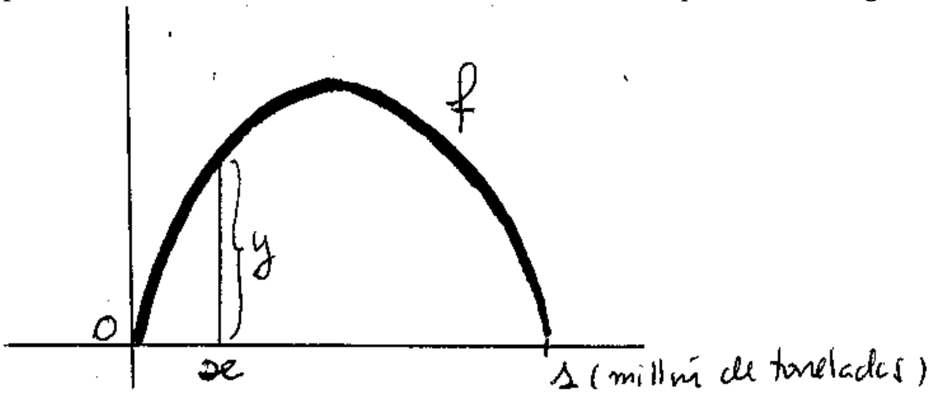
SISTEMAS DINAMICOS,

Por Manuel Morán

Sesión Primera: Ley de crecimiento y puntos de equilibrio

Presentación: Los sistemas dinámicos sirven para entender como evolucionan los procesos de la naturaleza. Modernamente han dado lugar a importantes descubrimientos, como la existencia de caos. A través de algunos ejemplos sencillos trataremos de aproximarnos a esta teoría matemática

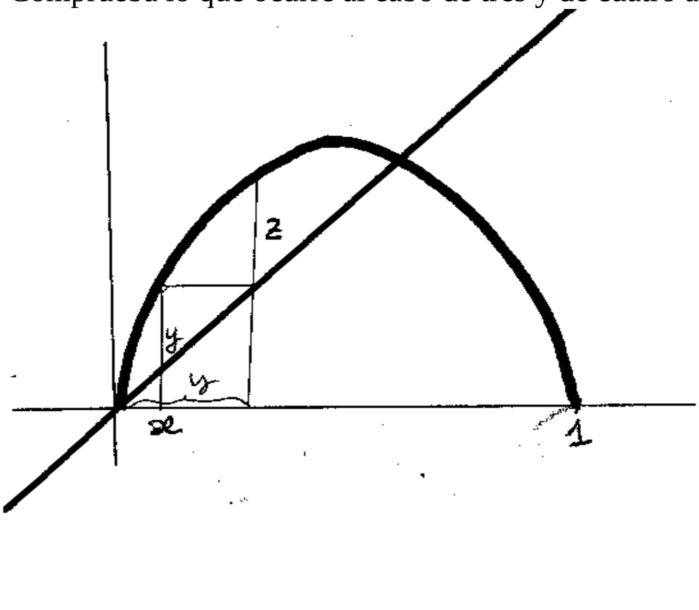
1. Supongamos que una especie de peces se reproduce de forma que si este año la cantidad de peces es *x*, el año próximo será *y*, donde *y* viene dada por la curva o dinámica de crecimiento, en la forma que indica la figura.



   a) ¿Cuál será la cantidad de peces que da una cantidad máxima para el año próximo?
   b) Cuántos peces habrá al año siguiente si este año hay 1 millón de toneladas? ¿Y si no hay ningún pez?

2. ¿Cuántos peces habrá al cabo de dos años?

   - Lleva la longitud *y* horizontalmente sobre el eje *x*. La distancia en vertical *z* hasta la curva es la que habrá dentro de dos años.
   - Observa que el mismo resultado se obtiene si se dibuja la diagonal del primer cuadrante, y se lleva el extremo superior del segmento vertical *y* horizontalmente sobre la diagonal del primer cuadrante, y luego verticalmente hasta la curva.
   - Comprueba lo que ocurre al cabo de tres y de cuatro años.



3. Podemos poner nombres a las cantidades de peces que habrá cada año con la siguiente tabla

Año inicial	año primero	año segundo	....	año k
X_0	x_1	x_2		x_k

Se cumple para cualquier año *k*

$$x_{k+1}=f(x_k),$$

que significa que la cantidad de peces en el año siguiente viene dada por la curva de crecimiento si se sabe la cantidad del año anterior. Esta ecuación se llama sistema dinámico.

Un sistema dinámico se puede dar gráficamente o por una ecuación como la anterior, como se verá en el siguiente ejemplo

c) Una población de bacterias crece por división. Cada bacteria se divide en dos ejemplares cada hora, y cada uno de estos ejemplares está ya listo para su reproducción a la hora siguiente: ¿cuál será la ecuación del sistema dinámico que nos da la población a la hora siguiente a partir de la actual?

d) Representa gráficamente la dinámica.

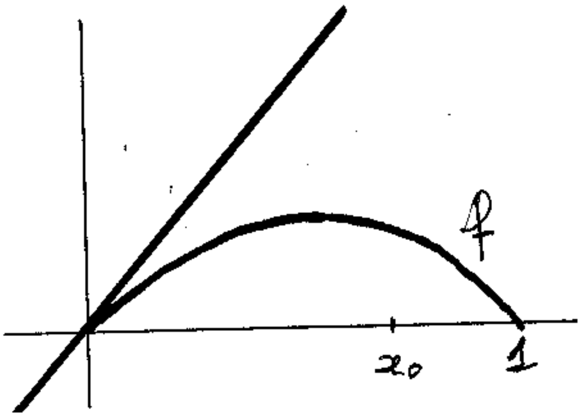
e) Supongamos que hay una sola bacteria a las ocho de la mañana de hoy. ¿Cuántas habrá a las ocho de la mañana de mañana?. ¿Y de pasado mañana? Puedes ayudarte para el cálculo aproximado de la igualdad aproximada

$$2^{10} = 1024 \approx 1000.$$

f) En una fiesta de cumpleaños con doce personas, cada uno que pasa al lado del pastel, corta la mitad de lo que le queda. Escribe un sistema dinámico que nos diga lo que le queda a la siguiente persona sabiendo el trozo que encontró la anterior. Representa gráficamente la dinámica.

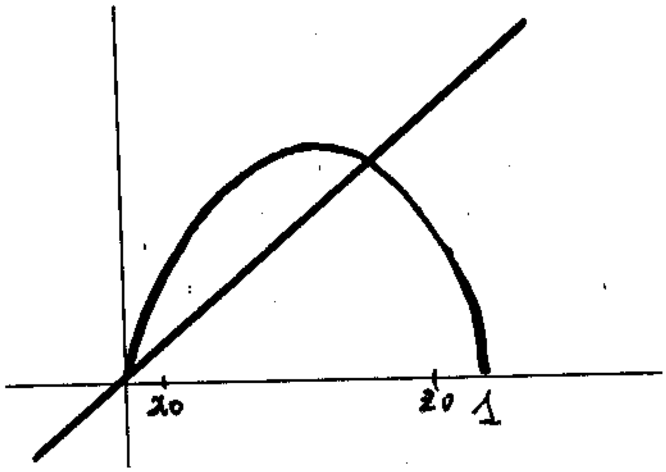
g) Calcula el trozo que queda para el perro después de que las doce personas hayan comido.

4. Las ballenas y otras especies animales tienen curvas de crecimiento muy lento. En caso de que sean cazadas libremente sus curvas de crecimiento pueden ser así:



¿Cuántas ballenas habrá al cabo de cuatro años?. ¿Cuántas habrá a más largo plazo?

5. Supongamos ahora que se prohíbe la caza de ballenas, de forma que su curva de crecimiento aumenta como indica la figura.



h) ¿Cuántas ballenas habrá a largo plazo para la población inicial x_0?

i) ¿Cuántas habrá si la población inicial es z_0?

j) ¿Cuántas habrá si la población inicial es x^*?

6. Puntos de equilibrio.

En un sistema dinámico, por ejemplo, de población de una especie animal, el sistema está en equilibrio cuando la población x^* esta estabilizada y se repite todos los años, porque se cumple

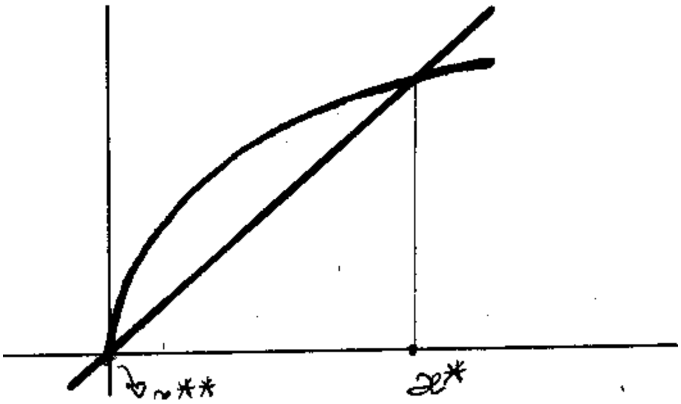
$$x^*=f(x^*)$$

El valor x^* se llama también punto fijo del sistema dinámico.

k) Encuentra los puntos de equilibrio del sistema de la actividad 5, y los de las actividades 3 y 4.

7. Estabilidad de puntos de equilibrio

l) Encuentra los puntos de puntos de equilibrio del sistema que tiene curva de crecimiento como en la siguiente figura.



m) Sabes que si la población es de x^* peces, se mantiene. Pero supongamos que por efecto de un vertido contaminante baja algo la población. ¿qué ocurre a largo plazo?

n) ¿Qué ocurre si hay algunos más por efecto de un año excepcionalmente bueno para la cría?. Estudia cuántos habrá a largo plazo

El punto de equilibrio x^* se llama estable, porque la población se vuelve a acercar a él si sufre alguna pequeña variación inicial.

o) El otro punto de equilibrio es la población nula, $x^{**}=0$. Supón que en un ecosistema no hay ningún individuo, pero se introducen unos pocos ejemplares. Supón que la curva de crecimiento es la de la actividad anterior. ¿Qué ocurrirá a largo plazo?

El punto de equilibrio $x^{**}=0$ se llama inestable porque si se altera ligeramente, la población se aleja de ese equilibrio.

p) Estudia si los puntos de equilibrio de las actividades 3 y 4 eran o no inestables.

8. Calculando raíces cuadradas con un sistema dinámico.

Supongamos que la ecuación de un sistema dinámico es

$$x_{k+1} = 2/x_k + x_k/2$$

q) Encuentra su punto o puntos fijos.

Ocurre que este es un punto fijo superatractivo, de forma que si el sistema empieza cerca del punto fijo, por ejemplo en $x_0 = 2$, las x_k se acercan velozmente al punto de equilibrio

r) Si $x_0 = 2$, encuentra x_1, x_2, x_3. Compara con el valor conocido para el punto fijo.

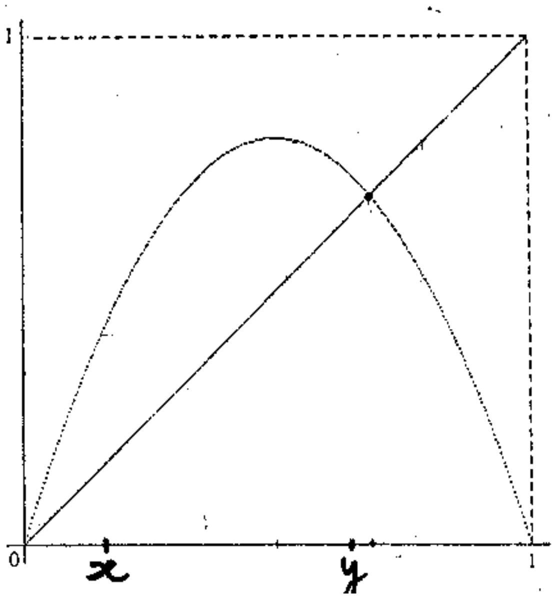
s) Idea otro sistema dinámico para calcular la raíz cuadrada de cualquier numero x.

SISTEMAS DINÁMICOS

Sesión Segunda: Dinámica compleja. Soluciones dinámicas a problemas geométricos

1. Ciclos de orden dos

Se ha observado que cierta especie de mariposas tiene poblaciones muy altas los años pares y poblaciones más bajas los años impares. En la figura puede verse la curva de crecimiento.



a) Averigua que ocurre a largo plazo si la población inicial es $x_0 = x$.

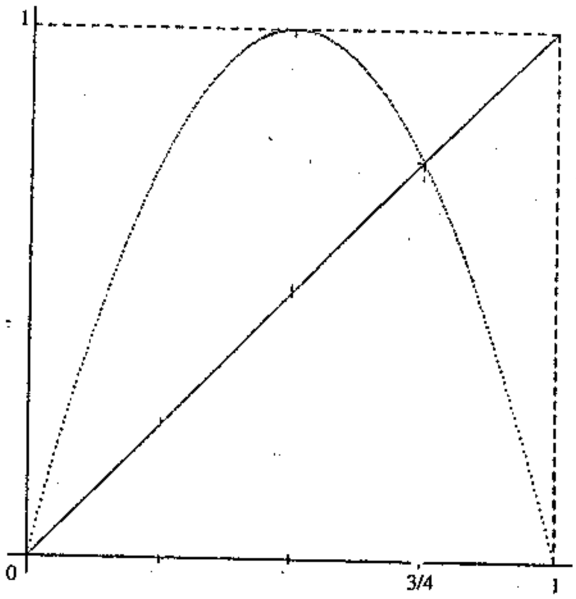
b) Averigua que ocurre si es $x_0 = y$. ¿Concuerda lo averiguado con la observación anterior?

c) Encuentra los puntos de equilibrio y analiza su estabilidad.

En este caso no hay punto de equilibrio estable, pero hay un ciclo estable de periodo dos, hacia el que se acerca la población.

2. Dinámica caótica.

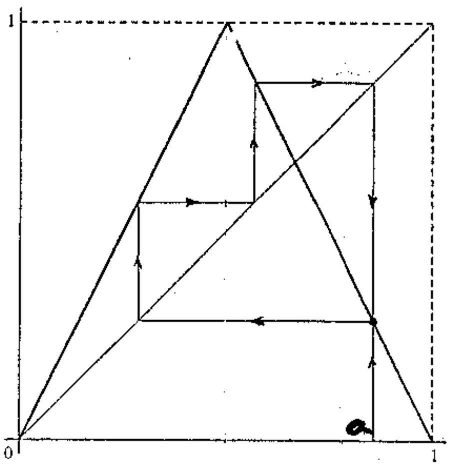
Si una población tiene un gráfico como el de la figura se dice que tiene dinámica caótica.

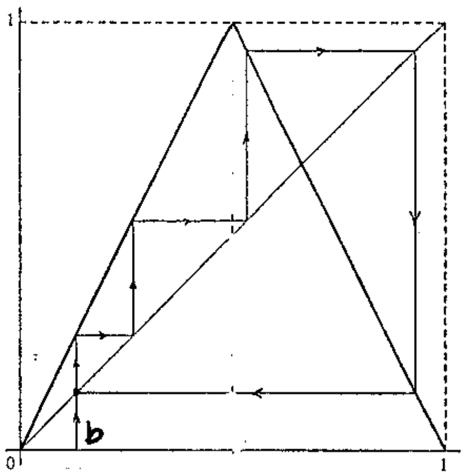


d) Encuentra las poblaciones de veinte años consecutivos. Observa que no hay ninguna clase de regularidad. Se trata de una conducta aparentemente “loca”, que brinca por todos los posibles tamaños de poblaciones. Se llama dinámica caótica.

3. El teorema de Sarkovski

Supón que una población tiene una dinámica como la de la figura, y $x_0=a$





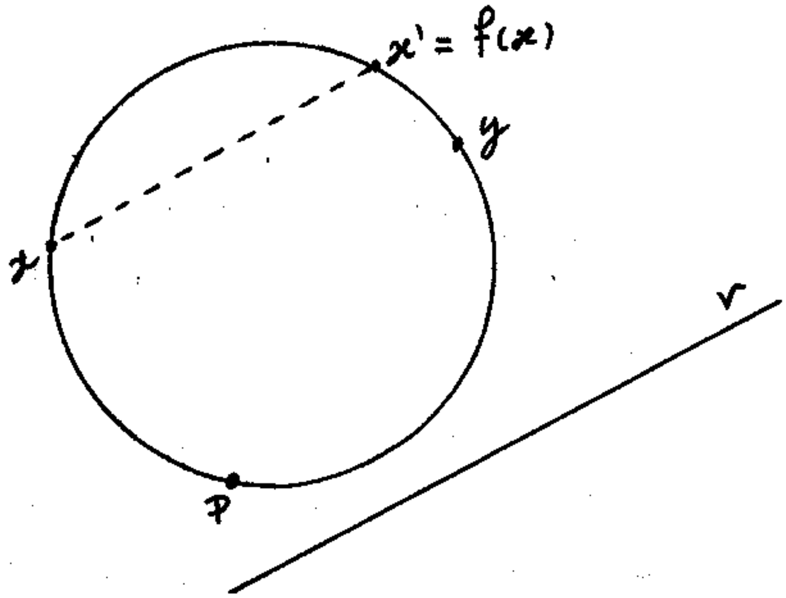
e) ¿Qué ocurre al cabo de tres años?. ¿Y al cabo de seis?

El punto *a* es periódico de orden 3. Un teorema del matemático ruso Sarkovski prueba que si una dinámica tiene un punto periódico de orden tres debe tener puntos periódicos de todos los ordenes. Por ejemplo, uno de orden cuatro, como verás al contestar la siguiente pregunta.

f) ¿Qué ocurre si $x_0 = b$?

4. Dinámica en un círculo

Se puede definir una dinámica en el circulo de la figura como sigue:

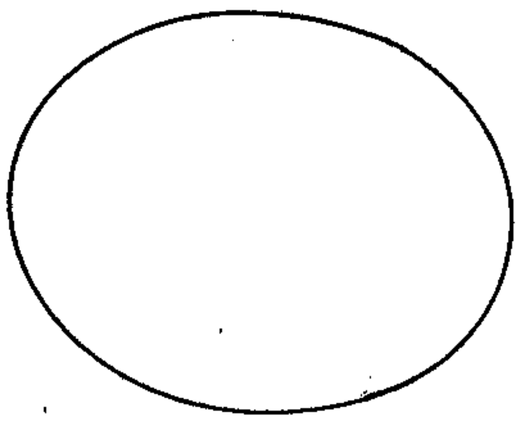


- Se fija una dirección, la de la recta *r*.
- Dado un punto *x* del círculo se traza por el la paralela a *r* hasta encontrar un nuevo punto del círculo *x'*. Se define *f(x)=x'*

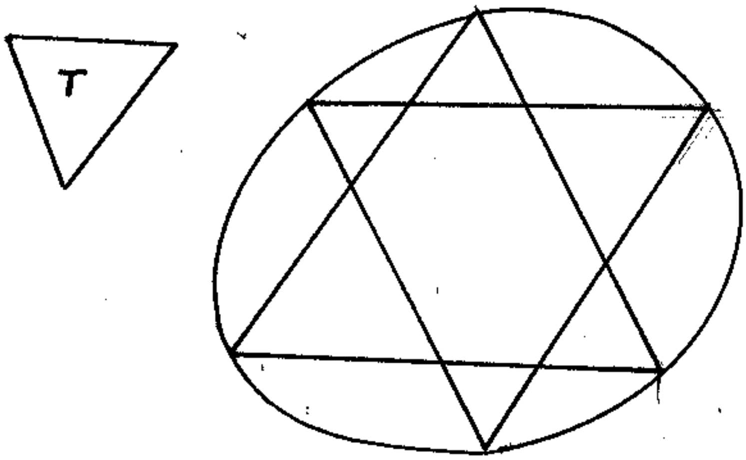
g) Encuentra *f(p)*
h) Encuentra *f(y)*
i) Imagina el sistema dinámico $x_{k+1}=f(x_k)$. ¿Qué ocurre al cabo de dos periodos si $x_0 = x$ (ver figura) ?. ¿Ocurre sólo para *x?*
j) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio de este sistema dinámico?

5. Teorema de la estrella de David.

Supón que tenemos una curva en forma de huevo, en palabras matemáticas, convexa y cerrada, como en la figura.



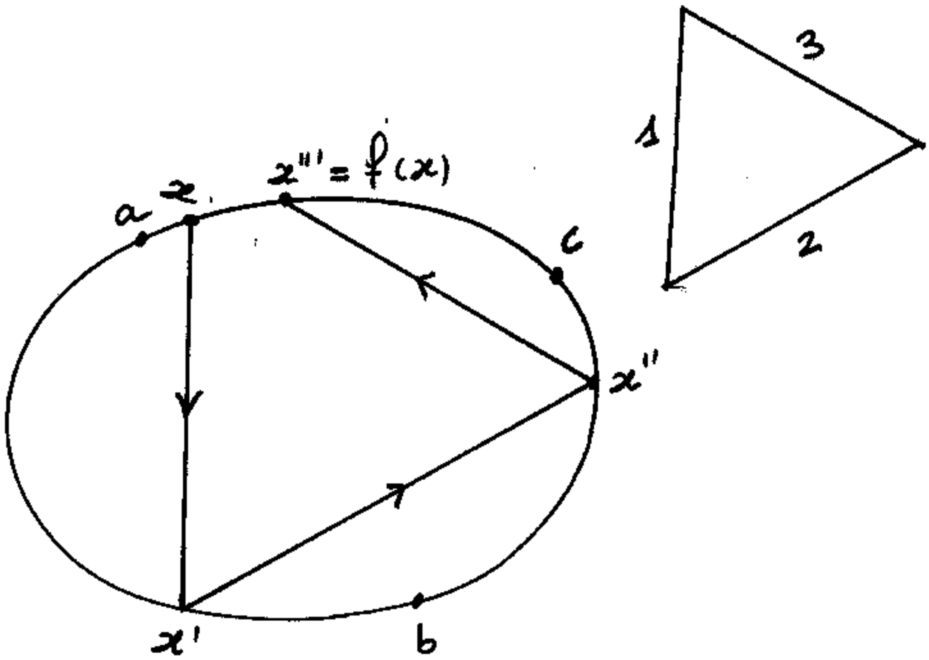
Vamos a demostrar que el siguiente teorema es cierto: Dado un triángulo equilátero *T* con cualquier orientación, existen exactamente dos triángulos equiláteros con los lados paralelos a *T* cada uno de los cuales tienen los vértices en la curva, formando una estrella de David.



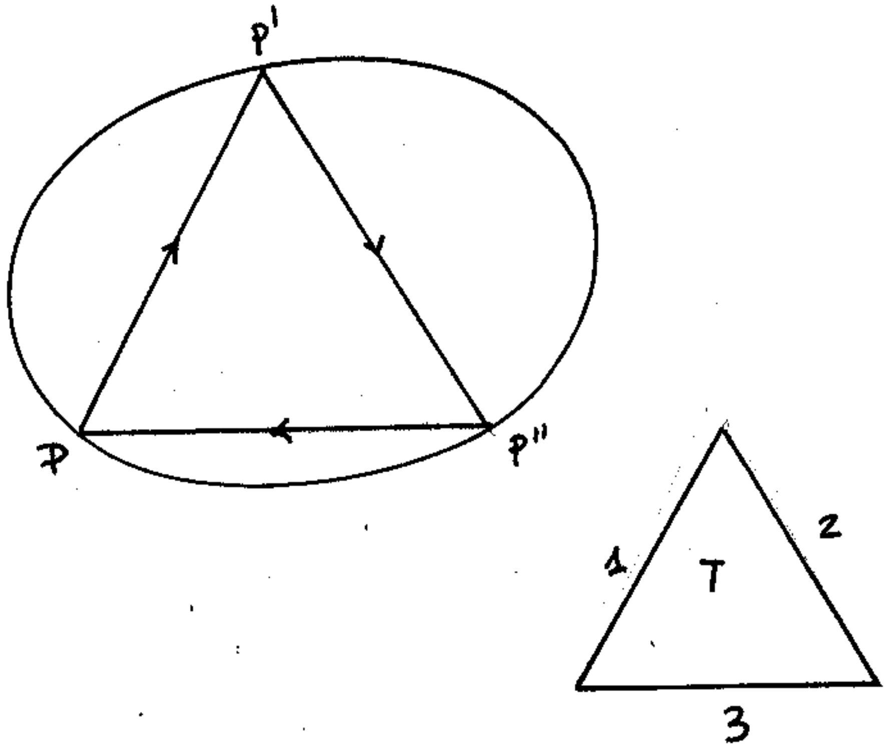
¿Cómo encontrar esta estrella?

k) Numera los lados del triángulo equilátero, 1, 2, 3. Definimos un sistema dinámico en la curva desplazando cada punto *x* primero en forma paralela al lado 1, hasta encontrar de nuevo la curva en el punto *x'*. Luego paralelamente al lado 2 hasta encontrar de nuevo el circulo en *x''*; y finalmente paralelamente al lado 3 hasta encontrar *x'''*. Se define el sistema dinámico *f(x) = x'''*.

   Encuentra *f(a)*, *f(b)* y *f(c)*



l) Supón, como en la siguiente figura, que el punto *p* retorna a sí mismo al calcular *p’, p’’, p’’’*



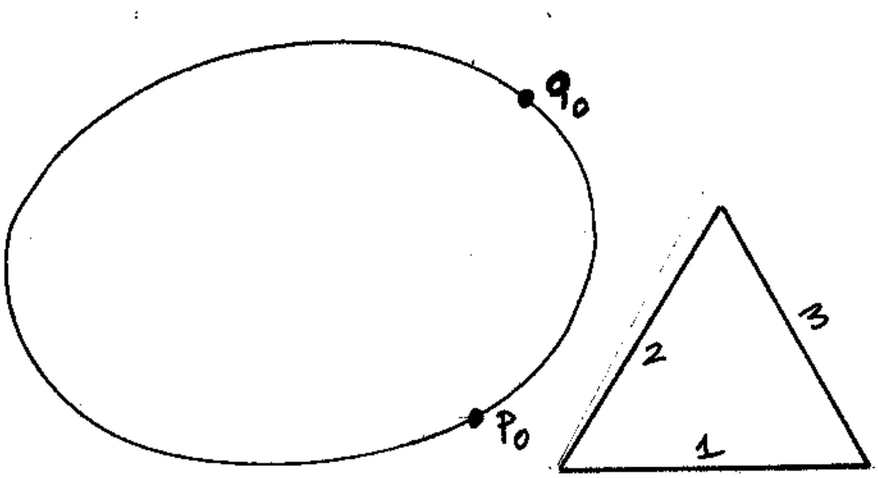
¿Cómo es el triángulo de vértices *p, p’,p’’*?

m) Supón que tienes una solución de nuestro problema (encontrar triángulos equiláteros de lados paralelos a *T* inscritos en nuestra curva). Encuentra *f(p).*

Por las preguntas anteriores vemos que los puntos fijos del sistema dinámico determinan las soluciones de nuestro problema. ¿Cómo encontrarlos?

n) Para la curva de la figura,dibuja los puntos

p_0,
$p_1=f(p_0)$,
$p_2=f(p_1)$,
………..
……….



Verás como la figura obtenida converge a uno de los dos triángulos solución..

o) Define ahora una transformación un sistema dinámico *g* trasladando paralelamente cada punto *a* primero paralelamente al lado 3, obteniendo *a’,* luego al lado 2 obteniendo *a’’* y luego al lado 1 obteniendo *a’’’* , como en la figura, hasta obtener *g(a) = a’’’.* dibuja los puntos

q_0,
$q_1=f(q_0)$,
$q_2=f(q_1)$,
………..
……….

Podrás completar así el Segundo triángulo de la estrella de David que nos faltaba.