**MaMaEuSch**

**Ma**nagement **Ma**thematics for
**Eu**ropean **Sch**ools
http://www.mathematik.uni-kl.de/~mamaeusch/

# Modelos de input-output y cadenas de Markov

Ao. Univ.-Prof. Werner Peschek[1]

El proyecto MaMaEuSch ha sido desarrollado con ayuda parcial de la Unión Europea dentro del programa Sócrates.



[1] Asistente de didáctica del departamento de Matemáticas de la Universidad de Klagenfurt

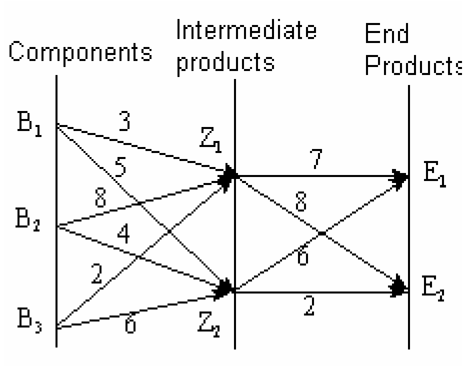
# Modelos de entrada-salida y cadenas de Markov

Vamos a presentar dos modelos económicos, que están presentes en cualquier libro de la escuela de comercios ("HAK") y de las escuelas generales ("AHS").

Comenzaremos con un ejemplo para la:

## Interconexión de materiales

**Ejemplo:** Una fábrica utiliza tres productos $B_1$, $B_2$, $B_3$ para producir dos productos intermedios $Z_1$, $Z_2$, que a su vez estos producirán dos productos finales $E_1$ y $E_2$. Las cantidades requeridas para la producción se muestran en el siguiente gráfico:




Matriz de Interconexión: $(B \to Z) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ; $(Z \to E) = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Por ejemplo para producir 2 unidades de $Z_1$ y 3 unidades de $Z_2$ (demanda, $N_Z$), se necesita la siguiente demanda de producción, $X_B$ de componentes $B_1$, $B_2$ y $B_3$:

$B_1$: $3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$
$B_2$: $8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 28$
$B_3$: $2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 22$

**En notación matricial:** $\mathbf{X_B = (B \to Z) \cdot N_Z} = \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 22 \end{pmatrix}$ con $N_Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

igualmente: $\mathbf{X_Z = (Z \to E) \cdot N_E}$

Si se quiere calcular directamente para una determinada demanda de componentes $X_B$, un determinado número de productos finales $N_E$, se necesita la matriz de interconexión (B→E). Como se puede ver en el gráfico, se cumple que:

$$(B\to E) = (B\to Z)\cdot(Z\to E)$$

Y por lo tanto $\mathbf{X_B = (B\to E)\cdot N_E = (B\to Z)\cdot(Z\to E)\cdot N_E}$

En nuestro ejemplo hemos obtenido $E_1 = 3$ y $E_2 = 4$

$$X_B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 289 \\ 528 \\ 262 \end{pmatrix}$$

Paso a paso este procedimiento se vuelve un poco más complicado, debido a, además de la demanda de productos finales a una demanda adicional de productos intermedios con sus componentes i.e. se ha de satisfacer un depósito de reservas.
En estos caso es mejor presentar toda las relaciones de interconexiones de materiales en una sola matriz de interconexión:

| | | Para la producción de una unidad de | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $Z_1$ | $Z_2$ | $E_1$ | $E_2$ |
| Se necesitan (en unidades) | $B_1$ | 0 | 0 | 0 | 3 | 5 | 0 | 0 |
| | $B_2$ | 0 | 0 | 0 | 8 | 4 | 0 | 0 |
| | $B_3$ | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 0 | 0 |
| | $Z_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 8 |
| | $Z_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 2 |
| | $E_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $E_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Si denotamos la matriz de interconexión como A y la demanda de producción de $B_1$, $B_2$, ... , $E_2$ con X, entonces

$$A\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

Indica la demanda interna ("secundaria"), que se obtiene de la interconexión de materiales.
Si denotamos la demanda externa ("primaria") para $B_1$, $B_2$, ... , $E_2$ como N, se cumple que:

$$\mathbf{X} = \mathbf{N} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

La demanda total (en unidades) = demanda primaria (en unidades) + demanda secundaria (en unidades)

En nuestro ejemplo, para una demanda externa de 5 unidades de $B_1$, 10 unidades de $B_3$, 5 unidades de $Z_1$, 2 unidades de $Z_2$, 3 unidades de $E_1$ y 4 unidades de $E_2$ , obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

Este sistema es muy sencillo de resolver porque A es una matriz triangular. También podemos tomar otra estrategia de resolución transformando la matriz anterior:

$$X = N + A \cdot X \Leftrightarrow X - A \cdot X = N \Leftrightarrow (E - A) \cdot X = N \Leftrightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{N}$$

En nuestro ejemplo:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 51 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 4 & 80 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 50 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (E - A)^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 51 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 4 & 80 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 50 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 319 \\ 576 \\ 294 \\ 58 \\ 28 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

# Modelos abiertos de Leontief

Un sistema económico, i.e. una economía nacional, se compone de distintas partes que son dependientes entre sí. Son dependientes unas con otras porque en la producción se necesitan servicios, tanto de su propia área como de otros servicios de otras partes (demanda secundaria"), como “input”.
Además, normalmente también existe una demanda externa (“demanda primaria“) de servicios de distintas partes.
Como en la interconexión de materiales, queremos saber, cuantos servicios (aquí se mide en unidades monetarias) tiene que llevar a cabo cada parte, para que se satisfaga la demanda primaria y la secundaria. Al igual que en la interconexión de materiales, se cumple que:

**Servicio total (en unidades monetarias) = demanda primaria (en unidades monetarias) + demanda secundaria (en unidades monetarias)**

**Ejemplo:** Una economía nacional debe componerse de tres partes A, B, C.
De la siguiente tabla, podemos determinar que servicios necesita cada parte (en unidades monetarias), para llevar a cabo su propio servicio, por cada unidad monetaria:

| | | De las partes | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| Costes para servicios por valor de una unidad monetaria | A | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| | B | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| | C | 0 | 0,3 | 0,1 |

Dentro de un determinado periodo de tiempo, esperamos una demanda de productos de A, B, C por valor de 1000, 300, 500 unidades monetarias de todos los otros sectores (que no pertenezcan a A, B o C).
¿Qué servicios (en unidades monetarias) have to be perforquantitiy unitsd in A, B and C?

Como en la interconexión de materiales, se cumple que:

$$X = N + A \cdot X \quad \text{es decir,} \quad X = (E - A)^{-1} \cdot N$$

$$\text{donde } A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$\text{por lo tanto } \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,8 & -0,3 \\ -0,1 & -0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1220 \\ 980 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Modelos lineales de interconexión de materiales y modelos abiertos de Leontief tienen la misma estructura:
Existe una demanda externa (demanda primaria) para cada producto (servicios de cada parte), i.e. el vector demanda N.
La interconexión de materiales (la producción dependiente) puede presentarse en una matriz, A = ($a_{ij}$), donde $a_{ij}$ es la salida (el output) del producto (de la parte) i por parte del producto (de la parte) j, esto es, por otra parte el input de j por i.
La cantidad (servicio) necesitada por cada producto (parte) se representa mediante el vector X.
Estos modelos se denominan **modelos de input-output** y se cumple que:

$$\mathbf{X = N + A \cdot X} \quad \text{es decir,} \quad \mathbf{X = (E - A)^{-1} \cdot N}$$

Por lo tanto la matriz de interconexión **A** se denomina **matriz de input-output,** y la matriz $(E - A)^{-1}$ se denomina **matriz de Leontief** (Matriz-tecnológica, inversa de Leontief).

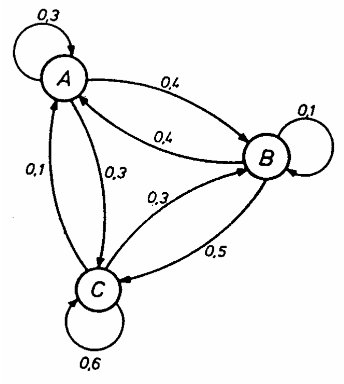
# Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov se obtienen como resultado de eventos aleatorios, donde

- el evento obtenido sólo puede estar en un estado (de muchos posibles)
- El evento obtenido depende del estado inicial, así como de las probabilidades (conocidas) de transición de un estado a otro.

**Ejemplo:** Supongamos que existe una competencia en el mercado entre tres proveedores, A, B, C (marcas respectivas).
En la siguiente tabla observamos que de los compradores que hoy compran un producto de la marca A, en un determinado periodo de tiempo un 30% volverá a comprar esta marca, un 40% cambiará a la marca B y un 30% a la marca C. Los datos para B y C se muestran en la siguiente tabla.

| | | a | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C |
| | A | 0,3 | 0,4 | 0,3 |
| de | B | 0,4 | 0,1 | 0,5 |
| | C | 0,1 | 0,3 | 0,6 |




Veamos cual será a largo plazo la participación en el mercado de las marcas A, B y C , siendo las participaciones actuales en el mercado de A, B y C, 40%, 50% y 10% respectivamente.
Situación inicial: $x_A$ (0)= 40%; $x_B$ (0)= 50%; $x_C$ (0)= 10%
Tras un periodo de tiempo las participaciones en el mercado son:

$$x_A(1) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 33\%$$

$$x_B(1) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 24\%$$

$$x_C(1) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 43\%$$

Nueva situación inicial: $x_A$ = 33%; $x_B$ = 24%; $x_C$ = 43%

Tras un segundo periodo de tiempo las participaciones de mercado son:

$$x_A(2) = 0{,}3 \cdot 0{,}33 + 0{,}4 \cdot 0{,}24 + 0{,}1 \cdot 0{,}43 = 23{,}8\%$$

$x_B(2)$ = .......................................... = 28,5%

$x_C(2)$ = ............................................ = 47,7%

En notación matricial: $\mathbf{X_{t+1} = P^T \cdot X_t}$

donde $P^T$ es la traspuesta de $P = (p_{ij})$ y tanto $X_t$ como $X_{t+1}$ son los vectores de participación en el mercado en el periodo t, t+1 respectivamente.

Tras varias iteraciones, suponemos que estas participaciones de mercado tienden a un estado equilibrado:

$$\mathbf{x_A \approx 22{,}6\% \quad x_B \approx 26{,}9\% \quad x_C \approx 50{,}5\%}$$

Esto quiere decir, que para todos los productos y para cada periodo de tiempo (sucesivo) se cumple que:

**Participación de mercado antigua = Participación de mercado nueva**, i.e,
$\mathbf{X = P^T \cdot X}$

I: $\quad x_A = 0{,}3x_A + 0{,}4x_B + 0{,}1x_C$
II: $\quad x_B = 0{,}4x_A + 0{,}1x_B + 0{,}3x_C$
III: $\quad x_C = 0{,}3x_A + 0{,}5x_B + 0{,}6x_C$

Como podemos observar, tenemos un sistema de ecuaciones homogéneo; suprimimos la tercera ecuación, pero añadimos la ecuación correspondiente a que la suma de participaciones en el mercado ha de ser el 100%:

IV: $\quad x_A + x_B + x_C = 1$

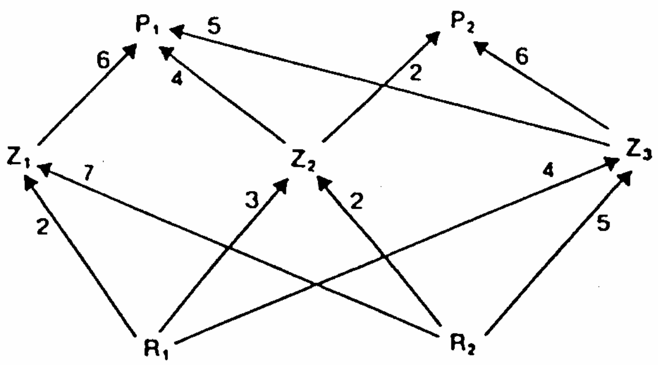
De manera que:
$$\begin{aligned} 0{,}7x_A - 0{,}4x_B - 0{,}1x_C &= 0 \\ -0{,}4x_A + 0{,}9x_B - 0{,}3x_C &= 0 \\ x_A + x_B + x_C &= 1 \end{aligned}$$

$\mathbf{x_A \approx 22,58\%}$ **;** $\mathbf{x_B \approx 26,88\%}$ **;** $\mathbf{x_C \approx 50,54\%}$

En nuestro ejemplo, el estado de equilibrio que se alcanza es independiente de la elección de los valores iniciales, estamos hablando de **cadenas de Markov ergódicas**.
Pero esto no ocurre siempre. A continuación, vamos a representar gráficamente una cadena de Markov, en la que obtenemos un estado de equilibrio para cada estado inicial, es decir, este estado depende de la elección del estado inicial, nos referimos a las denominadas **cadenas de Markov no ergódicas.**

# Ejemplos

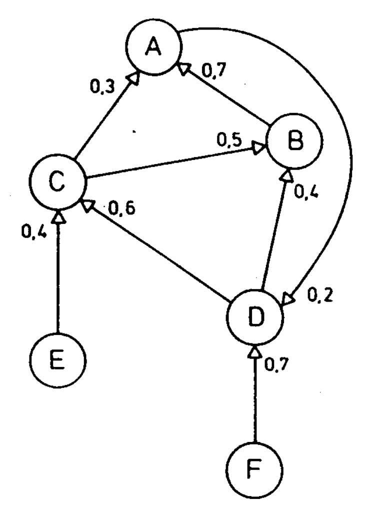
1. Tenemos el siguiente grafo ("Grafo de Gozinto") de interconexión de materiales:




Se construye la matriz A = ($a_{ij}$) que nos indica, cuántas cantidades de $R_i$ se necesitan para la producción de una unidad de $Z_j$ (primer estado de producción) y la matriz B = ($b_{ij}$), que nos indica, cuántas cantidades de $Z_i$ se necesitan para la producción de una unidad de $P_j$ (segundo estado de producción).
Calcula a partir de A y B una matriz C = ($c_{ij}$) que indique, cuántas cantidades de $R_i$ se necesitan para la producción de una unidad de $P_j$.

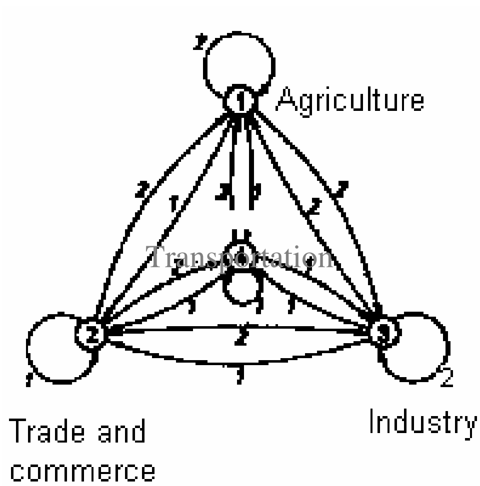
Calcula la cantidad de materia prima R y de productos intermedios Z necesarios para producir 200 unidades de $P_1$ y 400 unidades de $P_2$. Además de los productos finales P, necesitamos unas reservas de 15, 10, 10 unidades de $Z_1$, $Z_2$ y $Z_3$ respectivamente. Calcula todas estas cantidades con la ayuda de la matriz de Leontief.

2. Tenemos el plan de estructura de materiales en un proceso químico. Para A tenemos una demanda externa de 1000 unidades, para B y C una demanda externa de 500 unidades cada uno.
Calcula las cantidades de producción requeridas en A-F.




3. Una compañía petrolífera es capaz de extraer diariamente productos por valor de 130.000 unidades monetarias. Para la producción de productos por valor de una unidad monetaria, necesita carbón por valor de 0.1 unidades monetarias, electricidad por valor de 0.3 unidades monetarias y gasoil (de su propia producción) por valor de 0.2 unidades monetarias.
Una estación de corriente eléctrica tiene diariamente una demanda externa de120.000 unidades monetarias. Para llevar a cabo servicios por valor de una unidad monetaria se necesita combustible por valor de 0.3 unidades monetarias, carbón por valor de 0.5 unidades monetarias y corriente (de su propia producción) por valor de 0.1 unidades monetarias.
Por último, la mina de carbón, para la producción de carbón por valor de una unidad monetaria necesita combustible por valor de 0.1 unidades monetarias y corriente por valor de 0.3 unidades monetarias. La demanda diaria externa es de 20.000 unidades monetarias.
Con la ayuda de la matriz inversa de Leontief, calcula las cantidades diarias de producción, para que se satisfaga la demanda externa e interna de estas tres compañías.

4. (Ejemplo tomado de Bürger “Mathematik Oberstufe 3”)
Dividimos la economía nacional de un país en los siguientes sectores, *agricultura, negocio y comercio, industria* y transporte.
La producción y utilización de bienes (dentro de un determinado periodo de tiempo) se representan en la figura de la derecha (en unidades monetarias).
Tenemos la siguiente demanda externa de bienes (en unidades monetarias) según los sectores




| | |
|---|---|
| agricultura: | 18 |
| negocio y comercio: | 12 |

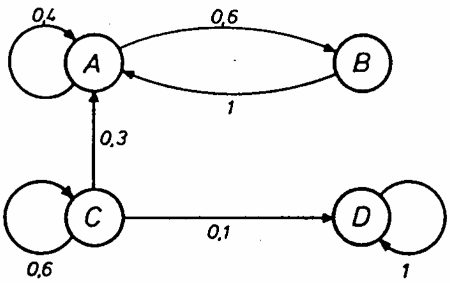
industria: 8
transporte: 2

Con la ayuda de la matriz inversa de Leontief, calcula las cantidades, que se deben producir en cada sector. Interpreta los resultados.

5. Calcula las participaciones en el mercado que a largo plazo alcanzarán las compañías R, S y T, si el comportamiento de los consumidores corresponde a una cadena de Markov con las probabilidades de cambio que se muestran en la tabla.

| von \ zu | R | S | T |
|---|---|---|---|
| R | 0,6 | 0,1 | 0,3 |
| S | 0,5 | 0,4 | 0,1 |
| T | 0,2 | 0,1 | 0,7 |

Observa la evolución de las participaciones en el mercado para la cadena de Markov del grafo, en tres periodos de tiempo, si comienza con




a) 70%, 10%, 10%, 10%
b) 10%, 10%, 10%, 70%

siendo estas las participaciones de A, B, C y D respectivamente.

Intenta predecir un estado de equilibrio, independiente del estado inicial. ¿Qué conclusiones obtienes?