = N(t,y)\,.$$

Es un hecho conocido (Teorema de *Schwartz*) que si la función $F(t,y)$ es "razonablemente buena", entonces sus derivadas cruzadas coinciden. En consecuencia, tenemos una condición necesaria

$$\frac{\partial^2 F(t,y)}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F(t,y)}{\partial y \partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}\,. \tag{2.15}$$

Puede demostrarse, que esta condición también es suficiente.

DEFINICIÓN 2.6.1 *Diremos que la ecuación diferencial*

$$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0\,,$$

es exacta, si cumple

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}\,.$$

Si la ecuación diferencial es exacta, entonces

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = M(t,y) \quad \Rightarrow \quad F(t,y) = \int M(t,y)dt + \varphi(y)\,.$$

Ahora, podemos derivar respecto de la variable y

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(t,y)dt\right] + \varphi'(y) = N(t,y)\,.$$

En consecuencia,

$$\varphi'(y) = N(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(t,y)dt\right]\,.$$

Integramos respecto de y para encontrar el valor de $\varphi(y)$. Finalmente, la solución de la ecuación diferencial es $F(t,y) = c$.

EJEMPLO 2.18

- Para la ecuación diferencial $(6ty + 2y^2 - 5)dt + (3t^2 + 4ty - 6)dy = 0$ se tiene

$$M(t,y) = 6ty + 2y^2 - 5, \quad N(t,y) = 3t^2 + 4ty - 6,$$

y puesto que
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t + 4y = \frac{\partial N}{\partial t},$$
es exacta. Por tanto, existirá una función $F(t,y)$ tal que
$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(t,y).$$
Aplicando la técnica de resolución expuesta anteriormente
$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= M(t,y) \Rightarrow F(t,y) = \int M(t,y)\,dt = \int (6ty + 2y^2 - 5)dt \\
&\qquad = 3t^2y + 2ty^2 - 5t + \varphi(y), \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= N(t,y) \Rightarrow 3t^2 + 4ty + \varphi'(y) = 3t^2 + 4ty - 6.
\end{aligned}$$
Entonces,
$$\varphi'(y) = -6 \Rightarrow \varphi(y) = \int -6\,dy = -6\,y.$$
La función $F(t,y)$ será: $F(t,y) = 3t^2 + 2ty^2 - 5t - 6y$, y la solución general vendrá dada en forma implícita por $3t^2 + 2ty^2 - 5t - 6y = c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Factor integrante

A veces podemos encontrarnos con ecuaciones diferenciales
$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0 \tag{2.16}$$
que no son exactas, pero es posible buscar una función $\mu(t,y)$ tal que la ecuación
$$\mu(t,y)M(t,y)dt + \mu(t,y)N(t,y)dy = 0\,,$$
si sea exacta. En este caso, la función $\mu(t,y)$ recibe el nombre de factor integrante de la ecuación (2.16). Notemos que un método para encontrar la función $\mu(t,y)$ es resolver la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales
$$\frac{\partial(\mu\,M)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu\,N)}{\partial y},$$
problema que como podemos comprender es bastante complejo. Por esta razón lo que se hace es simplificarlo. Por ejemplo suponer que la función μ depende solo de t, sólo de y, o bien de ty, de $t + y$, etc.

EJEMPLO 2.19

- La ecuación diferencial
$$(t + t^4 + t^4y^2)dt + ydy = 0 \tag{2.17}$$
no es exacta, ya que
$$M(t, y) = t + t^4 + t^4y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2t^4y\,, \quad N(t, y) = y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 0\,.$$
Si multiplicamos la ecuación (2.17) por $1/(t^2 + y^2)$ se obtiene la ecuación
$$\left(\frac{t}{t^2 + y^2} + t^2\right) dt + \frac{y}{t^2 + y^2} dy = 0\,. \tag{2.18}$$
Esta nueva ecuación diferencial es exacta. En efecto,
$$M_1(t, y) = \left(\frac{t}{t^2 + y^2} + t^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{-2ty}{(t^2 + y^2)^2}$$
$$N_1(t, y) = \frac{y}{t^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{-2ty}{(t^2 + y^2)^2}$$
Por tanto, la función
$$\mu(t, y) = \frac{1}{t^2 + y^2}$$
es un factor integrante de la ecuación diferencial (2.17). Ahora podemos resolver la ecuación diferencial exacta (2.18). Es decir, existe una función $F(t, y)$ tal que
$$\frac{\partial F}{\partial t} = M_1(t, y) = \frac{t}{t^2 + y^2} + t^2\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N_1(t, y) = \frac{y}{t^2 + y^2}\,.$$
Operando
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{t^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad F(t, y) = \int \frac{y}{t^2 + y^2} dy = \frac{1}{2}\ln(t^2 + y^2) + \varphi(t)\,.$$
Por otro lado
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{t}{t^2 + y^2} + t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t^2 + y^2} + \varphi'(t) = \frac{t}{t^2 + y^2} + t^2\,,$$
es decir
$$\varphi'(t) = t^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \frac{1}{3}t^3\,.$$
La solución general de (2.17) vendrá dada en forma explícita por
$$\frac{1}{2}\ln(t^2 + y^2) + \frac{1}{3}t^3 = c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

2.6.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

La teoría de ecuaciones diferenciales lineales ha sido objeto de profundos estudios a lo largo de los últimos 200 años y es un campo muy bien conocido y muy completo. Por el contrario, no se sabe casi nada de carácter general acerca de las ecuaciones diferenciales no lineales.

DEFINICIÓN 2.6.2 *Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación del tipo*

$$y' + p(t)y = q(t)\,. \tag{2.19}$$

Su ecuación homogénea asociada es

$$y' + p(t)y = 0\,. \tag{2.20}$$

TEOREMA 2.6.3 *El problema de valores iniciales con una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene solución y es única si las funciones $p(t)$ y $q(t)$ son continuas.*

La resolución de la ecuación homogénea (2.20) es fácil pues es una ecuación de variables separables y su solución es de la forma

$$y = ce^{-\int p(t)dt}\,.$$

Para la resolución de la ecuación lineal completa, se utiliza un método llamado **variación de las constantes** que consiste en tomar la solución general de la ecuación homogénea e imponerla como solución de la ecuación completa haciendo depender de t a la constante c de integración.

Existe un **segundo método de resolución** que consiste en encontrar el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}\,.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$, se obtiene

$$\mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y(t) = \mu(t)q(t)\,,$$

que puede expresarse como

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)q(t) \quad \Rightarrow \quad \mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + c\,.$$

Tan sólo queda despejar el valor de $y(t)$ para encontrar la solución de la ecuación.

EJEMPLO 2.20

- Para resolver la ecuación diferencial lineal $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{t}y = 3t$ utilizamos el primer método, encontrando la solución de la ecuación homogénea
$$\varphi(t) = e^{-\int \frac{1}{t}dt} = e^{-\ln t} = e^{\ln(t^{-1})} = \frac{1}{t}\,.$$
Calculamos
$$c(t) = \int \frac{q(t)}{\varphi(t)}dt = \int \frac{3t}{1/t}dt = t^3\,,$$
$$c(t)\varphi(t) = t^3.\frac{1}{t} = t^2\,.$$
La solución buscada será
$$y(t) = t^2 + c\frac{1}{t}.$$
- Utilizando el segundo método encontramos el factor integrante,
$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}}dt = t\,,$$
multiplicando la ecuación diferencial por esta función, obtenemos
$$y't + y = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad (y\,t)' = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad yt = t^3 + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = t^2 + c\frac{1}{t}\,.$$

2.7. E.D.O. lineales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales ordinarias podemos clasificarlas en dos grandes bloques: las lineales y las no lineales. Las más sencillas de estudiar son las del primer tipo ya que debido a las propiedades de sus soluciones pueden caracterizarse de manera general y además disponemos de métodos para resolver muchas de ellas.

DEFINICIÓN 2.7.1 *Una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación del tipo*
$$a_n(t)y^{n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \tag{2.21}$$
donde $a_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \cdots , n$ y $b(t)$ son funciones continuas en algún intervalo I y además $a_n(t) \neq 0\,, \forall t \in I$.

DEFINICIÓN 2.7.2 *La ecuación diferencial*
$$a_n(t)y^{n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \tag{2.22}$$
se llama ecuación diferencial lineal homogénea asociada a la ecuación (2.21).

Si las funciones $a_i(t)\,, i = 0, 1, 2, \cdots, n$ son funciones constantes, entonces la ecuación (2.21) se llama ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes.

Nos centraremos en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden por un doble motivo. En primer lugar, podemos hacer un desarrollo teórico relativamente simple y, en segundo lugar, son muy importantes desde el punto de vista práctico.

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden es una ecuación del tipo

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \tag{2.23}$$

donde $a_2(t)$, $a_1(t)$, $a_0(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en algún intervalo I y además $a_2(t) \neq 0\,, \forall t \in I$.

Lo usual es escribir la ecuación (2.23) en su forma canónica

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)\,. \tag{2.24}$$

Empezaremos su estudio analizando la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a (2.24), dada por

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0\,. \tag{2.25}$$

TEOREMA 2.7.3 *Sean $p(t)$ y $q(t)$ dos funciones continuas en algún intervalo I. Entonces, para cualquier $t \in I$, el problema de valores iniciales*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0\,, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

tiene una única solución definida en el intervalo I, cualesquiera que sean los valores y_0, $y'_0 \in I\!R$.

RESULTADO 2.7.4 *Si $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son dos soluciones de* (2.25)*, entonces cualquier combinación lineal de ambas,*

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)\,, \quad c_1,\, c_2 \in I\!R$$

es también solución de (2.25).

EJEMPLO 2.21

- La ecuación diferencial lineal de segundo orden $y'' + 4y = 0$ tiene por soluciones $y_1(t) = \cos 2t$, $y_2(t) = \operatorname{sen} 2t$. Por tanto, si hacemos uso del Resultado 2.7.4 la función

  $$y(t) = c_1 \operatorname{sen} 2t + c_2 \cos 2t\,, \quad c_1,\, c_2 \in I\!R$$

  será también solución de $y'' + 4y = 0$.

- Si consideramos la ecuación diferencial de segundo orden no lineal

$$ty'' + 2yy' = 0\,, \tag{2.26}$$

es inmediato comprobar que las funciones

$$y_1(t) = 1\,, \quad y_2(t) = \frac{t}{1+t}$$

son soluciones de (2.26). Sin embargo la función

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 + \frac{c_2\, t}{1+t}\,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

no es solución de (2.26). En efecto,

$$ty' + 2yy' = \frac{2c_2(c_1 + c_2 - 1) + 2c_1 c_2}{(t+1)^3}\,,$$

no es idénticamente nula para cualquier valor de c_1 y c_2.

RESULTADO 2.7.5 *Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dos soluciones de la ecuación diferencial*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0\,, \tag{2.27}$$

definidas en el intervalo I, tales que

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.28}$$

para algún $t_0 \in I$. Entonces cualquier solución de (2.27) es combinación lineal de $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Es decir,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general de (2.27).

DEFINICIÓN 2.7.6 *Dadas dos funciones $y_1,\, y_2 \in C^1(I)$, se define el Wronskiano de y_1 e y_2 como la función*

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}\,, \quad t \in I\,. \tag{2.29}$$

Observemos que el resultado anterior lo que hace es reducir el problema de resolver la ecuación diferencial (2.27) a encontrar dos soluciones particulares $y_1(t)$ e $y_2(t)$ que cumplan con la condición

$$W[y_1, y_2](t_0) \neq 0\,,$$

para algún $t_0 \in I$. Dos funciones $y_1(t)$ e $y_2(t)$ con estas características se dicen que forman un **conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial** (2.27).

EJEMPLO 2.22

- Las funciones $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-4t}$ son soluciones de la ecuación diferencial
$$y'' + 6y' + 8y = 0 \tag{2.30}$$
en el intervalo $-\infty < t < \infty$. Además
$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ -2e^{-2t} & -4e^{-4t} \end{vmatrix} = -2e^{-6t} \neq 0\,, \forall t \in (-\infty,\, \infty)\,.$$
Por lo tanto, forman un conjunto fundamental de soluciones de (2.30) en el intervalo $(-\infty,\, \infty)$. La solución general de (2.30) será
$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2.7.1. Método de reducción del orden

Si conocemos una solución particular de la ecuación lineal homogénea
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{2.31}$$
podemos encontrar otra solución de (2.31) aplicando el método de reducción del orden.

Sea $y_1(t)$ una solución particular de (2.31) hacemos el cambio de variable $y = z(t)y_1(t)$ y derivamos
$$y' = z'y_1 + zy_1'\,, \quad y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''\,.$$
Si sustituimos estos valores en (2.31) y tenemos en cuenta que y_1 es una solución particular de (2.31), la ecuación diferencial inicial se transforma en esta otra
$$y_1(t)z'' + (2y_1'(t) + p(t)y_1(t))z' = 0\,.$$
Ahora el cambio $v = z'$ reduce la ecuación anterior a la ecuación lineal homogénea de primer orden
$$y_1(t)v' + (2y_1'(t) + p(t)y_1(t))v = 0\,,$$
que podemos resolver por separación de variables
$$v(t) = \frac{c}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int p(t)dt\right)\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,$$
y como sólo necesitamos una solución podemos tomar $c = 1$. Entonces
$$z' = v \quad \Rightarrow \quad z = \int v(t)dt\,,$$

y la nueva solución de (2.31) será

$$y_2(t) = zy_1(t) = y_1(t)\int v(t)dt\,.$$

Puede probarse que estas dos soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2.31). La solución general de (2.31) podemos escribirla como

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)\,.$$

EJEMPLO 2.23

- La función $y_1(t) = e^{2t}$ es una solución particular de la ecuación diferencial lineal homogénea
$$y'' - 4y' + 4y = 0\,.$$
Podemos encontrar una segunda solución utilizando el método de reducción del grado de la ecuación diferencial.

  Sea $y(t) = z(t)y_1(t) = z(t)e^{2t}$, derivando
$$y'(t) = z'(t)e^{2t} + 2z(t)e^{2t}\,, \quad y''(t) = z''(t)e^{2t} + 4z'(t)e^{2t} + 4z(t)e^{2t}\,,$$
sustituimos estas derivadas en la ecuación diferencial lineal homogénea inicial y simplificamos
$$z''(t) = 0\,.$$
A continuación procedemos a rebajar el orden, para ello llamamos $v(t) := z'(t)$ y resolvemos la ecuación diferencial que aparece
$$v'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = c = 1 \quad \Rightarrow \quad z(t) = \int v(t)dt = t\,,$$
y la segunda de las soluciones buscada será $y_2(t) = u(t)y_1(t) = te^{2t}$.

  Estas dos soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial inicial. En efecto
$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0\,, \quad \forall t \in (-\infty,\, \infty)\,.$$
La solución general de la ecuación diferencial inicial es
$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2.7.2. EDO lineal de segundo orden completa

La solución general de la ecuación diferencial lineal

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)\,, \tag{2.32}$$

la obtendremos a partir de las soluciones de su ecuación lineal homogénea asociada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0\,,$$

y una solución particular de (2.32).

RESULTADO 2.7.7 *Sea $y_p(t)$ una solución particular de la ecuación diferencial lineal*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{2.33}$$

e $\{y_1(t),\, y_2(t)\}$ un conjunto fundamental de soluciones de su ecuación diferencial lineal homogénea asociada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0\,. \tag{2.34}$$

Entonces

$$y(t) = y_p(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t)\,, \quad c_1,\, c_2 \in I\!R\,.$$

será la solución general de (2.33)

2.7.3. Método de variación de parámetros

Como hemos visto en el Resultado 2.7.7, para poder encontrar la solución general de (2.33) necesitamos conocer una solución particular. El método de variación de parámetros nos proporciona un procedimiento para calcular dicha solución particular.

Supongamos que $\{y_1(t),\, y_2(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada (2.33), entonces su solución general $y_h(t)$ viene dada por

$$y_h(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)\,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

El objetivo es encontrar una solución particular de (2.33) que sea de la forma

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)\,, \tag{2.35}$$

donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ son dos funciones a determinar. La duda que surge de forma natural es saber si es posible encontrar dos funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ tales que

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t),$$

sean una solución particular de la ecuación diferencial (2.33). Observemos que lo que hemos realizado ha sido en la solución $y_h(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, reemplazar las constantes por los parámetros variables $c_1(t)$, $c_2(t)$.

Derivando

$$y_p' = c_1 y_1' + c_1' y_1 + c_2 y_2' + c_2' y_2 \,.$$

Si además exigimos que $c_1(t)$ y $c_2(t)$ sean funciones tales que

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_p' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \,. \tag{2.36}$$

Volviendo a derivar

$$y_p'' = c_1 y_1'' + c_1' y_1' + c_2 y_2'' + c_2' y_2' \,,$$

y sustituyendo estos valores en (2.33)

$$\begin{aligned} y_p'' + p(t) y_p' + q(t) y_p &= c_1 (y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1) \\ &+ c_2 (y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2) \\ &+ c_1' y_1' + c_2' y_2' = g(t) \,. \end{aligned}$$

Pero al ser $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1 = 0 \,, \quad y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2 = 0 \,.$$

Es decir

$$y_1' c_1' + y_2' c_2' = g(t) \,. \tag{2.37}$$

De (2.36) y (2.37) obtenemos el sistema lineal de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 c_1' + y_2 c_2' &=& 0 \\ y_1' c_1' + y_2' c_2' &=& g(t) \,, \end{array} \right.$$

que resolviéndolo, encontramos las soluciones:

$$c_1'(t) = \frac{W_1}{W} \,, \quad c_2'(t) = \frac{W_2}{W} \,,$$

donde

$$W_1 = \left| \begin{array}{cc} 0 & y_2 \\ g(t) & y_2' \end{array} \right| = -y_2 \, g(t) \,, \qquad W_2 = \left| \begin{array}{cc} y_1 & 0 \\ y_1' & g(t) \end{array} \right| = y_1 \, g(t)$$

y W es el Wronskiano de $y_1(t)$, $y_2(t)$, que como sabemos viene dado por

$$W[y_1, \, y_2](t) = \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{array} \right| \,.$$

Resumiendo, para resolver la ecuación diferencial (2.33) procedemos de la manera siguiente:

1. Encontramos la función $y_h(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t)$ y posteriormente evaluamos el Wronskiano $W[y_1, y_2](t)$.

2. Obtenemos $c_1(t)$, $c_2(t)$ integrando las expresiones

$$c_1'(t) = \frac{-y_2(t)\,g(t)}{W[y_1,y_2](t)} \quad , \quad c_2'(t) = \frac{y_1(t)\,g(t)}{W[y_1,y_2](t)} \,.$$

3. Construimos la solución particular

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

EJEMPLO 2.24

- Supongamos que queremos resolver la ecuación diferencial lineal completa de segundo orden

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2}\,y' + \frac{2}{1+t^2}\,y = 1+t^2\,. \tag{2.38}$$

1. En primer lugar necesitamos encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2}\,y' + \frac{2}{1+t^2}\,y = 0\,. \tag{2.39}$$

Es inmediato comprobar que una solución particular de (2.39) es $y_1(t) = t$. Para calcular otra solución particular aplicamos el método de reducción del grado. Para ello, si realizamos el cambio de variable

$$y(t) = z(t)y_1(t) = t\,z(t)\,,$$

se llega a la ecuación diferencial

$$tz'' + \frac{2}{1+t^2}\,z' = 0\,.$$

Llamando $v(t) = z'(t)$ la ecuación diferencial anterior se transforma en

$$tv' + \frac{2}{1+t^2}\,v = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1+t^2}{t^2}\,.$$

Por tanto,

$$z(t) = \int v(t)dt = \int \frac{1+t^2}{t^2}dt = t - \frac{1}{t}\,.$$

En consecuencia, la otra solución particular es

$$y_2(t) = t\left(t - \frac{1}{t}\right) = t^2 - 1\,.$$

La solución general de (2.39) viene dada por

$$y_h(t) = c_1\,t + c_2(t^2-1)\,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2. Ahora buscamos una solución particular de la forma

$$y_h(t) = c_1(t)\,t + c_2(t)(t^2-1)\,,$$

siendo

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ g(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^2-1 \\ 1+t^2 & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^2-1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix}} = 1-t^2\,,$$

integramos

$$c_1(t) = \int (1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3}\,.$$

Del mismo modo

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & 1+t^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^2-1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix}} = t\,,$$

y, por tanto,

$$c_2(t) = \int (t)dt = \frac{t^2}{2}\,.$$

3. Por consiguiente

$$y_p(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)t + \frac{t^2}{2}(t^2-1) = \frac{1}{6}(t^4+3t^2)\,.$$

4. Finalmente, la solución general de (2.38) vendrá dada por

$$y(t) = \frac{1}{6}(t^4+3t^2) + c_1\,t + c_2\,(t^2-1)\,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2.8. E.D.O. lineales de segundo orden con coeficientes constantes

En esta sección estudiaremos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden del tipo

$$y'' + a_1\,y' + a_2\,y = g(t)\,, \tag{2.40}$$

donde a_1 y a_2 son constantes.

Para poder resolver estas ecuaciones procedemos tal y como lo hicimos en la sección anterior.

2.8.1. La ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0\,, \tag{2.41}$$

donde a_1 y a_2 son constantes.

Sabemos que la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + ay = 0$, siendo a una constante, tiene por solución

$$y(t) = ce^{-at}\,, \quad -\infty < t < \infty\,.$$

En consecuencia, es lógico tratar de determinar si existen soluciones exponenciales en $-\infty < t < \infty$, de la ecuación lineal homogénea (2.41). Comprobaremos que todas sus soluciones son funciones exponenciales o se construyen a partir de funciones exponenciales.

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0\,. \tag{2.42}$$

Probamos una solución de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$. Para ello derivamos y sustituimos en (2.42)

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0\,.$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0,\ \forall t \in (-\infty, \infty)$, debe ocurrir que

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0\,.$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de **ecuación característica de la ecuación diferencial** (2.42). Examinemos los diferentes casos que pueden presentarse:

- **Primer caso.** La ecuación característica tiene dos raíces, λ_1, λ_2, reales y distintas. Las soluciones

  $$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad , \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}\,,$$

  son linealmente independientes en $-\infty < t < \infty$ y por lo tanto forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial (2.42). La solución general es

  $$\boxed{y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

- **Segundo caso.** Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces sólo existe una solución exponencial $y(t) = e^{\lambda t}$. Podemos encontrar una segunda solución utilizando el **método de reducción del grado** de la ecuación diferencial.

Sea $y(t) = z(t)e^{\lambda t}$, derivando

$$y'(t) = z'e^{\lambda t} + z\lambda e^{\lambda t}, \quad y''(t) = z''e^{\lambda t} + 2\lambda z'e^{\lambda t} + z\lambda^2 e^{\lambda t},$$

sustituimos estas derivadas en la ecuación diferencial (2.42), y simplificamos

$$z(\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_2 e^{\lambda t}) + (z''e^{\lambda t} + 2\lambda z'e^{\lambda t} + a_1 z'e^{\lambda t}) = 0,$$

pero al ser $e^{\lambda t}$ una solución de la ecuación diferencial, podemos simplificar la expresión anterior y nos queda $z'' + 2\lambda z' + a_1 z' = 0$.

A continuación procedemos a rebajar el orden, para ello llamamos $v(t) := z'(t)$ y resolvemos la ecuación de variables separadas que aparece

$$v' + (2\lambda + a_1)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v'}{v} = -(2\lambda + a_1).$$

Es decir

$$\ln|v| = -\int (2\lambda + a_1)dt \quad \Rightarrow \quad v = k_1 e^{-\int (2\lambda + a_1)dt} = z'.$$

Calculando el valor de $z(t)$

$$z(t) = k_1 \int e^{-\int (2\lambda + a_1)dt} dt + k_2.$$

Si $k_1 = 1$, $k_2 = 0$

$$z(t) = \int e^{-\int (2\lambda + a_1)dt} dt = \int e^{-(2\lambda + a_1)t} dt.$$

Por otro lado, para que la ecuación $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ tenga una raíz doble, tiene que ocurrir que su discriminante se anule. Calculando el valor de la raíz

$$\lambda = -\frac{a_1}{2}.$$

Es decir,

$$z(t) = \int e^{-(2(-\frac{a_1}{2}) + a_1)t} dt = \int dt = t,$$

y la segunda de las soluciones buscada será $y_2(t) = z(t)y_1(t) = te^{\lambda t}$.

La solución general de la ecuación diferencial inicial es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

- **Tercer caso.** Si λ_1 y λ_2 son raíces complejas

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta\,, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta t\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+\,.$$

Estamos dentro del primer caso y por tanto

$$y(t) = k_1 e^{\alpha + i\beta)t} + k_2 e^{(\alpha - i\beta)t}\,.$$

A continuación, aplicamos la fórmula de *Moivre* para los números complejos y simplificamos

$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\mathrm{sen}\beta t) + k_2 e^{\alpha t}(\cos(-\beta t) + i\mathrm{sen}(-\beta t)) \\ &= e^{\alpha t}((k_1 + k_2)\cos\beta t + (k_1 i - k_2 i)\mathrm{sen}\beta t) \\ &= \boxed{e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\mathrm{sen}\beta t)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.25

- La ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' + 6y' + 8y = 0 \tag{2.43}$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0\,.$$

Las raíces son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial (2.43) es de la forma

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}\,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

- La ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{2.44}$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0\,,$$

que admite la solución real doble $\lambda = 2$. Por tanto, la solución general de (2.44) es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}\,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

- La ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \tag{2.45}$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0\,,$$

que admite las soluciones complejas conjugadas

$$\lambda_1 = 2 + i\,, \quad \lambda_2 = 2 - i\,.$$

En consecuencia, la solución general de (2.45) es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t}\operatorname{sen} t\,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

2.8.2. La ecuación diferencial lineal completa de segundo orden con coeficientes constantes

Como sabemos por la sección 9.7.2, una vez resuelta la ecuación lineal homogénea asociada, la resolución de la ecuación diferencial completa

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g(t) \tag{2.46}$$

se reduce a buscar una solución particular de (2.46), y podemos utilizar el método de variación de parámetros para encontrarla.

EJEMPLO 2.26 *texto*

- Supongamos que queremos encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = (t-1)e^t\,. \tag{2.47}$$

1. El polinomio característico $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ tiene por raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. Por tanto, $y_c(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$.

   Si $y_1(t) = e^t,\ y_2(t) = te^t$, su Wronskiano vale

$$W[e^t, te^t] = W = e^{2t} \neq 0, \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

   .

2. Calculamos

$$c_1' = \frac{-y_2 g(t)}{W} = \frac{-te^t(t-1)e^t}{e^{2t}} = -t^2 + t \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}$$

   y

$$c_2' = \frac{y_1 f(t)}{W} = \frac{e^t(t-1)e^t}{e^{2t}} = t - 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{t^2}{2} - t$$

3. Por consiguiente,

$$y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right) e^t + \left(\frac{t^2}{2} - t\right) te^t = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right) e^t$$

4. La solución general de (2.47) vendrá dada por

$$\boxed{y(t) = \left(\tfrac{t^3}{6} - \tfrac{t^2}{2}\right) e^t + c_1 e^t + c_2 te^t \,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

2.8.3. Método de los coeficientes indeterminados

Ahora presentaremos un nuevo método para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial lineal completa con coeficientes constantes que no requiere el cálculo de integrales.

EJEMPLO 2.27

- Supongamos que queremos encontrar una **solución particular** de

$$y'' + 4y = e^{3t}\,.$$

El método consiste en conjeturar la solución a la vista de la función $g(t) = e^{3t}$. Como en este caso estamos ante una función exponencial probamos con la solución $y = Ae^{3t}$. Si sustituimos en la ecuación diferencial llegamos a

$$9Ae^{3t} + 4Ae^{3t} = Ae^{3t} \quad \Rightarrow \quad A = 1/13\,,$$

y la solución particular buscada es $y(t) = 1/13\, e^{3t}$.

- Repitamos el método para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = t^2 + e^{-t}\,.$$

Ahora el segundo miembro $g(t)$ está compuesto por dos tipos de funciones. La primera de ellas t^2 sugiere ensayar con un polinomio de segundo grado At^2+Bt+C. La segunda es la función exponencial e^{-t} la cual nos indica que debemos buscar una función del tipo Dt^2e^{-t}, ya que tanto e^{-t} como te^{-t} son soluciones de la ecuación homogénea. Por tanto, probamos con la función

$$y(t) = At^2 + Bt + C + Dt^2e^{-t}\,.$$

Al sustituir en la ecuación diferencial e identificar coeficientes se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que una vez resuelto presenta las soluciones

$$A = 1\,, \quad B = -4\,, \quad C = 6\,, \quad D = \frac{1}{2}\,.$$

La solución particular buscada es

$$y(t) = t^2 - 4t + 6 + \frac{1}{2}t^2e^{-t}\,.$$

El procedimiento descrito en el ejemplo anterior se denomina método de los coeficientes indeterminados. Se aplica cuando la función $g(t)$ es de algunos tipos particulares. Como regla general, probamos con una solución particular del mismo tipo que la función $g(t)$ y con coeficientes indeterminados, multiplicando por t o t^2, si fuese necesario, para conseguir que ninguno de los términos de la solución ensayada sea solución de la ecuación lineal homogénea asociada.

2.9. Notas históricas

Si no se tienen ciertos conocimientos de ecuaciones diferenciales y de los métodos usados para resolverlas, es difícil estudiar la historia y el desarrollo de esta importante rama de las matemáticas. Más aún, la evolución de la teoría de las ecuaciones diferenciales está íntimamente ligada al desarrollo general de las matemáticas, y no puede separarse de ella.

La teoría de las ecuaciones diferenciales se origina en los inicios del cálculo, con *Isacc Newton* (1642-1727) y *Gottfried Wilhelm Leibnitz* (1646-1716) en el siglo XVII. Aún cuando Newton realizó, relativamente, poco trabajo en la teoría de las ecuaciones diferenciales, su desarrollo del cálculo y la aclaración de los principios básicos de la mecánica proporcionaron una base para el desarrollo de sus aplicaciones, en el siglo XVIII, con mayor alcance por parte de *Euler*. *Newton* clasificó las ecuaciones de primer orden de acuerdo con las formas

$$dy/dx = f(x)\ ; \quad dy/dx = f(y)\ ; \quad dy/dx = f(x,y)$$

Para la última desarrolló un método de solución, usando series infinitas, cuando $f(x,y)$ es un polinomio en x e y. Era muy sensible a la crítica y, como consecuencia de ello, tardó bastante en publicar muchos de sus descubrimientos.

Leibnitz llegó a los resultados fundamentales del cálculo independientemente, aunque un poco más tarde que *Newton*. Nuestra notación moderna para la derivada dy/dx y el signo de la integral se deben a *Leibnitz*. Descubrió el método de separación de las variables, así como procedimientos para resolver las ecuaciones homogéneas de primer orden y las ecuaciones lineales de primer orden. Mantuvo una abundante correspondencia con otros matemáticos, especialmente con los hermanos *Bernoulli*. En el curso de esta correspondencia se resolvieron muchos problemas de ecuaciones diferenciales, durante las últimas décadas del siglo XVII.

A *Newton* y *Leibnitz* le siguieron los hermanos *Jakob Bernoulli* (1654-1705) y *Johann Bernoulli* (1667-1748) y, el hijo de Johann, *Daniel Bernoulli* (1700-1782). Justamente, éstos son tres de los ocho miembros de la familia *Bernoulli*, quienes en su tiempo, fueron prominentes matemáticos y hombres de ciencia. Con ayuda del cálculo, formularon y resolvieron las ecuaciones diferenciales de muchos problemas de mecánica. Un problema (1696-1697) al cual contribuyeron ambos hermanos, y el cual provocó problemas entre ellos, fue el de la *braquistócrona*[3] que conduce a la

[3]Determinación de la curva de descenso más rápido

ecuación no lineal de primer orden

$$y(1 + (y')^2) = c$$

donde c es una constante. *Newton* también resolvió el problema antes, en 1697. Se dice, tal vez no sea cierto, que *Newton* supo del problema al final de la tarde de un fatigoso día en la Casa de la Moneda, y lo resolvió en la noche, después de la cena. Publicó la solución en forma anónima, pero *J. Bernoulli*, al verla, exclamó "... *conozco al león por su zarpa* ..."

En 1690 *J. Bernoulli* publicó la solución de la ecuación diferencial, que en forma diferencial se escribe

$$(b^2y^2 - a^3)^{1/2}dy = a^{3/2}dx$$

Actualmente esta ecuación se toma como un simple ejercicio, pero, en aquel tiempo, encontrar la solución, constituyó un avance trascendental.

A finales del siglo XVII, muchos de los métodos elementales de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se conocían y, la atención se dirigió hacia las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior y hacia las ecuaciones diferenciales parciales. *Jacob Riccati* (1676-1754), matemático italiano, consideró ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$. Tambien consideró una importante ecuación no lineal, conocida como ecuación de Ricatti

$$dy/dx = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$$

aunque no en forma general.

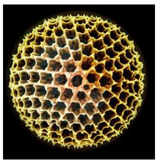
Leonhard Euler uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos, también vivió en el siglo XVII. Sus trabajos reunidos llenan más de sesenta volúmenes. Aunque quedó ciego, durante los últimos diecisiete años de su vida, su trabajo no disminuyó. De particular interés es su trabajo sobre el planteamiento de problemas de la mecánica y su desarrollo de métodos de solución para estos problemas matemáticos. Refiriéndose al trabajo de *Euler* en la mecánica, *Lagrange* dijo que era el primer gran trabajo en el que se aplica el análisis a la ciencia del movimiento. *Euler* también consideró la posibilidad de reducir ecuaciones de segundo orden a ecuaciones de primer orden, mediante un cambio adecuado de variables; creó el concepto de *factor integrante*, en 1739 dio un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes. Contribuyó al método de las soluciones en series de potencias y dio un procedimiento numérico para resolver ecuaciones diferenciales. También hizo contribuciones importantes a la teoría de las series de *Fourier* y creó la primera discusión sistemática del *cálculo de variaciones*.

En el siglo XVIII, los grandes matemáticos franceses *Joseph- Louis Lagrange* (1736-1813) y *Pierre-Simon Laplace* (1749- 1827) hicieron importantes aportaciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales. Posiblemente sea la ecuación de *Laplace*, la ecuación diferencial en derivadas parciales más conocida en la física matemática, la ecuación del potencial

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

donde los subíndices indican derivadas parciales. El trabajo monumental de *Lagrange*, *Mecanique analytique*, contiene las ecuaciones generales del movimiento de un sistema dinámico, conocidas actualmente como las ecuaciones de *Lagrange*. Para *Laplace* la naturaleza era esencial y las matemáticas, eran su herramienta en el aprendizaje de sus secretos; para *Lagrange* las matemáticas eran un arte que justificaba su propio ser. Sin embargo, ambos hombres realizaron avances de gran alcance, tanto en la teoría como en las aplicaciones de las matemáticas.

En los últimos años, algunos matemáticos dedicados al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales han tratado de elaborar una teoría sistemática (pero general) rigurosa. La finalidad no es tanto crear métodos de solución para ecuaciones diferenciales particulares, sino desarrollar técnicas apropiadas para el tratamiento de diferentes clases de ecuaciones .



Tema 3

MODELOS BASADOS EN E.D.O.

3.1. Introducción

En este tema construiremos algunos modelos biológicos elementales basados en las ecuaciones diferenciales. En la mayor parte de ellos será posible resolver la ecuación diferencial y de esta forma podremos encontrar la solución explícita del problema planteado. No obstante, en algunos de ellos, también realizaremos el estudio cualitativo correspondiente para analizar el comportamiento de las soluciones a "largo plazo".

3.2. Modelo exponencial

Si $y(t)$ representa a una cantidad desconocida que depende del tiempo, entonces para poder encontrar esta función será necesario establecer algún tipo de hipótesis sobre la forma que dicha función cambia con el tiempo. De entre todas ellas, una de la más elemental, es suponer que la tasa de cambio de $y(t)$, en cada momento, es directamente proporcional a la cantidad presente. Es decir,

$$y'(t) = \alpha y(t)\,,$$

donde α es la constante de proporcionalidad.

Resolviendo esta ecuación diferencial de variables separables,

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)} = \int \alpha dt \quad \Rightarrow \quad \ln|y(t)| = \alpha t + \ln c\,.$$

O bien,

$$\ln y(t) - \ln c = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{y(t)}{c}\right) = \alpha t\,.$$

Despejando

$$y(t) = c\, e^{\alpha t}\,.$$

Si suponemos que $y(0) = y_0$, entonces

$$y(0) = c\, e^0 = c = y_0\,,$$

y la solución viene dada por

$$\boxed{y(t) = y_0\, e^{\alpha t}\,.} \tag{3.1}$$

Observemos que si $\alpha > 0$, entonces la función $y(t)$ crece sin límite, mientras que si $\alpha < 0$ la función $y(t)$ disminuirá cuando t aumente.

3.2.1. Dinámica independiente de la densidad

El análisis de las relaciones entre las estructuras y el movimiento de una población, se basa en la noción de población estable. *Leonard Euler* (1760) fue el primero en definir este concepto y en darle un contenido analítico, pero en realidad fue *Alfred J. Lotka*, en una serie de publicaciones que se iniciaron en 1907 y terminaron en 1937, quien primero trató lo que podemos considerar como el fundamento de la dinámica de poblaciones.

La tasa de natalidad de una población humana se da usualmente en términos de número de nacimientos por mil, en un año. La referencia a mil es simplemente para evitar cifras decimales; en lugar de una tasa de natalidad de 17 por mil se podría hablar igualmente de una tasa de 0.017 por individuo. Del mismo modo, el período de un año también es únicamente una convención; la tasa de natalidad podría igualmente darse en términos de una semana, un segundo, o cualquier otra unidad de tiempo. Análogas observaciones se aplican a la tasa de mortalidad y a la tasa de crecimiento, o tasa de natalidad menos tasa de mortalidad. La tasa de crecimiento es pues la variación neta de población por unidad de tiempo dividida por la población total al comienzo del período.

Supongamos que la población $y(t)$, en el instante t, cambia a $y + \Delta y$ en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$. Entonces, la tasa media de crecimiento es

$$\frac{\Delta y}{y(t)\Delta t}\,. \tag{3.2}$$

En la práctica, $y(t)$ se conoce únicamente en aquellos instantes $t_0, t_1, \cdots$ en que se hace recuento de la población, y su valor es un entero no negativo. Suponemos que $y(t)$ se extiende (por interpolación, por ejemplo) a una función con valores reales no negativa, de una variable real, con derivada continua. Si tomamos límite en (3.2),

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y(t)}{y(t)\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

Esta función de t es la tasa de crecimiento de la población en el instante t. **La hipótesis más simple es la de una tasa de crecimiento constante** r. Éste es el caso si el número de nacimientos y de muertes en un pequeño período de tiempo Δt tienen una razón fija respecto a la población total. Esas razones serán funciones lineales de Δt pero independientes del tamaño de la población. Así pues, la variación neta será $r\, y \Delta t$, siendo r una constante. Por tanto

$$r = \frac{y'(t)}{y(t)}\,.$$

Esta es una ecuación lineal y como es sabido se conoce con el nombre de Ley de Malthus para el crecimiento de una población. Si la población de una especie dada es y_0 en el tiempo t_0, entonces $y(t)$ satisface el problema del valor inicial. Integrando se tiene la conocida fórmula para el crecimiento ilimitado,

$$\boxed{y(t) = y(t_0)e^{r\,(t-t_0)}\,.}$$

De aquí que toda especie que satisface la ley de crecimiento de *Malthus* crece exponencialmente con el tiempo.

Ahora bien, sólo se ha propuesto un modelo sencillo para el crecimiento de una población, tan sencillo que fue posible resolverlo completamente en pocas líneas. Por lo tanto, es importante ver si este modelo, con su sencillez, tiene alguna relación con la realidad. Sea $y(t)$ la población humana de la Tierra en el tiempo t. Se estima que la población del planeta aumentó con una tasa promedio de 2 % anual durante el período $1960-1970$. Al empezar la mitad de la década, el 1 de enero de 1965, cuando el Departamento de Comercio del gobierno de Estados Unidos, estimaba la población de la Tierra en 3340 en millones de personas, entonces $t_0 = 1965; y_0 = 3.34 \times 10^9$ y $r = 0.02$, de modo que $y(t) = (3.34).10^9.e^{0.02(t-1965)}$. Una manera de comprobar la precisión de esta fórmula es calcular el tiempo requerido para que se duplique la población del planeta y compararlo con el valor observado de 35 años. La fórmula predice que la población de la Tierra se duplica cada T años, donde $e^{0.02T} = 2$. Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación se obtiene $0.02T = \ln 2$, de modo que $T = 50 \ln 2 \simeq 34.6$ años.

Esto constituye una excelente coincidencia con el valor observado. Por otro lado, sin embargo, mirando hacia el futuro, la ecuación predice que la población de la Tierra será de 200 billones en el año 2515, de 1800 billones en 2625, y de 3600 billones en 2660. Estas son cifras astronómicas cuyo significado es difícil de imaginar. La superficie total del planeta es de aproximadamente 167.4 billones de metros cuadrados. El 80 % de la superficie está cubierta por agua. Suponiendo que se está dispuesto a vivir en botes al igual que en tierra firme, puede verse fácilmente que para el año 2515 habrá solamente 0.837 metros cuadrados por persona; en el año 2625 cada persona dispondrá de solamente 0.09 metros cuadrados en el cual estar de pie y para el año 2660 las personas estarán unas en los hombros de otras. Parece por lo tanto, que el modelo no es razonable y debería ser descartado.

Sin embargo, consideremos el caso del *Microtus Arvallis Pall*, un pequeño roedor que se reproduce muy rápidamente. Tomemos como unidad de tiempo el mes y que la población crece con una tasa del 40 % mensual.

Si hay dos roedores presentes en el momento inicial $t = 0$, entonces $y(t)$, el número de roedores en el tiempo t, verifica $y(t) = 2e^{0.4t}$.

Meses	0	2	6	10
y(t) observada	2	5	20	109
y(t) calculada	2	4.5	22	109.1

Tabla 3.1

En la Tabla 3.1 se comparan las poblaciones observadas con las poblaciones calculadas utilizando el modelo de crecimiento exponencial. Como podemos apreciar, existe una gran coincidencia.

En el caso del *Microtus Arvallis Pall*, la población observada es muy precisa, ya que el período de gestación es de tres semanas y el tiempo que se requiere para medir la población es mucho menor.

Los modelos lineales para el crecimiento de poblaciones son satisfactorios siempre que la población no sea demasiado grande. Cuando la población es demasiado grande, estos modelos no pueden ser exactos ya que no reflejan el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible.

3.2.2. Desintegración radiactiva

El físico *Rutherford* y sus colaboradores probaron que los átomos de ciertos elementos radiactivos son inestables y que, en un intervalo de tiempo dado, una fracción fija de los átomos se desintegra espontáneamente para formar un nuevo elemento. Ya que la radiactividad es una propiedad del átomo, *Rutherford* demostró que la descomposición de una sustancia es directamente proporcional al número de átomos presentes en la misma.

Si $y(t)$ es la cantidad de material radiactivo existente en el tiempo t, entonces

$$y'(t) = -ry(t)\,, \quad r > 0\,,$$

donde r es una constante que depende del elemento radiactivo considerado, y se conoce como **constante de decaimiento**. Este modelo es un caso particular de un modelo de crecimiento exponencial.

3.2.3. Trazadores radiactivos

Los elementos radiactivos juegan un papel muy importante en Biología. Por ejemplo, el H_3 se suele usar para marcar ciertos pares de ADN, los cuales se añaden a cadenas mutantes de *E. coli*, que son incapaces de fabricar una base particular de ADN. Para tratar el cultivo con un antibiótico apropiado, se usa una señal radiactiva para determinar cuanto ADN se ha replicado bajo las condiciones particulares del experimento. El yodo radiactivo se usa con frecuencia para detectar problemas en el tiroides de los humanos.

3.2.4. Fechado con C_{14}

Alrededor del año 1950, el químico *Willard Libby* ideó un método en el cual se usa carbono radiactivo para determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. El cociente de la cantidad de C_{14} y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atmósfera es constante y, en consecuencia, la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C_{14} cesa. Así, comparando la proporción de C_{14} que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método utiliza la vida media[1] del C_{14} radiactivo que es de aproximadamente 5600 años.

EJEMPLO 3.1

- Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene 1/1000 de la cantidad original de C_{14}. Para determinar la edad del fósil utilizamos la fórmula $y(t) = y(0)e^{rt}$.

  Cuando $t = 5600$ años, $y(t) = y(0)/2$, de lo cual es posible determinar el valor de r,

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{5600r} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{\ln 2}{5600} = -0.00012378\,.$$

  Por lo tanto

$$y(t) = y_0 e^{-0.00012378t}\,.$$

  Si $y(t) = y_0/1000$, se tiene que

$$\frac{y_0}{1000} = y_0 e^{-0.00012378t} \quad \Rightarrow \quad t \approx \frac{\ln 1000}{0.00012378} \approx 55800 \ \text{ años}\,.$$

La edad encontrada en el ejemplo anterior está, en realidad, al borde del límite dentro del cual este método es exacto. La técnica usual del carbono 14 se limita a aproximadamente 9 semividas del isótopo, es decir alrededor de 50.000 años. Una razón es que el análisis químico necesario para obtener una medida exacta del C_{14} restante se hace un tanto problemático alrededor de $y_0/1000$. Además, este análisis

[1]Tiempo que ha de trascurrir para que cierta cantidad de material radiactivo quede reducido a la mitad.

exige la destrucción de una muestra un tanto grande. Si se logra hacer esta medición de modo indirecto, basándose en la radiactividad efectivamente presente en la muestra, entonces es muy difícil distinguir entre la radiación que proviene del fósil y la radiación ambiental normal. Sin embargo, recientemente, el uso de un acelerador de partículas ha hecho posible que los científicos separen directamente el C_{14} del C_{12} estable. Calculando el valor preciso de la razón entre C_{14} y C_{12}, la exactitud de este método puede extenderse a un período de 70.000 a 100.000 años. Otras técnicas isotópicas, tales como el uso de potasio 40 y argón 40, permiten obtener edades de varios millones de años. A veces también es posible emplear métodos no isotópicos, que se basan en el empleo de aminoácidos.

3.2.5. Modelo de un riñón artificial I

El funcionamiento de una máquina de diálisis es el siguiente: la sangre del paciente circula a lo largo de una membrana a una velocidad fija, mientras que al mismo tiempo un líquido purificador se encuentra circulando en la dirección opuesta al otro lado de la membrana a una velocidad diferente. Este líquido purificador atrae las impurezas en la sangre, y la tasa de cambio de las impurezas a través de la membrana sigue la **ley de Fick**, la cual afirma que la cantidad de material de desecho que pasa por una membrana es proporcional a la diferencia de concentración a un lado y otro de la misma.

La sangre, que tiene una concentración de desechos $u(t)$ (creatina, urea, ...), al circular por la membrana que la separa del dializador, elimina una parte de las impurezas que pasan al dializador cuya concentración es $v(t)$. La ecuación diferencial que modeliza a esta situación es

$$\frac{d(u(t)-v(t))}{dt} = -k(u(t)-v(t))\,, \quad k>0\,,$$

cuya integración permite calcular la cantidad de material de desecho removido de la sangre por unidad de tiempo.

EJEMPLO 3.2

- Supongamos dos compartimientos que se encuentran separados por una barrera (membrana) a través de la cual se disuelve una sustancia. La tasa de disolución de un compartimiento a otro viene dada por la ley de Fick: proporcional a la diferencia entre las concentraciones de los dos compartimientos. Sea $C_1(t)$ la concentración (en el minuto t) más baja que se encuentra en el primero de los compartimientos y $C_2(t)$ la concentración del segundo. Supongamos también que V_1 y V_2 son los volúmenes de cada uno de los compartimientos. Sea un intervalo pequeño de tiempo Δt, entonces la cantidad de sustancia que atraviesa la membrana será

$$\Delta Q = \Delta t\, k(C_1 - C_2)$$

donde la constante de proporcionalidad k dependerá del tipo de membrana y de la sustancia. De la expresión anterior se deduce

$$\left.\begin{array}{l} \Delta C_1 = \dfrac{\Delta Q}{V_1} = \dfrac{\Delta t\, k(C_2 - C_1)}{V_1} \\[3ex] \Delta C_2 = \dfrac{\Delta Q}{V_2} = \dfrac{\Delta t\, k(C_1 - C_2)}{V_2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{dC_1}{dt} = \dfrac{k}{V_1}(C_2 - C_1) \\[3ex] \dfrac{dC_2}{dt} = \dfrac{k}{V_2}(C_1 - C_2) \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Si las concentraciones iniciales en los dos compartimientos son $C_1(0)$ y $C_2(0)$, entonces la cantidad inicial total de sustancia será $Q_T = V_1\, C_1(0) + V_2\, C_2(0)$. Después de cierto tiempo se habrá alcanzado la condición de equilibrio y en ambos compartimientos existirá la misma concentración (C_∞). Ahora la sustancia se encontrará distribuida en el volumen $V_1 + V_2$, y por tanto

$$\boxed{C_\infty = \frac{V_1\, C_1(0) + V_2\, C_2(0)}{V_1 + V_2}} \tag{3.4}$$

esta expresión nos indica que si son conocidas las concentraciones iniciales y los volúmenes, entonces es posible conocer la concentración en ambos compartimientos "a largo plazo".

Es evidente que la diferencia más grande entre ambas concentraciones se encuentra en el momento inicial $t = 0$, y que esta diferencia va disminuyendo de forma progresiva hasta alcanzar el punto de equilibrio.

La función $C_1(t)$ será creciente, mientras que $C_2(t)$ será decreciente y podemos establecer la hipótesis (por ejemplo) de que tienden al valor de equilibrio de forma exponencial. Es decir, que responden a expresiones del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{C_1(t) = C_1(0) + (1 - e^{-\alpha\, t})(C_\infty - C_1(0))} \\[3ex] \boxed{C_2(t) = C_2(0) + (1 - e^{-\beta\, t})(C_\infty - C_2(0))} \end{array}\right.$$

donde las constantes α y β se obtendrán al sustituir en las ecuaciones diferenciales (3.3). Observemos que, ambas funciones, cuando $t = 0$ toman el valor inicial y además tienden a C_∞ si $t \to \infty$.

Restando estas funciones

$$C_2(t) - C_1(t) = C_\infty(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) + C_2(0)e^{-\beta t} - C_1(0)e^{-\alpha t} \tag{3.5}$$

apreciamos al sustituir en cualquiera de las ecuaciones diferenciales (3.3), que las dos funciones exponenciales tienen que coincidir para que se cumpla la igual, lo cual obliga a que $\alpha = \beta$. De esta forma, la expresión (3.5) se reduce a

$$C_2(t) - C_1(t) = e^{-\alpha t}(C_2(0) - C_1(0)) \tag{3.6}$$

Los valores de las derivadas de estas funciones son,

$$\frac{dC_1}{dt} = \alpha e^{-\alpha\, t}(C_\infty - C_1(0))\,; \qquad \frac{dC_2}{dt} = \alpha e^{-\alpha\, t}(C_\infty - C_2(0)) \tag{3.7}$$

sustituyendo (3.7) en (3.3)

$$\frac{V_1}{k}\frac{dC_1}{dt} = -\frac{V_2}{k}\frac{dC_2}{dt} = C_2 - C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{k}\left(\alpha e^{-\alpha t}(C_\infty - C_1(0))\right) = e^{-\alpha t}(C_2(0) - C_1(0))$$

simplificando y despejando

$$\alpha = \frac{k}{V_1}\frac{C_2(0) - C_1(0)}{C_\infty - C_1(0)} \tag{3.8}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el valor de (3.4)

$$C_\infty - C_1(0) = \frac{V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0)}{V_1 + V_2} - C_1(0) = \frac{V_2(C_2(0) - C_1(0))}{V_1 + V_2} \tag{3.9}$$

y sustituyendo (3.9) en (3.8) se obtiene finalmente que

$$\boxed{\alpha = \frac{k(V_1 + V_2)}{V_1 V_2}}$$

3.2.6. Absorción de Rayos-X

Una aplicación elemental del modelo exponencial es la absorción de rayos-X que atraviesan un cuerpo parcialmente opaco. La diferencia importante con el resto de los modelos estudiados es que ahora la variable independiente no es el tiempo sino la distancia x de penetración del rayo. Supondremos que $y(x)$ representa a la intensidad de la radiación, y que la lámina es atravesada perpendicularmente por el rayo. La diferencia $y(x+h) - y(x)$ se corresponderá con la absorción, siendo h el espesor de la lámina. La hipótesis que se establece es que esta absorción es directamente proporcional a la intensidad de radiación y al espesor. Esto es,

$$y(x+h) - y(x) = \alpha y(x) h\,,$$

donde el parámetro de proporcionalidad α tiene que ser negativo. Pasando h al primer miembro y tomando límite cuando $h \to 0$, nos aparece el siguiente problema de valores iniciales,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \alpha y(x)\,, \quad y(0) = y_0$$

cuya solución, como sabemos, es $y(x) = y_0 e^{\alpha x}$

EJERCICIO 3

1 **Una población crece exponencialmente durante T meses con una constante de crecimiento de 0.03 por mes. En un momento determinado, la constante aumenta a 0.05 por mes. Después de 20 meses la población se duplica, ¿en qué momento T cambió la constante de crecimiento?**

2 **Amplias investigaciones han suministrado datos que relacionan el riesgo R (en porcentaje) de tener un accidente automovilístico con el nivel b de alcohol en la sangre (en porcentaje). Se conocen dos puntos representativos $R(0) = 1\,\%$ y $R(0.14) = 20\,\%$. Si suponemos que la razón de cambio del riesgo respecto al nivel de alcohol en la sangre viene dada por $R'(b) = kR(b)$. Resuelve la ecuación diferencial que modeliza a la situación planteada. ¿En qué nivel de alcohol en la sangre el riesgo de sufrir un accidente es del $100\,\%$**

3.3. Modelo exponencial modificado

3.3.1. Ley de enfriamiento de Newton

Después de una muerte violenta, una de las cosas que el forense hace es tomar la temperatura del cuerpo. Un poco tiempo después, se vuelve a tomar la temperatura del cadáver, con objeto de saber el "ritmo"de enfriamiento del cuerpo. Naturalmente, este proceso puede repetirse para obtener una mejor aproximación de la hora en que ha sucedido la muerte. La propiedad en que se basa esta técnica es conocida con el nombre de **Ley de enfriamiento de Newton**, la cual dice que el ritmo con el que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del ambiente que lo rodea. Es decir, si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo para el tiempo t, entonces

$$T'(t) = -k(T(t) - T_e)\,, \quad T(0) = T_0\,, \tag{3.10}$$

siendo $k > 0$, T_e la temperatura ambiente y T_0 la temperatura inicial del cuerpo.

EJEMPLO 3.3

- Supongamos que se encuentra un cadáver a las 8h30' y que a esa hora su temperatura es de 30^0 C siendo la temperatura de la habitación constante de 22^0 C. Una hora más tarde la temperatura había descendido a 28^0 C. Vamos a utilizar esta información para determinar la hora aproximada en que falleció esta persona.

  Es conocido que la temperatura de ser un humano vivo es de aproximadamente 37^0 C. De la ley de enfriamiento de *Newton* deducimos

  $$T'(t) = -k(T(t) - 22)\,, \quad T(0) = 30\,.$$

Esta ecuación diferencial es lineal, pero podemos simplificarla realizando el cambio de variable $z(t) = T(t) - 22$. En efecto, $z'(t) = T'(t)$, luego,

$$z'(t) = -kz(t)\,, \quad z(0) = T(0) - 22 = 8\,.$$

Estamos ante el modelo exponencial

$$z(t) = z(0)e^{-kt} = 8e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad T(t) = 22 + 8e^{-kt}\,.$$

Ahora, debemos determinar la constante k de decaimiento,

$$T(1) = 28 = 22 + 8e^{-k} \quad \Rightarrow \quad k = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.2877\,.$$

Nuestro modelo es: $T(t) = 22 + 8e^{-0.2877t}$. Para determinar la hora en que ocurrió el asesinato, debemos encontrar el tiempo correspondiente a 37^0 C.

$$37 = 22 + 8e^{-0.2877t} \quad \Rightarrow \quad t = -\ln\left(\frac{15/8}{0.2877}\right) \approx -2\,.$$

De esta información deducimos que la muerte ocurrió aproximadamente dos horas antes de haber encontrado el cuerpo, aproximadamente a las 6 horas y treinta minutos de la mañana.

3.3.2. Contaminación de un lago

Uno de los problemas mas urgentes de la sociedad actual es cómo reducir los niveles de contaminación y toxicidad del agua disponible. Existen modelos muy complejos que requieren del esfuerzo de equipos multidisciplinares, nosotros nos limitaremos a estudiar un modelo muy simple aplicado a la contaminación de un lago. A pesar de su sencillez, observaremos como aparecen elementos básicos que están presentes en los modelos más complicados.

Supongamos un nuevo pesticida que se aplica a los campos y se deposita a través de un río en un lago con un volumen V de agua. Asumamos que el río recibe una cantidad constante de pesticida y que fluye al lago con un ritmo constante f. Estamos, por tanto, suponiendo que el río tiene una concentración constante p del nuevo pesticida. Vamos a suponer también que el agua del lago está bien agitada y que entra tanta agua cómo sale de él. Si $c(t)$ es la concentración de pesticida en el lago en el tiempo t, entonces el ritmo de cambio en la cantidad de pesticida es igual a la cantidad que entra menos la cantidad que sale. Es decir,

$$c'(t) = \frac{f}{V}p - \frac{f}{V}c(t)\,,$$

y si suponemos que el lago estaba inicialmente libre del pesticida, entonces $c(0) = 0$. Para resolver esta ecuación diferencial la reescribimos

$$c'(t) = -\frac{f}{V}\left(c(t) - p\right)\,,$$

y al igual que en la sección anterior, haciendo el cambio de variable $z(t) = c(t) - p$ con $z(0) = c(0) - p = -p$, la ecuación se transforma en,

$$z'(t) = -\frac{f}{V} z(t)\,, \quad z(0) = -p\,.$$

Ya sabemos que la solución de esta ecuación diferencial es

$$z(t) = -p\, e^{-\frac{ft}{V}} \quad \Rightarrow \quad c(t) = p - p\, e^{-\frac{ft}{V}}\,.$$

El segundo término de esta última expresión muestra que a largo plazo , la solución tiende hacia p, como era lógico suponer.

3.3.3. Genética de poblaciones

En genética de poblaciones los fenómenos hereditarios se estudian a nivel de población en lugar de a nivel individual. Consideremos un carácter hereditario particular de un animal, como la longitud del pelo. Supongamos que básicamente hay dos tipos de pelo para cierto animal: pelo largo y pelo corto, y que el pelo largo es el tipo dominante. Sea `A` el gen responsable del pelo largo y `a` el gen responsable del pelo corto. Cada animal tiene un par de genes: `AA` (individuos dominantes), `aa` (individuos recesivos) o `Aa` (individuos híbridos). Si viven N animales en la población, entonces existen $2N$ genes en la población que controlan la longitud del pelo. El número total de genes `a` en la población dividido por $2N$ da la fracción de genes `a` que llamaremos q. Esta fracción se llama frecuencia genética de `a` en la población. La frecuencia genética de `A` será $1 - q$.

Un problema importante en genética de poblaciones es el estudiar la forma en que la frecuencia genética q cambia conforme los animales de la población se reproducen. Si cada unidad de tiempo representa una generación, se puede considerar q como función del tiempo. En general, se estudian un número elevado de generaciones, por lo que q puede considerarse una función derivable de t. Supondremos que la población se aparea al azar y que la distribución de los genes `a` y `A` es la misma para machos y hembras. En este caso, se puede demostrar por la teoría de la probabilidad, que la frecuencia genética es constante de una generación a la siguiente cuando no hay factores que la alteren como mutaciones o influencias externas sobre la población. Discutiremos a continuación las ecuaciones diferenciales que describen los efectos de esos factores de perturbación sobre $q(t)$.

Si en cada generación una fracción α de los genes `a` muta y se transforma en genes `A`, entonces la razón de cambio de la frecuencia genética q debida a esta mutación es

$$q' = -\alpha q\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Sucede con frecuencia que en cada generación una fracción μ de genes `A` mutan en `a` y al mismo tiempo una fracción α de genes `a` mutan en `A`. El efecto neto de estas mutaciones en la frecuencia genética de q está descrito por la ecuación

$$q' = \mu(1-q) - \alpha q\,, \quad \alpha,\, \mu > 0\,.$$

EJEMPLO 3.4

- A continuación haremos un análisis cualitativo para un $\mu = 0.00003$ y $\alpha = 0.00001$.

  $$\frac{dq}{dt} = 0.00003(1-q) - 0.00001q = 0.00003 - 0.0000q = -0.00004(q-0.75)$$

  La Figura 3.1 muestra la gráfica de $z = -0.00004(q-0.75)$ y las curvas solución típicas. Puede apreciarse que la frecuencia genética $q = 0.75$ es un valor de equilibrio. Si el valor inicial de q es menor de 0.75, el valor de q crecerá bajo los efectos de la mutación; después de muchas generaciones será aproximadamente 0.75. Si el valor inicial de q está entre 0.75 y 1.00, entonces q decrecerá con el tiempo hasta el valor 0.75.

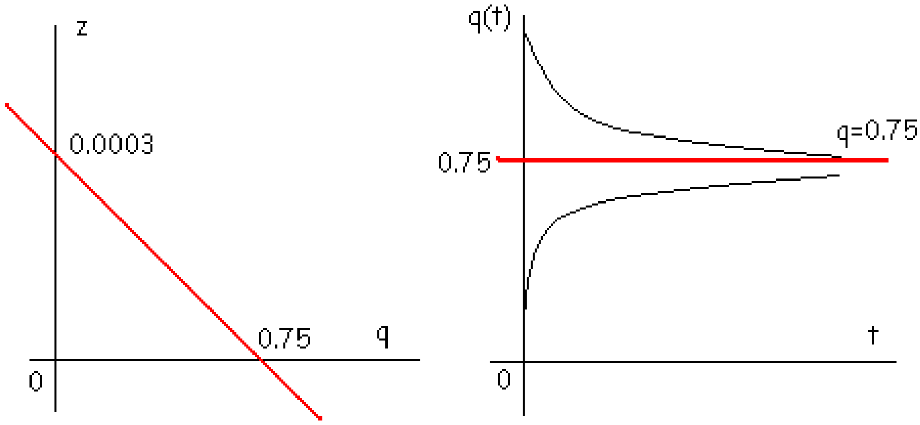


Figura 3.1. Estudio cualitativo del modelo.

En el estudio de cómo una población se adapta al medio ambiente a lo largo de un período grande, los genetistas suponen que algunos tipos hereditarios tienen ventaja sobre otros en cuanto a supervivencia y reproducción se refiere. Supongamos que la habilidad adaptativa de los híbridos `Aa` es ligeramente mayor que la de los individuos dominantes `AA` y recesivos `aa`.

En este caso, resulta que la razón de cambio de la frecuencia genética debida a esta presión selectiva es

$$q' = q(1-q)(c-dq)\,,$$

donde c y d son constantes positivas con $c < d$. Por otro lado, si la habilidad adaptativa de los individuos híbridos es ligeramente menor que la de los dominantes y la de los recesivos, se puede demostrar que

$$q' = kq(1-q)(2q-1)\,,$$

donde k es una constante entre 0 y 1, llamada coeficiente de selección contra los híbridos.

Es posible considerar los efectos mezclados de la mutación y la selección natural. En efecto, supongamos que, además de las mutaciones de `A` en `a` y `a` en `A` tenemos también que la selección va contra los individuos recesivos. Entonces, la razón de cambio neta en la frecuencia genética podría ser

$$q' = \mu(1-q) - \alpha q - kq^2(1-q)$$

EJERCICIO 4

1 **El crecimiento de una célula depende del flujo de nutrientes a través de su superficie. Si $y(t)$ representa al peso de la célula en el tiempo t, supongamos que (para un tiempo limitado) la tasa de crecimiento de la célula sea proporcional al área de su superficie. Es decir, proporcional a $y^{2/3}$. Plantear y resolver la ecuación diferencial que modeliza a esta situación, e interpretar el resultado obtenido.**

3.4. Dinámica dependiente de la densidad

Los individuos de una misma especie tienen necesidades muy similares para sobrevivir, crear y reproducirse; pero la necesidad combinada de todos ellos por un recurso puede superar la oferta del mismo. Los individuos compiten entonces por dicho recurso y por lo menos algunos de ellos no lo consiguen.

DEFINICIÓN 3.4.1 *Competición es una interacción entre individuos, provocada por la necesidad común de un recurso limitado y conducente a la reducción de la supervivencia, el crecimiento y/o la reproducción de los individuos competidores.*

Ahora, podemos pasar a estudiar más a fondo la cuestión. Cuando la población es demasiado grande, el modelo elemental de crecimiento constante, no puede ser exacto, ya que no refleja el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible. Así que hay que agregar un término de competición a la ecuación diferencial lineal. Una elección adecuada del término competitivo es $-by(t)^2$, donde b es una constante, ya que el promedio estadístico del número de encuentros por unidad de tiempo es proporcional a $y(t)^2$. Consideremos entonces la ecuación modificada

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - by(t)^2 = y(t)(r - by(t))\,, \quad r\,, b > 0\,.$$

Esta ecuación se conoce como **ley logística** del crecimiento de una población y los números r y b se llaman **coeficientes vitales** de la población. La introdujo por primera vez el matemático y biólogo holandés *Verhust*, en 1837 cuando ajustó una curva logística a los datos de seis censos de Estados Unidos de 1790 a 1840 y predijo la población de Estados Unidos para 1940. Su predicción falló por menos de 1 millón de personas (alrededor de un 1 %). Ahora bien, en general, la constante b es muy pequeña comparada con r de tal modo que si $y(t)$ no es demasiado grande, entonces el término $-by(t)^2$ es insignificante comparado con $ry(t)$, por lo que la población crece exponencialmente. Sin embargo, si $y(t)$ es grande entonces el término $-by(t)^2$ debe tomarse en cuenta ya que disminuye la tasa de crecimiento de la población. Es lógico pensar que cuanto más industrializado es un país, tanto más espacio disponible tiene, y cuanto más alimento posee, entonces es más pequeño el coeficiente b.

Consideremos la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de una población aislada. Si y_0 es la población en el tiempo t_0, entonces $y(t)$, la población en el tiempo t, satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - by(t)^2\,, \quad y(t_0) = y_0$$

Para resolver esta ecuación diferencial la reescribimos como

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)\,, \quad K = \frac{r}{b}\,,$$

que es una ecuación diferencial en variables separables

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)(1 - y(t)/K)} = \int rdt\ . \tag{3.11}$$

La primera de las integrales que aparece vale

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)(1 - y(t)/K)} = \int \frac{dy(t)}{y(t)} + \int \frac{1/K\, dy(t)}{1 - y(t)/K} = \ln|y(t)| - \ln|1 - y(t)/K|\,.$$

Sustituyendo en (3.11)

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1 - y(t)/K}\right| = rt + C \quad \Rightarrow \quad \frac{Ky(t)}{K - y(t)} = e^{rt+C}\,.$$

Despejando el valor de $y(t)$ en la expresión anterior

$$y(t) = \frac{Ke^{rt+C}}{K + e^{rt+C}} = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}\,.$$

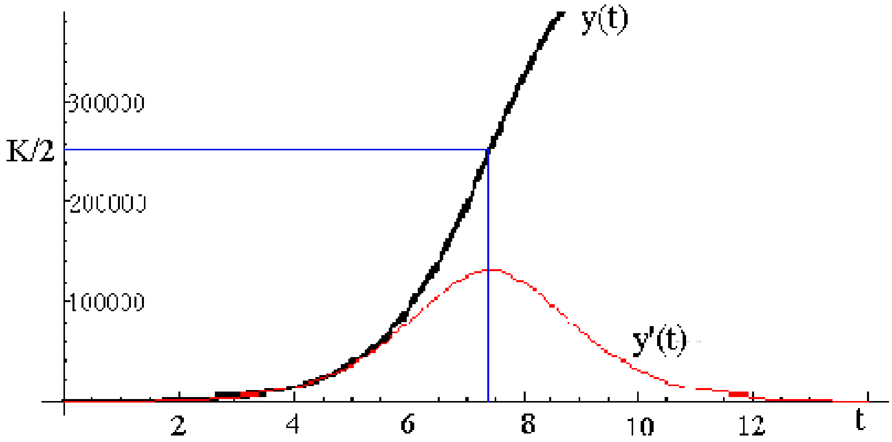


Figura 3.2. Representación gráfica de $y(t)$ y $y'(t)$.

Si examinamos este resultado para ver que tipo de poblaciones predice, podemos observar que si $t \to \infty$, entonces

$$y(t) \to K = \frac{r}{b}$$

Es decir, independientemente del valor inicial, la población siempre tiende al valor límite r/b. Además notemos que $y(t)$ es una función monótona creciente respecto del tiempo si $0 < y_0 < r/b$. Más aún, dado que

$$\frac{d^2y(t)}{d\,t^2} = r\frac{dy(t)}{dt} - 2by(t)\frac{dy(t)}{dt} = (r - 2by(t))y(t)(r - by(t))$$

se ve que $dy(t)/dt$ es creciente si $y(t) < r/2b$, y $dy(t)/dt$ es decreciente si $y(t) > r/2b$. Por ello la gráfica de $y(t)$ debe tener la forma que aparece en la Figura 3.2.

Una curva así se llama **curva logística**. A partir de su forma podemos concluir que el tiempo antes de que la población alcance la mitad de su valor límite es un período de crecimiento acelerado. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero. Este es un período de crecimiento reducido.

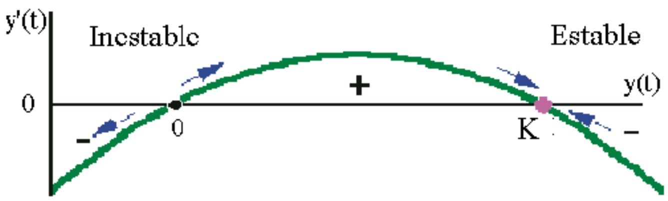


Figura 3.3. Línea fase.

La ecuación diferencial logística es autónoma y también podemos hacer su estudio cualitativo. Para ello estudiemos la función $g(y) = y(r - by)$. Sus ceros están en los puntos $y = 0$ e $y = r/b$. Para valores de $y < 0$ la función es negativa; para

$0 < y < r/b$ es positiva y para $y > r/b$ la función es negativa. Por tanto, las soluciones con condición inicial entre 0 y r/b serán crecientes y tendrán asíntota horizontal en r/b. Una condición inicial por encima del valor r/b correspondería a una función decreciente con asíntota horizontal en r/b.

Resumiendo, el crecimiento de una población se describe generalmente por una ecuación logística donde la constante $K = r/b$ se llama **capacidad de carga** del medio ambiente.

Cuando la población inicial es cercana a cero, se produce un rápido crecimiento que va disminuyendo a medida que nos vamos acercando a K. La curva de la población tiene típica forma de S e $y(t)$ tiende asintóticamente a la capacidad de carga. Si la población inicial es mayor que la capacidad de carga, la población decrece en tamaño, acercándose nuevamente asintóticamente a la capacidad de carga.

EJEMPLO 3.5

- Supongamos que en un lago se introducen 100 peces. Después de tres meses sabemos que hay 250 peces. Un estudio ecológico predice que el lago puede mantener a 1000 peces. Vamos a encontrar una fórmula para el número $y(t)$ de peces en el lago, t meses después de la introducción de los 100 peces.

  La capacidad de carga del lago viene dada por $K = 1000$. Por otro lado, para $t = 0$ hay 100 peces, en consecuencia si en la solución de la ecuación logística

  $$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}} = \frac{1000}{1 + Ae^{-rt}}\,,$$

  tenemos en cuenta este hecho

  $$y(0) = 100 = \frac{1000}{1 + A} \quad \Rightarrow \quad A = 9\,.$$

  Finalmente, como $y(3) = 250$, se tiene que

  $$y(3) = 250 = \frac{1000}{1 + 9e^{-3r}} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{75}{225}\right) \approx 0.37\,.$$

  En consecuencia

  $$y(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.37t}}\,.$$

Las predicciones con la ley logística se confirmaron en experimentos con el protozoo *Paramecium caudatum* llevados a cabo por el biólogo y matemático *G. F. Gause*. Se colocaron cinco ejemplares de *Paramecium* en un tubo de ensayo con 0.5 cm^3 de medio nutriente y se contó el número diario de individuos durante seis días. Se encontró que los *Paramecium* se reproducían con una tasa de 230.9 % diario cuando la población era pequeña. El número de individuos aumentaba inicialmente con rapidez y posteriormente con más lentitud hasta alcanzar un nivel máximo de 375 hacia el cuarto día, saturando el tubo de ensayo. A partir de esta información se concluye que si el *Paramecium* crece de acuerdo con la ley logística $dy(t)/dt = r\,y(t) - by(t)^2$, entonces $r = 2.309$ y $b = 2.309/375$. Por lo tanto, la ley logística predice que

$$y(t) = \frac{(2.309)5}{\frac{2.309^5}{375} + \left(2.309 - \frac{2.309^5}{375}\right) e^{-2.309t}} = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}}\,.$$

Para lograr modelos más precisos de crecimiento poblacional, deben considerarse las poblaciones como constituidas por grupos no homogéneos de individuos. Mas bien, hay que subdividir la población en diferentes grupos de edades. También se debe subdividir la población en hombres y mujeres, ya que la tasa de reproducción de ésta depende usualmente más del número de mujeres que del número de hombres.

3.4.1. Modelo epidemiológico I

La siguiente sección trata de la difusión de una enfermedad contagiosa. Empezaremos planteando varias hipótesis que simplifican el problema:

- La población es un número fijo P y cada miembro de la población es susceptible a la enfermedad.
- La duración de la enfermedad es larga, de manera que no se cura durante el período de estudio.
- Todos los individuos infectados son contagiosos y circulan libremente entre la población.
- Durante cada unidad de tiempo cada persona infectada tiene c contactos y cada contacto con una persona no infectada redunda en la transmisión de la enfermedad.

Una vez hechas las simplificaciones, consideremos un corto período de tiempo que va desde t hasta $t + h$. Cada persona infectada tiene ch contactos. ¿Cuántos de esos contactos son con personas no infectadas?. Si $f(t)$ es el número de personas infectadas al tiempo t, entonces $P - f(t)$ es el número de personas que no están infectadas, y $(P - f(t))/P$ es la fracción de la población que no está infectada. Entonces, de los ch contactos hechos por una persona infectada,

$$\left(\frac{P - f(t)}{P}\right) ch\,,$$

habrán sido con personas no infectadas. El número total de nuevas infecciones deberá ser

$$f(t+h) - f(t) = f(t)\left(\frac{P - f(t)}{P}\right) ch$$

dividiendo por h, y haciendo que h tienda a cero obtenemos

$$f'(t) = \frac{c}{P} f(t)(P - f(t)) .$$

Luego, la función f verifica la ecuación diferencial que da lugar a la ecuación logística, y por tanto

$$f(t) = \frac{P}{1 + Be^{-ct}} , \tag{3.12}$$

donde c y B se pueden determinar de las características de la epidemia.

EJEMPLO 3.6

- Los servicios de salud pública registran la difusión de una epidemia de gripe de duración particularmente larga en una ciudad de 500.000 personas. Al inicio de la primera semana de registro se habían contabilizado 200 casos; durante la primera semana aparecieron 300 nuevos casos. Nos proponemos estimar el número de individuos infectados después de 6 semanas.

  Sabemos que el valor de P que aparece en (3.12) es la capacidad de carga del sistema, en nuestro caso el número de individuos que a largo plazo se infectarán, $P = 500000$. Por otro lado, si $t = 0$, entonces $f(0) = 200$, sustituimos en (3.12) y deducimos que $B = 2449$. Cómo el número de infectados al final de la primera semana es de 500, podemos escribir

$$500 = \frac{500000}{1 + 2449e^{-c}} \quad \Rightarrow \quad c = -\ln\left(\frac{1998}{4998}\right) \approx 0.916891 .$$

  En consecuencia:

$$f(t) = \frac{500000}{1 + 2449e^{-0.916891t}} .$$

  Finalmente, el número de personas infectadas al final de la sexta semana será $f(6) \approx 45475$.

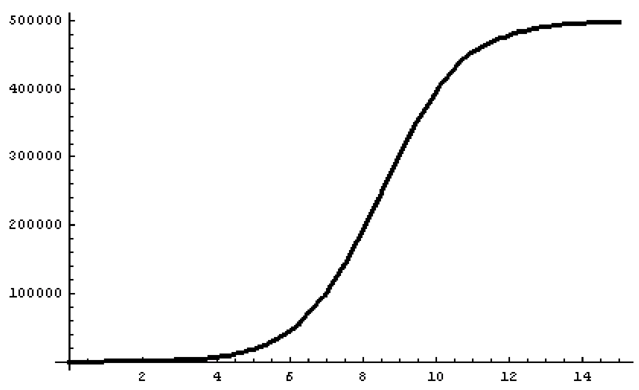


Figura 3.4. Representación gráfica de $f(t) = \frac{500000}{1+2449e^{-0.91689t}}$.

EJEMPLO 3.7

- La propagación de una enfermedad infecciosa en una población de individuos susceptibles de ser contagiados se modeliza por la ecuación diferencial

$$y'(t) = \alpha y(t)(N + 1 - y(t))$$

donde $y(t)$ representa al número de personas enfermos en el tiempo t, N el tamaño de la población y $\alpha > 0$ la tasa específica de infección. Suponiendo que se introduce un individuo enfermo, ¿cómo evoluciona la enfermedad?

Se trata del modelo logístico $y'(t) = \alpha y(t)(K - y(t))$ con una capacidad de carga $K = N + 1$, cuya solución es

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-K\alpha t}} = \frac{N+1}{1 + Ae^{-(N+1)\alpha t}}$$

como $y(0) = 1$, entonces

$$1 = \frac{N+1}{1+A} \quad \Rightarrow \quad N = A\,.$$

El número de personas infectadas en el tiempo t es,

$$y(t) = \frac{N+1}{1 + Ne^{-(N+1)\alpha t}}$$

Este modelo epidémico se utiliza en otros contextos. Por ejemplo, para estudiar la forma en que nuevos avances tecnológicos se aplican en Medicina, o nuevas semillas en la agricultura, o el uso de nuevos insecticidas. Una "persona infectada" representa al individuo que conoce el producto. Sin embargo, la transmisión de la información puede verse alterada si entran en juego los medios de comunicación y publicidad.

3.5. Modelo logístico modificado

3.5.1. Caso I

Existen poblaciones tales que si el número de individuos es elevado, entonces la tasa de crecimiento decrece, además si la población es demasiado pequeña esta tasa también decrece (por ejemplo, por la dificultad de los adultos en encontrar pareja).

Sean $y(t)$ la población en el tiempo t, M la capacidad de carga del hábitat, y N la constante necesaria para introducir el factor de escasez. Necesitamos un modelo $y'(t) = g(y)$ que tenga en cuenta los comentarios anteriores. La gráfica de $g(y)$ debería ser del tipo representada en la Figura 3.5.

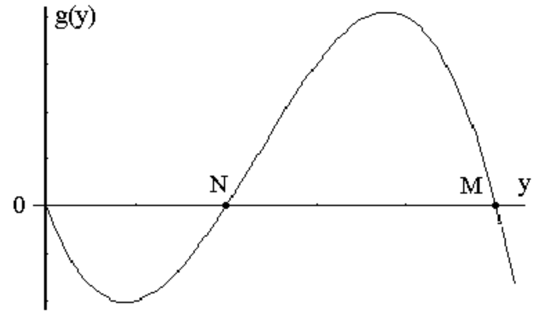


Figura 3.5. Gráfica de $g(y)$.

Observemos que $g(y)$ es negativa si $y > M$, ya que la población decrece cuando aumenta la tasa de crecimiento. También $g(y)$ es negativa cuando $y < N$, porque la población decrece cuando no hay incremento. Por el contrario, $g(y)$ es positiva en $N < y < M$ y $g(0) = 0$.

Debemos modificar el modelo logístico

$$y'(t) = ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right),$$

multiplicando el segundo término por la expresión $y(t)/N - 1$. En consecuencia, ahora nuestro modelo es

$$y'(t) = ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right)\left(\frac{y(t)}{N} - 1\right).$$

Podemos resolver de forma exacta esta ecuación diferencial ya que es de variables separables. No obstante, en lo que realmente estamos interesados es en saber cómo se comportan las soluciones, y para ello el método mas conveniente de análisis es el cualitativo.

Es evidente que tenemos tres puntos de equilibrio $y = 0$, N y M, siendo el 0 y el M sumideros y N una fuente.

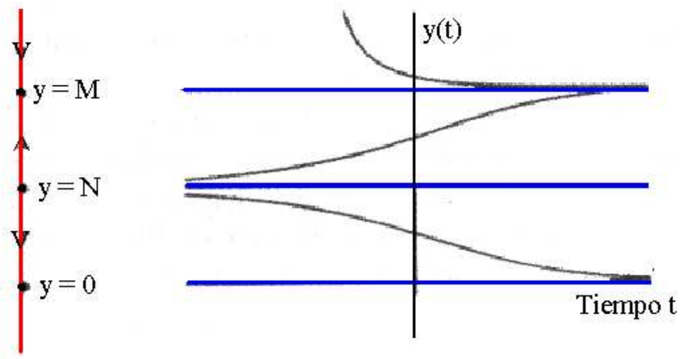


Figura 3.6. Análisis cualitativo del modelo.

La Figura 3.6 muestra la línea fase y las gráficas de soluciones típicas.

3.5.2. Caso II

Hemos comentado al inicio de la sección que el modelo logístico

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) , \tag{3.13}$$

tiene a K como capacidad de carga del hábitat. Es decir, todas las soluciones tienden al valor K cuando t aumenta. Es frecuente que este valor de K se modifique a medida que lo hacen las condiciones ambientales, por ejemplo en función de las precipitaciones. Podemos incluir este efecto oscilatorio, modificando el modelo (3.13)

$$\frac{dy(t)}{dt} = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{b + c\,\text{sen}\ wt}\right) ,$$

donde b y w son constantes positivas con $b > c$.

Observemos que esta nueva ecuación diferencial no es autónoma y es muy difícil de resolver. Sólo podemos abortar la resolución de este problema a través de técnicas numéricas o bien utilizando un programa de simulación. Hemos simulado el modelo (3.14) obteniéndose el resultado que aparece en la Figura 3.7

$$\frac{dy(t)}{dt} = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{7 + \text{sen}\ wt}\right) . \tag{3.14}$$

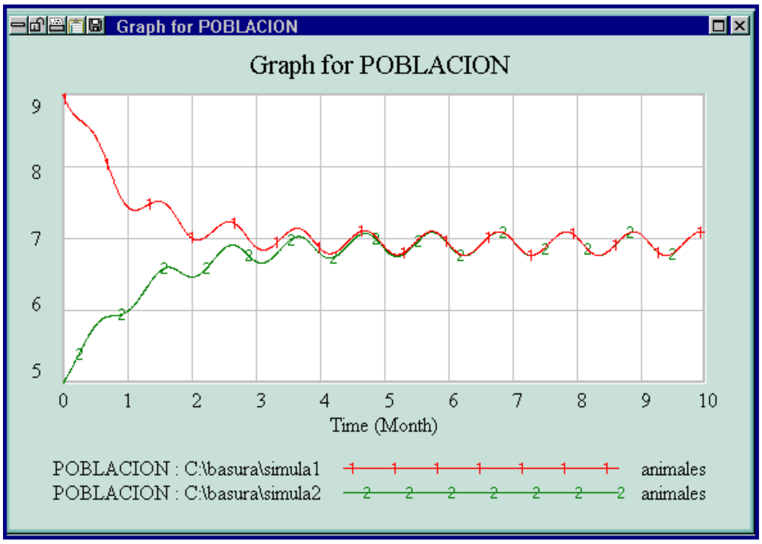


Figura 3.7. Simulación de `(3.14)` con `Vensim`®.

Lo que debemos destacar es que una vez que una curva solución entra en la región $6 < y(t) < 8$, entonces queda atrapada ahí y empieza a oscilar.

3.6. Otros modelos basados en E.D.O.

3.6.1. Modelo de disolución

El problema que ahora abordamos es el análisis de la evolución de una mezcla en un compartimiento (un fluido en el interior de un recipiente, un gas en el interior de una habitación,...) Se supone que en un determinado instante hay y_0 gramos de una sustancia disuelta en un recipiente que tiene una capacidad de V litros y que a partir de ese instante se introduce en el recipiente un fluido que contiene una concentración de c_e gramos por litro con una velocidad de entrada de éste de v_e litros por minuto. Se supone que la mezcla se hace uniforme y sale a v_s litros por minuto. El problema que nos planteamos es determinar la cantidad en gramos de la sustancia que hay en el recipiente en cada instante t.

Si $y(t)$ denota a la cantidad de sustancia en el minuto t, entonces el ritmo con el que ésta cambia viene dada por la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y'(t) = v_e\, c_e - \frac{v_s}{V + (v_e - v_s)} y(t)$$

EJEMPLO 3.8

- Un depósito de 300 litros de capacidad contiene 50 litros de agua pura. En el instante $t = 0$ comienza a entrar una solución que contiene 100 cm^3 de alcohol por cada litro de solución a una velocidad de 5 litros por minuto. Este suministro se detiene al llenarse el depósito. Después de media hora se introduce en el tanque una segunda solución de agua con alcohol, con una concentración de un 20 % de alcohol por cada litro de agua, a una velocidad de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo, al introducir la segunda solución se abre una llave del fondo del depósito, y la solución perfectamente mezclada, sale del tanque a una velocidad de 6 litros por minuto. Determinar el porcentaje de alcohol en el depósito cuando se llene completamente.

  Dividiremos el ejercicio en dos partes:

  - **Durante la primera hora** ($0 \leq t \leq 30$). Consideraremos $y(t)$ como la cantidad de alcohol en el depósito en el minuto t. En esta situación, $y'(t) = 0.5$ litros de alcohol/minuto. Es decir, $y(t) = 0.5t + C$ litros de alcohol. Como inicialmente el tanque sólo contenía agua pura $y(0) = 0$, lo que obliga a que $C = 0$. Por tanto, $y(t) = 0.5t$, y la cantidad de litros de alcohol en el depósito en el minuto 30 es de $y(30) = 0.5 * 30 = 15$.
  - **Después de la primera hora** ($t > 30$). Sea $u(t)$ la cantidad de alcohol en el depósito en el minuto t. La cantidad de solución en el tanque es de 200 litros y la nueva situación se modeliza a través del siguiente problema de valores iniciales,

$$u'(t) = (5 * 0.1 + 5 * 0.2) - \frac{6}{200 + 4t} u(t)\ ; \qquad u(0) = 15$$

siendo la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$u'(t) + \frac{3}{100+2t}u(t) \; = 1.5$$

cuyo factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\displaystyle\int \frac{3}{100+2t}dt} = (100+2t)^{\frac{3}{2}}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$u'(100+2t)^{\frac{3}{2}} + 3(100+2t)^{\frac{1}{2}}u \; = 1.5(100+2t)^{\frac{3}{2}}$$

o bien

$$\left(u(100+2t)^{\frac{3}{2}}\right)' = 1.5(100+2t)^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad u(100+2t)^{\frac{3}{2}} = 1.5\int(100+2t)^{\frac{3}{2}}dt$$

es decir

$$u(100+2t)^{\frac{3}{2}} = 1.5\int(100+2t)^{\frac{3}{2}}dt = \frac{1.5}{2}\frac{2}{5}(100+2t)^{\frac{5}{2}}+C = 0.3(100+2t)^{\frac{5}{2}}+C$$

despejando,

$$u(t) = 0.3(100+2t) + \frac{C}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Para calcular el valor de C tendremos en cuenta que $u(0) = 15$,

$$15 = 0.3(100) + \frac{C}{(100)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad C = -15000$$

Por último,

$$u(t) = 0.3(100+2t) - \frac{15000}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Como al depósito le faltan 100 litros por llenarse completamente y cada minuto el nivel sube $5+5-6=4$ litros, tardará 25 minutos en hacerlo. La solución al ejercicio será

$$u(25) = 0.3(100+2*25) - \frac{15000}{(100+2*25)^{\frac{3}{2}}} = 36.835 \quad \text{litros de alcohol}$$

EJEMPLO 3.9

- Un contenedor de 300 litros se encuentra lleno en sus dos terceras partes de capacidad y contiene 50 kilos de sal. En el tiempo $t = 0$ minutos, se abren las válvulas de manera que se agrega una solución salina con una concentración de un tercio de kilo por litro al contenedor a una velocidad de 3 litros por minuto. Si la mezcla bien agitada se extrae del contenedor a la velocidad de 2 litros por minuto, ¿cuántos kilos de sal se encuentran en el contenedor cuando éste se llena?.

Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el contenedor en el minuto t. La razón de cambio en cada minuto $y'(t)$, será igual a la cantidad de sal que entra en el contenedor, menos la cantidad de sal que sale en el mismo minuto. La velocidad con la que la sal entra en el minuto t será

$$1/3 \text{ Kg/litro } \times 3\text{litro/minuto } = 1 \text{ Kg/minuto } .$$

Al mismo tiempo la velocidad con que sale la calculamos de la siguiente manera. Sabemos que para el minuto t, $y(t)$ será la sal existente en $200+t$ litros de agua. Por tanto, en 2 litros tendremos $2y(t)/(t+200)$ kilos de sal. En consecuencia:

$$y'(t) = 1 - \frac{2}{t+200} y(t) \, , \quad y(0) = 50 \, .$$

Estamos ante una ecuación diferencial lineal,

$$y'(t) + \frac{2}{t+200} y(t) = 1 \, ,$$

que tiene por factor integrante

$$\mu(t) = e^{\displaystyle\int \frac{2}{t+200} dt} = e^{2\ln(t+200)} = (t+200)^2 \, .$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$,

$$y'(t)(t+200)^2 + 2(t+200)y(t) = (t+200)^2 \quad \Rightarrow \quad \left((t+200)^2 y\right)' = (t+200)^2 \, .$$

Integrando

$$(t+200)^2 y = \frac{(t+200)^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{t+200}{3} + \frac{C}{(t+200)^2} \, .$$

De todas estas soluciones, en la única que estamos interesados es en aquella que cumple la condición inicial $y(0) = 50$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$50 = \frac{200}{3} + \frac{C}{200^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-50}{3} 200^2 \, .$$

La solución pedida es

$$y(t) = \frac{t+200}{3} - \frac{50(200)^2}{3(t+200)^2} \, .$$

Por último, para conocer la cantidad de sal existente en el contenedor cuando éste se ha llenado es necesario saber el tiempo transcurrido. Como cada minuto aumenta en un litro la cantidad de agua e inicialmente teníamos 200 litros serán necesarios 100 minutos para llenar el contenedor. En este caso

$$y(100) \approx 92 \text{ kilos de sal} \, .$$

3.6.2. Modelo para gestionar la pesca en un lago

Supongamos un lago donde no existen depredadores y con alimento suficiente para que los peces no luchen por la comida. Los peces se capturan a intervalos periódicos descritos por la función

$$h(t) = a + b \operatorname{sen} 2\pi t\,,$$

con a y b constantes, $a > b$ y t el tiempo. Si suponemos que los peces crecen con un ritmo proporcional a su población, entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - (a + b \operatorname{sen} 2\pi t)\,,$$

modela a la situación planteada. Donde $y(t)$ es el número de peces en el tiempo t y r la tasa neta de crecimiento. Estamos ante una ecuación diferencial lineal que tiene como factor integrante

$$\mu(t) = e^{-\int r dt} = e^{-rt}\,.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$ y simplificando

$$\left(e^{-rt}y(t)\right)' = -e^{-rt}\left(a + b \operatorname{sen} 2\pi t\right)\,.$$

Tenemos que resolver la integral

$$-\int e^{-rt}\left(a + b \operatorname{sen} 2\pi t\right)dt = \frac{a}{r}\int -re^{-rt}dt - b\int e^{-rt} \operatorname{sen} 2\pi t dt\,. \tag{3.15}$$

La segunda de ellas se resuelve aplicando de forma reiterada la integración por partes. Se obtiene

$$\int e^{-rt} \operatorname{sen} 2\pi t dt = -\frac{2\pi e^{-rt}}{4\pi^2 + r^2}\left(\cos 2\pi t + \frac{r}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t\right)\,. \tag{3.16}$$

Sustituyendo (3.16) en (3.15)

$$e^{-rt}\left(\frac{a}{r} + \frac{b2\pi}{4\pi^2 + r^2}(\cos 2\pi t + \frac{r}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t)\right) =$$

$$e^{-rt}\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{4\pi^2 + r^2}(2\pi \cos 2\pi t + r \operatorname{sen} 2\pi t)\right)$$

Finalmente

$$y(t) = \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{4\pi^2 + r^2}(2\pi \cos 2\pi t + r \operatorname{sen} 2\pi t)\right) + Ce^{rt}\,.$$

3.6.3. La edad del hielo

Durante los últimos millones de años se producen de forma cíclica etapas de enfriamiento severo del planeta con un período de 100000 años. Estos episodios consisten en un largo intervalo de tiempo de clima muy frío debido a que enormes trozos de hielo que se forman en el hemisferio norte se desplazan hasta el sur. Los modelos matemáticos más elementales basados en E.D.O fueron propuestos por *Budyko* (1969) y *Sellers* (1969), y se modificaron en 1981 por *North, Calahan* y *Coakley.* Los modelos se basan en la idea de que la reflexión de los rayos del sol aumenta cuando se presentan los trozos de hielo. Este proceso reduce la temperatura de la tierra dando lugar a una retroalimentación que provoca un aumento del número de los trozos de hielo. En 1987 *Ghil* y *Childress* propusieron el siguiente modelo

$$c\frac{dT}{dt} = Q(1-\alpha(t)) - \mu g(T)T^4 \tag{3.17}$$

siendo c una constante específica del calor de la atmósfera de la tierra.

El término $R_i = Q(1-\alpha(t))$ corresponde a la radiación absorbida con Q que representa a la radiación solar y $\alpha(T)$ el efecto de la reflexión cuyo valor es

$$\alpha(T) = \begin{cases} \alpha_l & \text{si } T \leq T_l \\ \alpha_u & \text{si } T \geq T_u \end{cases}$$

con T_l cuando la tierra está totalmente helada, T_u cuando está libre de bloques de hielo, y α decreciente linealmente para valores de T comprendidos entre estos dos valores.

El segundo término $R_e = \mu g(T)T^4$ se corresponde con la cantidad de radiación emitida, siendo μT^4 la radiación del cuerpo negro y

$$g(T) = 1 - m\tanh\left(\frac{T}{T_0}\right)^6 \quad ; \quad m = 0.5\,; \quad T_0 = 284K$$

Los puntos de equilibrio del modelo se encuentran resolviendo la ecuación $T'(t) = 0$, o bien la intersección de las funciones R_i y R_e, dando lugar a uno o varios puntos de equilibrios, algunos de ellos estables y otros inestables. El clima actual se corresponde con el punto de equilibrio más grande y la edad de hielo al punto de equilibrio más pequeño.

3.7. Teoría de catástrofes

Esta teoría nació entre los años 1970 y 1980, fruto de las investigaciones de *Rene Thom*, y está íntimamente relacionada con la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Una catástrofe la entenderemos como la pérdida de estabilidad de un sistema dinámico.

Consideremos un modelo concreto, por ejemplo

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t)) = \gamma A y(t) - \phi y(t)^2 - \frac{\alpha y(t)^2}{1+\beta y(t)^2}\,, \tag{3.18}$$

que representa la dinámica de una población de mariposas. Observamos que los dos primeros términos corresponden a un modelo logístico, mientras el último es un factor correspondiente al modelo[2] del disco de *Holling*.

Los puntos de equilibrio podemos encontrarlos resolviendo la ecuación $y'(t) = 0$. La Figura 3.8 (izquierda), muestra la representación gráfica de $g(y)$ variando el valor de $A = 30, 40, 45, 50, 55, 85$ con $\gamma = 0.0111$, $\phi = 0.009$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$.

La Figura 3.8 (izq.) representa al dibujo fase de la ecuación diferencial autónoma (3.18), para diferentes valores del parámetro A (que corresponde a la edad), mientras que la Figura 3.8 (der.) muestra sus puntos de equilibrio correspondientes. Observemos cómo existe un único punto de equilibrio para valores de $A < 38$ o $A > 74$. En cambio, si $40 < A < 74$ existen dos puntos de equilibrio estable separados por uno inestable.

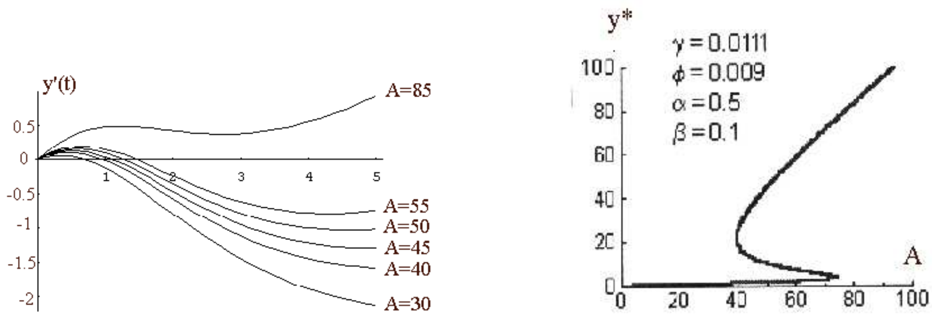


Figura 3.8. Izquierda: Líneas fases. Derecha: Evolución de los puntos de equilibrio.

Por último, comentar que este análisis es un complemento del diagrama de bifurcación que estudiaremos en los modelos discretos.

EJERCICIO 5

1 **Con frecuencia la secreción de hormonas en la sangre es una actividad períodica. Si una hormona se segrega en un ciclo de 24 horas, entonces la razón de cambio del nivel de hormona en la sangre se puede modelar por el problema de valor inicial:**

$$y'(t) = a - b\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kt\,, \qquad y(0) = y_0$$

donde $y(t)$ es la cantidad de hormona en la sangre en el instante t, a es la razón promedio de secreción, b es la cantidad de variación diaria en la

[2]Describe la mortalidad causada por los depredadores.

secreción, k es una constante positiva que representa la razón con la que el cuerpo elimina la hormona de la sangre y y_0 a cantidad de hormona en la sangre en el instante inicial. Hallar la cantidad de hormona en la sangre en cada instante si$a = b = 1\,, k = 2$ e inicialmente no había hormona en la sangre.

2 **Cierta mañana comenzó a nevar muy fuerte y continuó nevando constantemente durante todo el día. Una máquina quitanieve comenzó a las 9 horas a despejar la carretera. A las 11 horas había limpiado 2 km y a las 13 horas 1 km más. ¿A qué hora comenzó a nevar?**

3 **La velocidad de combinación de una sustancia con otra se supone que es proporcional a la cantidad remanente de la primera de ellas. Si inicialmente hay 15 Kg de esta última y 5 Kg cuando han pasado 8 min., hallar cuánta sustancia habrá cuando transcurrió 5 min. y el tiempo que transcurre cuando queda 1 Kg. de sustancia.**

4 **Acabada la cosecha de trigo en cierta localidad, un propietario llena su granero con una cantidad g_0 kg. de trigo. Alrededor del granero vive una especie de roedores que se alimentará del trigo recién almacenado. Un estudio realizado sobre la cantidad de roedores $r(t)$ muestra que crecen con una velocidad $r'(t)$ constante igual a 2, siendo r_0 el número inicial de roedores. Igualmente se ha concluido que, a causa de la presencia de los roedores, el ritmo de decrecimiento de la cantidad de trigo $g(t)$ es proporcional (con constante de proporcionalidad igual a -1) al producto entre la cantidad de roedores y la cantidad de trigo. Se pide:**

- **Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de roedores en cada instante t.**
- **Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de trigo en cada instante t.**
- **Si $r_0 = 2$; ¿cuánto tiempo tardarán los roedores en consumir la cuarta parte de la cantidad de trigo inicial? ,¿cuánto tardarán en comerse todo el trigo?**