



**UNIVERSIDAD DE JAÉN**  
*Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas*

Trabajo Fin de Grado

# **EL MODELO PRESA DEPREDADOR Y SUS APLICACIONES A LA ECONOMÍA**

**Alumno: Runjie Wu**

**Junio, 2014**



# TÍTULO

## EL MODELO PRESA-DEPREDADOR Y SUS APLICACIONES A LA ECONOMÍA

### INDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE SISTEMAS.....</b>	<b>5</b>
1.1. Historia de la Dinámica de Sistemas.....	5
1.1.1. El nacimiento de la Dinámica de Sistemas.....	5
1.1.2. Etapas en el desarrollo de la Dinámica de Sistemas.....	5
1.1.2.1. Nacimiento en el siglo XX (1950-1960).....	6
1.1.2.2. Desarrollo en el siglo XX (1970-1980).....	7
1.1.2.3. Utilización y difusión (1990- actualidad).....	7
1.2. La Dinámica de Sistemas.....	8
1.2.1. Definición de Sistema.....	8
1.2.2. Etapas en la resolución de problemas mediante Dinámica de Sistemas.....	8
1.2.3. Elementos fundamentales en la Dinámica de Sistemas.....	9
1.2.3.1. La realimentación.....	9
1.2.3.2. El Diagrama Causal y el de Forrester.....	10
1.3. Simulación de modelos con Vensim®.....	13
1.3.1. Introducción.....	13
1.3.2. Tutorial básico del Vensim PLE®.....	14
1.3.3. Simulación de algunos modelos matemáticos elementales.....	17
1.3.3.1. Introducción al modelado.....	17
1.3.3.2. El modelo exponencial.....	19
1.3.3.3. El modelo logístico.....	20
1.3.3.4. El modelo logístico-Allen.....	23
1.3.3.5. El modelo de Gompertz .....	25
1.3.3.6. Modelos de disolución.....	29

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

<b>2. MODELOS PRESA-DEPREDADOR.....</b>	<b>35</b>
2.1. El modelo Presa-Depredador.....	35
2.1.1. Antecedentes.....	35
2.1.2. La construcción del modelo.....	36
2.1.3. Simulación del modelo con Vensim PLE®.....	38
2.2. Modificaciones del modelo Presa-Depredador.....	44
2.2.1. Primera versión.....	44
2.2.2. Modelos en competencia.....	47
2.2.2.1. Primer caso.....	48
2.2.2.2. Segundo caso.....	51
2.2.2.3. Tercer caso.....	53
2.2.2.4. Cuarto caso.....	54
<b>3. CONCLUSIONES.....</b>	<b>57</b>
<b>4. BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>59</b>

## ABSTRACT

Despite the fact that mathematical models are every day more often used in Economy, nevertheless, the presence of differential equations and systems in the curriculum of the students is extremely low for the degrees inside this field. A possible way to reduce the effects of the lack of these contents is to make a reasonable use of the commercial or free simulation tools available. Among the techniques that we find today, we think that the System Dynamics are the most interesting one. The main aim of this work is to develop, to analyze and simulate mathematical models, in particular predator-prey models, for the economical context design by means of dynamic systems with the aid of the simulation software Vensim PLE®

## RESUMEN

Aunque los modelos matemáticos son cada vez más utilizados en Economía, sin embargo es mínimo el estudio y la presencia de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales en los programas de los diferentes Grados relacionados con este campo. Una posible manera de mitigar este inconveniente es hacer uso, de una forma razonada, de las herramientas de simulación disponibles en el mercado. De entre las diferentes metodologías, a nuestro entender, es la Dinámica de Sistemas una de la más interesantes de usar. El objetivo principal del presente trabajo es la creación, análisis y simulación de modelos matemáticos, en especial los del tipo presa-depredador, en un contexto económico, haciendo uso de la Dinámica de Sistemas y utilizando como software de simulación Vensim PLE®



## TEMA 1. INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE SISTEMAS

### 1.1.- Historia de la Dinámica de Sistemas.

#### 1.1.1.- El nacimiento de la Dinámica de Sistemas.

Después de la Segunda Guerra Mundial, con el desarrollo de la industrialización, en algunos países los problemas sociales se volvieron cada vez más complejos y preocupantes, por ejemplo: el crecimiento de la población, el desempleo, la contaminación ambiental, el agotamiento de los recursos naturales, etc.

En síntesis estos problemas tienen en común las siguientes características:

- Existen relaciones muy estrechas y contradictorias entre ellos, como por ejemplo entre la dinámica del crecimiento de la población y la protección del medio ambiente.
- Existe un retraso en muchos de ellos como resultado de la inversión, la contaminación ambiental y la transferencia de información, por lo tanto, se deben resolver estos problemas desde un punto de vista dinámico y no de manera estática.
- Existen factores cuantitativos y cualitativos interconectados y es por ello que su resolución es mucho más difícil.

Estas complicaciones necesitaban de una nueva metodología para solventarlos; por lo que se crean metodologías diferentes, donde la tecnología, debido fundamentalmente al gran avance de la técnica computacional, adquiere un gran protagonismo.

La Dinámica de Sistemas (DS) nació en 1956 y a finales de los años 60 se convirtió en una disciplina independiente y completa. Su fundador fue el profesor *Jay W. Forrester* del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), quien además fue el inventor de la memoria RAM (Memorias Magnéticas de Núcleos de Ferrita) de los ordenadores.

#### 1.1.2.- Etapas en el desarrollo de la Dinámica de Sistemas.

La creación y el desarrollo de los sistemas dinámicos están basados en tres disciplinas. La primera de ellas es la Cibernética, desarrollada por *Norbert Wiener* y cuyo objetivo básico es estudiar la comunicación y el control de los sistemas. Para realizar este control es necesario:

- Tener una meta clara de lo que se desea.
- Disponer de algún método para medir el estado del sistema.
- Poder comparar los dos apartados anteriores.

---

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

- Modificar el sistema, fundamentalmente a través de mecanismos de realimentación.

Las siguientes disciplinas necesarias para el desarrollo de la DS son la Informática, y finalmente, la Teoría General de Sistemas creada por *Ludwig von Bertalanffy* donde el estudio del sistema se realiza de forma global y no de forma independiente de las partes que la integran.

## 1.1.2.1.- Nacimiento de la DS en el siglo XX (1950-1960).

Al final de la década de los 50, la DS se convirtió gradualmente en un área nueva. En un principio se la conoció con el nombre de “Dinámica Industrial”, ya que se utilizó en el análisis de los sistemas de gestión industrial. En concreto, se enfrentó a la resolución de problemas relacionados con las fluctuaciones en la producción, la evolución del número de empleados, la inestabilidad del mercado de valores y al crecimiento de mercados, entre otros muchos otros.



En 1958 *Forrester* publicó un artículo clave para el posterior desarrollo de esta disciplina (Forrester, 1958). En este trabajo se analiza como la evolución de una compañía depende de la interacción entre los flujos de información, los materiales, el dinero, la mano de obra, el equipamiento y el capital.

En 1961 publicó el libro *Dinámica Industrial* (Forrester, 1961), el cual se ha convertido en un clásico en el estudio de la teoría y el método de la DS.

En 1968, y por un hecho casual, *Forrester* empezó a interesarse por la organización de las grandes ciudades. El motivo fue la presencia de *John Collins*, un antiguo alcalde de Boston, en un despacho contiguo al suyo en el MIT. De esta manera surgió entre ambos una amistad y la posibilidad de colaboración en el estudio de los problemas que afectan a las grandes ciudades, utilizando como metodología la DS. Todos estos resultados fueron recopilados en un libro (Forrester, 1969) y a partir de entonces este método de estudio ha sido ampliamente utilizado en el estudio de cualquier otro sistema dinámico continuo.

Durante esta época, un colaborador, *Richard Bennett*, creó el primer software llamado SIMPLE (Simulation of Industrial Management Problems with Lots of Equations) para la implementación de la DS en un ordenador. Posteriormente *Alexander Pugh* y *Phyllis Fox*, mejoraron la versión anterior, que se conoce con el nombre DYNAMO (DYNAMICModels), y ha llegado a ser el programa más utilizado en DS.



---

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

## 1.1.2.2.- Desarrollo de la DS en el siglo XX (1970-1980).

Los principales retos de este período fueron estudiar el modelo del mundo y el modelo nacional americano.

En efecto, en 1970 *Forrester* fue invitado a una reunión del Club de Roma, que se celebró en Berna, donde se analizaba la posibilidad de aparición, algún día, de una crisis mundial debido al agotamiento de los recursos naturales, como consecuencia del crecimiento exponencial de la población. En esta reunión los organizadores preguntaron a *Forrester* si la DS podía dar respuesta a este tipo de problemas y de esta manera surgió el primer modelo matemático conocido con el nombre de WORD1. Posteriormente, y junto a su gran colaboradora *Dennis Meadows*, (*Meadows*, 1971) crearon diversas versiones del WORD1 las cuales provocaron una amplia atención y un debate continuo sobre el tema de los límites al crecimiento de la población mundial.

Casi al mismo tiempo, *Forrester* lideró un equipo del MIT, que puso en marcha un estudio local del WORD1, a un “Modelo Nacional”. El proyecto contó con la ayuda financiera de empresas de los Estados Unidos y del gobierno, y consistió en un modelo matemático con más de 4000 ecuaciones. Los resultados obtenidos explicaron de manera muy acertada la mayoría de los comportamientos económicos que venían siendo observados: el crecimiento de la tasa de desempleo, la tasa de interés real, los procesos de recesión y recuperación, etc.

Estos estudios hicieron que la DS captara la atención de todo el mundo, promovió su difusión y se desarrolló en casi todos los países, imponiéndose su metodología interdisciplinar en la mayoría de las investigaciones de los problemas socio-económicos.

## 1.1.2.3.- Utilización y difusión de la DS (1990- actualidad).

En esta etapa, la DS ha sido ampliamente difundida por el mundo, ha ampliado el campo de sus aplicaciones y ha conseguido un desarrollo espectacular. La DS sigue aplicándose a los problemas de investigación anteriormente comentados (el modelo nacional, el problema de los recursos, el medio ambiente, el problema urbano, el problema de la industria, etc.). También ha empezado a utilizarse en los sistemas dinámicos, en concreto en el área de la gestión empresarial, en el desarrollo de la teoría de la organización del aprendizaje y en el uso del pensamiento sistémico.

Por último, es interesante comentar el uso de la DS en la gestión moderna de la enseñanza. El procedimiento ha llegado a ser casi tan famoso como el método de Harvard llamado el “Estudio

---

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

del Caso”, el cual está basado en analizar las diferentes opciones que se presentan al resolver un problema y llegar a la mejor de las soluciones. Sin embargo, la DS ofrece un método que aporta cohesión, significado y motivación a la enseñanza primaria y secundaria de Estados Unidos.

## 1.2.- La Dinámica de Sistemas.

### 1.2.1.- Definición de Sistema.

No existe una única definición, por ejemplo *Luwig Von Bertalanffy* lo define como “conjunto de elementos interrelacionados”; o bien *J. Forrester* “conjunto de partes que trabajan para un objetivo común”. Nosotros utilizaremos la que está generalmente más aceptada: “Conjunto de elementos independientes y las relaciones existentes entre ellos”. Por lo tanto, mucho más importante que los elementos que lo componen, se encuentra la manera de cómo interactúan y se relacionan unas partes con otras. Ejemplos de sistemas pueden ser el planetario, el empresarial, el administrativo, el medioambiental, etc.

El objetivo más importante que está presente en la DS es comprender la estructura interna y el comportamiento de un sistema dinámico, es decir, aquel que cambia y evoluciona con el tiempo. El comportamiento se puede expresar como el proceso evolutivo de una serie de sucesos relacionados a lo largo del tiempo, que tiene en cuenta el presente, el pasado y el futuro de estos eventos, el cual está determinado por la estructura interna del sistema.

### 1.2.2.- Etapas en la resolución de problemas mediante DS.

La primera y más importante de las fases para la resolución de un problema mediante DS es “*identificar el problema con claridad, y describir los objetivos del estudio con precisión*” (Martin, 2011). Necesitamos, por tanto, hacer las preguntas adecuadas con la intención de localizar los problemas que necesitamos estudiar y resolver.

A continuación, una vez localizado el problema, es necesario estudiar las posibles soluciones, el comportamiento histórico y la conceptualización del sistema. A partir de ello se construye el modelo y se analiza mentalmente su futuro comportamiento.

La fase siguiente es técnica y consiste en la elaboración del modelo a través del Diagrama Causal y el Diagrama de Forrester, e introducir las ecuaciones, lo que permite convertir el sistema en una expresión matemática que viene dada por una ecuación o un sistema de ecuaciones diferenciales.

---

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

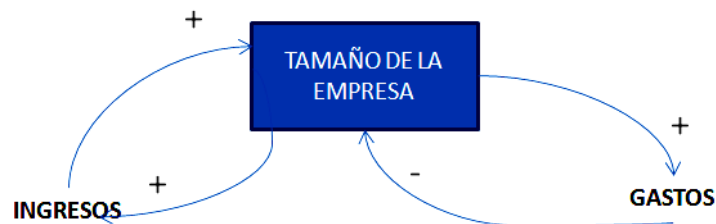
Posteriormente se procede a la ejecución de diferentes simulaciones y a la comparación de los resultados obtenidos con los datos históricos disponibles, lo que permite un posterior refinamiento del modelo mediante un nuevo ajuste de los parámetros introducidos.

## 1.2.3.- Elementos fundamentales en la DS.

### 1.2.3.1.- La realimentación.

La realimentación, o retroalimentación, es un concepto utilizado también en Cibernética y en Teoría de Control. Es un mecanismo usado para controlar los sistemas mediante la introducción de cierta cantidad de señal de salida en la entrada. Esta realimentación puede ser positiva o negativa dependiendo si suma o resta a la señal de entrada.

En DS es muy importante el análisis de los bucles de realimentación. Para aclarar estos conceptos nos basaremos en el siguiente ejemplo. Deseamos analizar la evolución en el tiempo del tamaño de una empresa. Es evidente que estamos delante de un problema dinámico puesto que el tamaño de esta empresa no se mantiene constante en el tiempo. Este tamaño lo consideraremos como un “nivel” y se alterará, entre otras muchas cosas, por los ingresos que obtiene la empresa (flujo de entrada) y por los gastos de la misma (flujo de salida).



*Figura 1. Ejemplos de realimentación positiva y negativa.*

Usaremos las flechas con signos para indicar el tipo de influencia de una variable sobre la otra. La flecha con signo positivo significa que un cambio en la variable de origen produce una alteración del mismo sentido en la variable de destino. Por el contrario, la flecha con signo negativo significa que el cambio sobre la variable de origen produce una modificación opuesta en la variable de destino.

El tamaño de la empresa afecta de manera positiva a los ingresos, ya que cuanto mayor sea la empresa mayores serán sus ingresos. Del mismo modo los ingresos influyen de manera positiva

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

sobre el tamaño, puesto que si aumentan o disminuyen lo hace también el tamaño de la empresa. Estamos ante un bucle de realimentación positivo.

Decimos que hay relación negativa cuando el aumento (o disminución) de A provoca la disminución (o aumento) de B. Los gastos afectan de manera negativa a la dimensión de la empresa, puesto que si estos aumentan, entonces disminuye su tamaño. Sin embargo, el volumen de la empresa tiene una influencia positiva sobre los gastos. Cuanto mayor sea, mayores serán sus gastos. Ahora el bucle de realimentación es negativo.

En resumen, un bucle de realimentación es un diagrama cerrado constituido por la información y su influencia. La polaridad de bucle depende de cada uno de los símbolos que lo componen. Este signo puede ser positivo cuando la relación causa-efecto es positiva y negativa en caso contrario. También la polaridad es positiva cuando las relaciones contienen un número par de relaciones negativas, y la polaridad es negativa cuando incluye un número impar de relaciones negativas.

Es muy importante hacer notar que un bucle de realimentación positivo hace, por medio de la reacción en cadena, que se refuerce la variación del nivel, reforzando su desviación. Es decir, los sistemas donde prevalecen este tipo de bucles son inestables y suelen representarse por una circunferencia donde en su interior hay dibujada una bola de nieve. Por el contrario, si dominan los ciclos negativos, se debilita la variación de ese elemento con el fin de volver el sistema a su estado inicial y estabilizarlo. Se representan por una circunferencia con una balanza en equilibrio en su interior.

Según comenta J. Martín en “Dinámica de Sistemas. Conceptos” (Martín, 2001), “*La estructura básica de los sistemas estables está formada por un **Estado Deseado** y por un **Estado Real** del sistema, estos dos estados se comparan (**Diferencia**), y en base a este valor el sistema toma una **Acción** para igualar el Estado Real al Deseado*”. De esta manera se consigue un número de relaciones impares negativas, con lo que el bucle será impar, y el sistema se estabilizará en el tiempo.

## 1.2.3.2.- El Diagrama Causal y el de Forrester.

El Diagrama Causal es una herramienta de la DS utilizada para poner de manifiesto los elementos que componen un sistema dinámico, sus relaciones y especialmente los bucles de realimentación, con el objetivo de entender la estructura del sistema y su comportamiento. Ejemplo muy elemental de ello es el que se ha descrito en la Figura 1. Otro ejemplo algo más

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

completo es el que aparece en la Figura 2, que corresponde al Diagrama causal de un sistema epidemiológico.

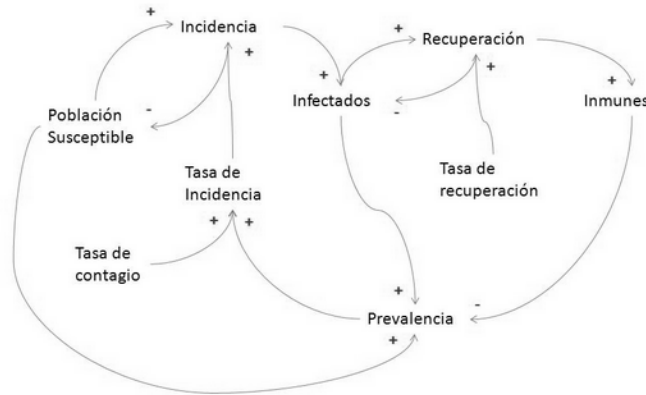


Figura 2. Ejemplo de Diagrama causal.

Fuente: [http://modeladodin.blogspot.com.es/2012\\_06\\_01\\_archive.html](http://modeladodin.blogspot.com.es/2012_06_01_archive.html)

El Diagrama de Forrester está basado en el Diagrama Casual, que se constituye por símbolos especiales para indicar las relaciones entre los elementos del sistema. Es básico para la simulación del sistema dinámico, y está constituido por tres tipos de variables: nivel, flujo y variable auxiliar. En la Figura 3 puede apreciarse un Diagrama de Forrester básico constituido con estas tres variables.

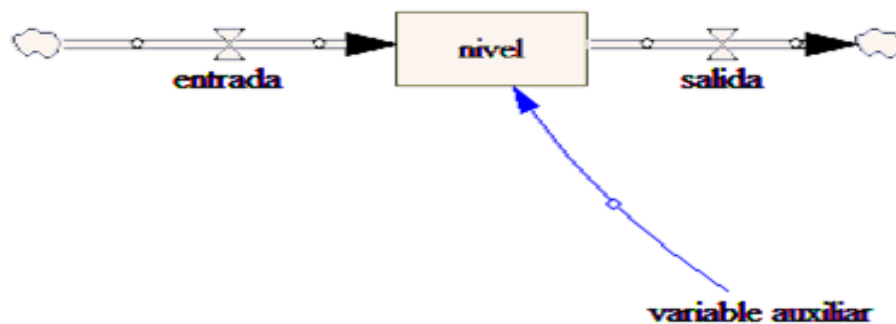


Figura 3. Ejemplo de Diagrama de Forrester.

- **Variable de nivel:** representa al resultado acumulativo del pasado. Su magnitud indica el estado de alguna variable del sistema en un momento fijo, que es el saldo neto de la diferencia entre la entrada y la salida. Un símil puede ser la cantidad de agua contenida en una bañera en un momento cualquiera.

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

- **Variable de flujo:** su función cambia la magnitud de la variable de nivel a lo largo del tiempo. La variable de flujo representa la velocidad del cambio de la variable de nivel. Si aplicamos este concepto al ejemplo de bañera, el flujo de entrada estaría constituido por el grifo, mientras que el flujo de salida sería el tapón del desagüe.
- **Variable auxiliar:** es la variable para ayudar en el modelo, unen los canales de información entre la variable de nivel y de flujo. En el caso de la bañera, una variable auxiliar indicaría el grado de apertura o cierre del grifo o de la válvula de salida.

En 1960, el profesor *Edward Lorenz* del Instituto Tecnológico de Massachusetts investigó un problema llamado “previsiones meteorológicas a largo plazo”, utilizando un modelo simplificado para simular la evolución de las previsiones meteorológicas en el ordenador. Su intención original era la de utilizar la alta velocidad de la tecnología informática para mejorar la precisión de las previsiones meteorológicas, pero contrariamente a las expectativas, a través de diversos cálculos pudo probar que pequeños cambios de las condiciones iniciales pueden provocar grandes diferencias en el resultado. El efecto conocido con el nombre de mariposa, fue presentado en diciembre de 1979 en una conferencia de la Asociación Estadounidense para el Avance de la Ciencia, en Washington:

*“El movimiento de una simple ala de mariposa hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma”*

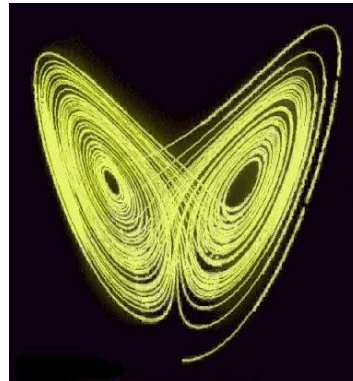
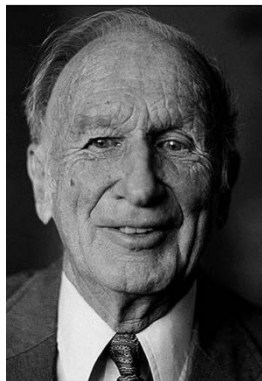


Figura 4. Izquierda: E. Lorenz. Derecha: Diagrama de la trayectoria del sistema de Lorenz.

---

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

Desde un punto de vista científico, el efecto mariposa refleja una característica importante del movimiento caótico: la dependencia del comportamiento a largo plazo del sistema respecto a las condiciones iniciales. Esto es, los modelos caóticos son muy sensibles a las variaciones de las condiciones iniciales, unos pequeños cambios a través de la ampliación continua, provocará una gran diferencia de su estado futuro.

El modelo climático que *Lorenz* utilizó no era muy complejo, sin embargo era un modelo no lineal, y ésta era la causa del comportamiento caótico del mismo. Este comportamiento supuso una gran revolución en la ciencia puesto que asestaba un duro golpe a la teoría determinista perfectamente reflejada en el “demonio de *Laplace*”, donde se pensaba que si se conocían las posiciones y las velocidades de cada una de las partículas del universo, entonces era posible predecir el futuro y regresar al pasado.

Por lo anteriormente explicado, es muy importante tener en cuenta el siguiente comentario. Como la simulación por ordenador de modelos creados con DS se realiza por métodos de aproximación numérica y además es casi imposible conocer los valores iniciales exactos del problema de valores iniciales que tenemos que estudiar, es conveniente analizar detenidamente los resultados obtenidos y además realizar un análisis preciso de sensibilidad de los modelos simulados.

## **1.3.- Simulación de modelos con Vensim.**

### **1.3.1.- Introducción.**

Existe un gran número de software disponibles para trabajar en DS, entre los más conocidos se encuentran:

- iThink/Stella
- Dynamo
- Powersim Studio
- Vensim

De todos ellos, por la sencillez de su manejo y la gratuidad del mismo, utilizaremos para el desarrollo del presente trabajo el programa Vensim®, acrónimo de Ventana de Simulation Environment Personal Learning Edition. El programa fue desarrollado en 1985 por la compañía Ventana Systems de Harvard MS, con el objetivo de ayudar a las empresas en la toma de decisiones ante problemas complicados por medio de las distintas simulaciones que el programa aporta. Puede ser descargado, en su versión de prueba, de su página web.

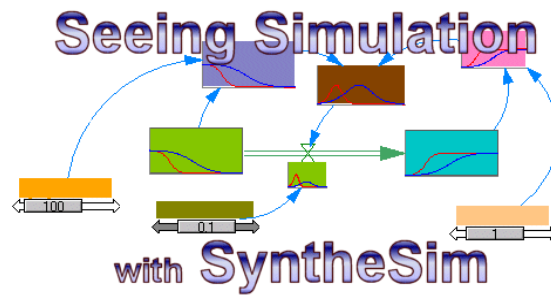


Figura 5. Web de Vensim: <http://vensim.com/>

El uso del programa es muy intuitivo ya que utiliza para su desarrollo un entorno gráfico y permite la creación de modelos de simulación a través del Diagrama Causal o por medio del Diagrama de Flujos o de Forrester.

La introducción de las variables de nivel en el escritorio se realiza mediante el icono “Box variable”, los flujos (de entrada y salida) con el icono “Rate”, las variables auxiliares con “variable” y las relaciones causales mediante la conexión con flechas “Arrows” de unas variables con otras. Posteriormente el editor de ecuaciones proporciona el modelo que tiene que ser simulado.

### 1.3.2.- Tutorial básico de Vensim PLE®.

La versión que describiremos de manera muy general es Vensim PLE® 6.2. Al abrir el programa aparecerá la siguiente pantalla.

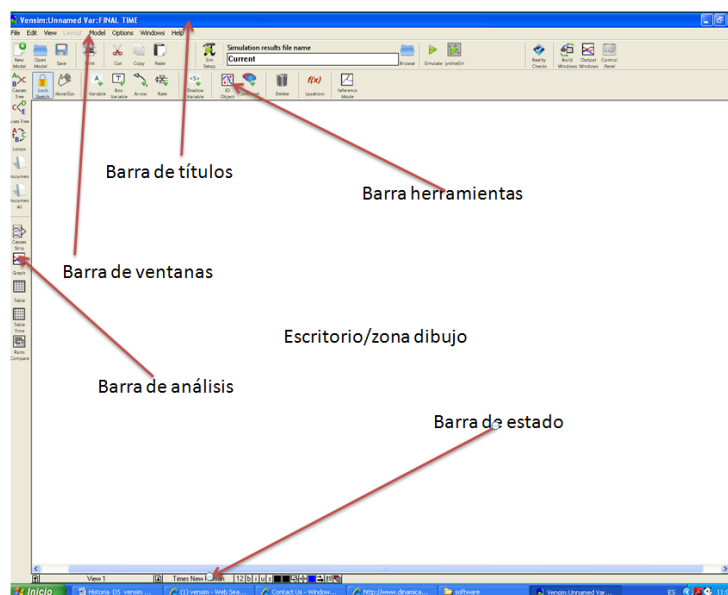


Figura 6. Pantalla inicial del Vensim.



# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

Al ser un programa que se ejecuta bajo el sistema operativo Windows, su estructura está diseñada de manera muy parecida al resto de los programas. Se aprecian dos zonas principales: la de dibujo y la correspondiente al conjunto de herramientas que utilizaremos para introducir las ecuaciones, las simulaciones y la visualización de los resultados obtenidos.

A continuación describiremos las diferentes herramientas que ofrece el programa.

## A.- Barra de títulos.

Muestran dos datos importantes, como pueden ser el modelo que en ese momento está abierto (GADE dinero disponible) y la variable que actualmente se encuentra seleccionada en la zona del dibujo, en nuestro caso el tiempo final.



Figura 7. Barra de títulos.

## B.- Barra de ventanas desplegadas.

Todas las operaciones de Vensim se pueden realizar a través de esta barra de herramienta. En ella aparecen las diferentes opciones del menú, como por ejemplo, manejo de archivos, proceso de edición, visualización del modelo, modelado con acceso al control de la simulación, cambio de las opciones que aparecen por defecto y el manejo de ventanas. En esta barra no se encuentran disponibles los gráficos ni los resultados de las diferentes simulaciones.

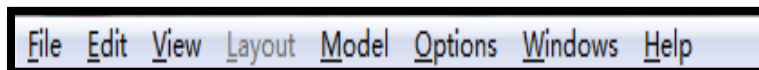


Figura 8.- Barra de ventanas desplegadas.

## C.- Barra de herramientas.

Esta barra proporciona un acceso rápido a los elementos más utilizados del menú y de la simulación. En su primera parte se puede construir un nuevo modelo, abrirlo, grabarlo o imprimirlo. Además, como en el resto de los programas que corren en el entorno Windows, existe la posibilidad de copiar, pegar y cortar parte del modelo.



Figura 9. Primera parte de la barra de herramienta

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

En su segunda parte, aparecen los iconos que permiten simular el modelo y cambiar entre distintas ventanas.

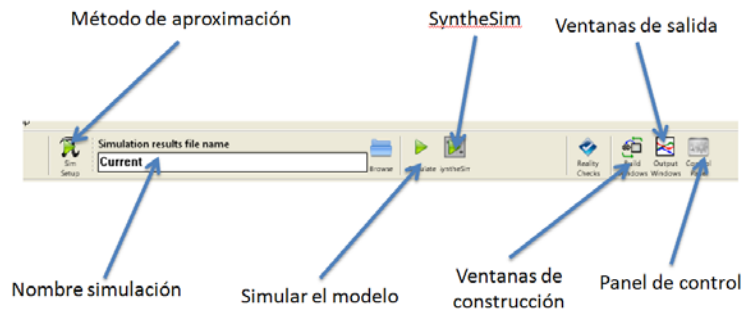


Figura 10. Segunda parte de la barra de herramienta.

La tercera parte de esta barra se corresponde con las herramientas necesarias para dibujar el Diagrama de Forrester y las ecuaciones del modelo.

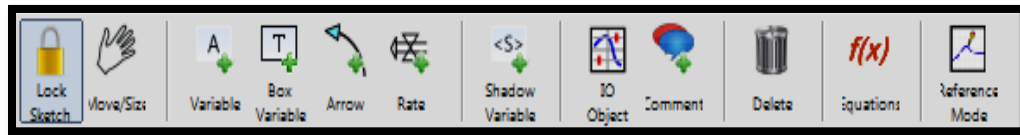


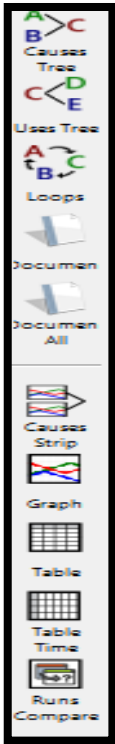
Figura 11. Herramientas para la construcción del modelo.

- **Lock** (bloquear). Nos permite bloquear el dibujo y mientras está bloqueado, podemos seleccionar el gráfico y la variable.
- **Move/Size** (mover). Se utiliza para desplazar gráfico, cambiar su tamaño y seleccionar un objeto.
- **Variable**. Crea la variable constante o variable auxiliar.
- **Box Variable** (caja de variable). Es el icono adecuado para dibujar la variable de nivel.
- **Arrow** (flecha). Se utiliza para indicar la relación causal entre variables.
- **Rate** (flujo). Con este icono se construyen las variables de flujo.
- **Shadow Variable** (variable de sombra). Se usa para incluir una variable ya existente o una variable auxiliar en el modelo. Por ejemplo, la variable tiempo (Time).
- **Equations** (ecuaciones). Permite introducir, una a una, las ecuaciones correspondientes a cada una de las variables del modelo.

## D.- Barra de herramientas de análisis.

En esta barra existen las herramientas de análisis adecuadas para visualizar los resultados de las diferentes simulaciones, así como algunas otras utilizadas para entender el comportamiento y la estructura del modelo. Estas herramientas disponibles son útiles para mostrar informaciones importantes de las variables que se encuentran en la zona del dibujo, como sus situaciones, sus valores y sus comportamientos.

El número de herramientas dependerá de la versión del Vensim que se utilice. En concreto, en la versión que estamos describiendo de Vensim PLE® para uso educativo, está disponible la posibilidad de analizar la conectividad de los datos, visualizar los puntos de vista múltiples, la posibilidad de analizar las diferentes simulaciones de análisis de sensibilidad, simulaciones con juegos, y una nueva interfaz para usuarios del modelo. Existe otra versión de Vensim profesional, necesario para la gestión de grandes modelos con una enorme complejidad, donde las herramientas de análisis disponibles son más numerosas.



## E.- Barra de estado.

Con los iconos disponibles en esta barra es posible cambiar los objetos que aparecen en el escritorio, el tipo de letra, su tamaño y características, los colores y el formato de las flechas.



Figura 12. Barra de estado

## 1.3.3.- Simulación de algunos modelos matemáticos elementales.

### 1.3.3.1- Introducción al modelado.

Las matemáticas anteriores al siglo XVII se centraron, fundamentalmente, en el estudio estático del mundo que nos rodea, es partir del nacimiento del cálculo diferencial e integral, creado independientemente por *Newton* y *Leibniz*, cuando se analiza el movimiento y su formalización matemática como una derivada. Es conocido que si  $y(t)$  es una función que representa a una cantidad que cambia con el tiempo, entonces su derivada  $y'(t)$  nos informa de la rapidez de cómo esta función cambia en el momento  $t$ .

Supongamos que  $y(t)$  sea la cantidad de dinero disponible de una empresa en el día  $t$ . Estamos interesados en conocer el valor de esta función desconocida. Para ello lo que se observa es, a lo largo de los días, como evoluciona o cambia esta cantidad y por lo tanto deberíamos

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

formular algunas hipótesis sobre esta variación, con objeto de crear un modelo matemático que represente a esta situación.

Naturalmente según sea la hipótesis formulada, así será el modelo obtenido, que una vez analizado deberá ser comparado con los resultados históricos de los que disponemos. Puede ocurrir que los resultados obtenidos se ajusten bien a los datos que tenemos, o por el contrario los resultados proporcionados por el modelo no coincidan, en cuyo caso será necesario replantearse las hipótesis iniciales y construir un nuevo modelo.

En su formación más simple, podemos suponer que la empresa sólo tiene un ingreso constante de  $m$  euros cada día. En consecuencia, la ecuación diferencial que modeliza a esta situación será  $y'(t)=m$ ,  $m>0$ . Es decir, la cantidad disponible cada día,  $y(t)$ , aumentará de forma constante, y vendrá dada por la expresión  $y(t) = y(0) + m \cdot t$ , siendo  $y(0)$  la cantidad inicial de dinero.

Para simular este modelo elemental con Vensim procedemos, en primer lugar a construir el Diagrama de Forrester que estará constituido por el nivel “dinero disponible”, y el flujo de entrada “ingreso”.

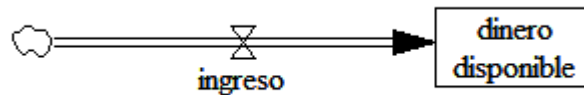


Figura 13. Diagrama de Forrester del modelo lineal.

Posteriormente introducimos las ecuaciones, en nuestro caso, por ejemplo, valor inicial  $y(0) = 200$ ; y flujo de entrada  $m=10$ .

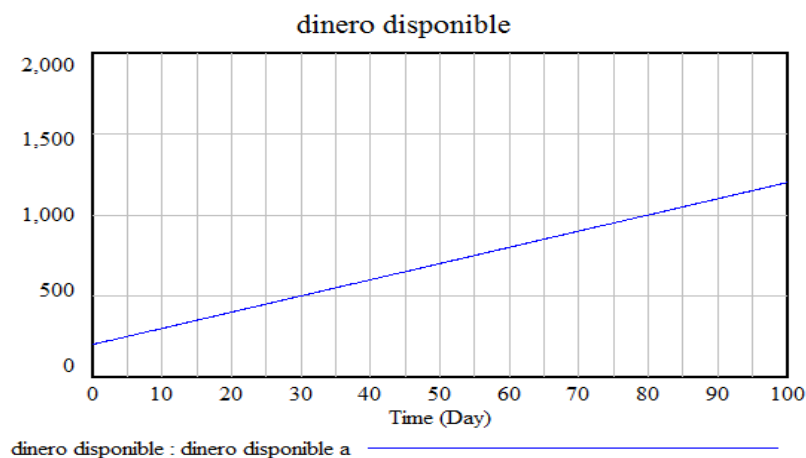


Figura 14. Resultado de la simulación de  $y'(t) = 10$ ,  $y(0) = 200$ .

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

En la figura 14 se muestra el resultado de la simulación, la recta  $y(t) = 200 + 10 \cdot t$ , durante 100 días, con los valores  $y(0) = 200$  euros y  $m = 10$  euros de ingreso cada día.

### 1.3.3.2.- El modelo exponencial.

Naturalmente este primer modelo es demasiado elemental y es fácil concluir que es necesario modificar la hipótesis de partida ya que es necesario tener en cuenta otras circunstancias. En realidad, en una firma no sólo se gana dinero todos los días, también tiene gastos, por ejemplo pagar salarios, consumo de agua, luz etc. Además, es evidente que estos ingresos y gastos dependerán del tamaño o del dinero disponible en cada momento.

Por estos motivos, entre otros, supondremos que la tasa de variación de  $y(t)$  sea la diferencia entre los ingresos y los gastos, siendo los ingresos y los gastos directamente proporcionales a la cantidad de dinero disponible en cada momento. Si suponemos que la tasa de ingreso es  $\alpha$ , y la tasa de gasto sea  $\beta$ , entonces la ecuación diferencial que nos proporciona el modelo es:

$$y'(t) = \alpha * y(t) - \beta * y(t), \quad \alpha, \beta > 0.$$

En esta ocasión el Diagrama de Forrester está compuesto de un nivel “dinero disponible”, un flujo de entrada “ingreso”, un flujo de salida “gasto” y las variables auxiliares “tasa de ingreso” y “tasa de gasto”

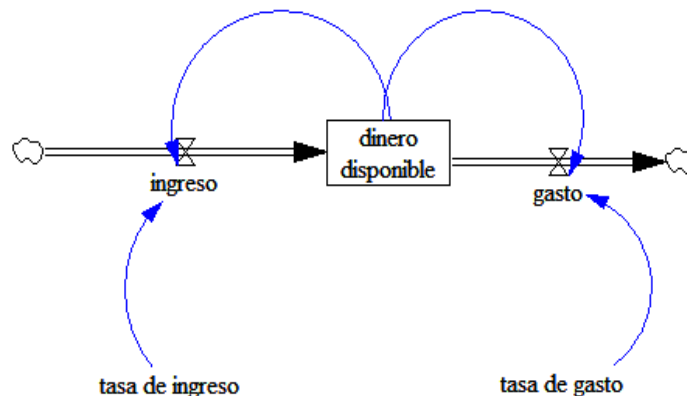


Figura 15. Diagrama de Forrester del modelo exponencial.

Para simular el modelo consideraremos dos casos. El primero de ellos cuando los ingresos sean mayores que los gastos, siendo los valores de los parámetros:

$$y(0) = 50, \quad \alpha = 0.25, \quad \beta = 0.15.$$

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

En la figura 16 puede apreciarse que la cantidad de dinero disponible aumenta de forma exponencial, siendo su expresión  $y(t) = 50e^{0.1t}$

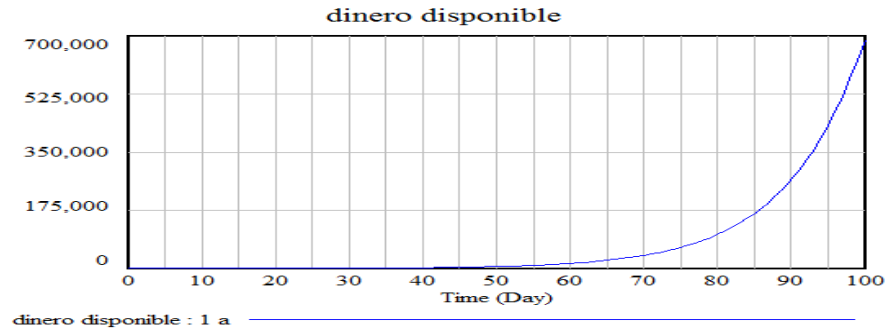


Figura 16. Resultados de la simulación con:  $y_0 = 50, \alpha = 0,25, \beta = 0,15$

En el segundo caso supondremos que los gastos superan a los ingresos y es evidente que el dinero disponible, en cada momento, disminuirá exponencialmente, tal y como se aprecia en la Figura 17, según la expresión:  $y(t) = 50e^{-0.1t}$

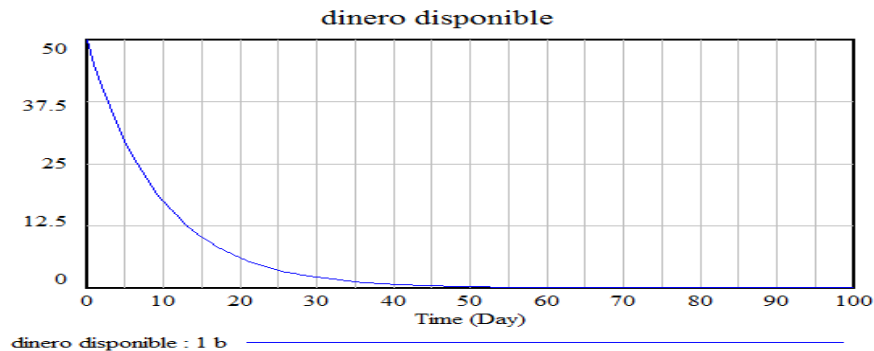


Figura 17. Resultados de la simulación con:  $y_0 = 50, \alpha = 0,15, \beta = 0,25$

### 1.3.3.3.- El modelo logístico.

Aunque la mayoría de los modelos experimentan en su fase inicial un crecimiento/decrecimiento del tipo exponencial, es evidente que esta evolución no puede mantenerse en el tiempo. Es necesario crear otros modelos dependientes de la densidad, o dicho de otra manera, se hace necesario introducir límites al crecimiento. Generalmente la manera usual de hacerlo es colocar una función  $F(y)$  de la manera siguiente:

$$y'(t) = \alpha y(t) F(y(t)), \quad y(0) = y_0 \quad (1)$$

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

En el caso más sencillo, si  $K$  es la capacidad de carga del modelo (la cantidad de dinero tiende a este valor), esta función se presenta enunciada de una manera lineal como:

$$F(y(t)) = \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

El modelo obtenido recibe el nombre de logístico y viene dado por el problema del valor inicial:  $y'(t) = ay(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$ ,  $y(0) = y_0$

En la figura 18 aparece su Diagrama de Forrester y está compuesto de un nivel “dinero disponible”, un flujo de entrada “ingreso”, un flujo de salida “gasto”, y las variables auxiliares “capacidad de carga” y “alpha”.

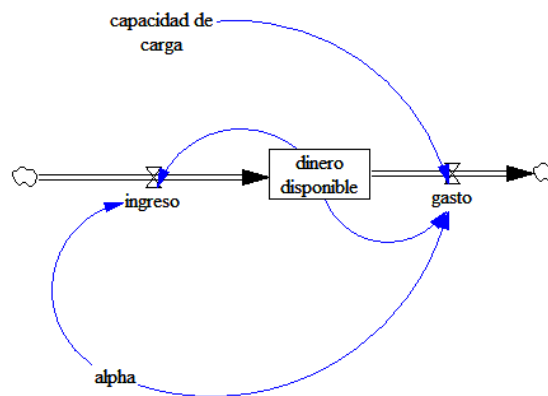


Figura 18. Diagrama de Forrester del modelo logístico

Supongamos que deseamos simular, en un primer momento, el modelo:

$$y'(t) = 0.5y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{500}\right), \quad y(0) = 100$$

Por medio del editor de ecuaciones se introducen:

- `ingreso=alpha*dinero disponible`
- `gasto=alpha*dinero disponible^2/capacidad de carga`
- `valor inicial dinero disponible=100`
- `capacidad de carga=500`

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

- $\alpha=0.5$

En la figura 19 aparecen los resultados de las tres simulaciones para los valores iniciales 100, 700 y 500. Puede apreciarse como, independientemente del valor inicial, a largo plazo la cantidad de dinero disponible se estabiliza en 500, que era la capacidad de carga.

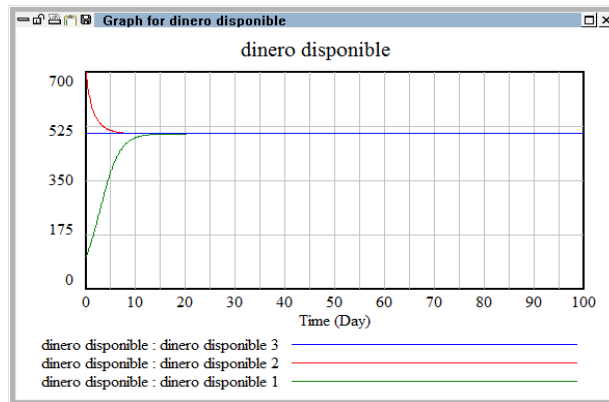


Figura 19. Resultado de la simulación del modelo logístico

La DS ofrece la oportunidad de visualizar, de manera sencilla, algunos resultados cuya demostración matemática es algo más complicada. Por ejemplo, sabemos que la forma de la curva solución del modelo logístico es en S, por lo tanto presenta un punto de inflexión, que será el momento donde el crecimiento del dinero disponible es el más rápido. Creamos una nueva variable auxiliar “variación del dinero” como la diferencia entre flujo de entrada “ingreso” menos el flujo de salida “gasto”.

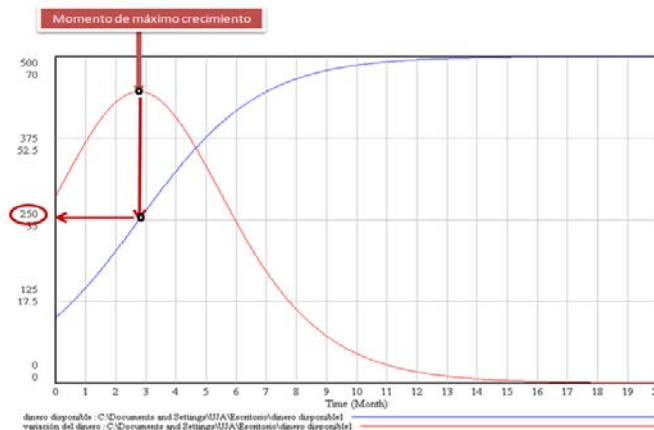



Figura 20. Momento de máximo crecimiento del modelo logístico



# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

En la figura 20 se ve que el momento en el que la función está creciendo con máxima velocidad es cuando se ha alcanzado la mitad de la capacidad de carga, en nuestro caso, cuando el tiempo vale 2.78 días.

Para poner de manifiesto la flexibilidad de esta metodología, supongamos que por diversas razones la capacidad de carga del sistema no es constante, sino que se modifica de una manera periódica, por ejemplo sea  $k = 500 + 250 \sin(2\pi t)$ . Lo único que tendremos que hacer

es introducir con el botón  la variable <Time>, conectarla con una flecha con la variable "capacidad de carga", y a continuación escribir su valor con el editor de ecuaciones. En la figura 21 se puede comprobar que el "dinero disponible" tiende de nuevo a la capacidad de carga (500) pero esta vez oscila de forma periódica sobre este valor.

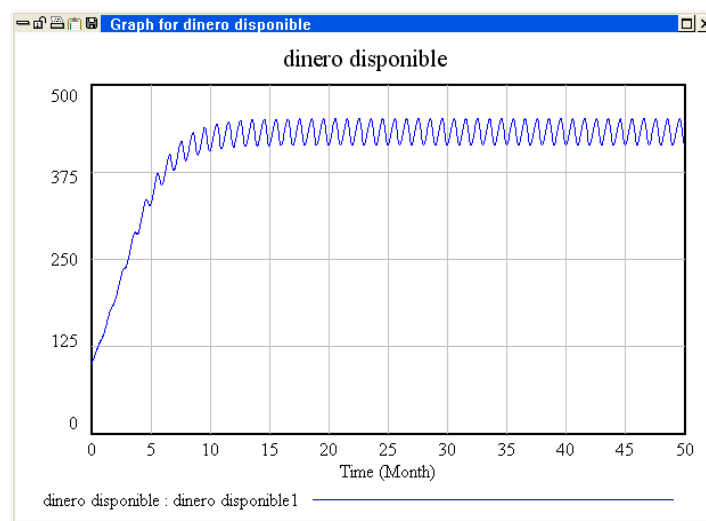


Figura 21. Modelo logístico con capacidad de carga periódica.

### 1.3.3.4.- El modelo logístico-Allen.

En los sistemas dinámicos se ha observado que en algunas ocasiones no siempre evolucionan en busca de su capacidad de carga, sino que en algunos de ellos, existe un umbral mínimo por debajo del cual la función desaparece. Este efecto se conoce con el nombre de efecto Allen y es muy frecuente en Biología de Conservación y en Dinámica de Poblaciones. En el caso que estamos estudiando, vamos a tener en cuenta que el dinero disponible no puede crecer siempre en una empresa sino que existe un dinero disponible mínimo para garantizar la ejecución

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

de la empresa. A este valor mínimo lo llamaremos  $N$ , cuyo significado sería que si el valor disponible se encuentra por debajo de este valor, la empresa quebraría. En este caso, la situación se tiene que modelar a través del siguiente problema de valores iniciales:

$$y'(t) = ay(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) \left(\frac{y(t)}{N} - 1\right), \quad a > 0; \quad y(0) = y_0$$

El Diagrama de Forrester se corresponde con la figura 22, constituido por un nivel, dos flujos de entrada, dos flujos de salida, y las variables auxiliares alpha, valor mínimo y capacidad de carga.

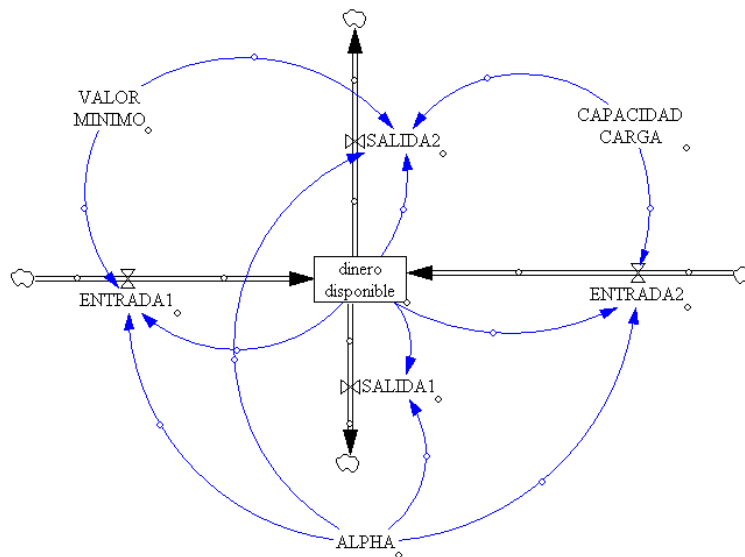


Figura 22. Diagrama de Forrester del modelo logístico-Allee.

Las ecuaciones más interesantes corresponden a los flujos y sus valores son:

- $ENTRADA1 = \text{ALPHA} * \text{dinero disponible}^2 / \text{VALOR MINIMO}$
- $ENTRADA2 = \text{ALPHA} * \text{dinero disponible}^2 / \text{CAPACIDAD CARGA}$
- $SALIDA1 = \text{ALPHA} * \text{dinero disponible}$
- $SALIDA2 = \text{ALPHA} * \text{dinero disponible}^3 / (\text{CAPACIDAD CARGA} * \text{VALOR MINIMO})$

La figura 23 muestra el resultado de las diferentes simulaciones para los diferentes valores iniciales  $y(0) = 30, 100, 500$ , y  $700$  y los parámetros  $\alpha=0,5$ ,  $K=500$ ,  $N=50$ .

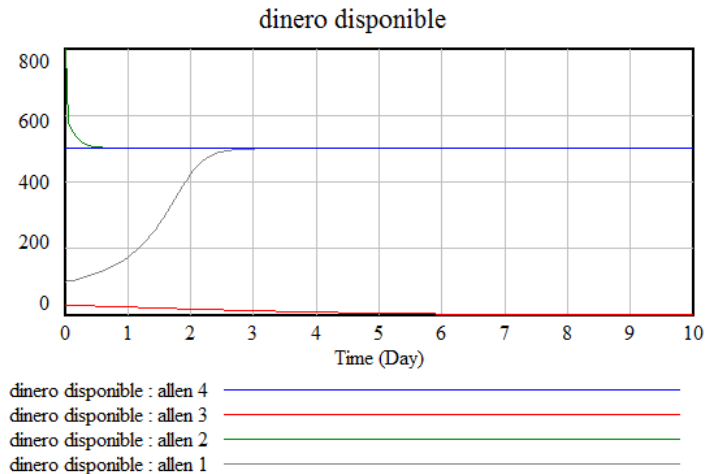


Figura 23. Diferentes simulaciones del modelo logístico-Allee

Observamos como el modelo tiene dos puntos de equilibrio, uno es  $y(t) = K = 500$ , que corresponde con la capacidad de carga que es estable, y otro es  $y(t) = N = 50$ , su valor mínimo, que es un punto de equilibrio inestable.

### 1.3.3.5.- El modelo de Gompertz.

El modelo logístico, a pesar de su sencillez, es utilizado ampliamente puesto que se ha observado que los sistemas tienden a estabilizarse en su capacidad de carga, tal y como hemos comprobado en el apartado anterior. Sin embargo, la forma en S de la curva solución en ocasiones no se adapta fielmente a los datos históricos disponibles, puesto que el momento de mayor crecimiento de la función no coincide, exactamente, con aquél instante donde se obtiene la mitad de la capacidad de carga.

En 1825 el demógrafo *B. Gompertz* propuso una modificación de (1), suponiendo que la función  $F(y) = -\ln\left(\frac{y(t)}{K}\right)$ , con lo que ahora el modelo es de la forma,

$$y'(t) = -ay(t)\ln\left(\frac{y(t)}{K}\right), \quad a > 0; \quad y(0) = y_0$$

Observemos que los puntos de equilibrio se corresponden con las soluciones constantes, aquellas donde su derivada vale cero,  $y(t)=0$ ,  $y(t) = K$ . Además, si el valor inicial es tal que  $0 < y(0) < K$ , la derivada  $y'(t)$  será positiva, y por lo tanto la función solución  $y(t)$  será creciente,

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

mientras que si  $y(0) > K$ , entonces usando el mismo argumento, la función solución es decreciente. El punto de equilibrio  $y(t) = 0$ , es inestable y el  $y(t) = K$  será asintóticamente estable.

Para encontrar el punto de inflexión de la función  $y(t)$  bastaría resolver la ecuación  $y''(t) = 0$ . Es inmediato comprobar que el resultado obtenido es  $y(t) = K/e$ . Es decir, a diferencia del modelo logístico, la curva sigmoide (en forma de S) obtenida no será simétrica.

Todos estos resultados, logrados matemáticamente, se pueden observar si utilizamos la DS como metodología.

$$y'(t) = -ay(t) \ln\left(\frac{y(t)}{K}\right) = -ay(t) \ln(y(t)) + ay(t) \ln(K)$$

En la Figura 24 se encuentra el Diagrama de Forrester del modelo de Gompertz,

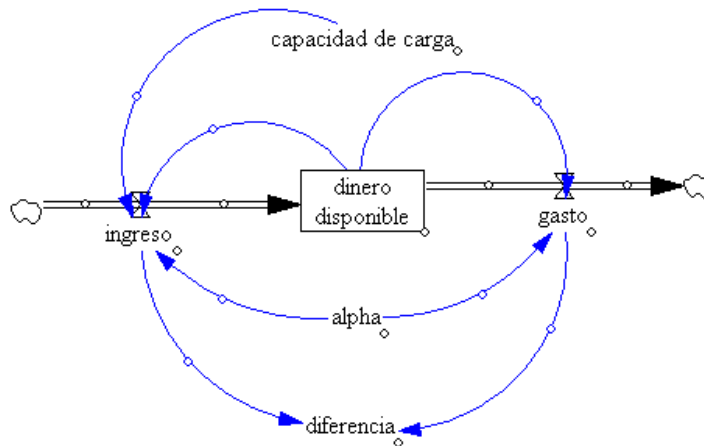


Figura 24.-Diagrama de Forrester del modelo de Gompertz.

que es idéntico al modelo logístico, siendo sus ecuaciones:

- $\text{ingreso} = \alpha \cdot \text{dinero disponible} \cdot \text{LN}(\text{capacidad de carga})$
- $\text{gasto} = \alpha \cdot \text{dinero disponible} \cdot \text{LN}(\text{dinero disponible})$
- $\text{valor inicial dinero disponible} = 100$
- $\text{capacidad de carga} = 500$
- $\alpha = 0.5$
- $\alpha = 0.5$

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

- $\text{diferencia} = \text{ingreso} - \text{gasto}$

Si simulamos el modelo obtenemos como curva solución la que se encuentra en la figura 25, y además puede comprobarse como ahora el valor máximo de la variable “diferencia” no se alcanza para  $y(t) = K/2 = 250$ , sino que está en  $y(t) = K/e \approx 184$ .

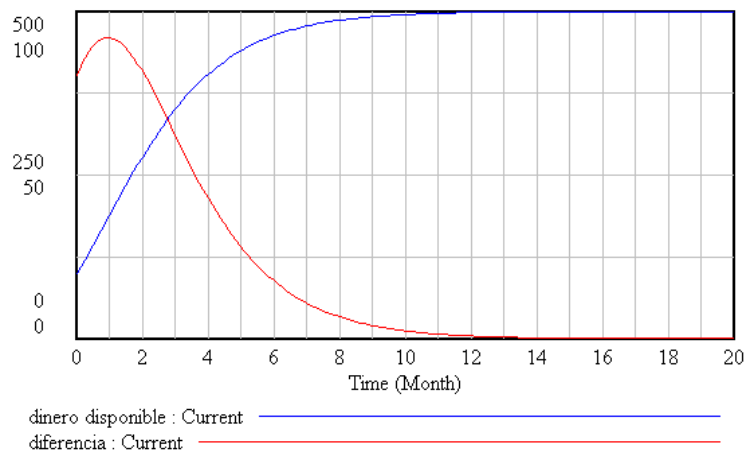


Figura 25. Máximo crecimiento en el modelo de Gompertz.

Para poner de manifiesto el carácter de estabilidad del punto de equilibrio  $K=500$ , se han realizado tres simulaciones diferentes tomando como valores iniciales  $100/500/700$ . En la figura 26 se prueba que, independientemente del valor inicial, a largo plazo el dinero disponible tiende al valor 500 (su capacidad de carga).

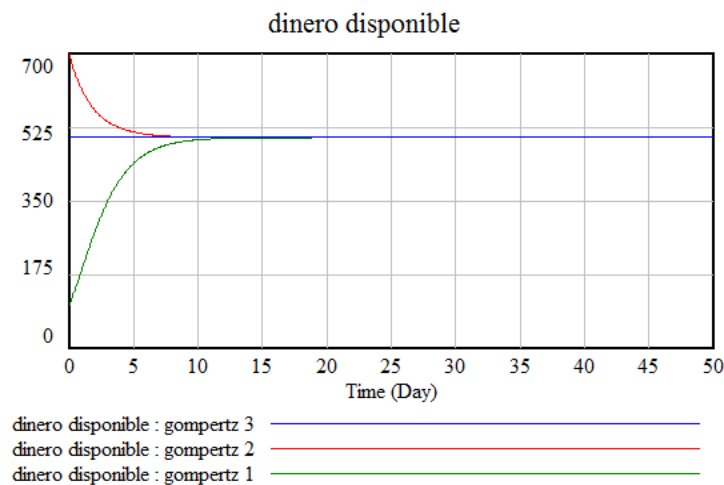


Figura 26. Distintas simulaciones del modelo de Gompertz.

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

Por supuesto que sería necesario realizar un número más elevado de simulaciones para confirmar el resultado anterior, y esto puede lograrse realizando un análisis de sensibilidad del modelo. Por ejemplo, modifiquemos el valor de la variable auxiliar “alpha” cuyo valor es de 0.5 realizando 200 simulaciones para valores elegidos al azar entre 0,45 y 0.55.

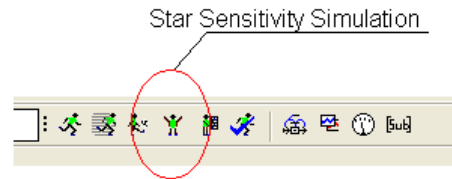


Figura 27. Herramienta para el análisis de sensibilidad.

Para ello se utiliza el icono que se muestra en la figura 27 correspondiente a “**Star Sensitivity Simulation**”. Pulsando sobre ella aparece la ventana de la figura 28, donde se debe de seleccionar en primer lugar el valor del parámetro a estudiar (alpha), a continuación se introduce el intervalo para los diferentes valores del parámetro, (desde 0.45 a 0.55), y por último se debe pulsar sobre los botones “**Add Editing**” y “**Next**”. Por defecto, el programa ajusta a 200 el número de simulaciones siendo la elección de los nuevos valores del parámetro aleatoria según una distribución uniforme.

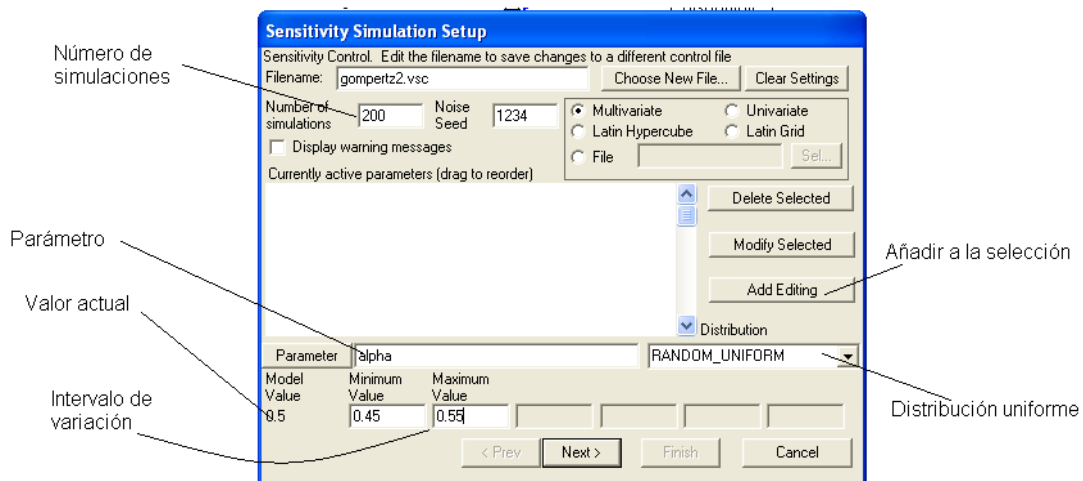


Figura 28. Cálculo del análisis de sensibilidad.

En la nueva ventana elegimos el nombre de la variable donde queremos ver el resultado y una vez realizadas las simulaciones el resultado obtenido se corresponde con la figura 29.

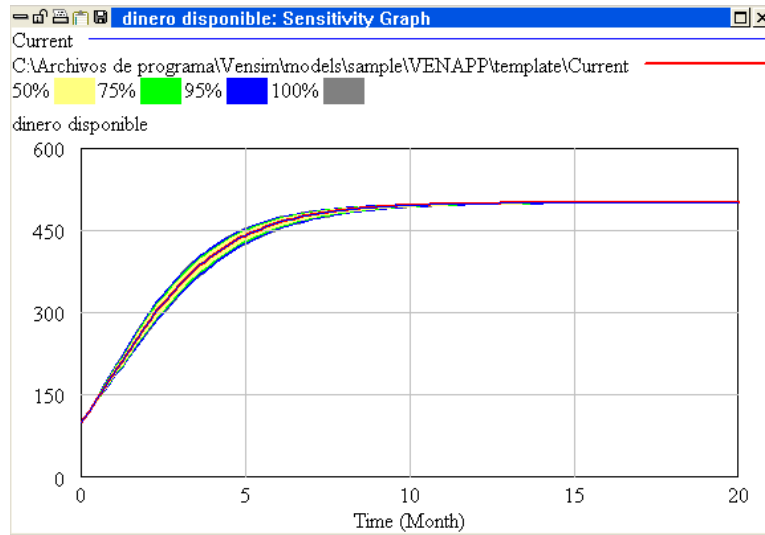


Figura 29. Resultado del análisis de sensibilidad.

Se puede ver cómo, independientemente, de los valores de  $\alpha$ , a largo plazo, las soluciones tienden a la capacidad de carga (500).

### 1.3.3.6.- Modelos de disolución.

Dentro del estudio de los modelos elementales, tienen especial relevancia los relacionados con problemas de disolución. Para introducir el modelo en un contexto determinado, vamos a suponer que dirigimos un parque donde existen atracciones acuáticas y deseamos controlar el contenido de cloro en un minuto cualquiera de una de sus piscinas.

La piscina tiene una capacidad de 2.5 millones de litros de agua y se encuentra llena con 2 millones de litros, en el que hay disuelto 50 Kg de cloro. Supongamos que entra agua clorada a una velocidad de 500 litros/minuto con una concentración de cloro de 0.225 gramos/litro. Al mismo tiempo el agua sale de la instalación a la misma velocidad de 500 litros/minuto. El cloro se evapora a una velocidad de 75 gramos/minuto. Deseamos conocer cuál es la cantidad de cloro en un minuto " $t$ " cualquiera, a lo largo de un día.

Si  $y(t)$  representa a la cantidad (en gramos) de cloro existente en el minuto  $t$ , entonces  $y'(t)$  que representa la rapidez de cambio del cloro en el minuto  $t$ , viene dado por:

$$y'(t) = 500 * 0.225 - 75 - \frac{500}{2 * 10^6} y(t) = 37.5 - \frac{2.5}{10^4} y(t); \quad y(0) = 50000$$

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

Este modelo es muy sencillo y básicamente coincide con el exponencial modificado tratado en secciones anteriores. Si suponemos que los ritmos de entrada y salida del agua clorada son diferentes (por ejemplo, 450 litros/minuto la velocidad de salida), entonces el modelo anterior adoptará la forma:

$$y'(t) = 500 * 0.225 - 75 - \frac{500}{2 * 10^6 + 50t} y(t) = 37.5 - \frac{2.5}{10^4 + 50t} y(t); \quad y(0) = 50000$$

Esta nueva ecuación diferencial ya no es de variables separadas, sino que estamos ante una ecuación diferencial lineal de primer orden que puede ser resuelta por medio de la DS.

El Diagrama de Forrester de la figura 30 consta de un nivel, un flujo de entrada, dos de salida, cinco variables auxiliares, y la variable predefinida <time>.

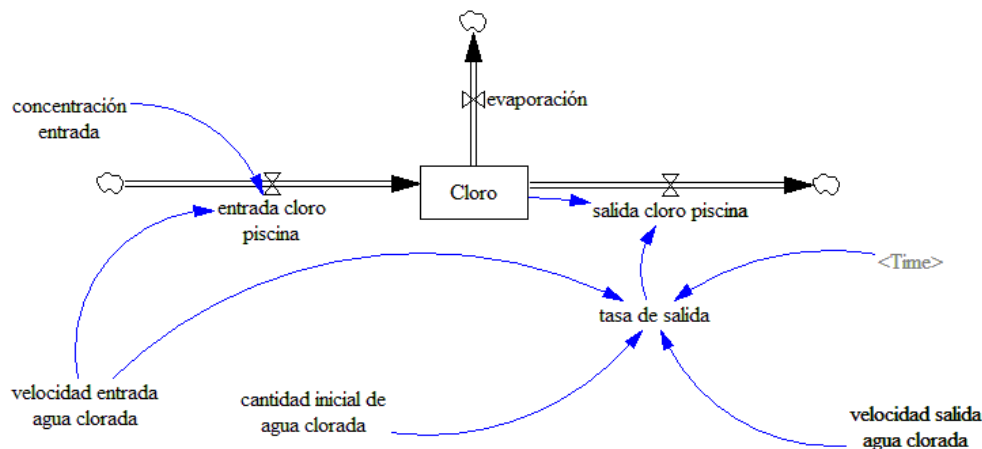


Figura 30. Diagrama de Forrester del modelo de disolución.

En este modelo las ecuaciones son:

- concentración entrada=0.225
- velocidad entrada agua clorada=500
- cantidad inicial de agua clorada=2e+006
- velocidad salida agua clorada=400
- tasa de salida=velocidad salida agua clorada/(cantidad inicial de agua clorada+(velocidad entrada agua clorada-velocidad salida agua clorada)\*Time)



## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

- evaporación=75
- entrada cloro piscina=velocidad entrada agua clorada\*concentración entrada
- salida cloro piscina=tasa de salida\*Cloro
- Cloro=INT(entrada cloro piscina-evaporación-salida cloro piscina,50000)

Una vez realizada la simulación, la evolución durante un día de la cantidad (en gramos) de cloro en la piscina (figura 31) es de 85078.3 gramos.

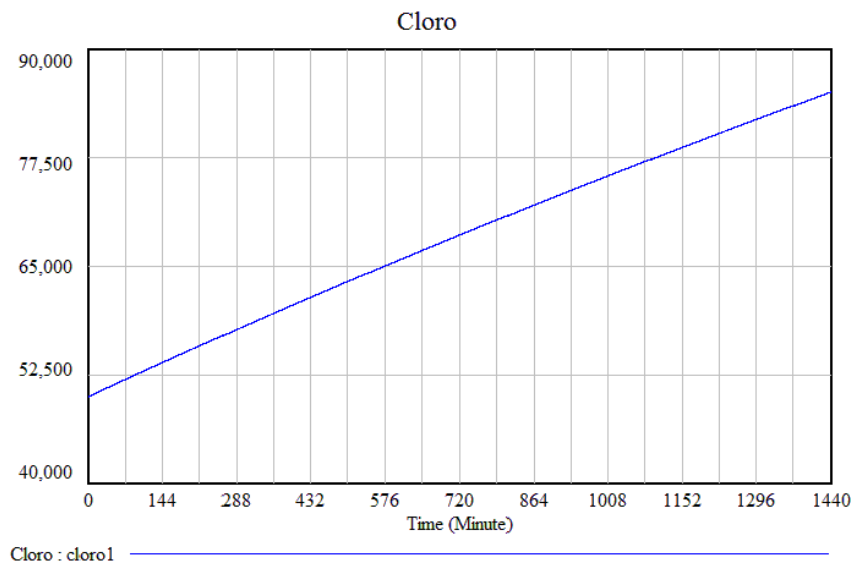



Figura 31. Simulación versión 1 del modelo disolución.

Se puede comprobar que, el cloro en el agua, en un principio va a disminuir y luego aumentar a partir del minuto 70.

La gran potencia de este método de análisis de modelo que estamos utilizando es la posibilidad de cambiar las hipótesis establecidas para su construcción así como modificar los valores de los parámetros y ver cómo afecta al comportamiento final del modelo. Vensim® dispone de una herramienta **SynteSym** que permite realizar estos cambios de manera dinámica.

Para ello se debe pulsar sobre  y a continuación aparecerá la pantalla de la figura 32.

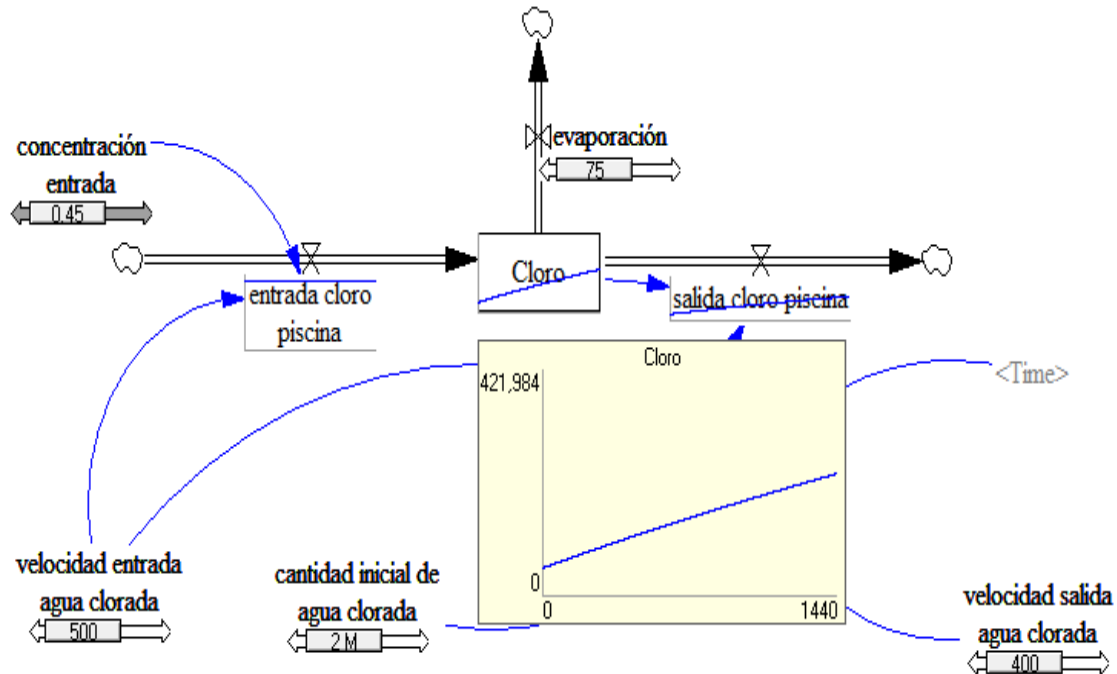


Figura 32. Simulación del modelo con SyntheSim.

Se debe observar como debajo de cada una de las variables numéricas aparece un cursor que al desplazarlo genera una nueva simulación y puede verse de forma instantánea el efecto (gráfico) que produce en el resto de las variables. Esta opción del programa es muy interesante puesto que antes de redefinir el modelo se pueden ver previamente las distintas modificaciones de las hipótesis de partida.

Se puede suponer que la incorporación del cloro a la piscina no es constante en el tiempo sino que se realizan aportaciones que cambian de forma periódica. Por ejemplo, imaginemos que la concentración de entrada sea de  $|0.225 + \text{sen}(2\pi t/1000)|$  gramos/minuto. Lo único que tenemos que hacer en el Diagrama de Forrester de la figura 30 es conectar la variable <Time> con la variable auxiliar "concentración de entrada" y modificar su ecuación,

- `Concentración de entrada= ABS(0.225+SIN(2*3.14*Time/1000))`

La figura 33 muestra las dos simulaciones, en rojo cuando la concentración es constante y en azul cuando es periódica. En la gráfica de la izquierda nos aparece la concentración del cloro introducido, mientras que la gráfica de la derecha se corresponde con la evolución de la cantidad de cloro en la piscina.

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

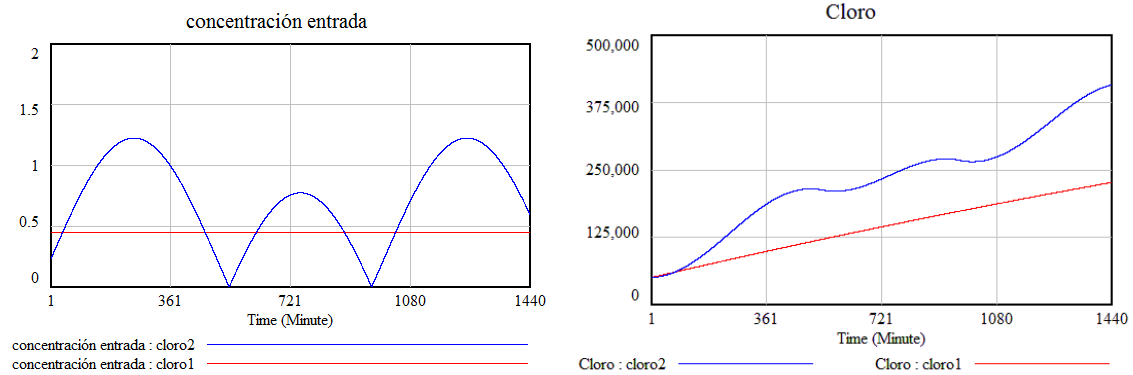


Figura 33. Simulación de la segunda versión del modelo de disolución.

De manera similar podríamos suponer que la aportación de cloro constante en cantidad de 0.225 gramos/minuto sólo se realiza entre los minutos 100 y 900. En este caso, el Diagrama de Forrester coincidiría con la última versión realizada siendo la nueva ecuación,

- Concentración de entrada= IF THEN  
ELSE( Time>=100:AND:Time<=900 , 0.225 , 0 )

Los resultados obtenidos una vez realizada la simulación aparecen en figura 34. A la izquierda se puede comprobar que la concentración de entrada es una función típica en escalón, mientras que la gráfica de la derecha nos indica el comportamiento de la cantidad de cloro en cada minuto del día y se comprueba cómo esta cantidad sólo es creciente en los momentos en que hay aporte desde el exterior.

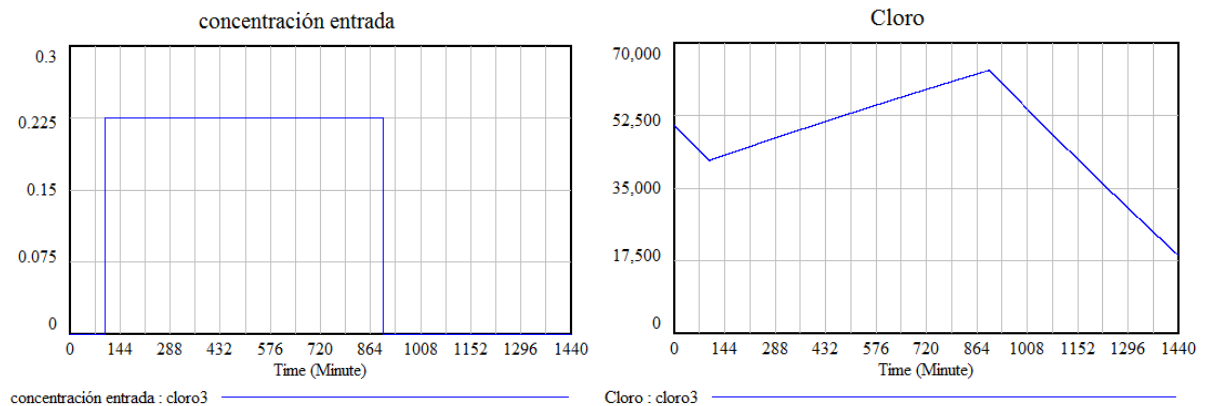


Figura 34. Simulación de la tercera versión del modelo de disolución.

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

En ocasiones, aunque es conocida la forma de la función, sin embargo no se dispone de una expresión explícita de la misma. En este caso, Vensim® dispone de una herramienta que hace posible la incorporación de esta función en el modelo. En el editor de ecuaciones para la variable “Concentración de entrada” que aparece en la figura 35, seleccionamos el subtipo “with Lookup”, introducimos como ecuación el tiempo Time, y a continuación se pulsa sobre “As Graph”.

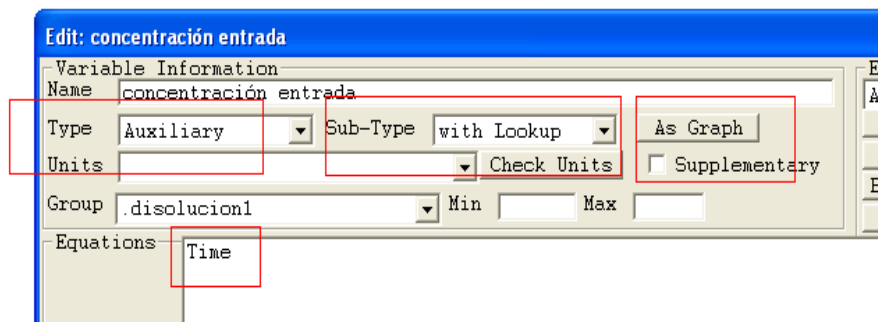


Figura 35. Introducción ecuaciones con with Lookup.

Aparecerá la ventana de la figura 36 que nos permite dibujar la forma de la función correspondiente a la concentración de entrada en función del tiempo.

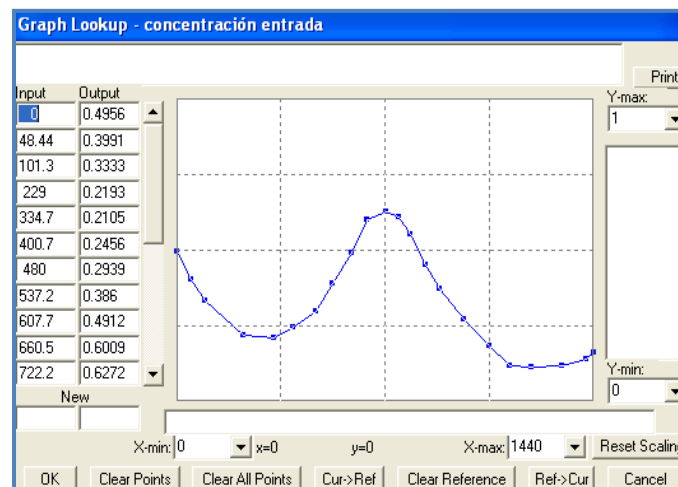


Figura 36. Introducción del gráfico en with Lookup.

Lo único que quedaría sería realizar la simulación para esta nueva situación y su posterior comparación con el resto de las simulaciones realizadas.

## TEMA 2.- MODELOS PRESA-DEPREDADOR

### 2.1.- El modelo Presa-Depredador.

#### 2.1.1.- Antecedentes.

Uno de los modelos matemáticos más clásico, y más utilizado, es el sistema dinámico constituido por dos elementos (en general dos especies de animales) que interactúan de tal manera que una de la especie (depredadora) se alimenta de la otra (presa). Ejemplo típico es el sistema formado por zorros y conejos, pero que puede ser trasladado, sin pérdida de generalidad, a cualquier otro contexto, como por ejemplo, el formado por vendedores (depredadores) y compradores (presas).

Los zorros se alimentan de conejos y los conejos de hierba que supondremos que nunca se agota. Cuando hay muchos conejos, la población de zorros aumentará puesto que el alimento es abundante, pero llegará un momento en el que la población de conejos disminuirá al ser los zorros demasiados. Al no tener, los zorros, comida suficiente su población disminuirá, lo que favorecerá de nuevo a la población de conejos. Es decir, se producen ciclos de crecimiento y decrecimiento de ambas poblaciones. ¿Existe algún modelo matemático que explique este comportamiento periódico?

Por otro lado, en la segunda década del siglo XX el biólogo italiano *Umberto D'Ancona* estudió y recopiló datos de capturas de dos tipos de peces en algunos puertos del Mediterráneo, por un lado selacios (tiburones, pez raya, etc.), y por otro peces que eran comidos por los anteriores (sardinas, boquerones, etc.). Es decir, unas presas (los peces comestibles) y otros depredadores (selacios). En la tabla 1 aparece el porcentaje de tiburones capturados, en el puerto de *Fiume*, en el período 1914-1923 respecto a la cantidad total de peces.

ño	1914	1915	1916	1917	1918
Porcentaje%	11.9	21.4	22.1	21.1	36.4
Año	1919	1920	1921	1922	1923
Porcentaje%	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

Tabla 1.- Porcentaje captura tiburones 1914-1923 en Fiume.

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

El porcentaje aumenta de manera significativa entre los años 1915 y 1919 y *D'Ancona* se preguntó cuál era el motivo de este incremento.

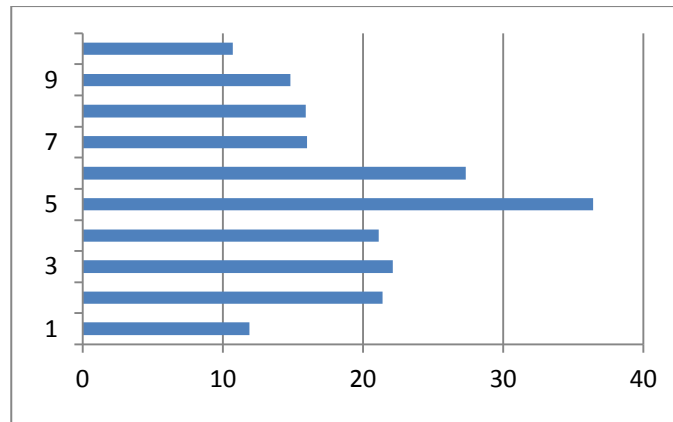


Figura 37. Porcentajes de capturas de selacios.

Una de las primeras razones en que pensó estaba relacionada con la Primera Guerra Mundial. En efecto, en estas fechas se desarrolló la primera gran guerra y esto obligaba a que menos barcos salieran a pescar, y por lo tanto, al disminuir la intensidad de la pesca, esto provocaba el aumento en el número de peces depredadores (selacios). Sin embargo, este argumento tenía un problema y era que también habían aumentado el número de peces comestibles. De hecho, si la intensidad de pesca es pequeña, entonces este hecho beneficia más a los depredadores que a las presas. La pregunta pertinente era, ¿por qué?

De manera resumida, se planteaban dos cuestiones:

- ¿Cómo explicar el comportamiento cíclico de la evolución de dos poblaciones, donde una especie se alimenta de la otra?
- ¿Por qué una intensidad baja de captura favorece más a los depredadores que a las presas?

## 2.1.2.- La construcción del modelo.

Para encontrar las respuestas a estas preguntas *D'Ancona* pidió ayuda al matemático *Vito Volterra*, quien elaboró el siguiente modelo. Llamaremos  $x(t)$ ,  $y(t)$  al número de presas y depredadores, respectivamente, existentes en el tiempo  $t$ . En ausencia de los depredadores las presas aumentarían de manera exponencial (puesto que su alimento es inagotable y no hay

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

depredadores). Por otro lado, sin presas los depredadores morirán de forma exponencial (por falta de comida). Es decir, el modelo que describiría esta situación sería:

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = ax(t); a > 0; \quad y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t), c > 0$$

En el momento en el que entran en contacto los depredadores con las presas, el ritmo de crecimiento de las presas disminuye a una tasa proporcional al encuentro de una presa con un depredador ( $bx(t)y(t)$ ); mientras que los depredadores aumentarán de la misma manera ( $dx(t)y(t)$ ). En consecuencia, ahora el modelo sería:

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t); b > 0; \quad y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t); d > 0$$

Sistema que puede ser reescrito como:

$$\begin{cases} x'(t) = bx(t) \left( \frac{a}{b} - y(t) \right), & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = dy(t) \left( x(t) - \frac{c}{d} \right), & y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

El modelo fue descubierto de forma independiente por *Lotka* y por *Volterra*, y por este motivo se le conoce como modelo presa-depredador o bien modelo *Lotka-Volterra* y describe bastante bien la evolución de presas y depredadores cuando se encuentran en un ecosistema aislado.

No obstante, tenemos que aclarar que dos poblaciones distintas en un mismo medio ambiente tienen varias maneras de sobrevivir, por ejemplo:

- La **competencia mutua**, es decir compiten por la misma fuente alimentaria, tienden a provocar la extinción de una población de ellos, y la otra tiende a aprovechar la máxima capacidad de los recursos ambientales.
- La **interdependencia**, es decir las dos poblaciones proporcionan algunos recursos alimenticios, viven pacíficamente entre ellos, y tienden a un estado de equilibrio.
- La **ley de la selva**, es decir una población sobrevive dependiendo de la abundancia de recursos naturales, llamada la presa; mientras que la otra población vive dependiendo de

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

las poblaciones de presas, llamada el depredador. Los dos elementos están compuestos por el modelo presa-depredador. Por ejemplo, Los peces comestibles y los peces selacios, los conejos y los lince, las cochinillas y los pulgones, son típicos ejemplos de esta forma de convivencia.

## 2.1.3.- Simulación del modelo con Vensim PLE®

Para situar el modelo a estudiar en un contexto económico apropiado consideraremos que las presas  $x(t)$  representan al número de compradores de un artículo en el día  $t$ , mientras que los depredadores  $y(t)$  coinciden con el número de vendedores de este artículo en el día  $t$ . En esta situación la evolución del número de compradores y el de vendedores está modelada por el sistema presa-depredador cuyo Diagrama de Forrester es el del tipo que aparece en la figura 38.

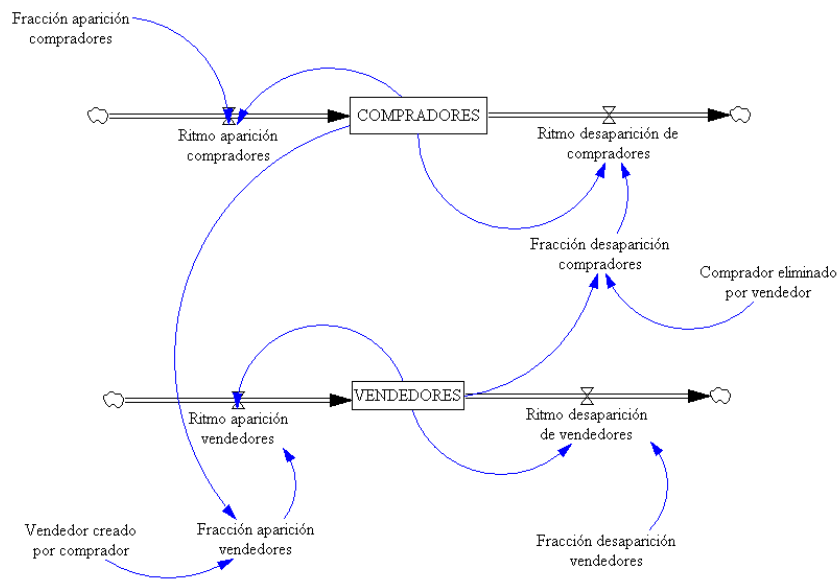


Figura 38. Diagrama de Forrester del modelo presa-depredador.

Las ecuaciones de este modelo junto con los valores de los parámetros vienen dadas por:

- Fracción aparición compradores=3.3
- Fracción aparición vendedores=COMPRADORES\*Vendedor creado por comprador
- Fracción desaparición compradores=VENDEDORES\*Comprador eliminado por vendedor



## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

- Fracción desaparición vendedores=0.5
- Comprador eliminado por vendedor=0.08
- Vendedor creado por comprador=0.2
- Ritmo aparición compradores=COMPRADORES\*Fracción aparición compradores
- Ritmo desaparición de compradores=COMPRADORES\*Fracción desaparición compradores
- Ritmo aparición vendedores=Fracción aparición vendedores\*VENDEDORES
- Ritmo desaparición vendedores=Fracción desaparición vendedores\*VENDEDORES
- $COMPRADORES = INT(\text{Ritmo aparición compradores} - \text{Ritmo desaparición de compradores}, 150)$
- $VENDEDORES = INT(\text{Ritmo aparición vendedores} - \text{Ritmo desaparición de vendedores}, 25)$

El modelo se ha simulado entre  $t=0$  y  $t=100$ , utilizando como método de aproximación numérica el de *Runge-Kutta* de cuarto orden y con un paso de  $h=0.015625$ . Como se aprecia en la figura 39, el comportamiento de ambas poblaciones es cíclico, siendo su período de aproximadamente 25 días. Con lo que queda explicada la primera de las preguntas planteadas.

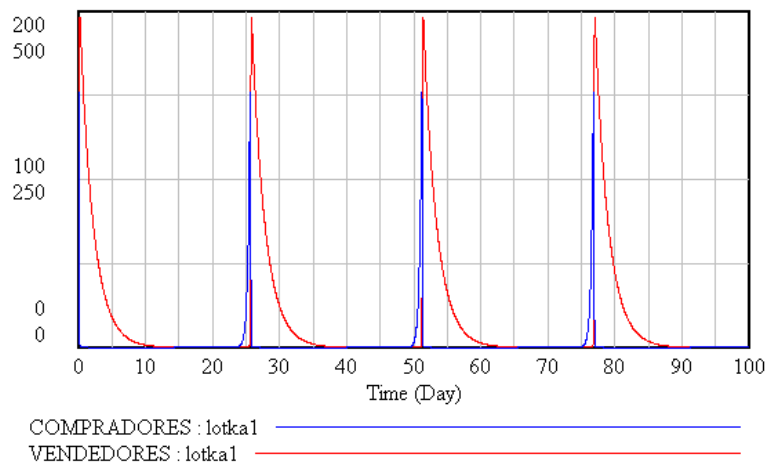


Figura 39. Resultado simulación del modelo presa-depredador.

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

Los puntos de equilibrio del modelo,

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 3.3x(t) - 0.08x(t)y(t); \quad y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -0.5y(t) + 0.2x(t)y(t)$$

son las soluciones constantes, es decir aquellos valores obtenidos al resolver el sistema  $x'(t)=0$ ,  $y'(t)=0$ , que son  $x(t) = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$ ;  $y(t) = \frac{3.3}{0.08} = 41.25$ .

Se puede construir de una manera muy simple el plano fase del sistema, para ello, con el botón de “**Panel de Control**” seleccionamos la pestaña “**Graph**” y posteriormente el icono “**new**” y aparecerá la ventana de la figura 40.

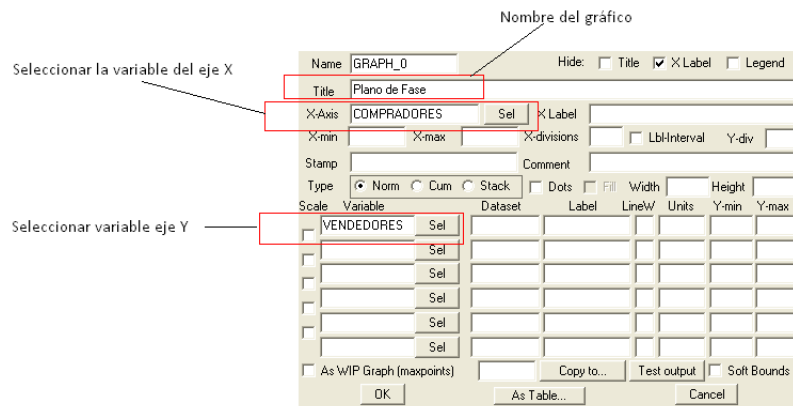


Figura 40. Construcción del Plano fase.

La figura 41 muestra la órbita del sistema dinámico,

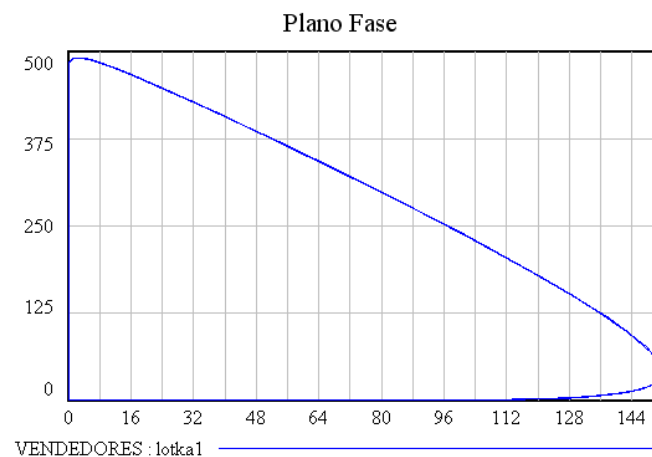


Figura 41. Plano fase del modelo presa-depredador.

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

que cómo puede verse se trata de una curva cerrada que gira en torno al centro que es el punto de equilibrio  $(0.4, 41.25)$  donde las poblaciones se mantendrían indefinidamente si los valores iniciales se correspondiesen con  $x(0)=0.4$ ;  $y(0)=41.25$

Para poder dar respuesta a la segunda de las preguntas que motivaron el modelo, es necesario hablar de valores promedios. Se puede encontrar el promedio de depredadores  $y(t)$  en el intervalo  $[0, T]$  siendo  $T$  el período correspondiente a la curva solución, mediante la integral  $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$ , cuyo valor es  $a/b$ , el mismo que el obtenido para el punto de equilibrio. Del mismo modo el promedio de las presas es  $c/d$ . Obtenemos una propiedad importante que es: no importa cuál sea el tamaño de las poblaciones iniciales, su promedio será siempre el mismo. Esta propiedad suele recibir el nombre de ley de conservación de la naturaleza.

Si introducimos en el modelo inicial el efecto extra de la pesca, con una intensidad  $\alpha$ , entonces ahora el modelo adoptaría la forma,

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) - \alpha x(t) \\ y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) - \alpha y(t) \end{cases}$$

que puede reescribirse como,

$$\begin{cases} x'(t) = (a - \alpha)x(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = -(c + \alpha)y(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

es decir, es otro modelo del tipo presa-depredador idéntico al primero, donde el coeficiente  $a$  se ha transformado en  $a-\alpha$ , y el  $c$  en  $c+\alpha$ . Por lo tanto si  $\alpha < a$ , para este nuevo modelo los valores promedios serán para los depredadores  $(a-\alpha)/b$ , y para las presas  $(c+\alpha)/d$ . Para un valor de  $a > \alpha$ , en promedio, al incluir la pesca, las presas aumentan y disminuyen los depredadores.

Veamos este efecto modificando nuestro modelo con Vensim PLE® con objeto de introducir el efecto de la pesca. En nuestro caso sería incorporar una nueva variable auxiliar “Fracción de retirada de compradores y vendedores” y los dos flujos de

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

salida “Retirada de compradores” y “Retirada de vendedores”, que aparecen en la figura 42

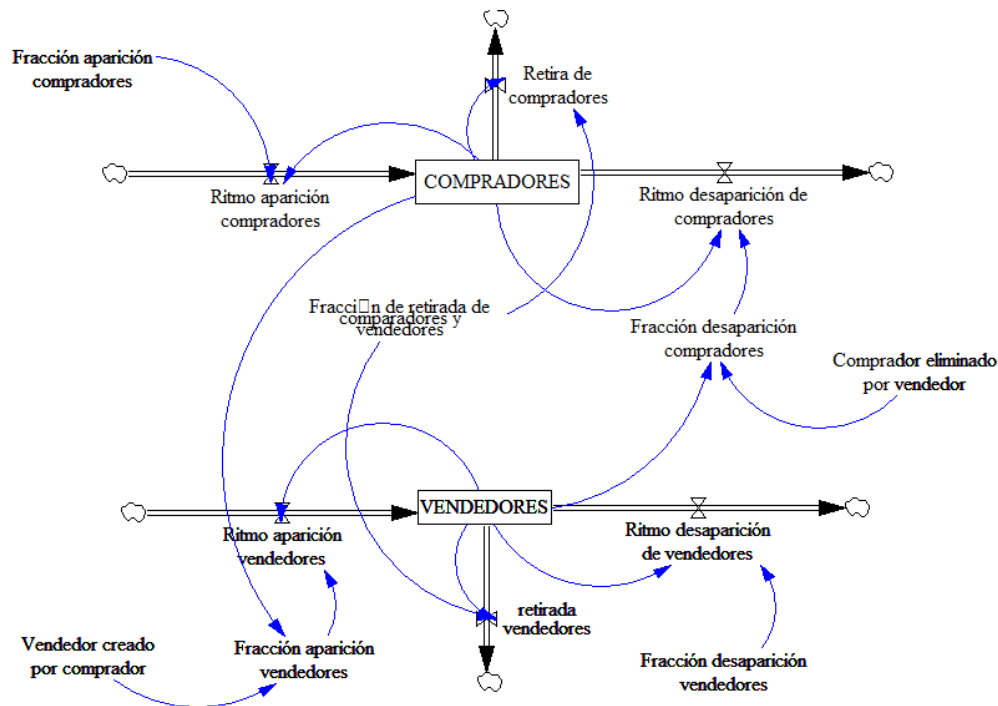


Figura 42. Diagrama de Forrester del modelo presa-depredador con efecto de pesca.

Las nuevas ecuaciones son:

- $\text{Fracción de retirada de compradores y vendedores} = 2$
- $\text{Retirada de compradores} = \text{COMPRADORES} * \text{Fracción de retirada de compradores y vendedores}$
- $\text{Retirada de vendedores} = \text{VENDEDORES} * \text{Fracción de retirada de compradores y vendedores}$
- $\text{COMPRADORES} = \text{INT}(\text{Ritmo aparición compradores} - \text{Retira de compradores} - \text{Ritmo desaparición de compradores}, 150)$
- $\text{VENDEDORES} = \text{INT}(\text{Ritmo aparición vendedores} - \text{retirada vendedores} - \text{Ritmo desaparición de vendedores}, 25)$

La simulación se ha realizado con el nombre Lotka2 y aparece en azul en las gráficas de la figura 43, y en rojo se han mantenido los resultados de la simulación sin el efecto de la pesca.

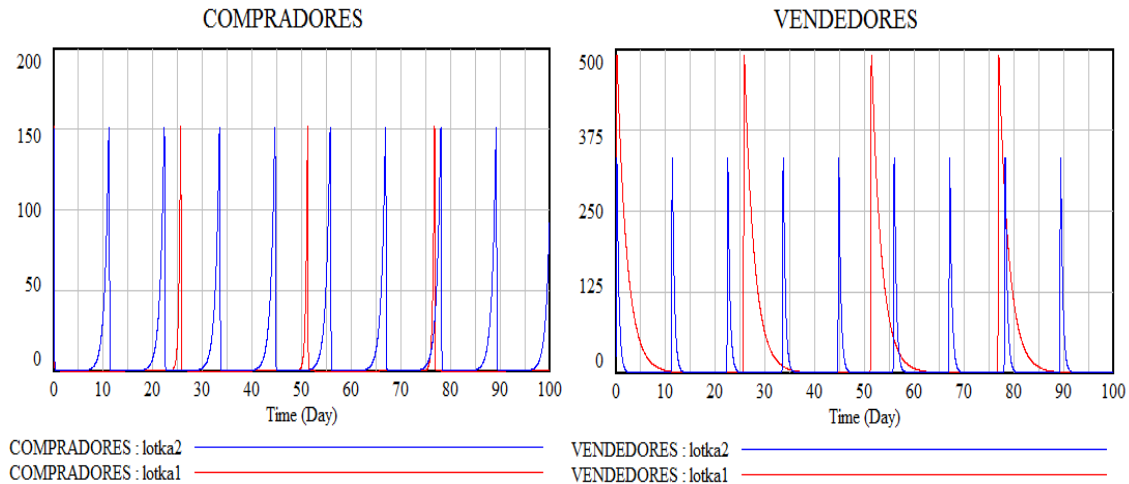


Figura 43. Comparación de simulaciones.

Nótese como, en efecto, en promedio los depredadores disminuyen y las presas aumentan, y que además se ha modificado la duración del período.

Por último, estamos en condición de explicar la respuesta de la segunda pregunta planteada. Observemos que si en la expresión  $(a-\alpha)/b$  disminuimos la intensidad de la pesca (el valor del  $\alpha$ ), entonces todo el cociente aumentará, y que por el contrario la expresión  $(c+\alpha)/d$  disminuirá. Este principio hoy se conoce con el nombre de efecto Volterra. Cuando se disminuye la intensidad de captura entonces, en promedio, salen más favorecidos los depredadores que las presas.

Para poner de manifiesto el efecto Volterra en el modelo presa-depredador, se tiene que incluir el tiempo en el Diagrama de Forrester como “**Shadow variable**”, conectarla con la variable auxiliar “Fracción de retirada de compradores y vendedores” y definir su ecuación como:

- Fracción de retirada de compradores y vendedores=IF THEN  
ELSE( Time<50 , 2 , 0.75 )

Es decir, la intensidad de captura es de 2 desde el momento inicial hasta  $t=50$ , y partir de aquí descende al valor 0.75. En la figura 44 se aprecia como a partir de  $t=50$  se modifica el comportamiento del modelo en el sentido que se ha comentado.

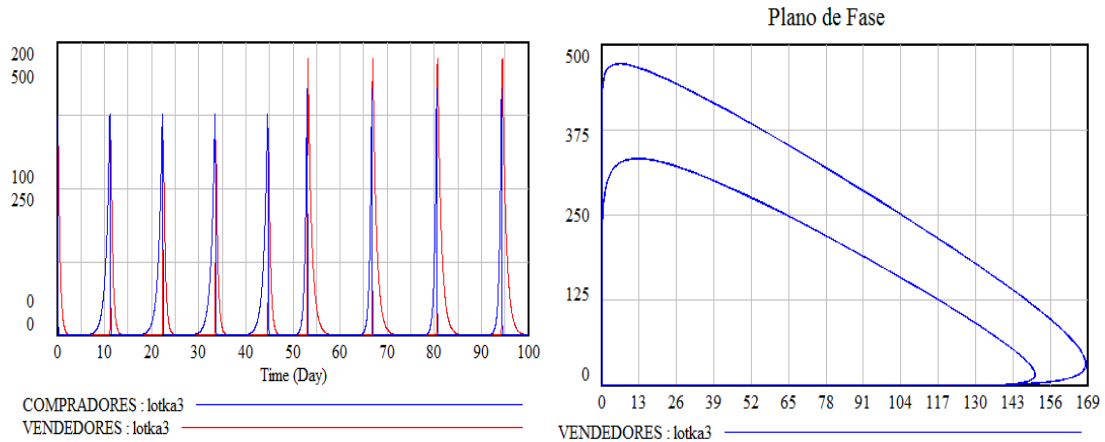


Figura 44. Efecto Volterra.

El modelo Lotka-Volterra es muy interesante a nivel teórico pero adolece de ciertos problemas que en la realidad hacen que su aplicación sea muy limitada. Entre los problemas más importantes que el modelo no incorpora podemos destacar:

- Los ecosistemas no están aislados.
- No se tiene en cuenta la interacción entre las presas y entre los depredadores. Sería preferible añadir al modelo un crecimiento del tipo logístico.
- El modelo no es estructuralmente estable, de tal forma que las órbitas de su plano fase no son curvas cerradas perfectas.
- En los experimentos en laboratorio siempre los depredadores eliminan a las presas.

## 2.2.- Modificaciones del modelo presa-depredador.

### 2.2.1.- Primera versión.

Existe un gran número de variaciones del modelo *Lotka-Volterra*, y de todas ellas presentaremos algunas que consideramos más interesantes. En 1926 Leslie propuso una primera modificación, suponiendo que el crecimiento de las presas no es exponencial sino del tipo logístico, con una capacidad de carga  $K$ . Además se supone que el ritmo de evolución de los depredadores (vendedores) es otro modelo logístico donde ahora su capacidad de carga depende de los compradores disponibles tal y como se expresa en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

$$\begin{cases} x'(t) = ax - \frac{ax^2}{K} - bxy \\ y'(t) = dy(1 - \frac{dy}{nx}) \end{cases}$$

Con todos los parámetros positivos y donde  $x(t)$  representa al número de compradores (presas) de un artículo en el día  $t$ , mientras que los  $y(t)$  coinciden con el número de vendedores (depredadores) de este artículo en el día  $t$ . Para poder estudiar este sistema con Vensim, analizaremos un caso concreto:

$$\begin{cases} x'(t) = 3.3x - \frac{3.3x^2}{30000} - 0.08xy \\ y'(t) = 0.2y - \frac{0.2y^2}{60000x} \end{cases}$$

En esta situación la evolución del número de compradores y el de vendedores está modelada por el sistema presa-depredador modificado cuyo Diagrama de Forrester es como el que aparece en la siguiente figura.

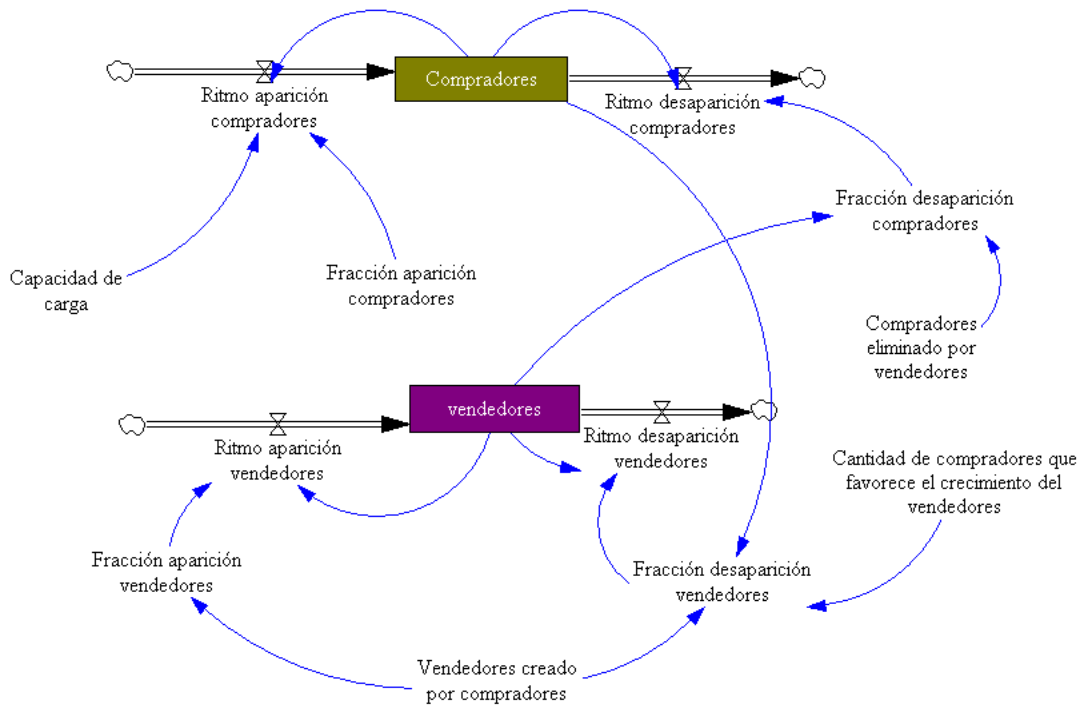


Figura 45. Diagrama de Forrester del modelo presa-depredador modificado.

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

Las ecuaciones de este modelo junto con los valores de los parámetros vienen dado por:

- Capacidad de carga= 30000
- Cantidad de compradores que favorece el crecimiento del vendedores=60000
- Fracción aparición compradores=3.3
- Fracción aparición vendedores=Vendedor creado por comprador
- Fracción desaparición compradores=VENDEDORES\*Comprador eliminado por vendedor
- Fracción desaparición vendedores=vendedores creado por comprador/(Compradores\*Cantidad de compradores que favorece el crecimiento del vendedores)
- Comprador eliminado por vendedor=0.08
- Vendedor creado por comprador=0.2
- Ritmo aparición compradores=Compradores\*Fracción aparición compradores\*(1-Compradores/Capacidad de carga)
- Ritmo desaparición de compradores=Compradores\*Fracción desaparición compradores
- Ritmo aparición vendedores=Fracción aparición vendedores\*vendedores
- Ritmo desaparición vendedores=Fracción desaparición vendedores\*vendedores<sup>2</sup>
- Compradores=INT(Ritmo aparición compradores-Ritmo desaparición de compradores,150)
- vendedores=INT(Ritmo aparición vendedores-Ritmo desaparición de vendedores,25)

El modelo se ha simulado entre  $t=0$  y  $t=100$ , utilizando como método de aproximación numérica el de *Euler* de cuarto orden y con un paso de  $h=0.015625$ .



# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

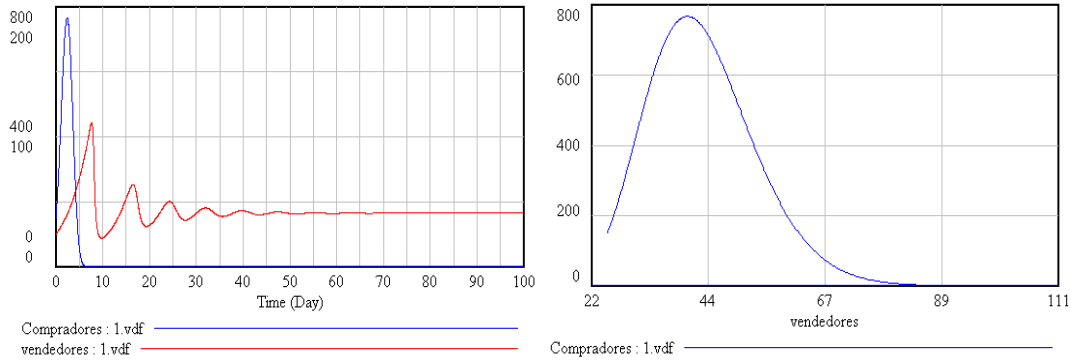


Figura 46. Simulación del modelo presa-depredador modificado tipo Leslie.

A largo plazo el comportamiento del modelo deja de ser cíclico, con la eliminación del número de compradores disponibles por parte de los vendedores que se estabilizarán en un valor aproximado de 41 (figura 46 izquierda). En el plano fase (figura 46 derecha) puede apreciarse como la órbita que se inicia en el punto (150,25) acaba en el punto (0,41).

## 2.2.2.- Modelos en competencia.

En los modelos presa-depredador que hemos estudiado no se ha tenido en cuenta un hecho importante como es la interacción de los animales de una misma especie, ya que compiten por la misma fuente de alimentación, provocando, por ejemplo, que una especie tienda a la extinción, mientras que la otra se aproxime a su capacidad de carga, o bien pudiese ocurrir que las dos especies, en función de los recursos disponibles, tiendan a un estado de equilibrio.

Para poner de manifiesto estos diversos comportamientos, vamos a construir un nuevo modelo alterando ligeramente las hipótesis del presa-depredador. Supongamos que  $x(t)$  representa al número de compradores en un tiempo  $t$ , mientras que  $y(t)$  sean los vendedores presentes en el tiempo  $t$ . En el modelo modificado de Lotka-Volterra observamos que en ausencia de vendedores, los compradores evolucionan según el modelo logístico,

$$x'(t) = x(t)(a - bx(t))$$

Simultáneamente, si no existieran compradores, la velocidad de crecimiento de los vendedores estaría gobernada por la ecuación diferencial,

$$y'(t) = y(t)(c - dy(t))$$

Es decir, se ha introducido la interacción entre compradores dada por  $bx(t)x(t)$ , y la de los vendedores  $dy(t)y(t)$ , dependiendo su intensidad de los parámetros  $b$  y  $d$ .

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

A continuación debemos tener en cuenta en las ecuaciones la reducción de la velocidad de crecimiento debido a las interferencias entre los compradores y vendedores, expresado como  $-my(t)x(t)$ , donde  $m$  es la medida del grado en que los vendedores interfieren con los compradores. De la misma forma también aparecerá  $-nx(t)y(t)$ , donde  $n$  es la medida del grado en que los compradores interactúan con los vendedores. Finalmente, las ecuaciones del modelo en competencia son:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - bx(t) - my(t)); & x(0) \\ y'(t) = y(t)(c - dy(t) - nx(t)); & y(0) \end{cases}$$

Un análisis cualitativo detallado del modelo prueba que los posibles resultados, a largo plazo, dependiendo de los valores positivos de los parámetros, son:

- **Primer caso:** los compradores ganan a los vendedores. Esto es, los compradores tienden a un valor constante, mientras que los vendedores, a la larga, desaparecen.
- **Segundo caso:** los vendedores ganan a los compradores.
- **Tercer caso:** los compradores y vendedores tienden a coexistir en un punto de equilibrio estable.
- **Cuarto caso:** los compradores y vendedores tienden a coexistir en un punto de equilibrio inestable.

Nuestro próximo objetivo será el de poner de manifiesto estos comportamientos realizando diferentes simulaciones con Vensim.

### 2.2.2.1.- Primer caso.

Por trabajar con un caso concreto, supongamos que el modelo de competencia a estudiar sea:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(0.3 - 0.01x(t) - 0.06y(t)); & x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t)(0.03 - 0.009y(t) - 0.0055x(t)); & y(0) = 20 \end{cases}$$

En la figura 47 puede verse el Diagrama de Forrester, que consta de dos niveles correspondientes al número de compradores y vendedores existentes en cualquier día  $t$ , dos flujos de entrada, cuatro flujos de salida, y seis variables auxiliares identificadas con los distintos parámetros del modelo.

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

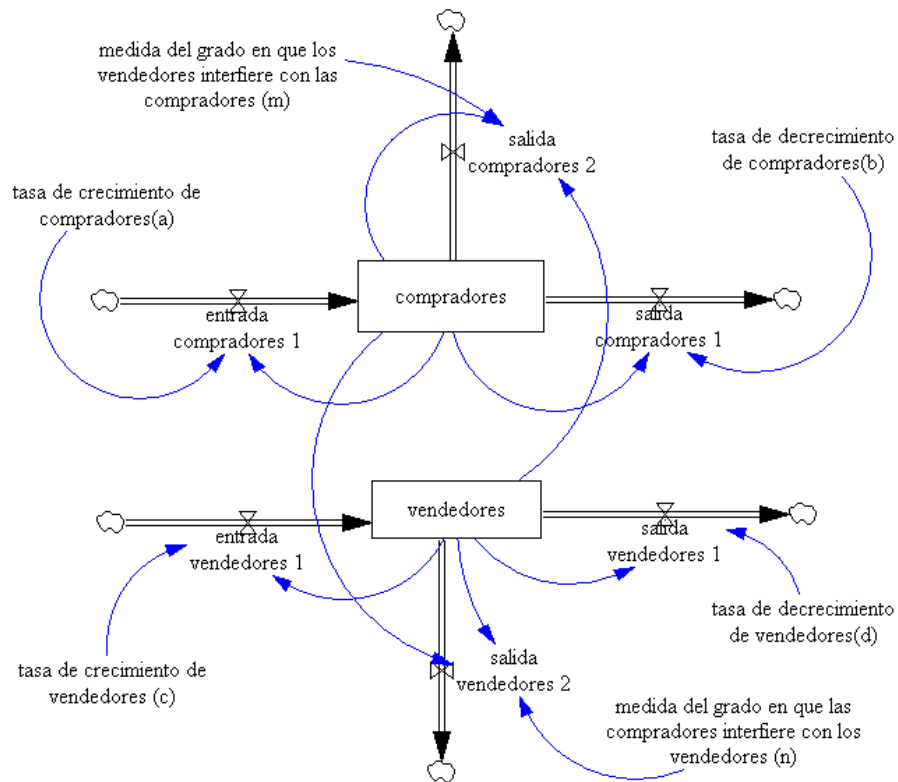


Figura 47. Diagrama de Forrester de competencia1.

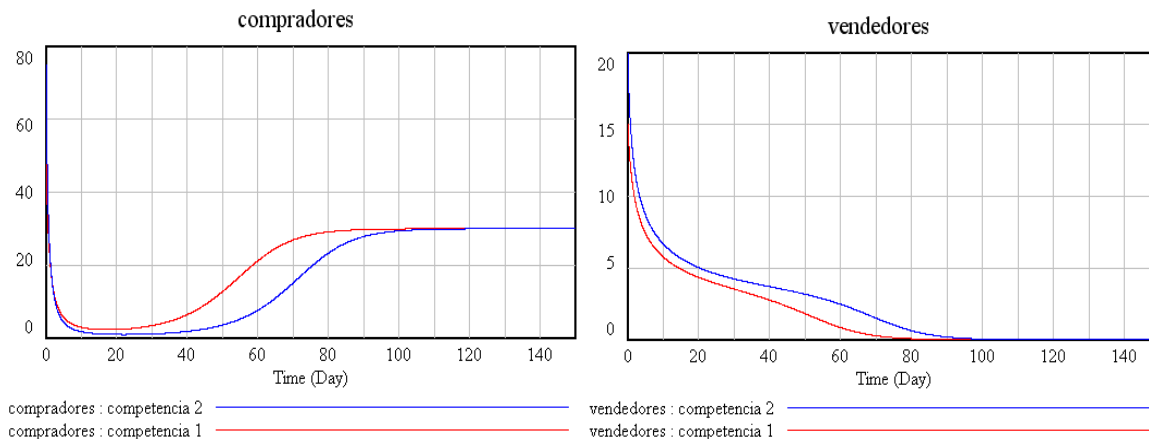
Las ecuaciones del modelo son:

- $\text{compradores} = \text{INT}(\text{entrada compradores 1} - \text{salida compradores 1} - \text{salida compradores 2}, 75)$
- $\text{vendedores} = \text{INT}(\text{entrada vendedores 1} - \text{salida vendedores 1} - \text{salida vendedores 2}, 20)$
- $\text{medida del grado en que los vendedores interfieren con los compradores (m)} = 0.06$
- $\text{medida del grado en que los compradores interfieren con los vendedores (n)} = 0.0055$
- $\text{entrada compradores 1} = \text{tasa de crecimiento de compradores (a)} * \text{compradores}$
- $\text{salida compradores 1} = \text{tasa de decrecimiento de compradores (b)} * \text{compradores}^2$

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

- salida compradores 2=medida del grado en que los vendedores interfiere con las compradores  $(m) \cdot \text{compradores} \cdot \text{vendedores}$
- tasa de crecimiento de compradores  $(a)=0.3$
- tasa de decrecimiento de compradores  $(b)=0.01$
- entrada vendedores 1=tasa de crecimiento de vendedores  $(c) \cdot \text{vendedores}$
- salida vendedores 1=tasa de decrecimiento de vendedores  $(d) \cdot \text{vendedores}^2$
- salida vendedores 2=medida del grado en que las compradores interfiere con los vendedores  $(n) \cdot \text{compradores} \cdot \text{vendedores}$
- tasa de crecimiento de vendedores  $(c)=0.03$
- tasa de decrecimiento de vendedores  $(d)=0.009$

Una vez simulado el modelo, utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 y un paso de  $h=0.015625$  (figura 48), se comprueba que, independientemente del número inicial, el número de compradores se estabiliza en 30 mientras que desaparecen los vendedores.



## 48. Resultados simulación modelo competencial.

Simultáneamente se ha ejecutado el análisis de sensibilidad de uno de los parámetros, concretamente a la medida del grado en que los compradores interfieren con los vendedores. Se han realizado 200 simulaciones aleatorias, según una

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

distribución uniforme, para valores de  $n$  comprendidos en el intervalo  $[0,005 \quad 0,006]$ . Los resultados de la figura 49 confirman el estudio anterior.

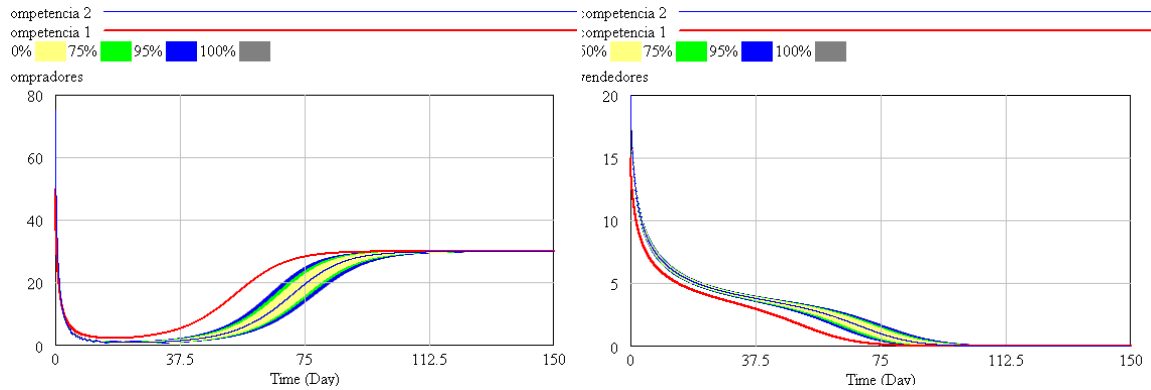


Figura 49. Análisis de sensibilidad del modelo competencia1.

El mismo tipo de análisis de sensibilidad podría realizarse con el resto de las variables auxiliares, o bien realizar una simulación dinámica con el icono “SyntheSim”, que ofrece la posibilidad de modificar los valores de los parámetros “online” y ver el efecto que se produce sobre los diferentes niveles.

## 2.2.2.2.- Segundo caso.

Consideremos el modelo:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(0.26 - 0.2x(t) - 0.06y(t)); & x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t)(0.06 - 0.01y(t) - 0.015x(t)); & y(0) = 20 \end{cases}$$

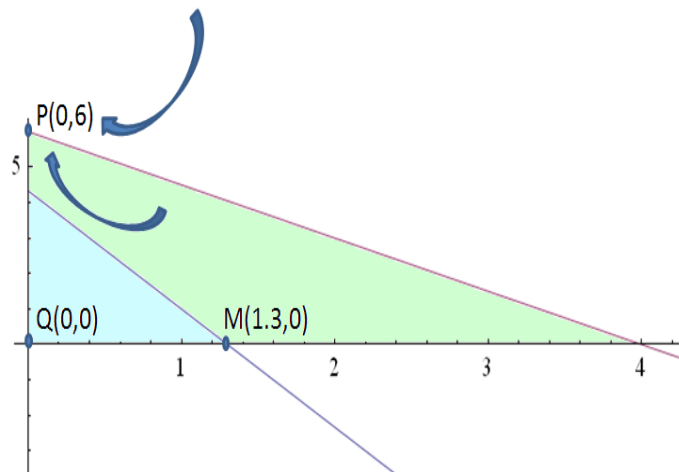


Figura 50. Puntos de equilibrio del modelo.

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

En el plano fase (figura 50) representamos las cuatro rectas que nos determinan los puntos de equilibrio, de ecuaciones:  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $0.26 - 0.2x - 0.06y = 0$ ;  $0.06 - 0.015x - 0.01y = 0$ . Sus intersecciones, para valores de  $x$  e  $y$  positivos, son los puntos  $P(0,6)$ ,  $Q(0,0)$  y  $M(1.3,0)$ . De todos ellos, puede probarse que, el único que es asintóticamente estable es el  $P(0,6)$ .

Este hecho queda puesto de manifiesto en la simulación por ordenador realizada con Vensim. Para ello, tenemos que modificar los valores de los parámetros a través de las siguientes ecuaciones:

- medida del grado en que los vendedores interfieren con los compradores  $(m)=0.06$
- medida del grado en que los compradores interfieren con los vendedores  $(n)=0.015$
- tasa de crecimiento de compradores  $(a)=0.26$
- tasa de decrecimiento de compradores  $(b)=0.2$
- tasa de crecimiento de vendedores  $(c)=0.06$
- tasa de decrecimiento de vendedores  $(d)=0.01$

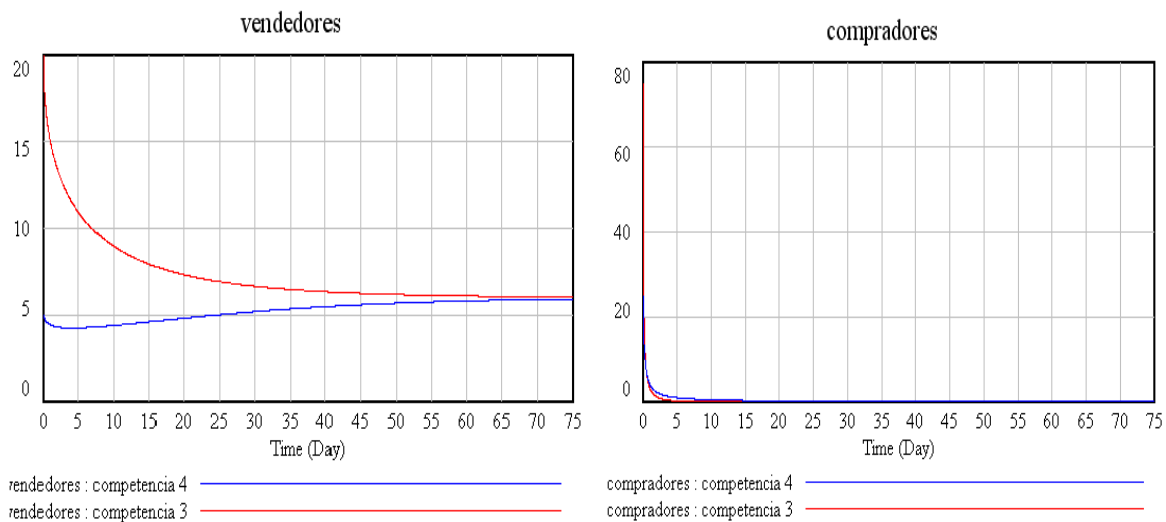


Figura 51. Resultados simulación modelos competencia (segundo caso).

Se han realizado dos simulaciones diferentes variando los datos iniciales (figura 51), y puede verse como, a largo plazo, desaparecen los compradores mientras que el número de vendedores se estabilizan en 6. Es decir el plano fase se iniciará, por ejemplo en el punto  $(75, 20)$  y tenderá hacia el punto de equilibrio  $P(0,6)$  tal y como se pone de manifiesto en la figura 52.

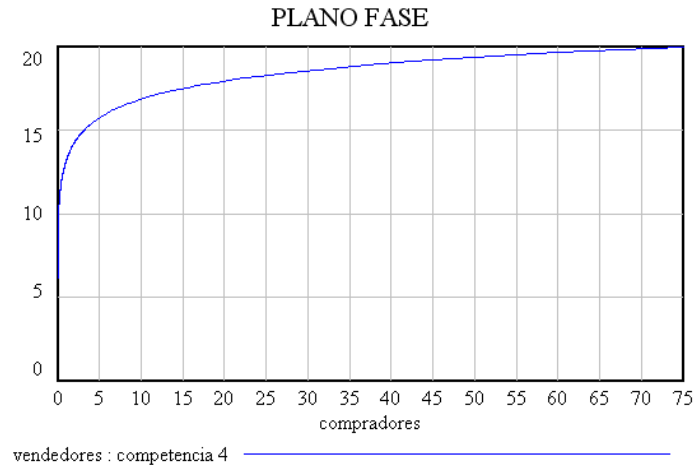


Figura 52. Plano fase del modelo competencia (segundo caso).

### 2.2.2.3.- Tercer caso.

Consideremos el modelo:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(0.26 - 0.02x(t) - 0.06y(t)); & x(0) \\ y'(t) = y(t)(15.5 - 0.9x(t) - 4.2y(t)); & y(0) \end{cases}$$

Los puntos de corte (figura 53) de las rectas:  $0.26 - 0.02x - 0.06y = 0$ ;  $15.5 - 0.9x - 4.2y = 0$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ , proporcionan los cuatro puntos de equilibrio del modelo,  $P(13,0)$ ,  $Q(0,3.7)$ ,  $M(5.4,2.5)$  y  $N(0,0)$ . Un estudio cualitativo del mismo lleva a la conclusión de que el único punto de equilibrio estable es el M. Es decir, a largo plazo, e independientemente de los valores iniciales, tanto los compradores como los vendedores coexistirán.

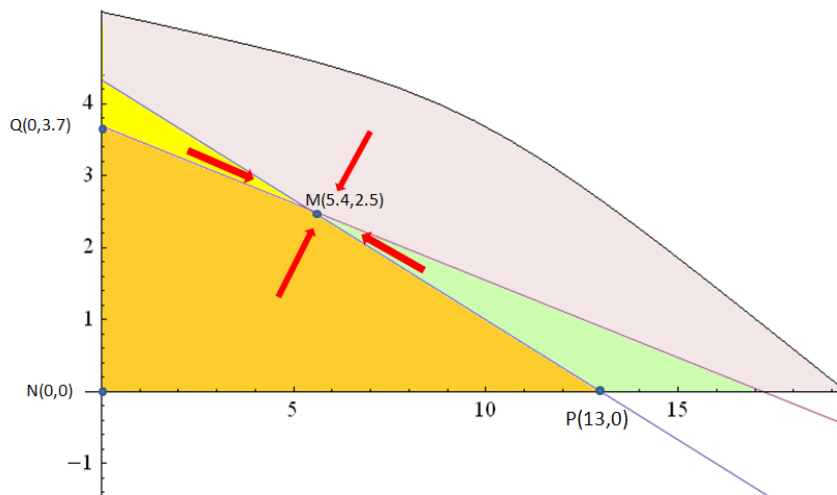


Figura 53. Puntos de equilibrio (tercer caso.)

# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

Si cambiamos los parámetros  $a, b, c, d, m$  y  $n$  del Diagrama de Forrester de la figura 47 para adaptarlos a los nuevos valores del modelo obtenemos como resultados de la simulación las gráficas de la figura 54.

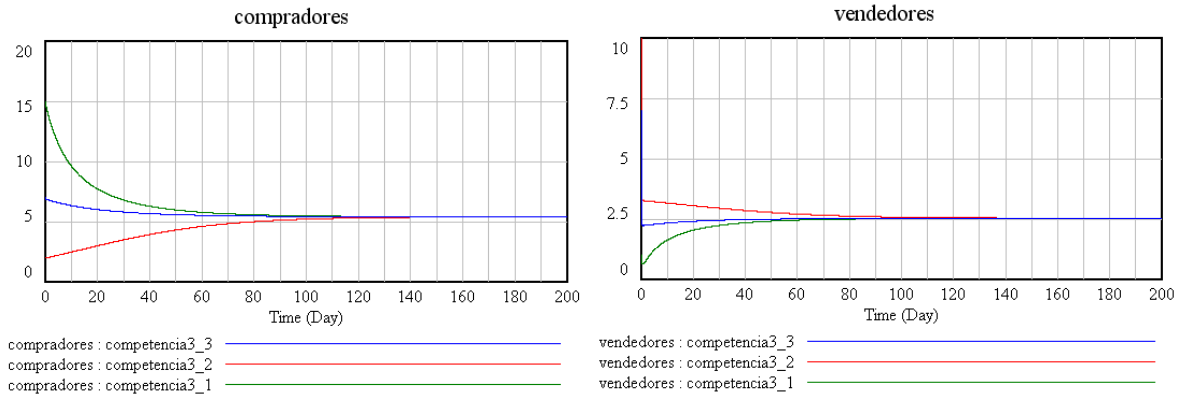


Figura 54. Resultados simulación (tercer caso.)

La figura 55 izquierda muestra la estabilidad del punto de equilibrio  $M$  (coexistencia) y la figura de la derecha muestra la trayectoria de la solución en el plano fase, se inicia en el punto  $(7,7)$  y finaliza en el  $M(5.4, 2.5)$

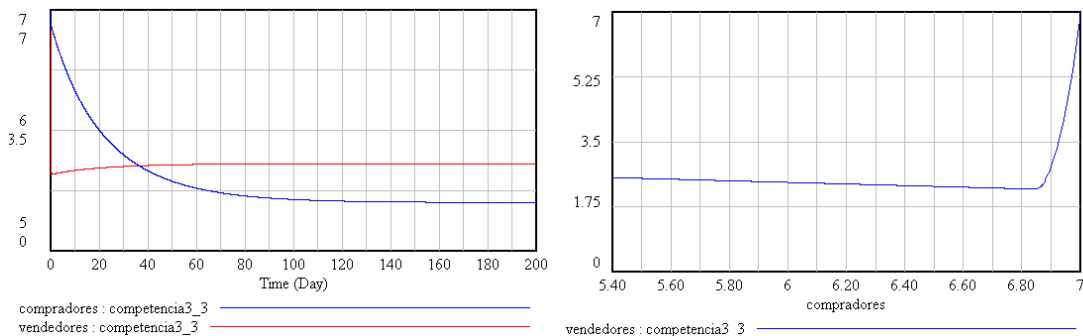


Figura 55. Simulación y Plano fase (tercer caso).

## 2.2.2.4.- Cuarto caso.

Este último caso se corresponde con la existencia de dos puntos de equilibrio asintóticamente estables, o nodo inestable y un punto asintóticamente inestable. Es decir, el punto de coexistencia es inestable. La simulación del modelo la realizaremos modificando los valores de los parámetros, siendo,

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(0.26 - 0.021x(t) - 0.06y(t)); & x(0) \\ y'(t) = y(t)(0.06 - 0.01y(t) - 0.01x(t)); & y(0) \end{cases}$$



# El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

Para encontrar las soluciones constantes, resolvemos el sistema  $x'(t)=0$ ;  $y'(t)=0$ , obteniéndose los puntos  $P(12.38,0)$ ;  $Q(0,6)$ ;  $M(2.56, 3.93)$  y  $N(0,0)$ . Estos puntos de equilibrio son los cortes de las rectas:  $0.26 - 0.021x - 0.06y = 0$ ;  $0.06 - 0.01y - 0.01x = 0$ ;  $x=0$ ,  $y=0$ , representados en la figura 56.

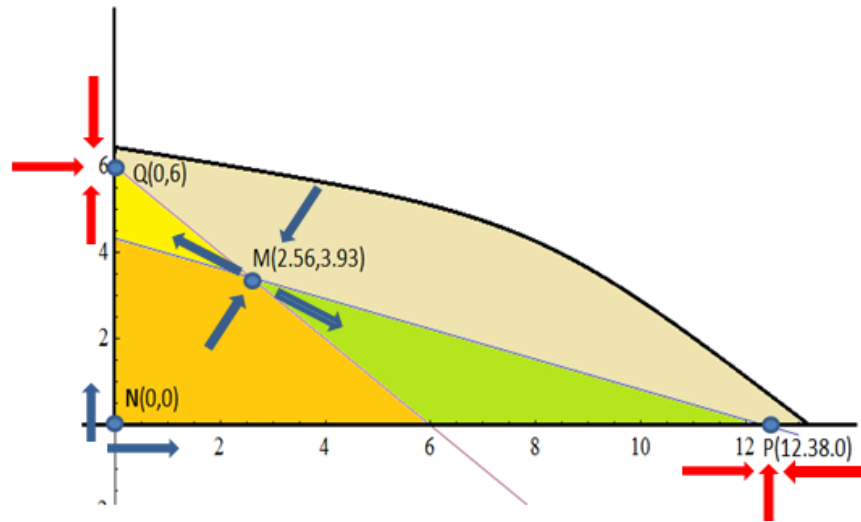


Figura 56. Puntos de equilibrio (cuarto caso).

El estudio cualitativo del modelo muestra que los puntos Q y P son estables, el punto N es inestable y el punto M un nodo. La simulación del modelo para 6 valores iniciales diferentes confirma esta conclusión. En la figura 57 pueden apreciarse los resultados. Para los valores iniciales (2,7), (3,4.6), (7,2) y (15,3), a largo plazo, los vendedores se estabilizan en 6 y desaparecen los compradores; mientras que para los valores (13,1) y (11,0.5) ocurre lo contrario, los compradores tienden a 12.3 y desaparecen los vendedores.

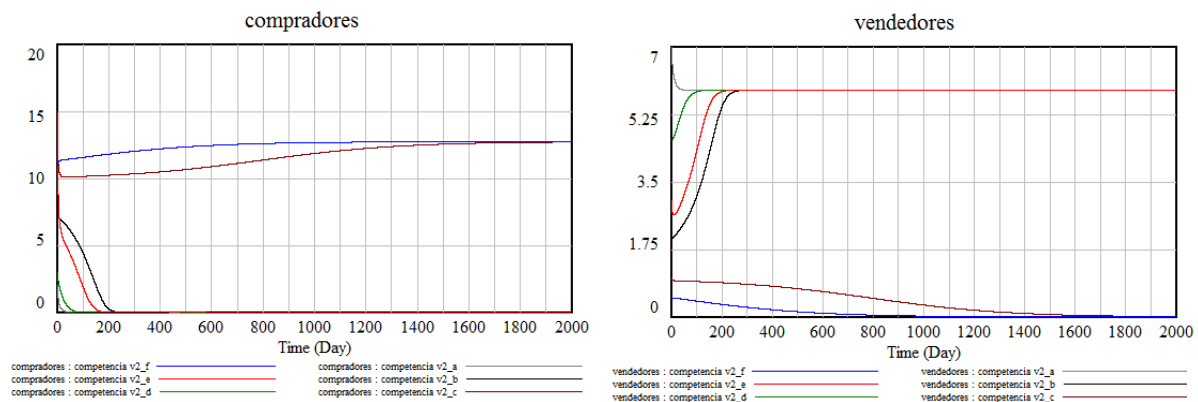


Figura 57. Resultados de la simulación (cuarto caso).



## CONCLUSIONES.

En la actualidad, los modelos matemáticos son cada vez más utilizados en Economía. Como curiosidad, si se hace una búsqueda en Google con las palabras “modelos matemáticos en economía”, se obtienen 97100 entradas. Sin embargo, es mínimo el estudio y la presencia de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales en los programas de los diferentes Grados relacionados con este campo. Una posible manera de paliar este inconveniente es hacer uso, de una forma razonada, de las herramientas de simulación disponibles en el mercado.

De entre las diferentes metodologías, a nuestro entender, es la DS una de la más interesantes de usar.

- Por la sencillez de su implantación y la facilidad del uso de un software específico, como Vensim PLE®
- Por la posibilidad de modelar, diseñar y estudiar el comportamiento de cualquier sistema dinámico en un contexto económico.
- Por comprender la estructura interna y el comportamiento de un sistema, analizando las partes independientes de las que está formado y las relaciones existentes entre ellas.

Para estudiar los sistemas dinámicos mediante DS es preciso, en un primer momento, identificar el problema, describir con precisión los objetivos a conseguir, y construir el modelo utilizando como herramienta su Diagrama Causal. A continuación se elabora el Diagrama de Forrester, se introducen las ecuaciones del modelo, y se procede a la ejecución de diferentes simulaciones. Si al comparar los resultados obtenidos con los datos históricos disponibles, existe coherencia, entonces el modelo es el adecuado. En caso contrario se tienen que cambiar las hipótesis de partida y empezar de nuevo con el proceso.

El objetivo principal del presente trabajo es la creación, análisis y simulación de modelos matemáticos económicos, en especial los del tipo presa-depredador, haciendo uso de la Dinámica de Sistemas y utilizando como software de simulación Vensim PLE®

En el primer tema se hace una introducción a la DS y se detalla su evolución histórica y las diferentes etapas de su implementación. Posteriormente se introducen los conceptos fundamentales, y se describe la manera de construir, simular y analizar un modelo con Vensim PLE®. Se finaliza el tema describiendo los modelos elementales clásicos construidos por medio

## El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía

---

de una ecuación diferencial, así como algunas modificaciones importantes de los mismos, todos ellos en un contexto económico. Estos cambios en los modelos ponen de manifiesto la utilidad y sencillez de esta metodología, frente a un estudio matemático riguroso de los mismos.

El tema segundo está dedicado al estudio de los modelos matemáticos basados en un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo presa-depredador, considerando a los compradores de un artículo como las presas y a los vendedores como los depredadores. Se presenta el modelo y los objetivos básicos que se desean alcanzar con su estudio, respondiendo a las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo explicar el comportamiento cíclico de la evolución de dos poblaciones, donde una especie compite con la otra?
- ¿Por qué una intensidad baja de captura favorece más a los depredadores que a las presas?

Seguidamente, se introducen algunas modificaciones al modelo clásico, relacionadas con la competencia. La primera de ellas la propuso *Leslie* en 1926, suponiendo que el crecimiento de las presas no es exponencial sino del tipo logístico, con una capacidad de carga  $K$ . Además se supone que el ritmo de evolución de los depredadores es también del tipo logístico, donde ahora su capacidad de carga depende de los compradores.

Finalmente se introduce el factor de la competencia en el modelo, para tener en cuenta la interacción de los elementos de una misma especie, ya que compiten por los mismos recursos, provocando, por ejemplo, que una especie tienda a la extinción (los compradores desaparecen), mientras que la otra se aproxime a su capacidad de carga (los vendedores triunfan), o bien pudiese ocurrir que las dos especies, en función de los recursos disponibles, tiendan a un estado de equilibrio. En resumen, por medio de la simulación, es fácil de mostrar los cuatro casos diferentes que se presentan y analizarlos de una manera muy simple, modificando los diferentes parámetros del modelo.

Para terminar, considero que hoy en día existe un mayor aumento de la competencia dentro del área económica, y que gracias al uso de la DS y al conocimiento y análisis de modelos matemáticos del tipo presa-depredador, la empresa podría vigilar a sus competidores, simular cuantitativamente los elementos claves por medio de Vensim PLE con el objetivo de conocer las diferentes relaciones entre ella y sus competidores. Al final se pueden diseñar diferentes estrategias y ver cuáles de ellas son las más interesantes para tener ventaja en un mercado tan competitivo como el actual.

## BIBLIOGRAFÍA-

Allman, E.S.; Rhodes, J.A. (2004), *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press.

Aracil, J. (1995), *Dinámica de Sistemas*, Madrid, Isdefe.

Aracil, J.; Gordillo, F. (1997), *Dinámica de Sistemas*, Madrid, Alianza Editorial.

Borrelli, R.; Coleman; C.S. (2002), *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico.

Forrester, J.W. (1958), "Industrial Dynamics-A Major Breakthrough for Decision Makers", *Harvard Business Review*, Vol. 36, No. 4, pp. 37-66.

Forrester, J.W. (1961), *Industrial Dynamics*, Massachusetts Institute of Technology Press

Forrester, J.W. (1969), *Urban Dynamics*, Pegasus Communications, Inc.

Martin García, J. (2001), Dinámica de Sistemas. Conceptos. Disponible online: <http://dinamica-de-sistemas.com/elibros.htm>

Martin García, J. (2001), Dinámica de Sistemas. Avanzado. Disponible online: <http://dinamica-de-sistemas.com/elibros.htm>

Meadows, D.H. (1972), *Limits to Growth*, New York, University Books.

Navas, J.; Quesada, J.M.; Goñi, J.; Vélez de Mendizabal, N.; Villoslada, P.; Esteba, F.J. (2005), "Glioma-Immune evasion: a system dynamics approach". *Proceedings of the II International Conference on Computational Bioengineering*, 699-710, Rodrigues et al. (Eds.), IST Press, ISBN: 972-8469-37-3.

Navas, J. (2013), "Modelos Matemáticos en Biología". Disponible online: <http://matema.ujaen.es/jnavas>

Ortega, H. (1999), "Un modelo logístico para el crecimiento tumoral en presencia de células asesinas". *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, volumen XX, 3, pp. 61-67.