

UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



MODELOS MATEMÁTICOS
DISCRETOS EN LA EMPRESA
GRADO EN ESTADÍSTICA Y EMPRESA
TEORÍA DE MODELOS DISCRETOS

Juan Navas Ureña

Jaén, 19 de octubre de 2017

Índice general

1. Introducción a la modelización matemática	7
1.1. Introducción	7
1.2. Elaboración de modelos matemáticos	9
1.3. Clasificación de los modelos matemáticos.	15
1.4. El papel de los ordenadores	16
1.5. Breve introducción histórica	17
1.6. Algunas definiciones básicas.	18
2. Diagonalización de matrices	23
2.1. Introducción	23
2.2. Valores y vectores propios	25
2.3. Diagonalización de matrices cuadradas.	27
2.4. Cálculo de la potencia de una matriz diagonalizable	30
2.5. Métodos numéricos	32
2.5.1. Método de las potencias	32
2.5.2. El método de las potencias con cambio de escala	34
2.5.3. Deflación	36
3. Modelos basados en ecuaciones y sistemas en diferencias	39
3.1. Introducción	39
3.1.1. Sucesión de Fibonacci	39
3.2. Ecuaciones lineales de primer orden	46
3.3. Ecuaciones lineales de segundo orden	47
3.3.1. Resolución de la ecuación homogénea	49
3.3.2. Resolución de la ecuación completa	54
3.4. Sistemas de ecuaciones en diferencias	58
3.5. Sistemas dinámicos discretos	64
3.5.1. Introducción	64
3.5.2. Ejemplos de sistemas dinámicos	65
3.5.3. Conceptos de dinámica discreta	66
3.5.4. Modelos dinámicos discretos lineales.	69
3.5.5. Modelos dinámicos discretos no lineales	74
3.5.6. Puntos de equilibrio y periódicos.	77
3.5.7. Estabilidad	78

3.5.8.	Sistemas caóticos	79
3.5.9.	Diagramas de bifurcación	82
3.5.10.	Modelos discretos con retardo	84
3.6.	Ejemplo de sistema dinámico: la Geometría Fractal	90
3.6.1.	Antecedentes históricos	93
3.6.2.	La geometría fractal.	95
3.6.3.	Autosemejanza	99
3.6.4.	El conjunto de Mandelbrot	100
3.6.5.	La dimensión fractal	103
3.6.6.	Tipos de fractales	106
3.6.7.	El juego del Caos	110
3.6.8.	Aplicaciones de la Geometría Fractal.	111
4.	Modelos discretos matriciales	119
4.1.	Introducción	119
4.2.	Cadenas de Markov	119
4.2.1.	Matrices estocásticas	120
4.2.2.	Diagramas de estados	121
4.2.3.	Cadenas de Markov regulares	123
4.2.4.	Propiedades de las matrices estocásticas	124
4.3.	Modelo de Leslie	140
4.3.1.	Modelo discreto exponencial	141
4.3.2.	Modelo discreto matricial	143
4.3.3.	Generalización del modelo matricial	146
4.4.	Tablas de vida y modelo de Leslie	158
4.4.1.	De las tablas de vida al modelo matricial	162
4.5.	Modelo de Lefkovitch	167
4.6.	Modelos que dependen de la densidad	170
4.6.1.	Caso práctico	171

Presentación

El temario de Modelos Matemáticos en la Empresa se divide en dos bloques, el primero dedicado al estudio de los modelos discretos, siendo las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias las herramientas matemáticas básicas para su estudio. El segundo bloque hace referencia al estudio de los modelos continuos y ahora serán las ecuaciones diferenciales y los sistemas de ecuaciones diferenciales quienes juegan un papel predominante, además realizaremos una aproximación a la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales y a los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Gran parte de los modelos que desarrollamos están enfocados en estudiar el sistema modelizado calculando sus cambios numéricos, describirlos, predecirlos y analizar sus consecuencias económicas.

Iniciaremos el texto describiendo el campo de acción de los modelos matemáticos en la investigación científica en Economía, con el objetivo de:

- Comprender el alcance de la modelización matemática.
- Conocer lo que significa simular un modelo.
- Clasificar los distintos modelos matemáticos.

A continuación nos centraremos en el estudio de los modelos matemáticos discretos. Empezaremos con los conceptos de valor y vector propio, para poder encontrar la potencia de una matriz, y conocer los modelos matriciales clásicos: *Markov*, *Leslie* y *Lefkovitch*.

Los objetivos a conseguir son:

- Comprender el concepto de modelo discreto.
- Saber encontrar la potencia de una matriz cuadrada.
- Conocer los modelos de *Leslie* y *Lefkovitch*, así como su comportamiento a largo plazo.

- Aplicar los modelos anteriores a situaciones reales.

Por último, se introducirán los conceptos básicos de los sistemas dinámicos discretos y su aplicación al campo de la Economía. En este caso, será necesario:

- Conocer las ecuaciones en diferencias y sistemas en diferencias.
- Calcular y clasificar los puntos de equilibrio de un modelo discreto.
- Saber interpretar su diagrama de bifurcación.
- Conocer el modelo de crecimiento discreto exponencial.
- Comprender el modelo discreto logístico y sus diversas generalizaciones.
- Saber trabajar con modelos no lineales.

La segunda parte de la materia está dedicada al estudio de los modelos continuos. Se empezará con los modelos basados en ecuaciones diferenciales. Con ello se pretende que los alumnos conozcan las propiedades matemáticas más elementales de este concepto, su interpretación y aplicación a problemas económicos que dependen de una sola variable.

- Comprender el concepto de modelo continuo.
- Saber resolver de forma explícita ecuaciones diferenciales sencillas.
- Comprender el concepto de estabilidad de las soluciones.
- Saber analizar cualitativamente ecuaciones diferenciales autónomas.
- Conocer los distintos modelos continuos estudiados, especialmente el exponencial y el logístico.

Posteriormente generalizaremos muchos de los conceptos anteriores para plantear, resolver y comprender algunos modelos económicos con más de una variable.

- Saber encontrar las soluciones de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.
- Entender el análisis cualitativo de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.
- Conocer el modelo *Lotka - Volterra*.
- Saber analizar modelos en competencia.

Y finalizaremos la segunda parte con una introducción a los métodos numéricos. Se exponen los métodos usuales de discretización para la resolución aproximada de problemas de valores iniciales de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.

- Entender la necesidad de utilizar técnicas numéricas.

- Encontrar un valor aproximado de la solución de una ecuación diferencial por medio de los métodos más usuales.
- Utilizar un programa de ordenador para poder comparar los diferentes métodos de aproximación.



Tema 1

INTRODUCCIÓN A LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

1.1. Introducción

Una de las herramientas más interesantes que actualmente disponemos para analizar y predecir el comportamiento de un sistema económico es la construcción y posterior simulación de un modelo matemático. Son muchas las razones que justifican la edad de oro que hoy en día vive la modelización matemática, pero debemos de destacar, en primer lugar, el mejor conocimiento de los procesos económicos, y en segundo lugar, el espectacular avance de los ordenadores y el software matemático.

Puesto que este trabajo es una introducción al estudio de los Modelos Matemáticos en la Empresa, es conveniente comenzar esta primera sección precisando lo que entendemos por un modelo matemático.

Con frecuencia la palabra modelo tiene distintas interpretaciones, nosotros la aplicaremos en el sentido dado por el profesor *Sixto Ríos*, [53]:

“un modelo es un objeto, concepto o conjunto de relaciones, que se utiliza para representar y estudiar de forma simple y comprensible una porción de la realidad empírica”.

Desde el punto de vista del determinismo, detrás de un fenómeno económico siempre hay un conjunto de ecuaciones que son capaces de determinar las consecuencias del fenómeno a partir de sus causas. Es bastante usual que en un determinado fenómeno económico seamos capaces no sólo de distinguir ciertos procesos sino que además podamos encontrar las relaciones que existen entre ellos. En estos momentos estaremos en condiciones de construir unas ecuaciones que lo describan y a las que

llamaremos un modelo matemático del fenómeno económico.

Como es natural, de un mismo fenómeno económico podemos construir muchos modelos matemáticos diferentes entre sí, cuyo grado de eficacia dependerá del conocimiento que tengamos de los procesos que se investigan y de las posibilidades que tengamos de experimentar.

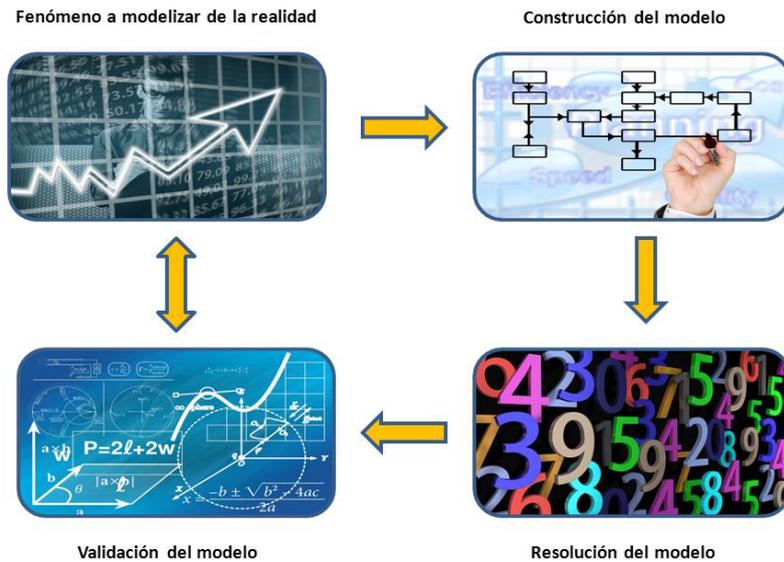


Figura 1.1: Fases de la modelización.

Generalmente los métodos que se utilizan para estudiar un fenómeno económico son la construcción de un modelo matemático o bien el uso del método científico, el cual está basado en:

- La observación y en la descripción.
- El desarrollo de hipótesis o explicaciones.
- La comprobación por experimentación de dichas hipótesis.
- La aplicación de estos conocimientos en la resolución de problemas similares.

Supongamos un problema concreto, como por ejemplo, determinar la cantidad de empresas que existirán dentro de un año conocida la situación actual, en un entorno que presenta cierta estabilidad. Ante esta situación, podemos recurrir a observaciones anteriores e intentar dar una estimación del dato pedido. Es decir, podemos hacer uso de una herramienta estadística y proponer un resultado más o menos acertado según la complejidad de la técnica empleada. Pero si el problema que abordamos es tal, que apenas disponemos de datos actuales o pasados, debemos de elaborar un modelo que sea capaz de dar solución al problema planteado y además nos aporte información, de tal manera que nuestra actuación en el futuro sea la más acertada. Esta última situación es la que se presenta con más frecuencia cuando se estudia un

fenómeno económico.

Es evidente, que una de las ventajas del uso de los modelos matemáticos es su bajo costo, si lo comparamos con los modelos físicos. Por ejemplo, es mucho más barato y rápido elaborar un modelo matemático que describa la evolución del número de empresas que empezar con un determinado número de ellas y esperar cierto tiempo para poder experimentar con ellas.

1.2. Elaboración de modelos matemáticos

Los modelos y la realidad están relacionados a través de dos procesos: la **abstracción** y la **interpretación**. El primero de ellos nos obliga a encontrar cuales son los elementos más importantes del problema y cuales son los accesorios. Para saber si un elemento es o no importante tendremos que ver su efecto relativo en la evolución del sistema. En cuanto a la interpretación, debemos de entenderla como la manera en que las componentes del modelo (parámetros, variables) y su comportamiento pueden estar relacionadas con las componentes, características y comportamiento del sistema real que queremos modelar.

Por tanto, la primera de las fases necesaria para construir un modelo matemático es la abstracción, para ello tenemos que establecer ciertas hipótesis, definir las variables y desarrollar las matemáticas adecuadas para poder resolver el problema. La fase siguiente es tratar de simplificar las herramientas matemáticas utilizadas. Los resultados que se deducen del modelo matemático nos deberían llevar a poder efectuar algunas predicciones sobre el mundo real. El paso siguiente sería recoger datos de la situación de la que se ha extraído el modelo y compararlos con las predicciones. Si no coinciden, los datos que ya poseemos nos pueden servir para modificar las hipótesis. Si las predicciones coinciden con la realidad, entonces las hipótesis son correctas y también lo son las variables definidas. En caso contrario, si se observan discrepancias será necesario construir otro modelo más aproximado y fiable. Como podemos ver, la creación de un modelo matemático es un proceso progresivo.

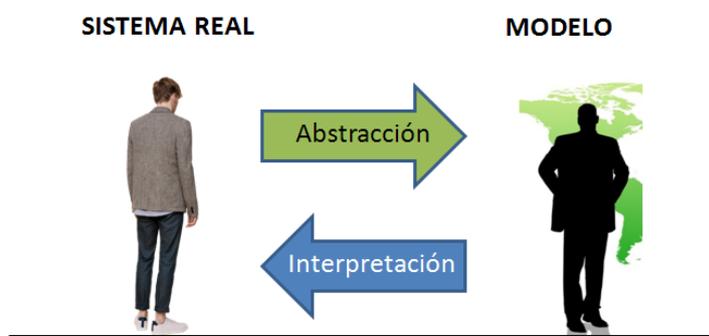


Figura 1.2: Conexión entre la realidad y su modelo.

A continuación expondremos más detenidamente los pasos que debemos seguir para construir un modelo matemático.

- (a) Se debe empezar formulando las siguientes preguntas:
 - ¿Cuál es la información que realmente necesitamos?.
 - ¿A qué se reduce ahora el problema?.
- (b) Descripción cualitativa del modelo.
 - Se debe iniciar por el más simple que describa el comportamiento económico del sistema.
 - Ver si los resultados que nos aporta el modelo dan respuesta a las preguntas planteadas.
- (c) Descripción cuantitativa del modelo.
 - Tenemos que definir las variables y ver la manera en que están relacionadas.
 - Debemos definir los parámetros del modelo, y asegurarnos de que cualquier otro parámetro es redundante.
- (d) Introducción de las ecuaciones del modelo.
 - Se escriben las ecuaciones, con la ayuda de un diagrama o de una tabla.
- (e) Análisis de las ecuaciones.
 - Debemos comprobar que su análisis da respuesta a las cuestiones planteadas.
 - Se encuentra la solución general.
- (f) Volver a examinar las hipótesis.
 - Se intenta simplificar el modelo.
 - Si nuestro modelo no responde a las preguntas iniciales, debemos volver a los pasos (c), (d) y (e).
- (g) Relacionar los resultados encontrados con hechos conocidos.
 - ¿Se ha contestado al aspecto económico?.
 - ¿Están los resultados de acuerdo con la intuición?.
 - ¿Confirman los datos o los experimentos dichos resultados?.

El diagrama de la Figura 1.2 representa las principales etapas que intervienen al construir un modelo matemático de una situación real.

A continuación utilizaremos un ejemplo elemental, en concreto la evolución de un cultivo de cierto tipo de células, para construir un modelo matemático.

- **Descripción del fenómeno real y objetivos del modelo.** Para conocer como evoluciona el cultivo realizamos diversos experimentos y observamos un rápido crecimiento de la población. El tipo de preguntas que podemos hacer son las siguientes: ¿cómo varía el número de células con el tiempo?, ¿qué tipo de variables influyen en su desarrollo?.
- **Elección de variables.** En la fase de experimentación se ha podido observar que la célula crece, se divide en dos y cada una de ellas inicia de nuevo el proceso de crecimiento. Se detecta además que el tiempo necesario para que crezca una célula y se duplique es aproximadamente 20 minutos. Por tanto, el tiempo de vida de una célula, podemos considerarlo como una variable que interviene en el problema. Es evidente que existen muchas otras variables, las cuales pueden ser clasificadas en variables de entrada, que son las que pueden influir en los resultados, y variables de salida, que corresponden a los resultados. En nuestro problema, seleccionamos como variable de salida el número de células existente en el cultivo en el tiempo t . El tiempo t transcurrido desde el instante inicial será la variable independiente.

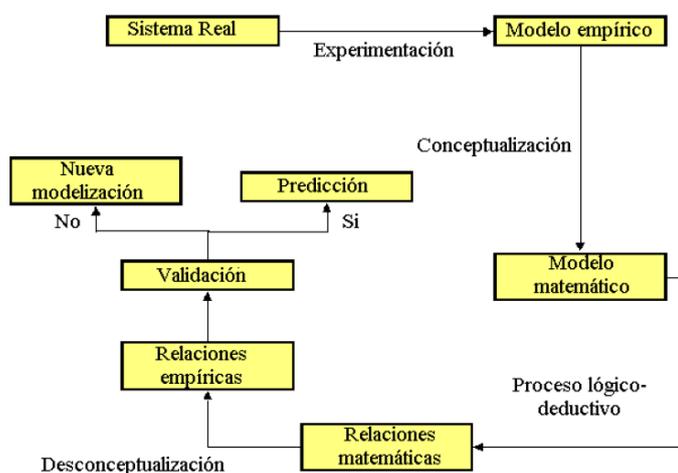


Figura 1.3: Etapas necesarias para construir un modelo.

- **Relaciones cualitativas entre las variables.** De los experimentos realizados se desprende que bajo las mismas condiciones de partida, el número de células del cultivo crece con el tiempo.
- **Recopilación de datos.** En la Tabla 1.1 aparecen los datos recogidos en la fase de experimentación. Observemos que los datos recopilados permiten ser

ajustados por los valores, $100, 2 \times 100, 2^2 \times 100, 2^3 \times 100, 2^4 \times 100, \dots$, que corresponden a un crecimiento exponencial. Este último paso es el verdaderamente importante en el proceso de modelado.

- **Modelo empírico de crecimiento.** Como consecuencia de la etapa anterior, se observa que el proceso de multiplicación de las células se puede describir como “*una duplicación de la población cada 20 minutos*”. Tanto en esta fase como en las anteriores, juegan un papel fundamental los métodos de recopilación y análisis de datos.

Instante	Tiempo	Núm. células
0	0	100
1	20	209
2	2×20	415
3	3×20	790
4	4×20	1610
...

Tabla 1.1

- **Construcción del modelo matemático.** Empezamos generalizando la situación anterior, en el sentido siguiente: sea N el número de células en el cultivo en el instante inicial, y supongamos que la población se multiplica por α en T minutos. Bajo estas hipótesis tendremos en los instantes $0, 1 \times T, 2 \times T, 3 \times T, \dots$, las poblaciones $N, \alpha N, \alpha^2 N, \alpha^3 N, \dots$. En consecuencia, si $y(t)$ representa al número de células en el cultivo en el instante t , sabemos que:

$$y(0) = N, \quad y(t) = \alpha y(t - 1).$$

- **Consecuencias del modelo.** Del modelo construido podemos deducir algunos resultados:

- Es inmediato comprobar que de las hipótesis anteriores se obtiene

$$y(t) = N\alpha^t.$$

- También es fácil encontrar el número de períodos T necesarios para pasar de N células a \tilde{N} .

$$t \approx \frac{\ln \tilde{N} - \ln N}{\ln \alpha}.$$

- **Aplicación práctica.** Encontrar el número de períodos de tiempo necesarios para pasar de 400 células a 3210

$$\frac{\ln 3210 - \ln 400}{\ln 2} \approx 3.$$

- **Validación del modelo.** Es el proceso de contrastar las predicciones propuestas por el modelo con los datos experimentales. Es evidente que si existen grandes diferencias entre estos valores debemos de rechazar el modelo propuesto. Una buena herramienta de trabajo en esta fase son los tests de hipótesis.
- **Predicción.** Una vez que por la etapa anterior nos hemos asegurado de la validez del modelo, pasamos a la etapa de predicción. Por ejemplo, en la situación que estamos analizando, si queremos obtener 3.200 células a partir de 400 células, necesitamos que pasen 3 períodos que equivalen a 60 minutos.
- **Nuevo proceso de modelización.** Si llegamos a la conclusión de que nuestro modelo no es válido, entonces debemos retomar los datos experimentales y proponer uno nuevo que sea más adecuado.

A pesar de la gran importancia que hoy en día tienen los modelos matemáticos, tenemos que tener en cuenta la siguiente observación. Por lo general, en los modelos teóricos, se consideran sólo las relaciones cuantitativas entre las variables dependientes e independientes del mismo, y entonces entran en juego las matemáticas. Ahora bien, estos modelos describirán relaciones entre los organismos, pero nunca pueden darnos el sentido económico del proceso. Por tanto, será imprescindible la experimentación biológica.

Por último, un modelo matemático tiene que tener las siguientes cualidades:

- Debe ser **coherente**, es decir, tiene que dar cuenta de todas las observaciones anteriores y permitir prever el comportamiento futuro del fenómeno económico.
- Tiene que permitir su **generalización**, dentro de ciertos límites que conviene determinar previamente.
- Debe ser **robusto**, en el sentido de tener capacidad de responder a los cambios de los valores de los parámetros.
- Y por último, debe ser **flexible**, en el sentido de que pueda ser cambiado y adaptado a nuevas situaciones.

Para ilustrar los comentarios realizados en torno a la construcción de modelos matemáticos, vamos a exponer un modelo relativamente simple que puede verse en la página 19 de *lomeli et al*, [46]. El modelo está relacionado con la influencia en el mercado laboral del salario mínimo. En realidad, lo que se desea es estudiar la influencia de la existencia de un salario mínimo (mínima cantidad que debe pagar el empleador) sobre el número de trabajadores empleados y desempleados, con la única intención de ver como se comportan (cualitativamente) las variables más importantes del problema.

El primer paso en la construcción del modelo es el de abstracción, y para ello será necesario realizar importantes simplificaciones, y establecer hipótesis que se deduzcan

de la observación de la realidad. De esta manera, se detectan las siguientes variables: el salario (w), el salario mínimo (w_{min}), el número total de trabajadores (L), el número de trabajadores que estarían dispuestos a trabajar por un salario determinado (oferta laboral), y el número de trabajadores que las empresas están dispuestas a contratar a un salario dado (demanda laboral).

Las hipótesis que se establecen son:

- El salario es la variable independiente; la oferta y la demanda serán las variables dependientes.
- El salario mínimo es una cantidad fijada por las autoridades monetarias.
- Existe un equilibrio en el mercado de trabajo, aquel donde la oferta y la demanda de trabajo sean iguales.

La siguiente fase es la de encontrar las relaciones entre las variables definidas. De esta manera, la oferta se representa por $L = f(w)$ siendo esta función continua y creciente. Por otro lado, la demanda vendrá representada por una función continua pero decreciente $L = g(w)$. Si el salario de equilibrio lo representamos por w^* , entonces es evidente que se cumple que $w^* \geq w_{min}$.

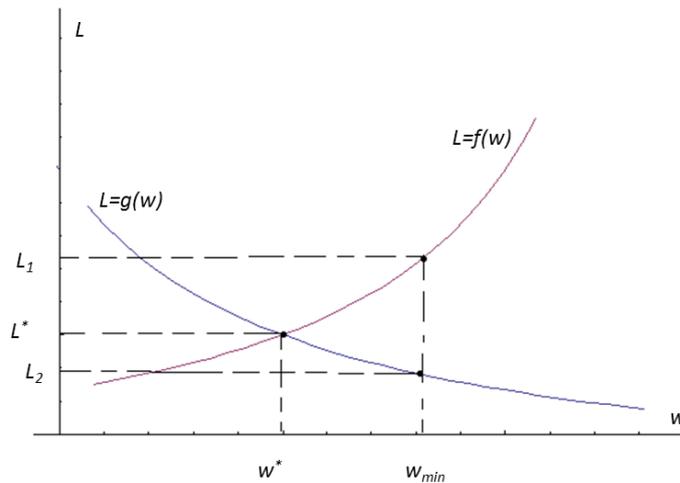


Figura 1.4: Relación entre oferta y demanda.

A continuación deducimos del modelo teórico que el equilibrio en el mercado laboral se producirá en el punto donde se cortan las curvas de oferta y demanda $f(w) = g(w)$, siendo las cantidades obtenidas w^* y L^* , en estos puntos no existirá desempleo voluntario. Si el salario mínimo es mayor que w^* la oferta laboral aumentará $L_1 > L^*$, mientras que la demanda laboral disminuirá $L_2 < L^*$, siendo $L_1 - L_2$ el número de trabajadores desempleados involuntarios (véase la figura 1.4). De esta cantidad, $L^* - L_2$ han perdido su empleo, mientras que $L_1 - L^*$ son el número de personas que estarán dispuestos a trabajar por el salario mínimo. La cantidad L_2

que conservan el empleo aumentarán su salario hasta w_{min} .

Finalmente queda la etapa de verificación y la extracción de conclusiones. El modelo predice que al imponer un salario mínimo aumenta la retribución de algunos trabajadores a costa de un aumento del desempleo, que será mayor o menor dependiendo de las pendientes de las curvas de oferta y demanda. Este estudio cualitativo podría completarse con un estudio cuantitativo si de los datos experimentales somos capaces de deducir las funciones oferta y demanda.

1.3. Clasificación de los modelos matemáticos.

Según la filosofía con la que abordemos el mundo que nos rodea, así será el tipo de modelo matemático que podemos construir. En concreto podemos clasificarlos en:

- **Modelos deterministas:** Son aquellos que a cada valor de la variable independiente corresponde otro valor de la variable dependiente. Son especialmente útiles en los sistemas que evolucionan con el tiempo, como son los **sistemas dinámicos**. En ellos podemos conocer el estado del sistema transcurrido cierto tiempo una vez que hemos dado valores a los distintos parámetros que aparecen en el modelo.

Los **modelos continuos** son útiles cuando tratamos de estudiar procesos en los que se observa continuidad en el tiempo y en este caso lo adecuado es hacer uso de las **ecuaciones diferenciales**. Sin embargo, al estudiar algunos modelos económicos, como son la dinámica de las poblaciones, puede apreciarse que estamos ante un **proceso discreto**. Ahora, las **ecuaciones en diferencias** nos ofrecen muchas posibilidades para deducir como cambian las propiedades del sistema económico al variar los parámetros del modelo.

En concreto, las matemáticas utilizadas para la evaluación de los modelos deterministas son:

- Ecuaciones en diferencias.
 - Teoría de bifurcaciones.
 - Ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales).
 - Análisis numérico.
- **Modelos probabilísticos:** Si en un modelo determinista, como por ejemplo el logístico $y'(t) = ry(t)(1 - y(t)/k)$, el parámetro r varía aleatoriamente, lo que hacemos es sustituir valores constantes por otros que cambian con cierta probabilidad. En este caso estamos ante un modelo probabilístico. Por ejemplo:
 - Procesos estocásticos.
 - **Modelos mixtos:**

- Ecuaciones diferenciales estocásticas.
- **Modelos discretos matriciales:** Son los más frecuentes cuando el sistema que estamos modelando está dividido en una serie de clases. En un momento dado, el estado del sistema puede representarse por un vector. El paso de una etapa a otra se realiza a través de una matriz conocida con el nombre de matriz de transición.
 - Cadenas de Markov.
 - Modelos de Leslie.
 - Modelos de Lefkovitch.

En particular, y de una manera muy general desde el punto de vista de la Biología, podemos clasificar los modelos matemáticos en los siguientes grupos:

- Modelos en bioquímica.
- Modelos de la evolución de una población.
- Modelos en fisiología (de animales, de plantas).
- Modelos en la genética.
- Modelos en la creación de patrones.
- Modelos en la epidemiología.
- Modelos en las migraciones.

1.4. El papel de los ordenadores

Como tendremos ocasión de comprobar, gran parte del presente curso está dedicado al estudio de los modelos matemáticos desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. Su estudio se inicia en el siglo XVII cuando *Leibnitz* y *Newton* descubren el cálculo diferencial.

En muchas ocasiones estaremos más interesados en conocer el comportamiento a largo plazo de un modelo que su solución exacta, y para ello es muy conveniente hacer uso del ordenador. Hasta hace unos pocos años, cuando se populariza su uso, lo habitual era simplificar convenientemente el problema para por lo menos disponer de una solución aproximada. Actualmente existe un interés creciente en el estudio de los sistemas dinámicos debido fundamentalmente al aumento en la rapidez de cálculo de los ordenadores que nos permiten realizar múltiples simulaciones de cualquier modelo matemático. Paralelamente a la evolución de los ordenadores se ha producido un incremento notable en la cantidad y calidad de los programas que se utilizan. La existencia de programas de cálculo (*Derive*, *Maple*, *Mathematica*, *MatLab*) o

de simulación (Vensim, Stella) aplicables a todos los campos de las matemáticas actuales, está cambiando nuestra manera de enfrentarnos a nuestra investigación así como a nuestra actividad docente.

1.5. Breve introducción histórica

Para poder encontrar un primer ejemplo de un modelo matemático aplicado a la vida real tenemos que retroceder 250 años. Entre los precursores se encuentra *Rene Descartes*, matemático y filósofo, quien mantenía la hipótesis de que, utilizando las Matemáticas como herramienta, se podía construir una teoría unificada de todas las ciencias. Trabajó en campos muy diversos y en concreto en la Fisiología, presentando una explicación matemática para las funciones fisiológicas. Los modelos que proponía eran muy poco rigurosos y desprovistos de fundamentación experimental y, por tanto, con un gran número de errores. A este respecto, una frase que frecuentemente se comenta es la siguiente:

“Los modelos son erróneos ... pero muchos de ellos son útiles”

Entonces, ¿cómo pueden ser útiles si están equivocados? La respuesta a esta pregunta puede ser que por la misma razón que en el pasado mapas erróneos, donde se suponía que la tierra era plana y con distancias equivocadas, fueron muy útiles para viajar.

A finales del siglo XIX *Federico Engels* se lamentaba de lo poco que estaban introducidas las Matemáticas en la vida real. Todo cambia a principios del siglo XX, cuando *Michaelis* y *Menten* proponen un modelo bioquímico (que aún se utiliza hoy en día), para describir la catálisis enzimática. Dos años después, *Lee* presentó un modelo para explicar los paradójicos efectos de las radiaciones sobre las células. Ahora, tenemos que trasladarnos hasta mediados de siglo para encontrar otro ejemplo interesante. Basándose en la propuesta de *Galileo* de establecer relaciones cuantitativas entre magnitudes medibles, se intentaba encontrar un modelo que relacionase la intensidad de un estímulo y la duración del mismo. El esfuerzo fue inútil, poniéndose de manifiesto que para tener éxito en el modelado es importante atender no solamente a la experimentación, sino también acertar en el tipo de relaciones cuantitativas a estudiar. Además, a la hora de construir un modelo es fundamental saber separar la información relevante que conocemos del problema de la que no lo es.

El contraste con esta última situación lo encontramos en el modelo de *Hodking* y *Huxley* para la generación y transmisión del impulso nervioso. En este caso, se proponían relaciones entre variables que físicamente tenían sentido. Este modelo construido en 1952 suele ponerse como ejemplo de modelo matemático aplicado a la Biología, de hecho, algunos autores piensan que juega un papel en la Neurología semejante a las ecuaciones de *Maxwell* en el estudio del Electromagnetismo, ya que a través de él es posible explicar todas las propiedades experimentales conocidas respecto a la generación y propagación del impulso nervioso. Al mismo tiempo, el

modelo sugería que la dinámica de muchos procesos económicos debía ser no lineal.

A partir de este momento, empieza la edad de oro para la construcción y posterior interpretación de modelos matemáticos aplicados a la Biología. En los años 60 se publicaron un gran número de trabajos, especialmente los relacionados con el sistema nervioso, muchos de ellos con escaso interés práctico. El siguiente paso importante se da en la década de los 70 cuando se descubre que las soluciones de sistemas dinámicos presentaban un comportamiento caótico. Un ejemplo lo encontramos en el modelo logístico de *R. May*, que supuso toda una revolución comparable al impacto causado por el modelo de *Hodgkin y Huxley*. La teoría del caos inmediatamente entusiasmó a biólogos, físicos y matemáticos, dedicados al estudio de los modelos matemáticos.

De toda formas, muchas situaciones muy distintas, como pueden ser la actividad cerebral, el electrocardiograma, la dinámica de poblaciones, el desarrollo embrionario, la evolución de las enfermedades, son escenarios muy difíciles de modelar a través de modelos elementales. Sin embargo, podemos realizar las simplificaciones convenientes que expliquen parcialmente el comportamiento del sistema o bien aplicar unas nuevas herramientas matemáticas, como es el uso de la geometría fractal, para explicar la variabilidad de la frecuencia del corazón.

La Econometría, con una aportación importante de la Estadística, es la ciencia que se ocupa de la construcción de los modelos económicos; se inició con el profesor de la Universidad de Oslo *Ragnar Frisch*. Con la ayuda de otros colaboradores crearon en 1930 la Sociedad de Econometría de los Estados Unidos, desde donde se edita desde 1932 la revista *Econometría*.

1.6. Algunas definiciones básicas.

Desde un punto de vista matemático podemos categorizar un sistema como todo aquello que cambia a partir de una variable. En este caso, la climatología puede cambiar a partir de una variable que denominamos tiempo. La Economía, por tanto es un sistema que además podríamos dividir en nuevos subsistemas que dependen unos de otros; el mercado de valores, el mercado de maquinaria agrícola, o el mercado del aceite de oliva son subsistemas económicos que además guardan cierta relación entre ellos, una “retroalimentación”.

En consecuencia, lo primero que debemos plantearnos a la hora de llevar a cabo este estudio es definir lo que entendemos por **sistema**. En nuestro caso, un sistema es un conjunto de entidades que actúan y se relacionan entre ellas generando comportamientos y resultados. Es interesante hacer notar que en un sistema, más importante que los elementos que lo componen son las relaciones que existen entre ellos. Por ejemplo, en el sistema planetario, además de los planeta, lo más interesante es la manera que éstos interactúan.

En opinión de Wittgenstein:

“In mathematics we cannot talk of systems in general, but only within systems. They are just what we cannot talk about.”

Un **estado** viene determinado por cada uno de los valores que puede tomar una variable para cada uno de los valores del tiempo.

De una manera mas formal, un sistema dinámico está compuesto por la terna (E, T, ϕ) , siendo E el espacio de fase, T el conjunto del tiempo, y $\phi : Tx E \rightarrow E$ que cumple:

- (a) ϕ es una aplicación continua.
- (b) $\forall x \in E; \quad \phi(0, x) = x$
- (c) $\forall x \in E; \quad \forall t_1, t_2 \in T; \quad \phi(t_1, \phi(t_2, x)) = \phi(t_1 + t_2, x)$

Un **sistema dinámico** consta de un conjunto de estados que cambian con el tiempo, de tal manera que es posible determinar un estado cualquiera a partir del conocimiento del estado en el momento anterior.

Cuando el conjunto T es el conjunto de los números naturales junto con el cero, entonces el sistema se dice que es discreto. En el caso en el que T es el conjunto de los números reales, entonces el sistema es continuo.

Para estudiar los sistemas que se encuentran a nuestro alrededor, tenemos una herramienta muy interesante a la que llamamos modelo. En concreto, el estudio que estamos desarrollando se centra en los modelos matemáticos.

El objetivo práctico de la modelización consiste en representar de manera matemática fenómenos que ocurren en la naturaleza, en la Física, en la Economía, etc., con el objetivo de comprenderlos mejor y analizar sus evoluciones que tendrán a lo largo del tiempo.

Como se ha comentado de una manera formal, los modelos matemáticos pueden ser **discretos** (representados por un conjunto de ecuaciones en diferencias) y **continuos** (representados por un conjunto de ecuaciones diferenciales). Los modelos discretos son aquellos en los que las variables de estado cambian instantáneamente en instantes separados de tiempo. Es decir, el tiempo toma valores naturales (o el cero), como por ejemplo el número de individuos de una población en relación a una unidad de tiempo. Por el contrario los modelos continuos son aquellos en los que las variables de estado cambian de forma continua con el paso del tiempo. El tiempo toma valores que son números reales. Un ejemplo de modelo continuo es la velocidad a la que cae una piedra desde un acantilado.

El estudio de los modelos discretos es el más apropiado para estudio de sistemas como la economía en los cuales los resultados se presentan en periodos de tiempo. Por ejemplo el valor de las acciones cada día, el valor del PIB cada unidad de tiempo, etc.

Los modelos matemáticos pueden clasificarse en dos grandes bloques **lineales** y **no lineales**. Un sistema dinámico será lineal cuando los efectos son proporcionales a las causas; por ejemplo el peso ya que si un objeto tiene el doble de masa que otro su peso se duplicará. Cuando esto no ocurre, entonces el modelo es no lineal y su modelización viene dado por una ecuación no lineal, en estos sistemas se producen relaciones internas que hacen imposible descomponer el sistema en sus partes para poder analizarlo de forma separada. En ambos casos se habla de un **sistema determinista**, ya que a través de ellos se puede determinar su comportamiento. Los modelos más interesantes son los no lineales, y ejemplos clásicos de estos sistemas dinámicos son los movimientos del precio de las acciones en la bolsa, las turbulencias, etc.

Existe una manera de representar gráficamente a un sistema dinámico mediante su espacio de fases. En el caso en el que el sistema se define por medio de n variables, cada estado vendrá representado por un punto de n coordenadas en un espacio de n dimensiones, que recibe el nombre de **espacio de fase**. Por este motivo, una vez conocido las variables que definen el modelo, su número determinará la dimensión del espacio de fase que se desea construir. En cada uno de sus ejes se representan las distintas variables del modelo, y elegido un punto de partida (**semilla**) se dibuja la solución del modelo con este valor inicial (**órbita**). De esta manera se dispone de un comportamiento cualitativo del modelo a largo plazo.

En muchas ocasiones se ha estudiado la Economía como un sistema lineal de tal forma que se puede predecir el valor de ciertas variables. Es interesante conocer cuál será el valor de la acción x en el mercado de valores en el momento t o cuál el valor del PIB per cápita en el año “AA”. Por desgracia, los sistemas lineales tienen sus limitaciones y no se ajustan a los sistemas y variables económicos como nos gustaría. Los sistemas económicos contienen una gran cantidad de variables que pueden modificar el sistema. Un año de escasa lluvia podría implicar la obtención de una mala cosecha, una mala cosecha el descenso de la demanda de maquinaria para labores agropecuarias, la baja demanda de estas la quiebra de una empresa cuya actividad fundamental se encuentra en dicho sector, la quiebra, la subida de la cotización en bolsa de una empresa multinacional debido a la entrada en un nuevo nicho de mercado sin competencia gracias a la bancarrota anterior.

De esta forma se puede ver como varios subsistemas económicos envían y reciben información unos de otros produciéndose la llamada retroalimentación. Este pulular de información da forma y modifica a los subsistemas, que envían a su vez información al sistema económico, que es el encargado en esa dinámica de “feedback” de modular dicha información a través de una serie de reglas o normas.

Adam Smith usó el famoso término “la mano invisible” en su tan recurrente obra, “*la riqueza de las naciones*” en 1776. Acuó dicha expresión para manifestar de forma metafórica la capacidad del mercado para la autorregulación. En realidad, lo que Adam Smith sugería entonces, era precisamente, esa capacidad de retroalimentación que se cumple en el sistema económico y que a veces puede provocar una gran

complejidad a la hora de estudiar los fenómenos que acontecen en dicha ciencia.





Tema 2

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

2.1. Introducción

El álgebra matricial proporciona herramientas elementales para simplificar y resolver problemas donde intervienen un número elevado de datos. El siguiente ejemplo es un caso particular de la teoría de grafos, donde utilizamos la multiplicación de matrices para modelar el proceso de dispersión de una enfermedad contagiosa.

EJEMPLO 2.1

- Supongamos que tres personas han contraído una enfermedad contagiosa y que este primer grupo tiene contacto con cinco personas de un segundo grupo. Estos contactos, llamados contactos directos, pueden representarse mediante una matriz $A_{3 \times 5} = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 1$ si la i -ésima persona del primer grupo ha estado en contacto con la j -ésima persona del segundo grupo, y $a_{ij} = 0$ si no han estado en contacto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el 1 que aparece en la fila 3 columna 4, significa que la tercera persona del primer grupo (los infectados) ha estado en contacto con la cuarta persona del segundo grupo.

Supongamos ahora que un tercer grupo de cuatro personas ha tenido diversos contactos directos con individuos del segundo grupo. Esto también podemos representarlo

mediante una matriz $B_{5 \times 4}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los contactos indirectos o de segundo orden entre las personas del primer y tercer grupo se representan mediante una matriz $C_{3 \times 4}$ que es el producto AB

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa, que la tercera persona del último grupo tiene cuatro contactos indirectos, mientras que la primera y la segunda sólo tienen uno.

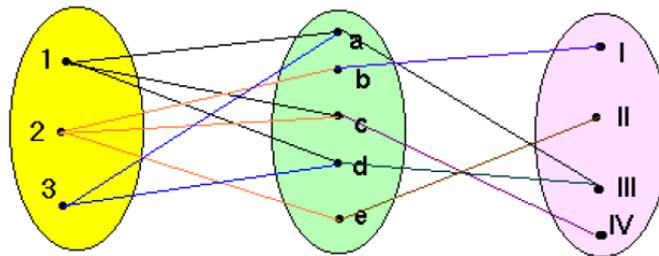


Figura 2.1: Contactos directos e indirectos.

Con el estudio de este tema pretendemos conseguir un doble objetivo. En primer lugar, recordar los conceptos más importantes relativos a la diagonalización de matrices cuadradas, y posteriormente hacer una breve introducción al cálculo aproximado de valores y vectores propios.

De todas las aplicaciones lineales tienen un interés especial aquellas que van del espacio vectorial \mathbb{R}^n en si mismo, que reciben el nombre de endomorfismos. Recordemos que dada una matriz cuadrada A de orden n es posible construir una aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n que tiene asociada a esta matriz A cuando se considera como base del espacio vectorial \mathbb{R}^n la canónica.

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

nos permite definir el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 - 2x_3, x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 + 2x_2). \quad (2.1)$$

De esta manera, $f(1, 2, 3) = (1, 4, 5)$ y $f(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$.

Recíprocamente, conocido el endomorfismo (2.1) es posible encontrar su matriz asociada respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

o de forma simbólica $\vec{y} = A\vec{x}$.

Como puede comprenderse, sería conveniente representar el endomorfismo f por una matriz que sea lo más simple posible, ya que de esta manera todos los cálculos que realicemos con esta matriz se simplifican notablemente, y de todas ellas las más interesantes son las diagonales.

Como en un endomorfismo el espacio vectorial de entrada y de salida coinciden, todo cambio de base en el primero de ellos implica el mismo cambio en el segundo. De esta manera, si tenemos el endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : \vec{y} = A\vec{x},$$

referido a la base canónica de \mathbb{R}^n y realizamos el cambio de base $\vec{y} = C\vec{y}'$, $\vec{x} = C\vec{x}'$, entonces

$$C\vec{y}' = AC\vec{x}' \quad \Rightarrow \quad \vec{y}' = C^{-1}AC\vec{x}' = A'\vec{x}'.$$

Las matrices A y $A' = C^{-1}AC$ reciben el nombre de matrices semejantes.

Llegado a este punto, tiene sentido plantear la siguiente cuestión: dada una matriz cuadrada A , ¿existirá una matriz A' diagonal semejante a la matriz A ? En caso afirmativo, ¿cuál debe ser la base de \mathbb{R}^n que debemos elegir para que la matriz A' sea diagonal?.

La respuesta a estas cuestiones se conoce con el nombre del problema de la diagonalización de una matriz cuadrada y nos ocuparemos de ello en las próximas secciones.

2.2. Valores y vectores propios

En muchas ocasiones prácticas nos interesa conocer aquellos vectores no nulos que a través del endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ se transforman en otro proporcional a él. Un vector \vec{x} no nulo tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ diremos que es un vector propio asociado al valor propio λ .

En nuestro ejemplo, el vector $\vec{x}_1 = (1, 1, 1)$ es un vector propio del endomorfismo (2.1) asociado al valor propio $\lambda = 3$. Sin embargo, como el vector $\vec{x}_2 = (1, 4, 5)$ no es proporcional al \vec{x}_2 entonces $(1, 2, 3)$ no será un vector propio de f .

DEFINICIÓN 2.2.1 *Sea A una matriz cuadrada de orden n ; el número (real o complejo) λ es un valor propio (o autovalor) de A si existe un vector \vec{u} no nulo tal*

que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Al vector \vec{u} anterior se le conoce con el nombre de vector propio (o autovector) de A asociado al valor propio λ .

EJEMPLO 2.2

Aplicaremos la definición anterior para encontrar los valores y vectores propios de la matriz A asociada al endomorfismo (2.1).

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (3-\lambda)x + 2y - 2z &= 0 \\ x + (3-\lambda)y - z &= 0 \\ x + 2y + (-\lambda)z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Este sistema homogéneo debe tener solución distinta de la trivial $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, por tanto según el teorema de *Rouché-Fröbenius* el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser nulo

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Hacemos uso de la regla de *Ruffini* para resolver esta ecuación de tercer grado,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

A continuación para cada uno de estos valores propios encontramos sus vectores propios asociados. Si sustituimos $\lambda_1 = 1$ en el sistema (2.2)

$$\left. \begin{aligned} 2x + 2y - 2z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \alpha, \quad y = 0, \quad z = \alpha.$$

Es decir, el conjunto de soluciones del sistema anterior forman el subespacio de \mathbb{R}^3

$$S_1 = \{(\alpha, 0, \alpha) : \alpha \neq 0\},$$

dicho subespacio tiene dimensión uno y está generado por el vector $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$.

Del mismo modo, para $\lambda_2 = 2$

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = \beta, \quad x = 0, \quad y = \beta.$$

Ahora, el subespacio de dimensión uno viene dado por

$$S_2 = \{(0, \beta, \beta) : \beta \neq 0\},$$

que está generado por el vector $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$.

Finalmente, para $\lambda_3 = 3$ es fácil comprobar que el subespacio de vectores propios asociado es $S_3 = \{(\gamma, \gamma, \gamma) : \gamma \neq 0\}$, siendo el vector $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$ una base de S_3 .

La generalización de este ejemplo nos proporcionará un método para encontrar los valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Si λ es un valor propio de la matriz cuadrada A de orden n y $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vector propio asociado, entonces

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}, \quad (2.3)$$

donde I es la matriz identidad de orden n . La expresión $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$ representa a un sistema homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas. Para que el sistema anterior tenga solución $\vec{u} \neq \vec{0}$, el determinante de la matriz de los coeficientes debe de ser cero. Es decir

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (2.4)$$

con lo cual, está justificada la definición siguiente.

DEFINICIÓN 2.2.2 (Polinomio característico) *Llamaremos polinomio característico de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ al polinomio de grado n en λ*

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Las raíces reales del polinomio característico serán los *autovalores o valores propios* de la matriz A . Llamaremos *orden de multiplicidad* de un autovalor λ a la multiplicidad de la raíz λ del polinomio característico.

Resumiendo, una vez obtenidos los valores propios λ_i de la matriz A resolviendo la ecuación característica (2.4), sustituimos dicho valores en el sistema homogéneo (2.3) y calculamos los subespacios de vectores propios asociados. Es fácil probar que las soluciones del sistema homogéneo constituyen un subespacio vectorial S_i de \mathbb{R}^n cuya dimensión será siempre mayor o igual a uno.

2.3. Diagonalización de matrices cuadradas.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo cuya matriz asociada es $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ respecto de una cierta base B de \mathbb{R}^n , generalmente la canónica. Si suponemos que la matriz A es diagonalizable, entonces es posible encontrar otra base $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ de \mathbb{R}^n de tal forma que la matriz asociada a f respecto de esta nueva base B' sea la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

semejante a la matriz inicial A , por tanto $D = C^{-1}AC$.

Es conocido que el vector \vec{u}_1 respecto de la base B' tiene por coordenadas $(1, 0, 0, \dots, 0)$. Si calculamos la imagen de este vector,

$$f(\vec{u}_1) = D\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_1 \vec{u}_1.$$

En general $f(\vec{u}_i) = d_i \vec{u}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ lo que nos indica que \vec{u}_i es un vector propio asociado al valor propio $d_i = \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Notemos que acabamos de probar que si el endomorfismo f es diagonalizable, entonces es posible encontrar una base de \mathbb{R}^n formada por los autovectores de f . Por otro lado, si elegimos como base de \mathbb{R}^n aquella que está formada por los autovectores de f , entonces existirán n escalares λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ tales que $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. En este caso, la matriz asociada al endomorfismo respecto de esta base es la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En consecuencia, el problema de diagonalizar un endomorfismo f (también conocido como el problema de diagonalizar su matriz asociada A), es equivalente al problema de encontrar una base del espacio vectorial formada por los autovectores de f , y ello implica a que la suma de las dimensiones de los subespacios de vectores propios asociados S_i coincida con la dimensión del espacio vectorial \mathbb{R}^n .

LEMA 2.3.1 *Autovectores asociados a autovalores distintos dos a dos son linealmente independientes*

Demostración. Supongamos dos autovalores diferentes $\lambda_i \neq \lambda_j$ y sean \vec{v}_i y \vec{v}_j sus autovectores asociados. Es decir

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i, \quad f(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j.$$

Si estos dos vectores no son linealmente independientes, entonces $\vec{v}_i = k\vec{v}_j$, lo que implica que

$$f(\vec{v}_i) = f(k\vec{v}_j) \Rightarrow \lambda_i \vec{v}_i = k\lambda_j \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_i.$$

Pero al ser vectores no nulos, esta última igualdad implicaría que $\lambda_i = \lambda_j$, en contra de lo supuesto. ■

Como consecuencia del lema, vectores no nulos pertenecientes a distintos subespacios propios son linealmente independientes.

LEMA 2.3.2 *La dimensión del subespacio propio asociado a un cierto valor propio es como mucho igual al orden de multiplicidad del autovalor.*

Llamando α_i a la multiplicidad del autovalor λ_i y S_i al subespacio propio asociado con λ_i , tendremos que

$$1 \leq \dim(S_i) \leq \alpha_i.$$

Recordemos que la condición necesaria y suficiente obtenida para la existencia de una matriz diagonal semejante a A era poder encontrar una base del espacio vectorial formada enteramente por autovectores de f . Ahora bien, de los lemas anteriores se deduce que tal condición es equivalente a que la unión de bases de los subespacios propios sea base de todo el espacio vectorial \mathbb{R}^n , para lo cual es necesario y suficiente que la suma de las dimensiones de los subespacios propios sea n . Pero por el segundo lema, y puesto que suponemos que todas las raíces del polinomio característico de A son reales, esto equivale a que la multiplicidad de todo autovalor sea igual a la dimensión de su subespacio propio asociado.

Observemos que al ser $\dim(S_i) \geq 1$, entonces una condición suficiente para que una matriz A sea diagonalizable es que tenga n valores propios diferentes.

A continuación enunciamos una propiedad que nos da una condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea diagonalizable. Su demostración escapa a los objetivos que nos hemos planteados en la programación de la asignatura, pero puede encontrarse en cualquiera de los libros de Algebra Lineal que estudian el tema de la diagonalización de matrices.

TEOREMA 2.3.3 *El endomorfismo f es diagonalizable si y solo si para todo autovalor λ_i de f se tiene que $\alpha_i = \dim(S_i)$.*

Para acabar con esta sección recordemos que si D es la matriz diagonal formada por los autovalores de f y C es la matriz del cambio de base, cuyas columnas son los vectores propios asociados a los valores propios de f , entonces $D = C^{-1}AC$.

EJEMPLO 2.3

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo, cuya matriz respecto a una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcularemos los valores propios o autovalores y los vectores propios o autovectores de f . Estudiaremos si f es o no diagonalizable, y en caso afirmativo encontraremos una base en la cual el endomorfismo tenga una expresión diagonal, así como la matriz de paso que relaciona a la matriz A con su diagonal semejante.

- Comenzamos resolviendo la ecuación característica, para poder encontrar los autovalores

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & -3 \\ 2 & 4 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ como raíz doble. Al no salir los tres autovalores diferentes no podemos asegurar que la matriz A sea diagonalizable; tenemos que ver si es posible encontrar una base del espacio vectorial \mathbb{R}^3 formada por autovectores de f . Empezamos calculando el subespacio de autovectores asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x & -y & -3z = 0 \\ 2x & +2y & +3z = 0 \\ & & z = 0 \end{cases}$$

El sistema tiene por soluciones $z = 0$, $x = -y$, dando lugar al subespacio

$$S_1 = L(\lambda_1 = 2) = \{(-t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 0) \rangle .$$

Para el segundo de los autovalores $\lambda_2 = 3$,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y + 3z = 0,$$

cuyo subespacio asociado es,

$$S_2 = L(\lambda_2 = 3) = \{(\alpha, -2\alpha - 3\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2, 0), (0, -3, 1) \rangle .$$

Como conclusión, la matriz A es diagonalizable ya que es posible encontrar la base buscada,

$$\mathcal{B} := \{(-1, 1, 0), (1, -2, 0), (0, -3, 1)\},$$

siendo la matriz C de paso, que nos permite diagonalizar la matriz A , la siguiente:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

En este caso, se comprueba que

$$C^{-1}AC = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

2.4. Cálculo de la potencia de una matriz diagonalizable

Supongamos que deseamos calcular la potencia n -ésima A^n , de una matriz A cuadrada y diagonalizable. Puesto que $D = C^{-1}AC$, se tiene que $A = CDC^{-1}$, y entonces

$$\begin{aligned} A^2 &= (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1} \\ A^3 &= (CD^2C^{-1})(CDC^{-1}) = CD^3C^{-1} \\ A^4 &= (CD^3C^{-1})(CDC^{-1}) = CD^4C^{-1} . \end{aligned}$$

Por inducción, puede demostrarse que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = CD^nC^{-1}.$$

Al ser D diagonal

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y, por tanto, el cálculo de CD^nC^{-1} resulta ser sumamente sencillo.

EJEMPLO 2.4

- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

para saber si es diagonalizable comenzamos resolviendo la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 3.$$

A continuación, calculamos las dimensiones de los subespacios engendrados por cada autovalor:

$$\begin{aligned} \dim(S_1) &= 3 - \text{Rango}(A - 2I) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(S_2) &= 3 - \text{Rango}(A - 3I) = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

La suma de las dimensiones es 2 y por tanto la matriz A no será diagonalizable.

EJEMPLO 2.5

- Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo, cuya matriz respecto a una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el ordenador para encontrar los valores y vectores propios de f . Empezamos introduciendo la matriz

$$A := \{\{1, -1, 0\}, \{2, 4, 0\}, \{0, 0, 3\}\}$$

A continuación calculamos los valores propios:

Eigenvalues[A]

$$\{2, 3, 3\}$$

Como no existen tres valores propios distintos, de entrada no podemos afirmar que la matriz A sea diagonalizable. Para ello es necesario conocer los vectores propios de f

Eigenvectors[A]

$\{-1, 1, 0\}, \{-1, 2, 0\}, \{0, 0, 1\}$.

Para ver si forman una base de \mathbb{R}^3 calculamos su determinante

$\det[\{-1, 1, 0\}, \{-1, 2, 0\}, \{0, 0, 1\}]$

-1

Como podemos ver los tres vectores son independientes y, por tanto, existe una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de f . En consecuencia, la matriz A será diagonalizable.

2.5. Métodos numéricos

Como tendremos ocasión de ver a lo largo del presente proyecto, el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz cuadrada está presente en un número elevado de diferentes aplicaciones. Parece lógico pensar que, para su cálculo, una buena manera de actuar sería encontrar el polinomio característico $p(\lambda) = |A - \lambda I|$, y posteriormente estimar las raíces de este polinomio. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones sólo se necesita conocer un determinado valor propio, llamado dominante, y existen procedimientos numéricos para hallar este valor. Nosotros utilizaremos el método conocido con el nombre de las potencias, el cual se encuentra íntimamente ligado al estudio de la estabilidad de las clases de edades del modelo matricial de *Leslie*.

DEFINICIÓN 2.5.1 *Diremos que λ_1 es el valor propio dominante de una matriz A , si es mayor en valor absoluto que el resto de los valores propios de A . Un vector propio asociado a este valor propio dominante recibe el nombre de vector propio dominante de la matriz A .*

Supongamos que los valores propios de la matriz A de orden cinco son:

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -6, \quad \lambda_4 = 4.25, \quad \lambda_5 = -3.13,$$

entonces el valor propio dominante es el $\lambda_3 = -6$. Observemos que si, por ejemplo, $\lambda_1 = 6$, entonces no existe un valor propio que sea dominante.

2.5.1. Método de las potencias

A continuación describiremos un procedimiento para estimar el valor propio dominante y su vector propio dominante asociado, conocido con los nombres de método de las potencias o de las iteraciones. Está basado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.6

- Sea la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -12 & 8 \end{pmatrix},$$

y tomemos como vector inicial uno cualquiera $\vec{x}(0) = (-1, 2)^T$. Ahora, calculemos

$$\vec{x}(1) = A\vec{x}(0) = \gamma_1(1, 4.6666)^T$$

$$\vec{x}(2) = A\vec{x}(1) = A^2\vec{x}(0) = \gamma_2(1, 3.45455)^T$$

$$\vec{x}(3) = A\vec{x}(2) = A^3\vec{x}(0) = \gamma_3(1, 3.18519)^T$$

$$\vec{x}(4) = A\vec{x}(3) = A^4\vec{x}(0) = \gamma_4(1, 3.08474)^T$$

...

$$\vec{x}(10) = A^{10}\vec{x}(0) = \gamma_{10}(1, 3.00122)^T.$$

Como puede observarse, los diferentes valores de $\vec{x}(k)$ tiende a un múltiplo del vector $(1, 3)^T$ cuando k es suficientemente grande. Éste será el vector propio dominante.

Pasemos a formalizar el razonamiento anterior. Supongamos que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|,$$

y además, la matriz A es diagonalizable. Entonces debe de existir una base de \mathbb{R}^n formada por vectores propios $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, donde \vec{u}_i es el vector propio asociado al valor propio λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Por definición de base, el vector inicial $\vec{x}(0)$ puede escribirse:

$$\vec{x}(0) = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n,$$

donde algún coeficiente c_i tiene que ser no nulo, supongamos que $c_1 \neq 0$. Si calculamos $\vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{x}(k) &= A^k(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n) \\ &= c_1A^k\vec{u}_1 + c_2A^k\vec{u}_2 + \dots + c_nA^k\vec{u}_n \\ &= c_1\lambda_1^k\vec{u}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{u}_2 + \dots + c_n\lambda_n^k\vec{u}_n \\ &= \lambda_1^k \left(c_1\vec{u}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \vec{u}_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \vec{u}_n \right). \end{aligned}$$

Al ser λ_1 el valor propio dominante, entonces $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$, $i = 2, 3, \dots, n$, y en consecuencia $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k$ tiende a cero para valores de k suficientemente grandes. Es decir,

$$\boxed{\vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0) \approx \lambda_1^k c_1 \vec{u}_1,}$$

el vector resultante es proporcional al vector propio dominante buscado. Una vez conocida una estimación del vector propio dominante \vec{u}_1 , es posible encontrar su valor propio dominante asociado. La fórmula se conoce con el nombre de **cociente de Rayleigh**, y consiste en lo siguiente:

Si $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ representa al producto escalar ordinario de los vectores \vec{a} y \vec{b} , es fácil comprobar que

$$\frac{\langle \vec{u}_1, A\vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{\langle \vec{u}_1, \lambda_1 \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{\lambda_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \lambda_1.$$

Si aplicamos este resultado al Ejemplo 4

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \vec{u}_1, A\vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{\langle (1, 3)^T, A(1, 3)^T \rangle}{\langle (1, 3)^T, (1, 3)^T \rangle} = \frac{\langle (1, 3)^T, (4, 12)^T \rangle}{\langle (1, 3)^T, (1, 3)^T \rangle} = \frac{40}{10} = 4.$$

Naturalmente, esta aproximación puede ser mejorada tomando en lugar del $\vec{x}(1)$ el $\vec{x}(10)$, pero recordemos que todo lo dicho es válido si λ_1 es dominante.

La expresión $\vec{x}(k) = A^k \vec{x}(0) \approx \lambda_1^k c_1 \vec{u}_1$, también nos permite encontrar un valor aproximado de λ_1 . En efecto,

$$\vec{x}(k) \approx \lambda_1^k c_1 \vec{u}_1 = \lambda_1 \lambda_1^{k-1} c_1 \vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{x}(k-1),$$

lo que obliga a la siguiente relación entre sus componentes:

$$\vec{x}_j(k) \approx \lambda_1 \vec{x}_j(k-1), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \approx \frac{\vec{x}_j(k)}{\vec{x}_j(k-1)}.$$

2.5.2. El método de las potencias con cambio de escala

En el Ejemplo 4 vimos que con cada iteración aumentaba el valor de las componentes del vector, y una manera de evitar este problema era aplicar cierta escala γ_i . Básicamente este proceso se conoce con el nombre de método de las potencias con cambio de escala. Aplicando este procedimiento siempre obtenemos un vector cuya componente mayor en valor absoluto es uno.

EJEMPLO 2.7

- Aplicaremos el método de las potencias con cambio de escala, para encontrar el valor propio y el vector propio dominante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Empezamos tomando como vector inicial uno que nos permita simplificar las operaciones, por ejemplo $\vec{x}(0) = (1, 1)^T$.

$$\vec{x}(1) = A\vec{x}(0) = (1, 0)^T$$

$$\vec{x}(2) = A(1, 0)^T = (-1, 1)^T$$

$$\vec{x}(3) = A(-1, 1)^T = 3(1, -0.666667)^T$$

$$\vec{x}(4) = A(1, -0.666667)^T = -2.3333(1, -0.71428)^T.$$

Una posible estimación del vector propio dominante puede ser $\vec{u}_1 \approx (1, -0.71428)^T$. Por otro lado, por definición de vector y valor propio

$$A\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.71428 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -0.71428\lambda_1 \end{pmatrix},$$

y podemos estimar el valor de $\lambda_1 \approx -2.42856$

Una de las preguntas que está presente en todo el estudio que estamos desarrollando es la siguiente: ¿cuántos pasos debemos usar en el método de las potencias para obtener una buena estimación?. No existe una respuesta rotunda a esta pregunta, pero el análisis del error relativo puede aportar una solución parcial al problema.

DEFINICIÓN 2.5.2 Si \tilde{a} es una estimación de la cantidad a , entonces el error relativo se define como:

$$\left| \frac{a - \tilde{a}}{a} \right|.$$

El error en porcentaje en la estimación se define como

$$\left| \frac{a - \tilde{a}}{a} \right| \times 100\%.$$

Supongamos que inicialmente el error relativo que estamos dispuestos a tolerar en el valor propio dominante es ϵ . Si $\tilde{\lambda}_1(i)$ es la estimación de λ_1 en la i -ésima iteración, entonces el método se terminaría cuando se cumpla:

$$\left| \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(i)}{\lambda_1} \right| < \epsilon.$$

No obstante, aplicar la fórmula anterior tiene el gran inconveniente de que el valor exacto λ_1 no es conocido. En este caso, suele sustituirse la expresión anterior por esta otra:

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}_1(i) - \tilde{\lambda}_1(i-1)}{\tilde{\lambda}_1(i)} \right| < \epsilon,$$

donde la cantidad que aparece a la izquierda se la conoce con el nombre de error relativo estimado, y si se multiplica por 100%, se llama error en porcentaje estimado.

2.5.3. Deflación

A través del método de las potencias podemos estimar el valor propio dominante y un vector propio asociado. Existen diferentes técnicas para conocer el resto de los valores propios. De todas ellas nosotros utilizaremos la conocida con el nombre de deflación. El método está basado en el siguiente teorema cuya demostración puede verse en cualquier texto de métodos numéricos del Algebra Lineal.

TEOREMA 2.5.3 Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, los valores propios de la matriz A . Supongamos que λ_1 es el valor propio dominante, \vec{u}_1 su vector propio asociado, y \vec{v} un vector tal que $\langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle = 1$. Sea B la matriz definida como

$$B = A - \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{v}^T.$$

Entonces los valores propios de la matriz B son $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Se conoce con el nombre de deflación al proceso de encontrar el resto de los valores propios a partir del valor propio dominante. Para ello se aplica el método de las potencias con escala a la nueva matriz B .

EJEMPLO 2.8

- Aplicaremos el método de las potencias con cambio de escala y la deflación para encontrar todos los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.5 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos como vector inicial $\vec{x}(0) = (1, 1, 1)^T$, entonces $\vec{x}(1) = A\vec{x}(0) = (3.5, 1, 1.5)^T$ que dividiendo por 1.5 nos queda $\vec{x}'(1) = (2.3333, 0.6666, 1)^T$. De forma similar $\vec{x}(2) = A\vec{x}'(1) = (7.6666, -3.3336, -0.3334)^T$, o bien

$$\vec{x}'(2) = (-0.2527, 9.998, 1)^T.$$

Los valores siguientes se encuentran representados en la tabla siguiente. También aparecen los cocientes entre la primera de las componentes de una iteración y la anterior γ_k .

Iteración	$\vec{x}(k)$	$\vec{x}'(k)$	γ_k
0	$(1, 1, 1)^T$	$(1, 1, 1)^T$	-
1	$(3.5, 1, 1.5)^T$	$(2.3333, 0.6666, 1)^T$	1.5
2	$(7.6666, -3.3336, -0.3334)^T$	$(-0.2527, 9.9998, 1)^T$	-0.3334
3	$(-4.7571, 48.4954, 16.2497)^T$	$(-0.2927, 2.98439, 1)^T$	16.2497
4	$(-1.3703, 13.5073, 5.76928)^T$	$(-0.2375, 2.34125, 1)^T$	5.76928
5	$(-0.8831, 10.1812, 4.74938)^T$	$(-0.1859, 2.14369, 1)^T$	4.74938
6	$(-0.62954, 9.09025, 4.40143)^T$	$(-0.143032, 2.06529, 1)^T$	4.4014
7	$(-0.46174, 8.61251, 4.2409)^T$	$(-0.10887, 2.03079, 1)^T$	4.2409
8	$(-0.342005, 8.37169, 4.15505)^T$	$(-0.08231, 2.01482, 1)^T$	4.15505
9	$(-0.25434, 8.23872, 4.10454)^T$	$(-0.06196, 2.00722, 1)^T$	4.10454

Se observa que el valor propio dominante es $\lambda_1 \approx 4$ y su vector propio asociado $\vec{u}_1 \approx (0, 2, 1)^T$.

Para encontrar el resto de los valores y vectores propios aplicamos el método de deflación, y para ello necesitamos un vector \vec{v} tal que $\langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle = 1$. Podemos tomar $\vec{v} = (1, 1, -1)^T$ y calcular

$$B = A - \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{v}^T = \begin{pmatrix} 3 & -0.5 & 1 \\ -10 & -3 & 6 \\ -5 & -2.5 & 5 \end{pmatrix},$$

al ser la segunda y la tercera columna proporcionales, el determinante de la matriz B es cero y eso obliga a que uno de sus valores propios sea cero, hecho que conocíamos por el Teorema 2.5.3. Ahora, aplicamos de nuevo el método de las potencias a la matriz B con objeto de encontrar su vector propio dominante, que coincidirá con otro de los valores propios de la matriz A .

Iteración	$\vec{x}(k)$	$\vec{x}'(k)$	γ_k
0	$(1, 1, 1)^T$	$(1, 1, 1)^T$	-
1	$(3.5, -7, -2.5)^T$	$(1, -2, -0.714286)^T$	3.5
2	$(3.28571, -8.28572, -3.57143)^T$	$(1, -2.52174, -1.08696)^T$	3.28571
3	$(3.17391, -8.95654, -4.13045)^T$	$(1, -2.82193, -1.31581)^T$	3.17391
4	$(3.09515, -9.42907, -4.52422)^T$	$(1, -3.0454, -1.46171)^T$	3.09515
5	$(3.0614, -9.63106, -4.69255)^T$	$(1, -3.14587, -1.53277)^T$	3.06149

Puede apreciarse que $\vec{u}_2 \approx (1, -3.3, -1.6)^T$ y $\lambda_2 \approx 3$.

Para finalizar aplicamos de nuevo el mismo procedimiento para calcular el último de los valores de A . Puede tomarse $\vec{v} = (1, 0, 0)^T$, ya que $\langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = 1$, y entonces

$$C = B - \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{v}^T = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 1 \\ -0.1 & -3 & 6 \\ -0.2 & -2.5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos convenientes se llega a que $\lambda_3 \approx 2$.



Tema 3

MODELOS BASADOS EN ECUACIONES Y SISTEMAS EN DIFERENCIAS

3.1. Introducción

En ocasiones, al construir un modelo matemático interesa elegir una variable que tome valores discretos. Así ocurre, por ejemplo, con el tiempo, ya que es común realizar mediciones regulares a la hora de controlar un experimento. Estos datos constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente. Para este tipo de modelos determinísticos discretos, las herramientas matemáticas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias. El presente tema es una breve introducción a su estudio. Comenzaremos con los conceptos y definiciones básicas y nos centraremos en el estudio de las ecuaciones en diferencias lineales de primer y segundo orden con coeficientes constantes, así como en los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes.

A lo largo del capítulo llamaremos t a la variable independiente, y supondremos que sólo toma los valores enteros $t = 0, 1, 2, \dots$. Generalmente, t representa el número de generaciones (años, trimestres, meses, días, \dots) que han transcurrido desde un momento inicial $t = 0$. Del mismo modo, $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ es una sucesión, donde y_t corresponde a un valor concreto de t .

3.1.1. Sucesión de Fibonacci

Leonardo Pisano es más conocido por su apellido *Fibonacci*. Nació en Pisa en el año 1170 y murió en la misma ciudad en 1250. Aunque nació en Italia, fue educado

en el Norte de África, donde su padre *Guilielmo*, era un representante diplomático de la república de Pisa en la ciudad argelina de Bugía. Durante su estancia en esta ciudad estudió con profesores árabes quienes le enseñaron el cálculo posicional hindú que posteriormente introdujo en Europa sustituyendo al sistema de numeración romano. En el año 1200 regresó a Pisa y escribió un número importante de trabajos, actualizando algunos resultados matemáticos, así como proporcionando nuevos e interesante conceptos, entre ellos, como se ha comentado, nuestro actual sistema de numeración posicional.



Figura: 3.1:Leonardo Fibonacci y Liber abbaci.

Hoy en día todavía se conservan copias de algunos de sus libros, como por ejemplo, *Liber abbaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225), y *Liber quadratorum*. Un problema que se encuentra en la tercera sección de su libro *Liber abbaci* llevó a la introducción de los números de Fibonacci y a la sucesión que lleva su nombre, y es la razón por la que aún hoy en día es tan recordado.

Supongamos que un par de conejos recién nacidos, un macho y una hembra se colocan en el campo. Los conejos son fértiles a la edad de un mes, así que al final del segundo mes una hembra puede producir otro par de conejos. Supongamos que nuestros conejos nunca mueren, y que las hembras siempre producen un nuevo par (un macho y una hembra) cada mes, desde el segundo de los meses. La pregunta que Fibonacci se hizo fue la siguiente, ¿cuántos pares de conejos tendremos en un año?

Si observamos atentamente del enunciado del problema deducimos que:

- Al final del primer mes, hay un solo par.
- Al final del segundo mes, la hembra produce un nuevo par, así que ahora tenemos dos parejas de conejos en el campo.
- Al final del tercer mes, la hembra inicial produce un segundo par, haciendo que en el campo tengamos tres pares de conejos.

- Al final del cuarto mes, la hembra original ha producido otro nuevo par y la hembra nacida dos meses antes produce su primer par, con lo que tendremos 5 pares.
- Y así sucesivamente.....

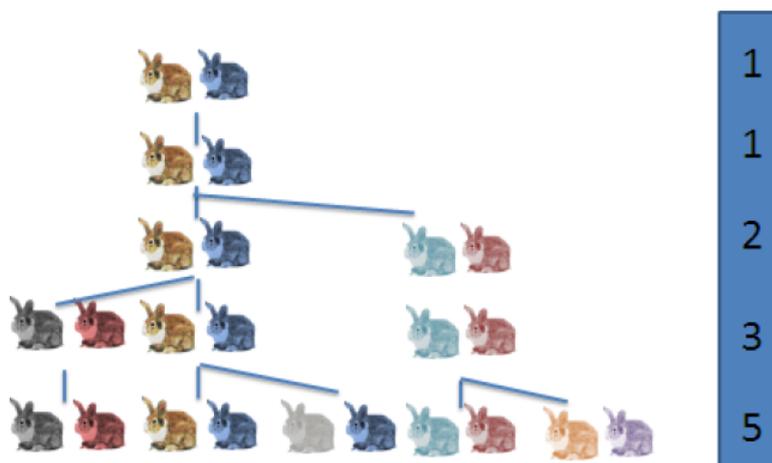


Figura: 3.2:Leonardo El problema de los conejos.

El número de pares de conejos en el campo al inicio de cada mes es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.,

una sucesión, que se inicia con 1 y 1 donde cada otro término es la suma de los dos anteriores, y que recibe el nombre de la sucesión de *Fibonacci*.

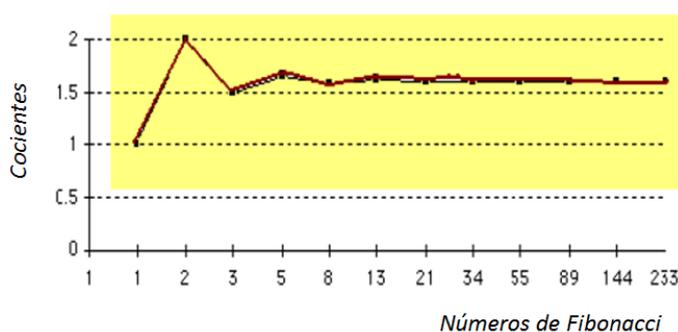


Figura: 3.3:Cociente de términos consecutivos.

Si hacemos el cociente de dos números consecutivos de la sucesión obtenemos esta otra:

$1/1 = 1, 2/1 = 2, 3/2 = 1.5, 5/3 = 1.666, 8/5 = 1.6, 13/8 = 1.625, 21/13 = 1.61538,$

Es fácil ver lo que sucede si dibujamos estos resultados en un gráfico (Figura 3.3), el cociente tiende a un valor particular, el cual recibe el nombre de número áureo, tiene un valor aproximado de 1.61804, y se representa por la letra griega ϕ (Phi).

Si la sucesión se inicia con otros dos números cualesquiera, $\{3, 7, 10, 17, 27, 71, \dots\}$ el cociente entre un término y el anterior en la sucesión tiende al número áureo ϕ .

También podemos hacer aparecer el número áureo a través de una cuestión estética, que aparece en el libro *La Divina proporción* de *Luca Pacioli*. Si consideramos un segmento y preguntamos cuál es la división más agradable en dos partes del mismo, algunas personas pensarán que el punto medio es el más adecuado, otras en cambio pensarán que la tercera o cuarta parte. La respuesta correcta no es ninguna de ellas, ya que la división correcta es la conocida con el nombre de razón áurea o divina proporción. Si el segmento es de longitud 1, entonces el segmento mayor tiene longitud 0.618.... A un segmento dividido de esta forma decimos que está dividido en la sección áurea. Pensemos que si u es la longitud del segmento, se tiene que verificar:

$$\frac{u}{u+v} = \frac{v}{u}$$

si llamamos $\phi = u/v$, entonces

$$\frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\phi} = \phi \Rightarrow \phi + 1 = \phi^2 \Rightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Simplificando, obtenemos la ecuación de segundo grado que tiene como raíz el valor

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$$

que como sabemos es el número áureo.

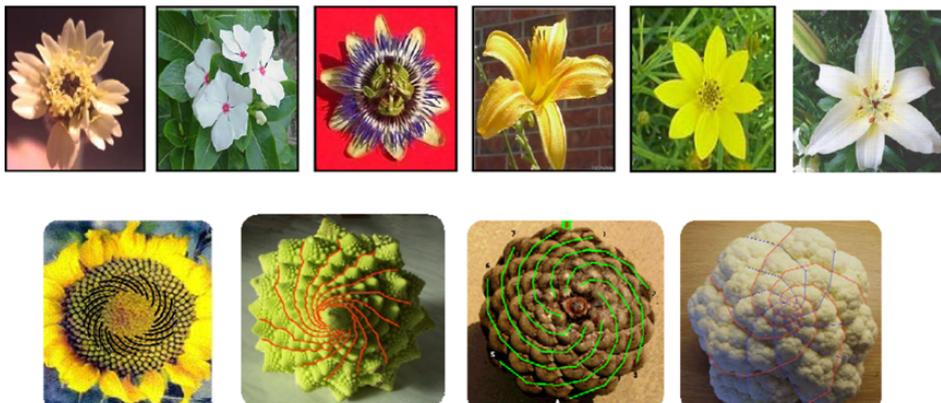


Figura 3.4: Plantas y sucesión de Fibonacci.

En muchas plantas, el número de pétalos es un número de la sucesión de *Fibonacci*. La azucena y el iris tienen tres pétalos; las rosas salvajes 5; el delphiniums 8; algunas

caléndulas granuladas 13; la achicoria 21; mientras que algunas margaritas pueden encontrarse con 34, 55 y hasta 89 pétalos. Algunas especies son muy precisas sobre el número de pétalos que tienen, (por ejemplo el botón de oro), pero otras tienen pétalos que están muy cerca de ellos, pero que su media es justo un número de *Fibonacci*.

Se puede comprobar que algunas semillas se disponen según espirales, una de ellas a la izquierda y otra a la derecha. Si contamos la espiral de la derecha al final del dibujo, nos encontramos con que hay 34. ¿Cuántas existen hacia el otro lado? Puede comprobarse que estos dos números son vecinos en la sucesión de *Fibonacci*.

La pregunta inmediata que nos planteamos es ¿por qué sucede esto? La respuesta se encuentra detrás de un problema de optimización. Si deseamos apilar objetos de la “mejor manera posible”, la respuesta será que dependerá de la forma que posean.

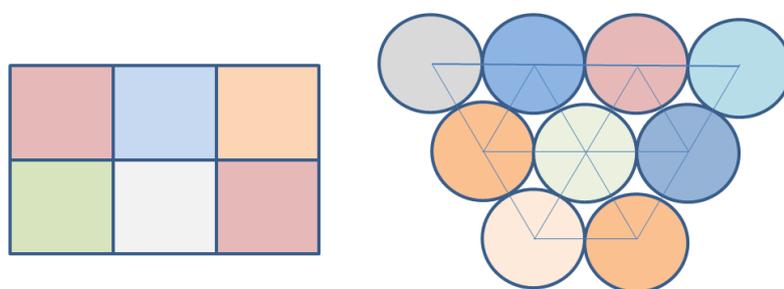


Figura 3.5: Formas de apilar objetos.

Si estos objetos son cuadrados, la respuesta correcta será la figura 3.5 de la izquierda. Sin embargo, si estos objetos son redondos la mejor disposición es la conocida con el nombre de hexagonal (figura 3.5 derecha). Por otro lado, muchas plantas que poseen un tallo alto tienen adheridas las hojas según un esquema bastante interesante, En efecto, se cumple la llamada ley de la *Filotaxis* (ciencia que estudia el ordenamiento de los elementos de una planta), “para cada especie de plantas el ángulo que forman dos hojas consecutivas, llamado ángulo de divergencia, es constante”.

Pero, ¿por qué la naturaleza no utiliza alguna de éstas disposiciones? La mayoría de las semillas son redondas, entonces ¿por qué no se disponen en forma hexagonal las semillas del girasol? La razón es que aunque la simetría hexagonal es la mejor manera de empaquetar semillas circulares, esto no responde a la pregunta de por qué las hojas se distribuyen alrededor del tallo o como se empaquetan las semillas del girasol (las cuales son circulares porque es la forma que encierra máxima área con una determinada longitud), cuando están creciendo en tamaño .

La naturaleza utiliza el mismo patrón para colocar las semillas del girasol, los pétalos alrededor del borde de una flor y las hojas alrededor del tallo. Además, sigue siendo eficiente cuando la planta continúa creciendo. Los botánicos han demostrado que las plantas crecen desde un grupo diminuto de células dispuestas en el extremo de cualquier planta en crecimiento, llamado el meristemo. Hay un meristemo separado

al final de cada rama o varita y allí es donde se forman las nuevas células, que crecen en tamaño, pero las nuevas células solo se forman en esos puntos de crecimiento.

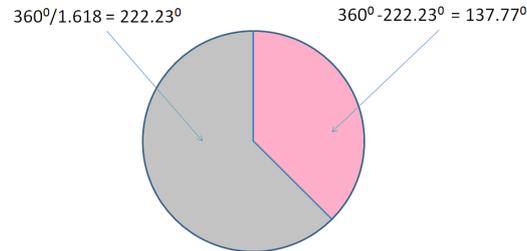


Figura 3.6: Ángulo de giro.

Las nuevas células expanden el tallo y de esta manera se produce el crecimiento. También estas células crecen en forma de espiral, como si el tallo girase un ángulo y entonces aparece la nueva célula, vuelve a girar de nuevo y entonces se forma otra nueva célula. Estas nuevas células dan lugar a una nueva rama, o tal vez a un nuevo pétalo en una flor. **Lo asombroso es que un simple ángulo fijo produce el diseño óptimo no importa como de grande sea el crecimiento de la planta.** Una vez que una semilla está situada en el girasol, esta semilla es empujada en línea recta por otra nueva semilla, pero guarda el ángulo original en el girasol. No importa como de grande sea el girasol, las semillas siempre se empaquetarán uniformemente.

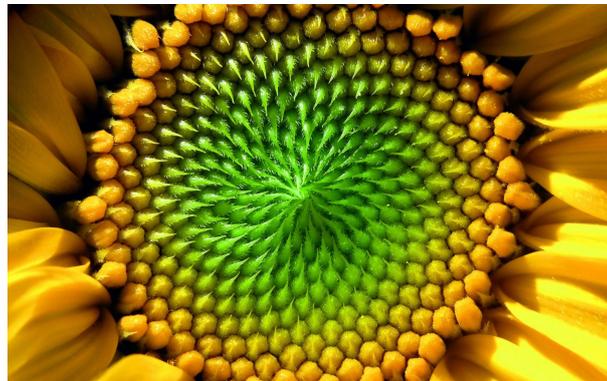


Figura 3.7: Disposición semillas del girasol.

Todo esto fue intuido por muchos científicos en el último siglo, pero el principio de que un ángulo fijo produce empaquetamientos uniformes sin importar el tamaño de este crecimiento, se demostró en 1993 por los matemáticos franceses *Douady* y *Couder*. La distribución de las hojas es la misma que el de las semillas y los pétalos. En todos ellos aparece el número 0.618034 por vuelta. Si hablamos de grados serán 0.61803 de 360° , que suponen 222.23° . Pero como siempre tendemos a diferenciar el ángulo mas pequeño, éste será 137.77° . Si hay $\phi = 1.618..$ hojas por vueltas, entonces tenemos la mejor manera de empaquetar, de esta manera, cada hoja recibirá la máxima cantidad de luz, proporcionando la menor sombra a las otras. También da la mejor área posible de exposición, para que cuando la lluvia caiga, baje a través de las hojas y se deposite en las raíces.

Pero debemos dejar claro que no siempre la sucesión de *Fibonacci* se encuentra en el número de pétalos de cualquier flor, o en el número de semillas de plantas del tipo del girasol, aunque si están cercanos a algunos términos de la sucesión de *Fibonacci*. De todos modos, en un trabajo publicado por *Jean* en 1992, de 12700 observaciones correspondientes a 650 especies de plantas diferentes, la sucesión de *Fibonacci* está presente en un 90% de todas aquellas donde sus elementos están dispuestos en formas de espirales.

Observemos que si notamos a y_n al valor del término que ocupa el lugar n de la sucesión de *Fibonacci*, entonces podemos modelizarla mediante la siguiente ecuación:

$$y_0 = y_1 = 1, \quad y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad n \geq 2$$

Se trata de una ecuación en diferencias homogénea de orden dos, lineal y de coeficientes constantes que posteriormente podemos resolver.

DEFINICIÓN 3.1.1 *Llamamos ecuación en diferencias a una expresión del tipo*

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, y_{t+n-2}, \dots, y_{t+1}, y_t, t) = 0.$$

Una solución de la misma, es toda sucesión y_t que la cumpla.

El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de **solución general**. Esta solución general presenta cierto número de parámetros, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes **soluciones particulares**.

DEFINICIÓN 3.1.2 *Llamamos orden de la ecuación, a la diferencia entre el mayor y el menor de los índices que afectan a y .*

La expresión $-2y_{t+3} + 3y_t = t + 1$, es una ecuación en diferencias de orden $t + 3 - t = 3$, o de tercer orden.

La ecuación en diferencias $y_{t+1} - y_t = 2$, es de primer orden y tiene por solución general a todas las progresiones aritméticas de razón 2, es decir

$$y_t = y(t) = 2t + C,$$

siendo C una constante cualquiera. Una solución particular, es la progresión aritmética

$$\{1, 3, 5, 7, \dots, 2t + 1, \dots\}.$$

EJEMPLO 3.1

- Vamos a construir el modelo que corresponde a la siguiente situación. Supongamos que una población de insectos crece el triple, en cada período de tiempo que transcurre entre dos medidas, de lo que creció en el período inmediatamente anterior.

Si llamamos y_t al número de individuos en el instante t ; del enunciado del ejemplo se deduce,

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t), \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

simplificando obtenemos,

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0, \quad (3.1)$$

que es una ecuación en diferencias de segundo orden. Si por ejemplo, conocemos el número inicial de insectos, $y_0 = y(0) = 100$, podemos sustituir y obtendríamos

$$y_2 - 4y_1 + 300 = 0,$$

lo cual nos indica que debemos saber otra medida, por ejemplo y_1 , para poder encontrar el resto de los valores. En las próximas secciones aprenderemos a resolver este tipo de ecuaciones, y volveremos sobre (3.1).

3.2. Ecuaciones lineales de primer orden

DEFINICIÓN 3.2.1 Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como

$$p_1(t)y_{t+1} + p_2(t)y_t = q(t), \quad (3.2)$$

donde $p_i(t)$, $i = 1, 2$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t . Si la sucesión $q(t)$ es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre de **ecuación homogénea** asociada a (3.2). Cuando las funciones $p_1(t)$ y $p_2(t)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal (3.2) es de **coeficientes constantes**.

Este tipo de ecuaciones son muy interesantes en el estudio de dinámica de poblaciones. Suelen aparecer escritas como

$$y_{t+1} = p(t)y_t + q(t),$$

donde $p(t)y_t$ representa el crecimiento de la población en el tiempo t y $q(t)$ el número de individuos que en el tiempo t se incorporan a la población como consecuencia de la inmigración.

EJEMPLO 3.2

- Supongamos que una determinada población de insectos con 100 individuos, duplica su número en cada generación, y que además, 10 nuevos individuos se incorporan en cada generación procedente de otro lugar. Vamos a construir una ecuación en diferencias que modele a esta situación y posteriormente la resolveremos.

Del enunciado se deduce,

$$y_t = 2y_{t-1} + 10, \quad y_0 = y(0) = 100,$$

lo que nos permite escribir,

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \times 100 + 10 \\ y_2 &= 2(2 \times 100 + 10) + 10 = 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 10 + 10 \\ y_3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 2 \times 10 + 2 \times 10 + 10 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_t &= \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t)} \times 100 + \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t-1)} \times 10 + \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t-2)} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10 \\ &= 2^t \times 100 + 2^{t-1} \times 10 + 2^{t-2} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10 \\ &= 2^t \times 100 + (2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2^1 + 2^0) \times 10 \\ &= 2^t \times 100 + (2^t - 1) \times 10 = 110 \times 2^t - 10, \end{aligned}$$

donde en el último de los pasos hemos utilizado la fórmula que nos da la suma de t términos de una progresión geométrica de razón 2. La solución es, por tanto,

$$\boxed{y_t = 110 \times 2^t - 10.}$$

3.3. Ecuaciones lineales de segundo orden

DEFINICIÓN 3.3.1 Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden es aquella que puede expresarse como

$$p_1(t)y_{t+2} + p_2(t)y_{t+1} + p_3(t)y_t = q(t), \quad (3.3)$$

donde $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t .

Si la función $q(t) = 0$, entonces (3.3) es su ecuación lineal en diferencias homogénea de segundo orden asociada. Además, si todas las funciones $p_i(t)$ son constantes, entonces (3.3) es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, y será en la que nos centraremos.

Veamos en primer lugar un teorema de existencia y unicidad de solución para una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n .

TEOREMA 3.3.2 *Dada la siguiente ecuación lineal en diferencias homogénea de orden n*

$$y_{t+n} + p_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + p_n(t)y_t = 0,$$

y dados n números reales k_0, k_1, \dots, k_{n-1} , existe una única solución, cumpliendo

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1}.$$

Demostración. Comenzamos definiendo la siguiente sucesión:

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1},$$

y para los valores de t mayores que $n - 1$, procedemos de la siguiente manera

$$y_n = -p_1(0)y_{n-1} - \cdots - p_n(0)y_0 = -p_1(0)k_{n-1} - \cdots - p_n(0)k_0,$$

$$y_{n+1} = -p_1(1)y_n - \cdots - p_n(1)k_1.$$

De esta manera, y_t queda definida por la ley de recurrencia anterior. Puede comprobarse que y_t es solución de la ecuación pedida y cumple las condiciones iniciales. Además, es la única solución, ya que si w_t es otra solución que cumple

$$w_0 = k_0, \quad w_1 = k_1, \quad \cdots \quad w_{n-1} = k_{n-1},$$

la ley de recurrencia que hemos encontrado anteriormente, determina el resto de los valores de w_t . ■

Consideremos la ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = 0, \tag{3.4}$$

cualquier combinación lineal de soluciones de (3.4) sigue siendo otra solución.

TEOREMA 3.3.3 *Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de (3.4), entonces $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, con k_1 y k_2 constantes, sigue siendo solución de (3.4).*

Demostración. Es inmediata, basta llevar $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$ en (3.4). ■

Del mismo modo, también es evidente la demostración del siguiente resultado.

TEOREMA 3.3.4 *Si y_t^c es una solución de*

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = q(t), \tag{3.5}$$

e y_t^h es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_t = y_t^h + y_t^c$ es solución de la ecuación completa (3.5).

A continuación veremos las condiciones bajo las cuales la combinación lineal de dos soluciones particulares de la ecuación homogénea dan lugar a su solución general.

TEOREMA 3.3.5 Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de (3.4), entonces

$$y = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

con k_1 y k_2 constantes, es la solución general de (3.4) si

$$\begin{vmatrix} y_0^1 & y_0^2 \\ y_1^1 & y_1^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{cases} \alpha_1 y_0^1 + \alpha_2 y_0^2 = \beta_1 \\ \alpha_1 y_1^1 + \alpha_2 y_1^2 = \beta_2, \end{cases}$$

cualesquiera que sean los valores de β_1 y β_2 , por hipótesis del teorema, el sistema es compatible determinado. Pero por el Teorema 3.3.2 existe una única solución de la ecuación homogénea que puede ser escrita como $y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, pues basta tomar $\beta_1 = y_0$ y $\beta_2 = y_1$, y calcular α_1 y α_2 . Para finalizar asignamos los siguientes valores, $k_1 = \alpha_1$ y $k_2 = \alpha_2$. ■

A dos soluciones y_t^1 y y_t^2 cumpliendo las hipótesis del Teorema 3.3.2 le daremos el nombre de **sistema fundamental de soluciones**. Siguiendo un razonamiento similar al realizado en el Teorema 3.3.2, podemos demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 3.3.6 Si y_t^p es una solución particular de

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = q(t), \quad (3.6)$$

e y_t^1, y_t^2 forman un sistema fundamental de soluciones, entonces

$$y_t^p + k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

es la solución general de (3.6).

3.3.1. Resolución de la ecuación homogénea

El Teorema 3.3.6 nos dice que para resolver una ecuación en diferencias lineal de segundo orden, tenemos que empezar encontrando la solución general de su ecuación homogénea asociada, y para ello hemos de localizar dos soluciones particulares que den lugar a un sistema fundamental. Supongamos por tanto, la ecuación homogénea

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = 0,$$

que admitirá la solución $y_t = \lambda^t$ si

$$a \lambda^{t+2} + b \lambda^{t+1} + c \lambda^t = \lambda^t (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0,$$

es decir,

$$\boxed{a \lambda^2 + b \lambda + c = 0.} \quad (3.7)$$

A esta ecuación se la conoce con el nombre de **ecuación característica** de la ecuación en diferencias.

A continuación, presentamos un procedimiento para resolver la ecuación en diferencias homogénea, basado en el estudio de las raíces de (3.7).

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces reales diferentes** λ_1, λ_2 , entonces

$$\boxed{y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t,}$$

forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación (3.7) tiene **una raíz real doble** λ , entonces

$$\boxed{y_t^1 = \lambda^t, \quad y_t^2 = t \lambda^t,}$$

forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces complejas conjugadas**

$$\lambda_1 = \alpha + i \beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i \beta,$$

entonces

$$y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t,$$

forman un sistema fundamental de soluciones. En este último caso, podemos escribir la solución general de la ecuación homogénea de la siguiente manera,

$$y_t = k_1 \lambda_1^t + k_2 \lambda_2^t,$$

y expresando los números complejos en su forma módulo argumental, teniendo en cuenta que poseen el mismo módulo y argumentos opuestos,

$$y_t = k_1 \rho^t (\cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta) + k_2 \rho^t (\cos t\theta - i \operatorname{sen} t\theta).$$

Al formar $\lambda_1^t = \rho^t (\cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta)$ y $\lambda_2^t = \rho^t (\cos t\theta - i \operatorname{sen} t\theta)$ un sistema fundamental de soluciones, también lo será cualquier combinación lineal de ellas, en particular

$$\frac{1}{2} (\lambda_1^t + \lambda_2^t) = \rho^t \cos t\theta$$

$$\frac{1}{2i} (\lambda_1^t - \lambda_2^t) = \rho^t \operatorname{sen} t\theta,$$

la solución general será entonces

$$\boxed{y_t = k_1 \rho^t \cos t\theta + k_2 \rho^t \operatorname{sen} t\theta.}$$

EJEMPLO 3.3

- Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias:

(a) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$

(b) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2y_t = 0$

(c) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 0$

- (a) La ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, tiene como raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. En consecuencia, 2^t y 1, forman un sistema fundamental de soluciones, siendo la solución general

$$y_t = k_1 + k_2 2^t.$$

- (b) En el segundo de los casos, las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ son $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$. Los módulos de estos números complejos son $\sqrt{2}$ y el argumento $3\pi/4$, por consiguiente, la solución general es

$$y_t = k_1 (\sqrt{2})^t \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + k_2 (\sqrt{2})^t \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}t\right), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

- (c) La ecuación $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene a $\lambda = -1$ como raíz doble. La solución general de la ecuación propuesta es

$$y_t = k_1 (-1)^t + k_2 t (-1)^t, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

EJEMPLO 3.4

- Resolución de la ecuación en diferencias que modeliza a la sucesión de *Fibonacci*.**

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$

Puede expresarse por la ecuación en diferencias con condiciones iniciales siguiente:

$$y_{t+2} = y_{t+1} + y_t; \quad y_0 = 1; y_1 = 1$$

o bien, mediante la ecuación homogénea:

$$y_{t+2} - y_{t+1} - y_t = 0; \quad y_0 = 1; y_1 = 1$$

La ecuación característica $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ tiene como raíces

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

que aporta la solución general:

$$y_t = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^t + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^t$$

Para encontrar la solución particular resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 \\ y_1 = 1 \Rightarrow C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$C_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}; \quad C_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

En consecuencia, la solución particular de la sucesión de Fibonacci viene dada por la sucesión:

$$y_t = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^t - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^t$$

o bien

$$y_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} \right]$$

Se puede simular con Mathematica y comprobar que en efecto si $t = 5$, $t = 10$, y $t = 25$ el ordenador nos devuelve los términos de la sucesión de *Fibonacci* que ocupan esos lugares.

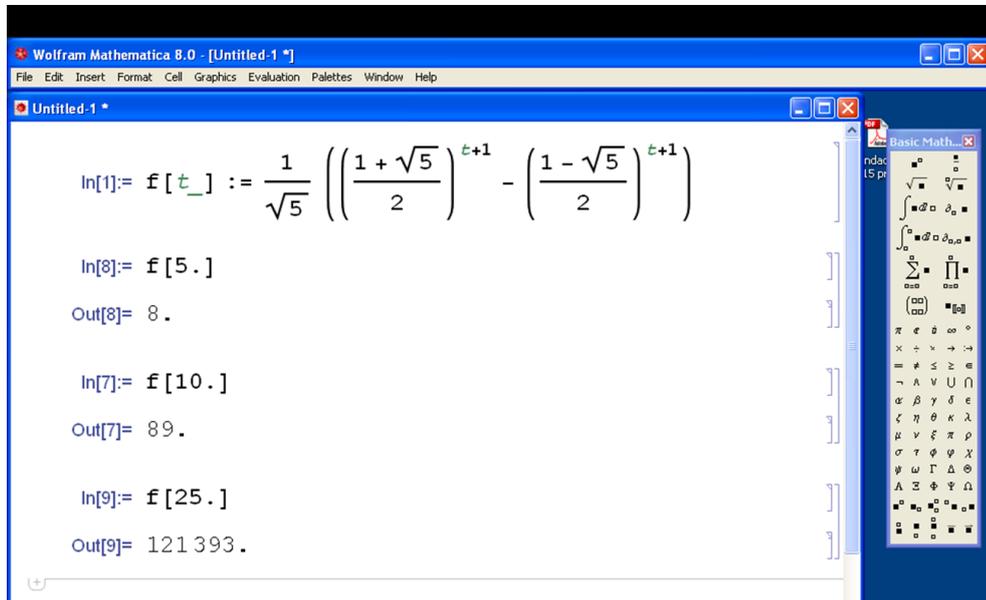


Figura 3.8: Simulación con Mathematica de la solución.

Veamos ahora la relación existente entre la sucesión de Fibonacci y el número áureo ϕ . En la introducción al tema comentamos que:

$$\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_{t+1}}{y_t},$$

en nuestro caso y_t es la solución de *Fibonacci* encontrada anteriormente:

$$\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+2} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} \right]},$$

simplificando

$$\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1}}$$

Si hacemos $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Entonces, $b < a$ y $\frac{b}{a} < 1$. En consecuencia, $\left(\frac{b}{a}\right)^{t+1}$ tiende a cero cuando t tiende a infinito.

El límite anterior puede escribirse como,

$$\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a a^{t+1} - b b^{t+1}}{a^{t+1} - b^{t+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a - b \left(\frac{b}{a}\right)^{t+1}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{t+1}} = a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Por otro lado, Si tenemos un segmento AB de longitud unidad, seleccionamos un punto C y llamamos x a la longitud del segmento AC , entonces, si:

$$\phi = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado,

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Es decir,

$$\phi = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{5}-2}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Finalmente, y como curiosidad, el número ϕ se puede encontrar también en:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}} \Rightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{x}} \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

O en este otro:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

al resolverlo obtenemos:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \quad ; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

3.3.2. Resolución de la ecuación completa

Para encontrar la solución general de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = q(t), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

podemos hacer uso de dos métodos diferentes.

Método de variación de parámetros.

Es también conocido como método de **coeficientes indeterminados**. Se empieza encontrando la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

y se supone que las constantes k_1 y k_2 dependen de t , es decir

$$y_t = k_1(t) y_t^1 + k_2(t) y_t^2. \quad (3.9)$$

De esta expresión deducimos inmediatamente

$$y_{t+1} = k_1(t+1) y_{t+1}^1 + k_2(t+1) y_{t+1}^2,$$

que sumando y restando $k_1(t) y_{t+1}^1 + k_2(t) y_{t+1}^2$, puede escribirse

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= k_1(t) y_{t+1}^1 + k_2(t) y_{t+1}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+1}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+1}^2. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior hacemos

$$[k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+1}^1 + [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+1}^2 = 0, \quad (3.10)$$

y nos queda la ecuación

$$y_{t+1} = k_1(t) y_{t+1}^1 + k_2(t) y_{t+1}^2, \quad (3.11)$$

que permite ser tratada utilizando el mismo procedimiento anterior

$$\begin{aligned} y_{t+2} &= k_1(t) y_{t+2}^1 + k_2(t) y_{t+2}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Llevando (3.9), (3.11) y (3.12) en (3.8),

$$\begin{aligned} &ak_1(t) y_{t+2}^1 + ak_2(t) y_{t+2}^2 + a [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 \\ &+ a [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2 + bk_1(t) y_{t+1}^1 + bk_2(t) y_{t+1}^2 \\ &+ ck_1(t) y_t^1 + ck_2(t) y_t^2 = q(t). \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} &k_1(t) [ay_{t+2}^1 + by_{t+1}^1 + cy_t^1] + k_2(t) [ay_{t+2}^2 + by_{t+1}^2 + cy_t^2] \\ &+ a [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 + a [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2 = q(t). \end{aligned}$$

Al ser y_t^1 y y_t^2 solución de la ecuación homogénea, la expresión anterior adopta la forma

$$a [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 + a [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2 = q(t). \quad (3.13)$$

Las ecuaciones (3.10) y (3.13) dan lugar a un sistema lineal, siendo $k_1(t+1) - k_1(t)$ y $k_2(t+1) - k_2(t)$ las incógnitas. Al ser y_t^1 y y_t^2 un sistema fundamental de soluciones, ocurre que

$$\begin{vmatrix} y_{t+1}^1 & y_{t+1}^2 \\ a y_{t+2}^1 & a y_{t+2}^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Usando la Regla de Cramer, podemos resolver el sistema anterior

$$\begin{aligned} k_1(t+1) - k_1(t) &= \frac{-q(t)}{ay_{t+1}^1(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ k_2(t+1) - k_2(t) &= \frac{q(t)}{ay_{t+1}^2(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

y nos permite encontrar los valores de $k_1(t)$ y $k_2(t)$. ■

EJEMPLO 3.5

- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, partiendo de 100 individuos, se llega el primer año a 110 y que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Deseamos determinar la ecuación general de la evolución de efectivos.

El problema a estudiar es el siguiente:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 2(y_{t+1} - y_t) + 10, \quad y_0 = 100, \quad y_1 = 110.$$

Tenemos que resolver la ecuación en diferencias lineal de segundo grado

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 10,$$

con las condiciones iniciales $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$. Para ello, empezamos encontrando las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Es decir, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_t^h = k_1 + k_2 2^t.$$

Para poder resolver la ecuación completa utilizamos el método de variación de las constantes. Teniendo en cuenta (3.14), deducimos

$$\begin{cases} k_1(t+1) - k_1(t) = -10 \\ k_2(t+1) - k_2(t) = 10/2^{t+1} \end{cases}$$

De la primera ley de recurrencia obtenemos

$$\begin{aligned} k_1(1) &= k_1(0) - 10 \\ k_1(2) &= k_1(1) - 10 = k_1(0) - 2 \times 10 \\ &\vdots \\ k_1(t) &= k_1(0) - 10t \end{aligned}$$

De manera similar, de la segunda de las ecuaciones

$$\begin{aligned} k_2(1) &= k_2(0) + 10/2 \\ k_2(2) &= k_2(1) + 10/2^2 = k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 \\ &\vdots \\ k_2(t) &= k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 + 10/2^3 + \dots + 10/2^t = \\ &= k_2(0) + 10(1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \dots + 1/2^t) \\ &= k_2(0) + 10(1 - 1/2^t). \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación completa es

$$\boxed{y_t = k_1(0) - 10 \times t + [k_2(0) + 10(1 - 1/2^t)] 2^t.}$$

Las constantes $k_1(0)$ y $k_2(0)$ pueden encontrarse con $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$,

$$100 = k_1(0) + k_2(0), \quad 110 = k_1(0) - 10 + (k_2(0) + 5) 2,$$

que dan como solución $k_1(0) = 90$, $k_2(0) = 10$. La ecuación de los efectivos de la población es:

$$\boxed{y_t = 80 - 10t + 10 \times 2^{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots}$$

Segundo método.

Para encontrar la solución general de una ecuación lineal completa de segundo orden nos fijaremos en el término independiente $q(t)$, y según sea, procederemos de una manera u otra. Los casos más usuales que suelen presentarse son:

- Si $q(t) = \alpha^t$, entonces para encontrar la solución de la ecuación completa probamos con la solución particular $\beta\alpha^t$ (excepto si α es raíz de la ecuación característica).
- Si $q(t)$ es un polinomio de grado n , entonces ensayamos con un polinomio del mismo grado. Si el 1 es raíz de la ecuación característica, tomaremos un polinomio de grado $n+1$, si además tiene grado de multiplicidad γ , probaremos con un polinomio de grado $n + \gamma$.
- Si $q(t)$ es seno o coseno de αt , entonces tomaremos $\beta \sin \alpha t + \gamma \cos \alpha t$ y determinaremos los valores de las constantes β y γ .

EJEMPLO 3.6

- Hallar la solución general de las ecuaciones en diferencias,

(a) $2y_{t+2} - y_t = 2^t$

(b) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3t^2$

(c) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t + 1$.

- (a) Empezamos resolviendo la ecuación característica

$$2\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

que nos permite escribir la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t^h = k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t + k_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t.$$

Ahora, para poder encontrar la solución de la ecuación completa, ensayamos con la solución particular $y_t^p = \beta 2^t$. Sustituyendo en la ecuación inicial

$$2\beta 2^{t+2} - \beta 2^t = 2^t \quad \Rightarrow \quad 2\beta 2^2 - \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1/7.$$

La solución general buscada es

$$y_t = k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t + k_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t + \frac{1}{7} 2^t.$$

- (b) Para el segundo de los casos, es inmediato comprobar que $\lambda = 2$ es una raíz doble de la ecuación característica. En consecuencia, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_t^h = k_1 2^t + k_2 t 2^t.$$

Al ser el término independiente un polinomio de segundo grado y el 1 no es raíz del polinomio característico, probamos con una solución particular del tipo

$$y_t^p = at^2 + bt + c,$$

llevando este valor en la ecuación en diferencias propuesta, e identificando coeficientes, se obtiene $a = 3$, $b = 12$ y $c = 24$.

La solución buscada es

$$y_t = k_1 2^t + k_2 t 2^t + 3t^2 + 12t + 24.$$

- (c) Al coincidir la ecuación homogénea con la del caso anterior, lo único que tenemos que hacer es encontrar una solución particular. Para ello, buscamos una solución particular de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t,$$

y otra de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 1.$$

Para la primera de ellas, al ser $\lambda = 2$ una raíz doble, ensayamos con la solución $y_t^1 = kt^2 2^t$.

$$k(t+2)^2 2^{t+2} - 4k(t+1)^2 2^{t+1} + 4kt^2 2^t = 2^t,$$

que una vez resuelto da $k = 1/8$.

Para la segunda de las ecuaciones, el término independiente es una constante (un polinomio de grado cero), y probamos como solución particular con otra constante, $y_t^2 = k$.

$$k - 4k + 4k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1.$$

La solución de la ecuación propuesta es

$$y_t = k_1 2^t + k_2 t 2^t + \frac{1}{8} t^2 2^t + 1.$$

3.4. Sistemas de ecuaciones en diferencias

Hemos visto en las secciones anteriores que cuando se analizan fenómenos biológicos dinámicos discretos, aparecen las ecuaciones en diferencias. Del mismo modo, cuando en estos fenómenos el número de variables es mayor que uno, entonces nos aparecerán los sistemas de ecuaciones en diferencias.

Como ya hemos tenido ocasión de comentar, el estudio que estamos realizando es

una breve introducción a las ecuaciones y a los sistemas en diferencias. Por este motivo, solo abordaremos aquellos sistemas de ecuaciones en diferencias lineales y de primer orden. Además, este tipo de sistemas son los que con más frecuencia se presentan en las aplicaciones biológicas.

DEFINICIÓN 3.4.1 *Un sistema en diferencias lineal con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \\ \vdots \\ y_{t+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

De entre este tipo de sistemas, el caso más elemental (aunque para casos más generales, el procedimiento a seguir es similar) consiste en dos ecuaciones y dos variables

$$\begin{cases} y_{t+1}^1 = a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + f_1(t) \\ y_{t+1}^2 = a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t) \end{cases}$$

La clave para resolver este tipo de sistemas, es intentar expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. En efecto, de la primera de las ecuaciones

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}y_{t+1}^2 + f_1(t+1), \quad (3.15)$$

sustituimos el valor de la segunda de las ecuaciones del sistema en (3.15)

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}(a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t)) + f_1(t+1),$$

en la que sólo aparece un término $a_{12}a_{22}y_t^2$, en el que no intervenga la función y_t^1 . Despejando de la primera de las ecuaciones del sistema

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t),$$

sustituyendo

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}a_{21}y_t^1 + a_{22}(y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1),$$

y sacando factor común, se obtiene finalmente,

$$y_{t+2}^1 = (a_{11} + a_{22})y_{t+1}^1 + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y_t^1 - a_{22}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1),$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden.

EJEMPLO 3.7

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ el número de individuos de dos poblaciones de animales en el mes t , que conviven en un ecosistema en el que realizamos un control cada mes. Supongamos que inicialmente tenemos $x_0 = 150$ e $y_0 = 325$, y que el desarrollo de la convivencia está gobernado por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t - y_t + 1 \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t + 3 \end{cases}$$

- Para encontrar el valor de x_t e y_t procedemos de la manera siguiente: De la primera de las ecuaciones

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - y_{t+1} + 1,$$

sustituimos la segunda de las ecuaciones en la expresión anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - (-x_t + 2y_t + 3) + 1 = 3x_{t+1} + x_t - 2y_t - 2,$$

que sigue dependiendo de y_t , pero podemos despejarlo de la primera de las ecuaciones y sustituir este valor en la ecuación anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} + x_t - 2(-x_{t+1} + 3x_t + 1) - 2 = 5x_{t+1} - 5x_t - 4,$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que puede ser escrita

$$\boxed{x_{t+2} - 5x_{t+1} + 5x_t = -4.} \quad (3.16)$$

Es fácil ver que las raíces de la ecuación característica de su ecuación homogénea son:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2},$$

dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea

$$x_t = k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t.$$

Para encontrar una solución particular de la solución completa, al ser el término independiente una constante, ensayamos con $x_t = a$. Sustituyendo en (3.16)

$$a - 5a + 5a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = -4,$$

la solución general de la ecuación completa será

$$\boxed{x_t = k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 4.}$$

- Ahora, tendremos que sustituir en la primera de las ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} y_t &= -x_{t+1} + 3x_t + 1 \\ &= -k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} + 4 + 3k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t \\ &\quad + 3k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 12 + 1. \end{aligned}$$

$$y_t = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 7.$$

- Para encontrar los valores de k_1 y k_2 , imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{cases} 150 = k_1 + k_2 - 4 \\ 325 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) k_1 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) k_2 - 7, \end{cases}$$

sistema de ecuaciones lineales que tiene por solución $k_1 = 77 - 45\sqrt{5}$ y $k_2 = 77 + 5145\sqrt{5}$. En consecuencia, la solución particular para estas condiciones iniciales es:

$$\begin{aligned} x_t &= (77 - 45\sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + (77 - 51\sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 4 \\ y_t &= (151 - 61\sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + (166 - 64\sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 7 \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 1

- 1.- Sea la ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t), \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (3.17)$$

siendo y_t el número de individuos de una población en el año t .

- Interpretar demográficamente (3.17).
 - Comprobar que $y_t = 2 + 5(3^t)$ es una solución particular de (3.17).
 - Encontrar la población al cabo de 4 años, sabiendo que $y_0 = 2, y_1 = 4$.
- 2.- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Plantear y resolver la ecuación en diferencias que modeliza la situación planteada.
- 3.- Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t . Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma,

$$y_{t+2} - y_{t+1} = \frac{1}{5}(y_{t+1} - y_t) + \left(\frac{1}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

probar que la población se estabiliza a largo plazo.

- 4.- Supongamos que si no intervienen factores externos, el incremento del número de conejos en un mes es la tres cuartas partes del incremento del mes anterior. Inicialmente el número de conejos es de 10 y al finalizar el primer mes es de 30, además cada mes se incorporan 25 conejos a la población. Determinar la población de conejos al finalizar el segundo año ¿Cuál será su comportamiento a largo plazo?
- 5.- Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:
- Sea la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$, donde y_t representa a la cantidad de individuos en el año t . Si el número inicial de individuos es 2 y al cabo de un año es 5, ¿cuál será el valor de la población al cabo de 10 años?
 - Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 8$$

- 6.- Estamos interesados en un determinado tipo de aves que viven en una laguna. La dinámica de la población está gobernada por la siguiente ecuación en diferencias,

$$6x_{t+2} + x_{t+1} = x_t + \left(\frac{1}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

siendo $x_0 = 2$ y $x_1 = 5$.

- Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias (3.18)
 - ¿Aumentará esta población a largo plazo?
- 7.- La evolución de dos especies que comparten un mismo territorio viene dada por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t \\ y_{t+1} = x_t - 2y_t \end{cases}$$

donde x_t, y_t representan al número de animales de la primera y segunda especie en el año t ¿Cuál es el comportamiento a largo plazo de estas poblaciones?

3.5. Sistemas dinámicos discretos

3.5.1. Introducción

La teoría de sistemas dinámicos es una rama de las Matemáticas que se ocupa del estudio del movimiento, y proporciona un lenguaje común para la Matemática, la Biología, la Economía, la Física, la Historia y la Literatura.

En la teoría de los sistemas dinámicos, un **sistema** se define como una colección de elementos que continuamente interactúan para formar un conjunto unificado. A las relaciones internas y las conexiones entre los componentes de un sistema se les llama la **estructura del sistema**. Un ejemplo de un sistema es un ecosistema. La estructura de un ecosistema está definida por las relaciones entre la población animal, nacimientos y muertes, cantidad de comida, y otras variables específicas para un ecosistema particular.

El término dinámico hace referencia al cambio a lo largo del tiempo. Si algo es dinámico, es porque se está modificando constantemente. Un sistema dinámico es aquel en el cual las variables se modifican para producir cambios a lo largo del tiempo. La manera por la cual los elementos o las variables de un sistema cambian con el tiempo se denomina **comportamiento del sistema**. En el ejemplo del ecosistema, el comportamiento está descrito por la dinámica que se produce como consecuencia de los nacimientos y las muertes de la población. El comportamiento está expuesto a la influencia de comida adicional, los depredadores, y al medio ambiente, los cuales son todos elementos del sistema.

Los sistemas dinámicos también pueden usarse para analizar, como pequeños cambios en una parte del sistema, pueden afectar al comportamiento del sistema completo. Si nos referimos al ejemplo del ecosistema, podemos analizar el impacto de la sequía en el ecosistema o analizar el impacto de la eliminación de una determinada especie animal en el comportamiento del ecosistema completo.

En relación con los sistemas dinámicos discretos, fue *H. Poincaré* en 1899 el primero en utilizarlos al intentar simplificar un modelo continuo, pero ha sido en la década de los cincuenta donde han sido estudiados y aplicados en problemas muy diversos. En 1976 *R. May*, analizando el comportamiento de las ecuaciones en diferencias en el modelo que lleva su nombre, observó que aún para el caso determinista, el modelo podía presentar comportamientos “muy complicados”. En 1963 el meteorólogo *E. Lorentz* descubre el caos matemático en un sistema dinámico continuo, presentando a la comunidad científica el atractor que lleva su nombre. Poco después, en 1973, *M. Heron* estudia el caso discreto, descubriendo un tipo de atractor muy parecido al de *Lorentz*. Dos años después, *Feigenbaum* presentó por primera vez el diagrama de bifurcación correspondiente al modelo logístico. Actualmente la teoría de las bifurcaciones es un campo donde se investiga intensamente.

3.5.2. Ejemplos de sistemas dinámicos

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos:

- 1.- **La ecuación de Malthus.** Queremos estudiar la evolución de la población de una determinada especie. Llamamos x_k al número de individuos de la población en el instante temporal k . Si suponemos que por cada individuo existente en el período k habrá, por término medio, α individuos en el período $k + 1$, se tendrá

$$x_{k+1} = \alpha x_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.19)$$

Esta ecuación en diferencias lineal de primer orden, es la llamada ecuación de *Malthus*, economista y pensador del siglo XIX, propuesta para estimar la evolución de la población humana.

Si $\alpha > 1$, es decir, si existe algún crecimiento vegetativo en la población, los valores de x_k crecen en progresión geométrica y se disparan de forma exponencial, razón por la que esta ecuación desató una fuerte polémica entre los contemporáneos de *Malthus*, suponiendo la primera llamada de atención sobre el problema de la sobrepoblación del planeta.

- 2.- **La parábola logística de May.** En 1976 el biólogo *Robert May* formuló otra ecuación para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema aislado, diferente de la de *Malthus*. *May* tuvo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema. Cuando la población se acerca al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, entonces el parámetro α debe disminuir, lo que equivale a considerar este parámetro función del número de individuos. Con ello se llega a una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = \alpha(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Podemos tomar como unidad de medida el máximo posible de la población, de manera que x_k expresa la fracción de población existente en el período k con respecto al nivel máximo de población. *May* formuló la hipótesis de que $\alpha(x_k)$ debería decrecer linealmente cuando x_k creciera, hasta hacerse nulo cuando x_k tomara el valor 1. Es decir que $\alpha(x_k)$ fuera de la forma $\mu(1 - x_k)$, llegando así a la ecuación de la **parábola logística de May**

$$x_{k+1} = \mu(1 - x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Observemos que para valores pequeños de x_k se tiene $1 - x_k \approx 1$, con lo que la ecuación (3.20) es equivalente a la ecuación de *Malthus* (3.19) con parámetro μ .

- 3.- **Modelo matricial.** Supongamos que una especie de aves que vive muchos años, resulta capaz de reproducirse a partir del segundo año de vida y que, por término medio, cada pareja de aves en edad reproductora cría anualmente una nidada de la que sobreviven dos crías, una de cada sexo. Se supone que

a partir del segundo año todas las aves han emparejado. Se suelta una pareja de aves en una región sin depredadores. ¿Cuál es la ley de evolución para la población de aves?

Ante un problema de esta naturaleza, el primer paso consiste en seleccionar las variables. Debido a las diferentes condiciones de reproducción, conviene considerar dos segmentos en la población de aves: las de un año y las de dos o más. Tomamos como variable $x_1(k)$ el número de parejas adultas en el período k . Debido a que existe siempre el mismo número de machos que de hembras, la población de aves de un año puede también contarse por el número $x_2(k)$ de parejas que pueden formarse entre ellas. Se tienen entonces las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \end{cases}$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

3.5.3. Conceptos de dinámica discreta

Un sistema dinámico discreto es simplemente, desde un punto de vista matemático, una ecuación en diferencias de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde f es una aplicación $f : X \rightarrow X$ definida en cierto conjunto X , que recibe el nombre de **espacio de fases o espacio de los estados**. Salvo que digamos lo contrario, siempre consideraremos funciones f suficientemente suaves, es decir, con derivadas continuas de todos los órdenes necesarios. Así, por ejemplo, cuando se quiere traducir un problema como los descritos en el apartado anterior al lenguaje de los sistemas dinámicos, se empieza por determinar el espacio de fases del problema que no es sino un conjunto cuyos elementos describen todos los posibles estados del sistema que se trata de analizar.

- En el modelo de *Malthus* se podría considerar como espacio de los estados el conjunto de los números reales no negativos (no son posibles poblaciones con un número negativo de individuos). Cuando el espacio de fases de un sistema es \mathbb{R} o algún subconjunto de \mathbb{R} se trata de un **sistema dinámico unidimensional**
- En el ejemplo la parábola logística de *May*, donde se estudia una única variable, que es la fracción de población con respecto a la máxima población posible, un espacio de fases adecuado es $X = [0, 1]$
- En el caso de la población de aves, el estado del sistema se describe a través de dos variables de estado $x_1(k)$ e $x_2(k)$ por lo que el espacio de los estados

adecuado es un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$, el de todos los pares de números enteros no negativos. En sistemas más complejos, se hacen necesarias más variables para describir completamente el estado del sistema, por lo que \mathbb{R}^m , o un subconjunto de \mathbb{R}^m , es un espacio de fases adecuado para muchos problemas. Por ejemplo, en mecánica se requieren 10 variables para describir completamente una partícula: tres para fijar su posición espacial, otras seis para conocer su velocidad y aceleración y una más para determinar su masa.

Las variables que describen un sistema, se llaman **variables de estado**. Se agrupan en un vector, que se conoce como **vector de estado**, y que almacena la información completa acerca del estado del sistema. El espacio de fases es entonces el conjunto de todos los posibles vectores de estado del sistema.

La ecuación de un sistema dinámico puede interpretarse de la siguiente forma: si el sistema adopta en un instante k un estado descrito a través de un cierto elemento $x_k \in X$, entonces en el instante $k + 1$ el estado del sistema será x_{k+1} . La aplicación f representa por consiguiente la **ley de evolución del sistema dinámico** que transforma cada estado en el siguiente estado que el sistema adopta.

Si el sistema se encuentra en un estado inicial x_0 , su evolución temporal corresponde a la sucesión x_0, x_1, x_2, \dots , también llamada **solución con condición inicial** x_0 . Se obtiene recursivamente

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),$$

y en general

$$x_k = f^k(x_0).$$

La expresión $f^k(x)$, es la **solución general o flujo de los sistemas dinámicos discretos**. Permite conocer el estado del sistema en cualquier instante a partir de su posición inicial. El conjunto de valores

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, \}$$

recibe el nombre de **órbita de** x , (se diferencia de la solución $x, f(x), f^2(x), \dots$ en que ésta última es una sucesión ordenada cuyos términos son los elementos de la órbita).

Es fácil realizar el siguiente experimento: marquemos un número en una calculadora, por ejemplo 0.25, y pulsemos de forma reiterativa la tecla 10^x , con lo cual obtendremos la órbita correspondiente,

$$0.25, 10^{0.25}, 10^{10^{0.25}}, \dots$$

Si continuamos con este proceso la calculadora nos dará un mensaje de error. La causa de este comportamiento es que la órbita tiende a infinito. Si repetimos el proceso tomando como semilla cualquier número y como función el seno o el coseno, observaremos que en este caso las órbitas son convergentes.

EJEMPLO 3.8

- Puede comprobarse fácilmente que la ecuación de *Malthus* admite por solución general la expresión

$$\Phi_x(k) = \alpha^k x$$

El comportamiento de esta expresión es sencillo de comprender. Si $x > 0$ entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ x & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

- Menos sencillo resulta el problema de encontrar una fórmula explícita para el problema de las aves. Se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

Si calculamos las sucesivas potencias de la matriz, nos aparece un hecho curioso como es la aparición en estas matrices de los célebres números de *Fibonacci* 1, 1, 2, 3, 5, 8,...

- Para el modelo de *May* la situación es más complicada, como tendremos ocasión de comprobar cuando estudiemos los modelos discretos no lineales. Podemos encontrar las primeras iteraciones de la solución general $f^k(x)$ y nos convenceremos de la enorme complicación de los cálculos involucrados. Ello nos ayuda a comprender la imposibilidad de obtener expresiones explícitas para las soluciones generales de los sistemas dinámicos no lineales (modelo de *May*), cuya conducta se pueda entender de forma global, como sucede en el caso (lineal) de la ecuación de *Malthus*.

El campo de **aplicaciones** de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales es muy amplio, y en los últimos años continúan aumentando. A continuación mostramos algunas de ellas.

- **En Matemáticas para la resolución numérica de ecuaciones.** Recordemos que el método del punto fijo nos permite encontrar la raíz de una ecuación $f(x) = 0$. El proceso se inicia reescribiendo la ecuación como $g(x) = x$, se toma un valor x_0 próximo a la solución buscada, y se reitera el proceso $x_{k+1} = g(x_k)$. Si la órbita correspondiente

$$\{x_0, x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1) = g(g(x_0)), \dots\},$$

converge a cierto valor x^* , entonces el método es convergente.

Recordemos que gráficamente el punto fijo $g(x^*) = x^*$ se encuentra como la intersección de la función $g(x)$ con la bisectriz del primer cuadrante.

- **Elaboración de modelos matemáticos.** Por ejemplo, el modelo logístico (del francés *logis* = alojamiento), que suele ser el punto de partida de los sistemas dinámicos unidimensionales,

$$x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.21)$$

se puede obtener de la manera siguiente: Supongamos que x_0 es la población relativa inicial, esto es, el cociente entre la población inicial y la población máxima que puede soportar el habitat. Sea x_k la población relativa al cabo de k años. El crecimiento relativo de la población en cada año será

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k},$$

que según las hipótesis de *Verhulst* (1845), es proporcional a $1 - x_k$. Es decir,

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = \alpha(1 - x_k),$$

despejando

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(1 - x_k)x_k = x_k(1 + \alpha)(1 - x_k).$$

Si llamamos $\mu = 1 + \alpha$, entonces obtenemos la expresión (3.21)

- **Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.** Sea la ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = f(x),$$

que podemos expresarla como

$$x(t + dt) - x(t) = f(x)dt.$$

Si sustituimos dt por un valor numérico h , obtenemos

$$x_{k+1} - x_k = hf(x_k) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k + hf(x_k),$$

tomando h suficientemente pequeño, podemos entonces dibujar la solución que pasa por un punto inicial dado.

3.5.4. Modelos dinámicos discretos lineales.

En general, obtener la expresión explícita de la solución general $f^k(x)$ es bastante complicado. Con ayuda de un ordenador podemos conseguir numéricamente cuantas iteraciones deseemos en esa expresión, pero esto no resulta en general de mucha ayuda para entender la conducta global del sistema. Un instrumento que resulta en muchas ocasiones adecuado en el caso de sistemas unidimensionales es el análisis gráfico, a través del llamado **diagrama de Cobweb**.

Supongamos una árida isla cerca de la costa de un rico continente. Estamos interesados en una especie particular de pájaros que anidan en estas islas. Desgraciadamente el habitat de la isla es muy desfavorable ya que si los pájaros estuvieran aislados su población disminuiría un 20 % cada año. Esta situación podemos reflejarla utilizando el modelo de *Malthus* (exponencial)

$$x_{k+1} = 0.80x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde x_k es la población de pájaros en el tiempo k . Hay una colonia de pájaros en el continente y cada año 1000 pájaros emigran a nuestra isla. Entonces, el cambio de población en la isla puede ser descrito por el modelo

$$x_{k+1} = 0.80x_k + 1000, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Observemos que el modelo es lineal en el sentido de que la función $f(x) = 0.80x + 1000$ representa a una línea recta.

Ahora descubriremos y probaremos un teorema sobre sistemas dinámicos lineales discretos, que corresponden al tipo

$$x_{k+1} = mx_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde m y b son constantes. Recordemos que los sistemas dinámicos discretos están descritos por una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

En el caso particular de sistemas dinámicos discretos lineales, la función f es del tipo $f(x) = mx + b$, y estamos interesados en puntos de equilibrio del sistema dinámico discreto. Aquellos puntos x tales que $f(x) = x$. Estos puntos se llaman de equilibrio porque si un término es uno de estos puntos, cada sucesión de términos siguientes permanece en el mismo punto. De esta manera decimos que el sistema se encuentra en equilibrio. Es inmediato comprobar el siguiente resultado.

RESULTADO 3.5.1 *Si m no vale 1 entonces hay un único punto de equilibrio*

$$x^* = \frac{b}{1 - m}$$

Los modelos dinámicos discretos pueden comportarse de manera sorprendente. Algunas veces una sucesión obtenida del sistema dinámico lineal discreto tiende directamente al punto de equilibrio. En otras ocasiones saltan alrededor de él, con saltos cada vez más pequeños hasta tender al punto de equilibrio. O por el contrario los saltos son cada vez más grandes y no tienden al punto de equilibrio.

Nuestro objetivo es formular y probar un teorema que nos determine cuando ocurre cada una de estas clases de comportamiento. Comenzamos la construcción del diagrama de *Cobweb* dibujando las gráficas

$$f(x) = mx + b, \quad g(x) = x$$

Dibujamos el punto x_1 en el eje OX. A continuación marcamos el valor $f(x_1) = x_2$ y obtenemos el punto (x_1, x_2) . El próximo paso es trazar una línea horizontal desde el punto (x_1, x_2) hasta que corte a la recta $g(x) = x$ en el punto (x_2, x_2) . Calculamos $x_3 = f(x_2)$ y repetimos sucesivamente este proceso.

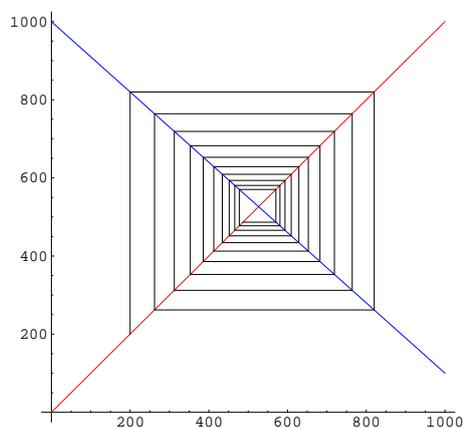


Figura 3.9: Diagrama de *Cobweb*.

Observemos en la Figura 3.9 que en este caso “la red de araña” nos lleva al punto de equilibrio. En la Figura 3.10 hemos representado en el eje de abscisas el tiempo y en el eje de ordenadas el número de individuos. Puede verse que si el tiempo aumenta la población tiende al punto de equilibrio. Se trata por tanto de un punto de equilibrio estable.

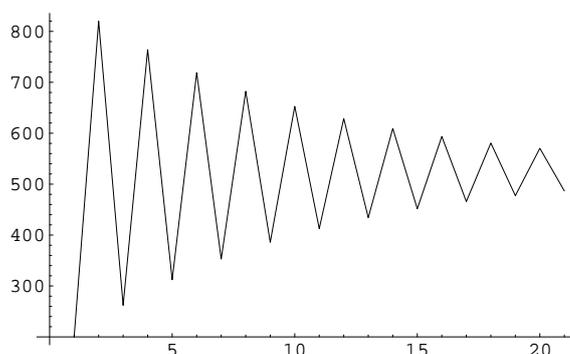


Figura 3.10: Punto de equilibrio estable.

EJEMPLO 3.9

- Vamos a calcular y dibujar x_2, x_3, \dots , para el modelo $x_{k+1} = 0.80x_k + 1000$ y el valor inicial $x_0 = 500$.

El modelo anterior podemos escribirlo como

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $f(x) = 0.80x + 1000$. Esta es una buena manera de representar a nuestro modelo porque la función $f(x)$ nos describe como la población, en cada año está determinada por la población en el año anterior.

Los dos gráficos $f(x) = 0.8x + 1000$ y $g(x) = x$ se cortan en el punto $x^* = 5000$. Este punto se llama **punto de equilibrio** ya que la población en los próximos años será la misma que la población actual.

$$f(5000) = 0.8 \times 5000 + 1000 = 5000$$

Podemos encontrar este valor también de manera algebraica

$$f(x) = x \Rightarrow x = 0.8x + 1000 \Rightarrow x = 5000$$

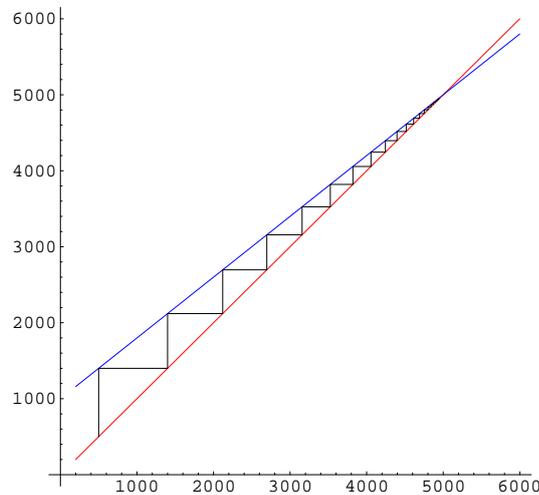


Figura 3.11: Estudio del punto de equilibrio.

La Figura 3.11 nos muestra como determinamos gráficamente el punto de equilibrio.

A continuación nos centraremos en la clasificación de los puntos de equilibrio o en el análisis de la estabilidad. En el análisis de la evolución de poblaciones el problema principal es:

- Evaluar la estabilidad de la población usando modelos matemáticos.
- Examinar los efectos de diferentes factores sobre la estabilidad de la población.

Hemos tenido ocasión de ver que en los sistemas dinámicos lineales discretos, el punto de equilibrio

$$x^* = \frac{b}{1 - m},$$

en algunas ocasiones es un **punto de equilibrio atractivo**, (aquel que a largo plazo los términos x_k tienden al x^* cuando k tiende a ∞), y otras veces es un **punto de equilibrio repulsivo**, (aquel donde x_k tiende a más o menos infinito). A continuación presentamos un teorema que nos permitirá determinar cuando un punto de equilibrio es atractivo o repulsivo.

TEOREMA 3.5.2 *Sea el sistema dinámico lineal discreto*

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad f(x) = mx + b$$

con $m \neq 1$. Sea $x^* = b/(1 - m)$ el punto de equilibrio,

- si $|m| < 1$ entonces x^* es atractivo, en el sentido de que para cualquier condición inicial x_0

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

- si $|m| > 1$, entonces x^* es repelente, y al menos que $x_0 = x^*$ se cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = \infty.$$

Demostración. Comenzamos calculando el valor de x_k

$$\begin{aligned} x_2 &= mx_1 + b \\ x_3 &= mx_2 + b = m^2x_1 + b(m + 1) \\ x_4 &= mx_3 + b = m(m^2x_1 + b(1 + m)) + b = m^3x_1 + b(1 + m + m^2) \\ &\dots \\ x_k &= m^{k-1}x_1 + b(1 + m + m^2 + \dots + m^{k-2}) = m^{k-1}x_1 + b \sum_{j=0}^{k-2} m^j. \end{aligned}$$

Si suponemos que $|m| < 1$ entonces al hacer que k tienda a infinito

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^{k-1}x_1 = 0.$$

Por otro lado,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-2} m^j = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \frac{1}{1 - m},$$

por ser la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $|m| < 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{b}{1 - m} = x^*.$$

Por un razonamiento similar, si $|m| > 1$ se cumple que $m^{k-1}x_1$ y $\sum_{j=0}^{k-2} m^j$ no están acotados cuando $k \rightarrow \infty$. ■

3.5.5. Modelos dinámicos discretos no lineales

Para un sistema de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.22)$$

donde ahora la función f no es lineal, la situación es diferente a lo estudiado en la sección anterior. Lo que debemos tener en cuenta, es que pueden existir muchos puntos de equilibrio. En el caso lineal el tipo de punto de equilibrio nos lo daba el parámetro m de la recta. En el caso no lineal el carácter de cada punto está determinado por la pendiente de la curva $f(x)$ en el punto x^* , y sabemos que este valor puede determinarse por la derivada de la función f en el punto x^* .

TEOREMA 3.5.3 *Consideremos el sistema dinámico (3.22) siendo x^* un punto de equilibrio $f(x^*) = x^*$. Entonces*

- *si $|f'(x^*)| < 1$ el punto de equilibrio es atractivo, en el sentido de que si x_0 está suficientemente cerca de x^* entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* .$$

Algunas veces a un equilibrio de esta características se le dice equilibrio estable, ya que si el sistema se mueve ligeramente del punto de equilibrio, al final retorna al mismo.

EJEMPLO 3.10

- Consideremos el sistema dinámico discreto no lineal de *May*

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k), \quad \alpha > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

- 1.- Encontrar los puntos de equilibrio y clasificarlos.
 - 2.- Sea $\alpha = 2.5$ y $x_0 = 0.1$. Utilizando el diagrama de *Cobweb*. clasificar el punto de equilibrio del sistema.
 - 3.- Repetir el proceso para $\alpha = 3.3, 3.55$
 - 4.- Cuando α aumenta de 3 a 4 ¿observas algún cambio en el tipo de soluciones obtenidas?
- Empezamos encontrando los puntos de equilibrio. En este caso la función f no lineal que nos define el modelo es

$$f(x) = \alpha x(1 - x) .$$

Por tanto, tendremos que resolver la ecuación $f(x) = x$, que tiene por soluciones,

$$x^* = 0, \quad x^* = 1 - \frac{1}{\alpha} .$$

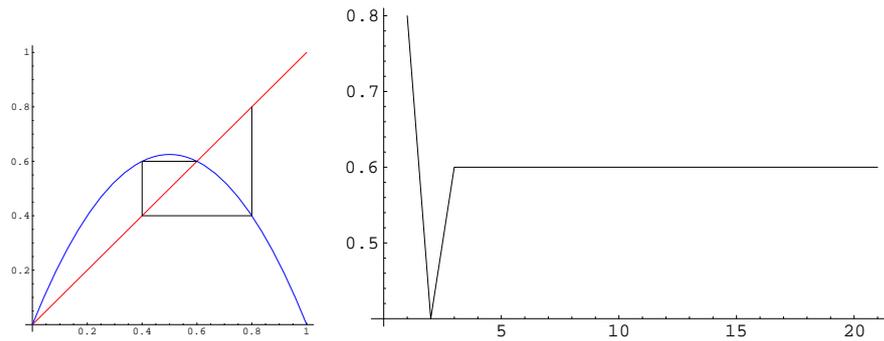


Figura 3.12: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 2.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Ahora, consideramos el diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.3x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$. Los primeros 25 elementos de su órbita son:

{ 0.8, 0.52799, 0.82241, 0.48196, 0.82392, 0.47873, 0.82350, 0.47963, 0.82363, 0.47936, 0.82359, 0.47944, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942 } .

Es decir, en este caso la población tiene un comportamiento periódico de orden dos tendiendo a los valores $x_1^* \approx 0.4794270$ y $x_2^* \approx 0.823603$.

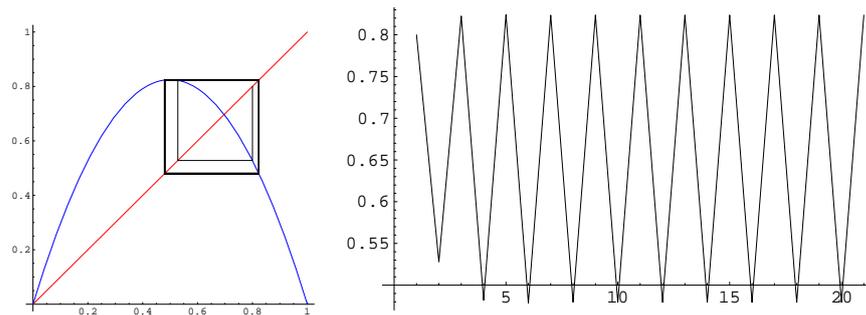


Figura 3.13: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.3x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Repitiendo los cálculos para $f(x) = 3.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$, se obtiene la órbita:

{ { 0.8, 0.559999, 0.8624, 0.41533, 0.84990, 0.44647, 0.86497, 0.40878, 0.84587, 0.45628, 0.86831, 0.40021, 0.84014, 0.47004, 0.87185, 0.391, 0.83343, 0.48587, 0.87430, 0.38464, 0.82842 } } .

La población se comporta de manera periódica de orden 4.

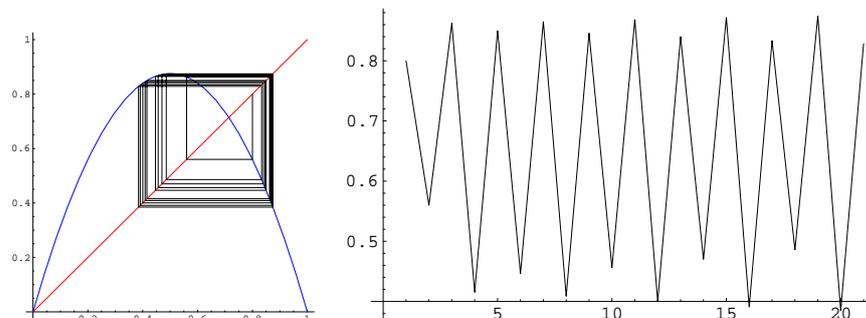


Figura 3.14: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Por último, si consideramos $f(x) = 4x(1-x)$ y $x_0 = 0,8$, ahora la población se comporta caóticamente.

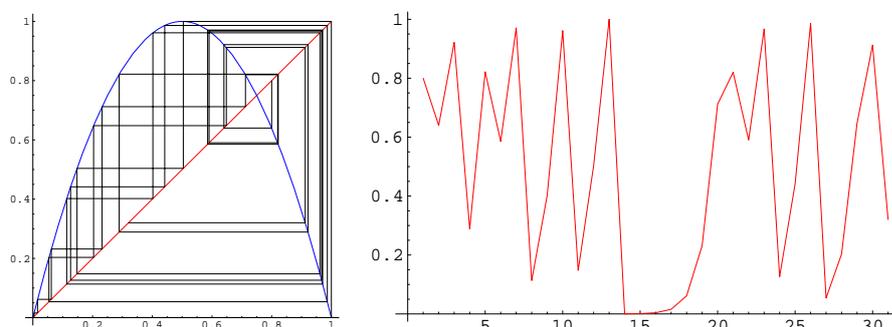


Figura 3.15: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 4x(1-x)$ y $x_0 = 0,8$.

Tendremos ocasión de volver sobre este ejercicio cuando estudiemos los sistemas caóticos.

3.5.6. Puntos de equilibrio y periódicos.

En esta sección trataremos de sistematizar y formalizar los resultados obtenidos en las secciones anteriores, para estudiar los puntos de equilibrio y periódicos de un **sistema dinámico discreto unidimensional**.

Dado un sistema dinámico

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f : X \rightarrow X,$$

se dice que $x^* \in X$ es un punto de equilibrio del sistema si $f(x^*) = x^*$. Si x^* es un punto de equilibrio, la solución cuya condición inicial es $x_0 = x^*$ cumple $f^k(x_0) = x^*$. Esto significa que los puntos de equilibrio son estados fijos: una vez el sistema entra en ellos, permanece invariable en todos los instantes futuros.

Los puntos de equilibrio se clasifican según el comportamiento de las soluciones con condiciones iniciales cercanas a ellos, en **puntos de equilibrio atractivos, repulsivos e indiferentes**. En lo que sigue, consideraremos el siguiente sistema dinámico unidimensional

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- **Puntos de equilibrio atractivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es atractivo si $|f'(x^*)| < 1$
- **Puntos de equilibrio repulsivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es repulsivo si $|f'(x^*)| > 1$
- **Puntos de equilibrio indiferentes.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es indiferente si $|f'(x^*)| = 1$

- Puntos cíclicos.** Se dice que x^* es un punto periódico o cíclico del sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$, si existe un n tal que $f^n(x^*) = x^*$. Un punto es periódico si su órbita se “cierra” vuelve a comenzar por su valor inicial. El mínimo entero k tal que $f^k(x^*) = x^*$, se llama **orden del punto periódico**. En tal caso la órbita

$$\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{k-1}(x^*)\}$$

recibe el nombre de **período o ciclo de orden k** .

3.5.7. Estabilidad

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico representa un estado fijo del sistema. Ahora bien, no todos los estados de equilibrio tienen la misma naturaleza.

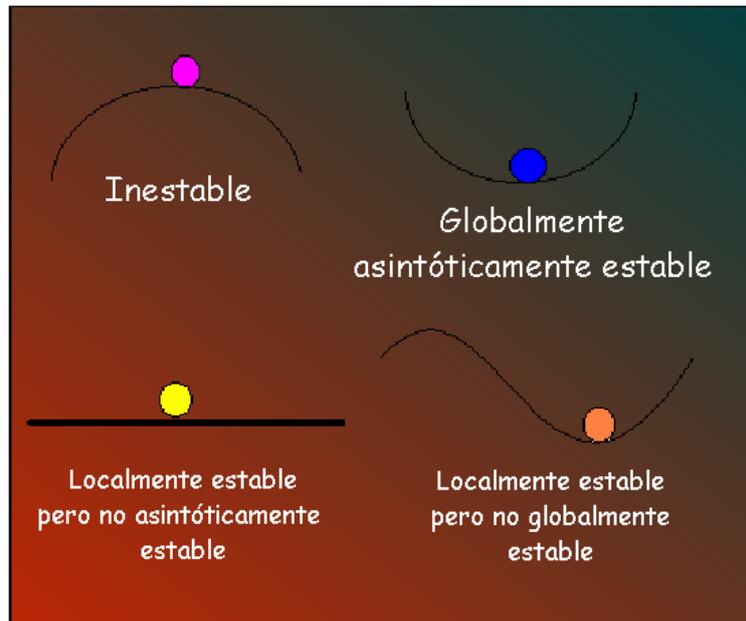


Figura 3.16: Tipos de estabilidad.

Si se deja rodar una bola en el cuenco de una copa, terminará deteniéndose en el centro de la misma. Si se desplaza la bola ligeramente de su posición de equilibrio, retornará a ella. Este es un equilibrio robusto frente a perturbaciones, conocido como **equilibrio asintóticamente estable**. Los puntos de equilibrio atractivos presentan esta forma de equilibrio.

La forma de equilibrio opuesta es el **equilibrio inestable**, representado por una pelota en el borde del tejado: basta una ligera perturbación para romper el equilibrio. Los puntos de equilibrio repulsivos presentan este tipo de equilibrio. Finalmente existe una forma intermedia de equilibrio, técnicamente conocido como **equilibrio estable**. Este se halla representado por un péndulo sin rozamiento en posición de

reposo. Si se somete al péndulo a una pequeña perturbación, éste permanecerá oscilando indefinidamente en torno a la posición de equilibrio, sin alejarse mucho de ella, pero sin retornar a ella de forma definitiva.

EJEMPLO 3.11

- Comprobemos que el origen es un punto de equilibrio estable para el sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$ si $f(x) = -x$.

Es evidente que $x^* = 0$ es solución de la ecuación $f(x) = x$, por lo tanto, es un punto de equilibrio. Para comprobar que su equilibrio es estable, perturbamos este valor tomando $x_0 = 0.5$. La Figura 3.17 muestra que la órbita sólo toma los valores -0.5 y 0.5 .

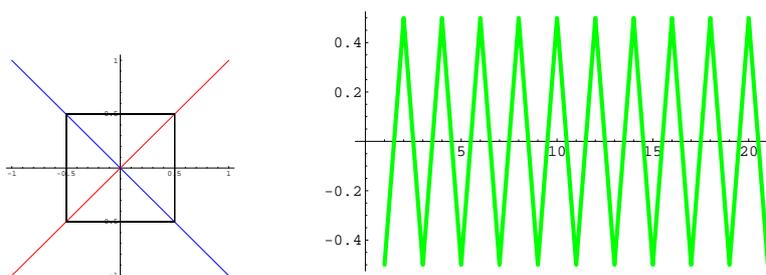


Figura 3.17: Diagrama de *Cobweb*.

3.5.8. Sistemas caóticos

En el Ejemplo 3.10 hemos tenido ocasión de comprobar que sistemas o modelos muy simples, pueden pasar de tener un comportamiento determinístico a un comportamiento caótico, modificando ligeramente los valores de un parámetro. En esta sección formalizaremos este concepto.

La teoría del caos fue introducida en ecología por *May* (1974, 1976) y *Oster* (1976) en el contexto de funciones reales de variable real está siendo estudiada con intensidad en los últimos años y aparece en casi todos los modelos discretos no lineales.

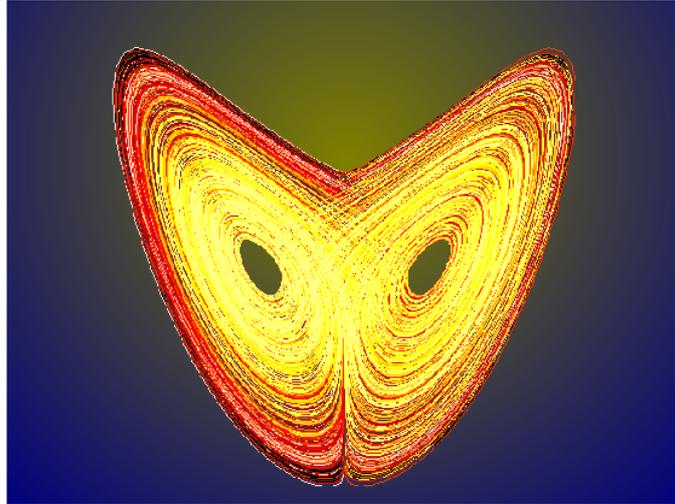


Figura 3.18: Mariposa o atractor de Lorentz.

Lo primero que nos llama la atención es el hecho de que vivimos inmersos en el caos. De manera usual, **llamamos caos a todo aquello que no somos capaces de sistematizar.**

El primer investigador del caos fue un meteorólogo llamado *Edward Lorentz*. En 1960 utilizaba un modelo matemático para predecir el tiempo, que consistía en un sistema de 12 ecuaciones no lineales. La simulación se realizaba con un ordenador, que daba como respuesta un comportamiento probable de la atmósfera. En cierta ocasión, quiso repetir de nuevo los cálculos anteriores, para ello volvió a introducir los números en el ordenador, pero para ahorrar papel y tiempo, solo utilizó 3 números decimales en vez de 6. Lo sorprendente fue que el resultado encontrado era totalmente diferente a los obtenidos en la vez anterior. Del análisis de esta situación surgió una nueva teoría que se conoce con el nombre de la teoría del caos.

Lo verdaderamente interesante era que diferencias muy pequeñas en las condiciones iniciales tenían una gran influencia en la resolución final del problema. A este efecto que tienen las pequeñas diferencias iniciales después se le dio el nombre de **efecto mariposa:**

“El movimiento de una simple ala de mariposa hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma.”

Como podemos comprender, este descubrimiento causó en *Lorentz* un gran impacto, ya que según esta nueva hipótesis, no sería posible predecir con exactitud el comportamiento de cualquier sistema, pues todas las medidas se ven afectadas por los errores de calibración de los instrumentos. Es imposible, por tanto, conocer las condiciones iniciales exactas de la mayoría de los sistemas dinámicos. Afortunadamente, *Lorentz* se dio cuenta de que las soluciones del sistema que parecían tener un

comportamiento hecho totalmente al azar, después de verlas representadas en una gráfica sucedía algo sorprendente. El resultado siempre ocupaba una determinada región del espacio, y tenía forma de una espiral doble.

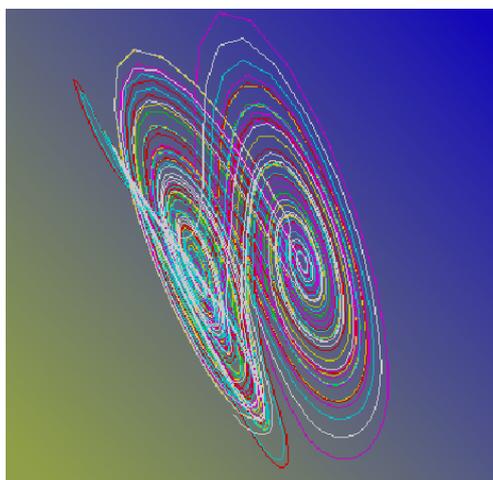


Figura 3.19: Atractor de Lorentz.

Antes de la aparición de esta nueva teoría, sólo había dos tipos de comportamientos conocidos para un sistema dinámico: un estado fijo, donde los variables nunca cambian, y el comportamiento periódico, donde el sistema está en un “circuito cerrado” y se repite infinitamente. Las soluciones del sistema de *Lorentz* son definitivamente ordenadas (siguen una espiral). Nunca se paran en un punto, ni se repiten, ni son periódicas. A su representación gráfica se la conoce con el nombre **Atractor de Lorentz**¹. Estas gráficas deben cumplir otra condición: no puede cortarse a sí misma ya que, si así fuese, habría dos curvas diferentes a partir de ese punto de corte, lo cual significaría dos realidades simultáneas y diferentes.

Una curva de estas características no puede estar contenida en un plano, y por supuesto su dimensión es fraccionaria. Este tipo de atractores reciben el nombre de **atractores extraños**, ya que su representación gráfica es un **fractal**. Queremos insistir en la idea fundamental que encierra el concepto de atractor, como es la siguiente: mientras es casi imposible predecir exactamente el estado futuro de un sistema, es posible, y aún más, muchas veces es fácil modelar el comportamiento general del sistema.

A continuación, resumimos algunos de los rasgos característicos de los sistemas caóticos.

- Son muy sensitivos a las condiciones iniciales. Un cambio muy pequeño en los datos iniciales dan lugar a resultados totalmente diferentes.

¹El atractor es la región del espacio hacia la cual convergen las trayectorias posibles dentro de un sistema.

- Parecen un desorden, o hechos al azar, pero no lo son, hay reglas que determinan su comportamiento. Los sistemas hechos al azar no son caóticos.

Supongamos una órbita periódica del sistema dinámico discreto $x_{t+1} = f(x_t)$. Si tomamos como semilla, o condición inicial x_0 , podemos elegir otro punto inicial muy próximo al anterior $y_0 = x_0 + \delta_0$, siendo $|\delta_0|$ la distancia (pequeña) entre estos dos puntos de partida. A continuación iteramos la función n veces obteniéndose los valores x_n y y_n . Podemos definir $\delta_n = y_n - x_n$, esto es, la separación de los dos puntos iniciales después de n iteraciones. Si ocurre que $|\delta_n| \simeq |\delta_0|e^{n\lambda}$, entonces este valor de λ se le conoce con el nombre de **exponente de Lyapunov**, y despejándolo de la expresión anterior nos permite dar su definición,

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} \right)$$

Puede probarse que el exponente de *Lyapunov* de una órbita puede calcularse como,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|$$

si existe este límite.

Observemos que el cálculo de λ nos sirve para detectar la presencia de caos, ya que si este parámetro es positivo entonces estaremos ante su presencia, ya que esto indica que el sistema es muy sensible a las condiciones iniciales.

3.5.9. Diagramas de bifurcación

Podemos preguntarnos si la teoría del caos puede ser utilizada para estudiar el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos biológicos. En efecto, la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = \mu x_t (1 - x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

donde x_t es la fracción de la población en el tiempo t , es una fórmula que hemos tenido ocasión de trabajar repetidamente con ella. Se trata de la curva logística, utilizada para estudiar la evolución de poblaciones en ecología.

Hemos visto en el Ejemplo 3.10 que al variar el valor del parámetro μ , el sistema puede tender a un solo punto de equilibrio, a dos, a cuatro, \dots , o bien presentar un comportamiento caótico.

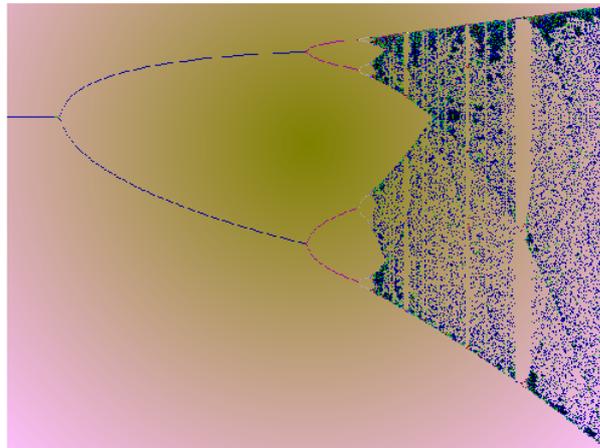


Figura 3.20: Diagrama de bifurcación del modelo de *May*.

Su diagrama de bifurcación se obtiene dibujando en el eje de abscisas los valores del parámetro μ y en el eje de ordenadas los valores a los que tiende el sistema. Por ejemplo si $\mu = 2.5$ entonces $x_t \rightarrow 0.6$, o bien, en el caso $\mu = 3.3$ entonces $x_t \rightarrow 0.823$ y $x_t \rightarrow 0.479$. La Figura 3.20 representa la gráfica obtenida. Si seleccionamos cualquiera de las zonas del diagrama de bifurcación de la Figura 10.12 y la ampliamos obtenemos la Figura 3.21. Podemos comprobar una de las propiedades que definen a un objeto fractal, como es la **autosemejanza**.

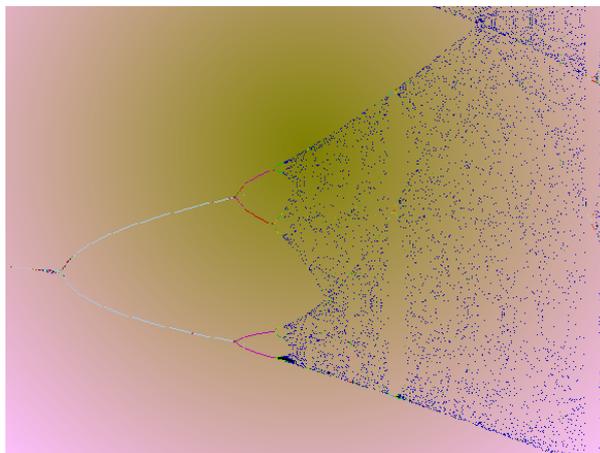


Figura 3.21: Autosemejanza del diagrama de bifurcación.

El diagrama de bifurcación tiene propiedades importantes. Entre ellas presentamos la siguiente: sabemos que a medida que aumentamos el valor del μ el período se va duplicando.

PERIODOS	INTERVALOS	COCIENTES
2	$3 < C < 3.4495$
4	$3.4495 < C < 3.5441$	4.75159
8	$3.5441 < C < 3.5644$	4.6601
16	$3.5644 < C < 3.5688$	4.61364

Tabla 3.1

La Tabla 3.1 muestra algunos de estos valores, y además los cocientes entre la amplitud de un intervalo y el inmediatamente anterior, por ejemplo $(3.5441 - 3.4495)/(3.4495 - 3)$. Lo llamativo de este hecho, es que los cocientes tienden al número trascendente:

$$4.669201609110299067185532038204662016\dots$$

que se conoce con el nombre de **constante de Feigenbaum**. Es un problema abierto el estudiar la importancia que este número juega en la naturaleza. Se piensa que puede tener un protagonismo similar al número e .

Las **aplicaciones de la teoría del caos** son múltiples y en campos muy diversos, en Biología, en Economía, en Medicina,... etc. Hasta ahora parecía que al estallar el caos no seríamos capaces de hacer nada, por ejemplo, si el avión empieza a moverse de una manera extraña pensamos que la catástrofe es inevitable; o bien, si el corazón empieza a latir rápidamente y sin ayuda inmediata puede ocurrir lo peor. En los últimos años, en el campo de la Medicina, las investigaciones actuales, nos ofrecen esperanzas de “domesticar” el caos. *Edward Ott*, *Ceslo Grebogi* (físicos) y *James A. Yorke* (matemático) han elaborado un algoritmo matemático que permite convertir un determinado tipo de caos en un proceso periódico sencillo. La idea que encierra el algoritmo, es que no es necesario comprender todo el movimiento caótico para poderlo regular. Lo que tenemos que hacer es “mirar” continuamente a que dirección tiende el proceso, y realizar perturbaciones pequeñas para volver a dirigirlo en el camino deseado. Naturalmente aquí no se termina de vigilar el sistema, porque después el caos aparecerá de nuevo. Por otro lado, el profesor *A. Garfinkel* de la Universidad de California, ha conseguido transformar el movimiento caótico de un corazón sacado a un conejo en un movimiento regular.

3.5.10. Modelos discretos con retardo

Hasta ahora en todos los modelos discretos estudiados hemos supuesto que cada miembro de la especie en el tiempo k contribuye al crecimiento de la población para el tiempo $k + 1$ de la siguiente manera:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esto ocurre, por ejemplo en la mayoría de poblaciones de insectos, pero no para otros muchos animales, donde son fértiles en una época muy concreta del año. En tales casos, para analizar la dinámica del modelo, hemos de incorporar el efecto del retardo, que en cierta manera viene a jugar un papel parecido al estudio que realizamos de la población por estructura de edades. Si el retardo (por ejemplo, la madurez), es de un paso T , entonces nos aparece el siguiente modelo de ecuaciones en diferencias

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-T}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Por ejemplo, se sabe que para cierto tipo de población de ballenas, el retardo T es del orden de varios años.

A continuación analizaremos un caso concreto con el objetivo de realizar un análisis de la estabilidad del modelo.

EJEMPLO 3.12

- Supongamos

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-1}) = x_k e^{r(1-x_{k-1})}; \quad r > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

Sus puntos de equilibrio se encuentra resolviendo la ecuación $f(x) = x$, siendo $f(x) = x e^{r(1-x)}$. Las soluciones son $x^* = 0$ y $x^* = 1$.

Si estamos interesados en clasificar el estado de equilibrio no trivial, supongamos que $x_k = 1 + v_k$ con $|v_k| \ll 1$. Sustituimos en (3.23), utilizamos $e^t \approx 1 + t$

$$1 + v_{k+1} = (1 + v_k) e^{-rv_{k-1}} \approx (1 + v_k)(1 - rv_{k-1}),$$

y simplificando, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$v_{k+1} - v_k + rv_{k-1} = 0. \quad (3.24)$$

Para resolverla, tenemos que encontrar las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \lambda + r = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4r}}{2} & \text{si } r < \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4r}}{2} & \text{si } r < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Cuando $r > 1/4$ las raíces son dos números complejos conjugados: $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$ y $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$, donde

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4r-1}{4}} = \sqrt{r}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{4r-1}/2}{1/2} = \arctan \sqrt{4r-1}$$

La solución de (3.24) será:

$$v_k = A\lambda_1^k + B\lambda_2^k,$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

- 1.- Si $0 < r < 1/4$, entonces λ_1 y λ_2 son dos números reales comprendidos estrictamente entre cero y uno. En consecuencia, si k tiende a infinito λ_1^k y λ_2^k tienden a cero.

Conclusión: El punto de equilibrio $x^* = 1$ será estable. Además, después de una pequeña perturbación la solución tiende de forma monótona al punto de equilibrio. Puede verse gráficamente en la Figura 3.22 (izquierda).

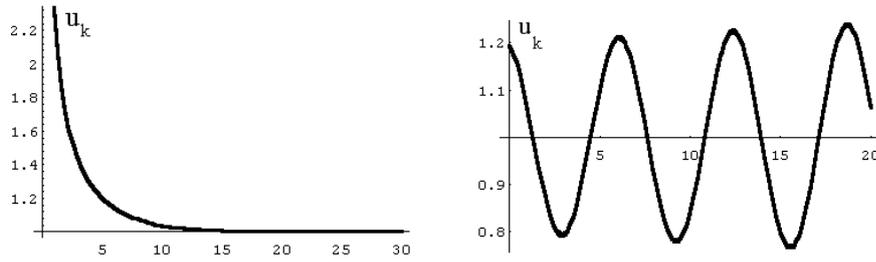


Figura 3.22: Soluciones de la ecuación en diferencias con retardo. Izquierda: $r = 0.2$, $A = 0.1e^{1.26t}$; derecha: $r = 1.02$, $A = 0.1e^{1.26t}$.

- 2.- Si $1/4 < r$, entonces λ_1 y λ_2 son dos números complejos conjugados, con $\lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = \rho^2 = r$. Además, si $1/4 < r < 1$, entonces para que la solución

$$v_k = A\lambda_1^k + B\bar{\lambda}_1^k,$$

sea un número real, debe suceder que $B = \bar{A}$. Supongamos entonces que $A = \alpha e^{i\gamma}$ y $B = \alpha e^{-i\gamma}$, llevando estos valores en la solución

$$v_k = A\lambda_1^k + B\bar{\lambda}_1^k = \alpha e^{i\gamma} \rho^k e^{i\theta k} + \alpha e^{-i\gamma} \rho^k e^{-i\theta k} =$$

$$\alpha \rho^k (e^{i(\gamma+\theta k)} + e^{-i(\gamma+\theta k)}) = 2\alpha \rho^k \cos(\gamma + \theta k),$$

y por lo tanto, cuando el parámetro r tiende a uno, entonces el ángulo θ tiende hacia $\arctan \sqrt{3} = \pi/3$.

(b1) Cuando r sea mayor que uno, entonces $|\lambda_1| > 1$ y v_k crece indefinidamente al tender k hacia infinito. En consecuencia $x^* = 1$ será un punto de equilibrio inestable.

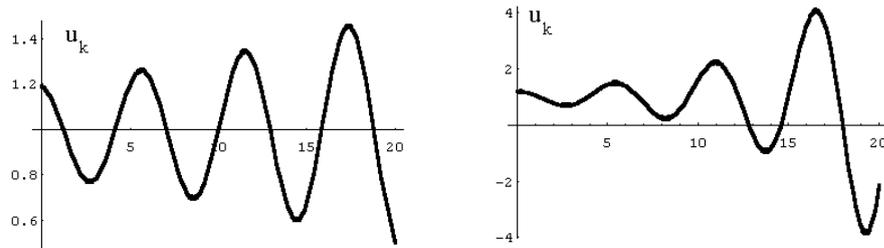


Figura 3.23: Soluciones de la ecuación en diferencias con retardo. Izquierda: $r = 1.1$, $A = 0.1e^{1.26t}$; derecha: $r = 1.4$, $A = 0.1e^{1.26t}$.

- (b2) Para valores de r próximos a uno, el ángulo $\theta \approx \pi/3$, y

$$v_k \approx 2\alpha \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}k\right),$$

que es una función periódica de orden 6. En las Figuras 3.22 (derecha) y 3.23, hemos representado las soluciones $u(k)$ para tres valores de r mayores de uno. En la Figura 10.14 (derecha) puede apreciarse que es periódica de periodo 6. En la Figura 10.15 puede verse que se está cerca del caos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 2

1.- Sea x_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t . Se sabe que año tras año sobreviven la tercera parte de los animales y además se incorporan 200 a la población.

- Construir un modelo discreto lineal para la situación planteada.
- Calcular los seis primeros términos de las órbitas correspondientes a las semillas: $x_0 = 90$, $x_0 = 600$.
- Construir los diagramas de Cobweb del apartado anterior, e interpretar biológicamente los resultados obtenidos.

2.- Sea N_t la población de ardillas en el año t . Es conocido que la población en un año cualquiera disminuye en un 40 % de la población del año anterior, y que además siempre se incorporan 20 ardillas del exterior.

- Construir el modelo discreto y dibujar su diagrama de cobweb para los valores iniciales $N_0 = 10$ y $N_0 = 80$. Interpretar el resultado.
- Encontrar la población de ardillas N_t para un año cualquiera, sabiendo que inicialmente hay 15 ardillas.
- Relacionar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores.

3.- Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$y_{t+1} - y_t = t, \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t .

- Explicar el significado “biológico” de la ecuación anterior
- Resuelve la ecuación en diferencias anterior.

4.- La evolución de una población x_t viene determinada por el siguiente modelo discreto exponencial con inmigración y emigración,

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t - \mu, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

siendo el parámetro positivo μ la diferencia entre el número de personas que entran y las que salen, el parámetro r la tasa de crecimiento de la población, y x_0 el número inicial de individuos.

- Estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo según los diferentes valores del parámetro r .
- Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb, para $r = 0.2$ y $\mu = 10$.

5.- Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:

- Un modelo discreto frecuentemente utilizado para estudiar la dinámica de una población de insectos es el modelo de *Ricker*, que viene definido por la ecuación en diferencias:

$$x_{k+1} = x_k e^{r\left(1 - \frac{x_k}{\alpha}\right)}, \quad r, \alpha \in \mathbf{R}^+, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio no triviales.

- En el modelo logístico discreto:

$$x_{k+1} = 2.5x_k(1 - x_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Encontrar los cinco primeros términos de la órbita correspondiente a la semilla $x_0 = 0.8$ y dibujar su diagrama de Cobweb correspondiente. Analizar el resultado.

6.- La siguiente ecuación en diferencias describe la población de ardillas en años sucesivos,

$$x_{t+1} = x_t^3 - 3x_t^2 - 3x_t + a, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

siendo a un parámetros positivo y x_t el número de ardillas en el año t .

- Encuentra el valor del parámetro a sabiendo que existe un punto de equilibrio en $x^* = 2$
- Clasificar los puntos de equilibrios que tienen sentido biológico para conocer el comportamiento a largo plazo de la población.

7.- Calcular y clasificar los puntos de equilibrio para el modelo discreto:

$$N(t+1) = \frac{\lambda N(t)k}{N(t)(\lambda - 1) + k}, \quad k > 0, \quad \lambda > 1, \quad t = 0, 1, \dots,$$

donde $N(t)$ representa a la población en el período t .

8.- Responder a las siguientes cuestiones:

- La ecuación:

$$x_{t+1} = \lambda x_t(1 + ax_t)^{-b}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

donde $\lambda, a, b > 0$ es utilizada frecuentemente como un modelo de crecimiento de poblaciones que dependen de la densidad de dicha población.

Encontrar los puntos de equilibrio del modelo anterior, y probar que $x^* = 0$ es un punto de equilibrio estable si $\lambda < 1$.

- En el modelo logístico discreto:

$$x_{t+1} = 3x_t(1 - x_t), \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Encontrar los cinco primeros términos de la órbita correspondiente a la semilla $x_0 = 0.3$ y dibujar el diagrama de Cobweb correspondiente.

- 9.- Muchas poblaciones de insectos se rigen por el siguiente modelo

$$f(N_t) = N_{t+1} = \frac{\lambda}{\alpha} N_t^{1-b}, \quad \alpha, b, \lambda > 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

donde λ representa a la tasa reproductiva ($\lambda > 1$) y N_t^{-b}/α es la fracción de la población que sobreviven desde la infancia a la edad adulta reproductiva. Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

- 10.- Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del siguiente modelo discreto:

$$x_{t+1} = \frac{kx_t}{a + x_t}, \quad k > a > 0,$$

donde x_t representa al número de individuos de una población en el tiempo t ¿Cuál será el comportamiento de la población a largo plazo, si $k = 30$, $a = 10$ y $x_0 = 15$ individuos?

- 11.- Sea N_t el número de individuos de una población en el tiempo t . Si la evolución de N_t queda definida por la siguiente ecuación en diferencias

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{1}{3} (-N_t^3 + N_t^2 + 4N_t - 1)$$

Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo para discutir la evolución a largo plazo de la población según los distintos valores de N_0 .

- 12.- La siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{t+1} = \frac{\alpha x_t}{1 + \beta x_t}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x_t \geq 0,$$

fue propuesta por *Kaplan & Glais* en 1995 y juega un papel muy importante en análisis de modelos no lineales genéticos y en redes neuronales.

- Encontrar y analizar los puntos de equilibrio
 - Sea $\alpha = \beta = 1$. Dibujar de forma aproximada el diagrama en telaraña (cobweb) tomando como semilla $x_0 = 4$.
-

3.6. Ejemplo de sistema dinámico: la Geometría Fractal

“La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares.”

Con estas rotundas palabras inicia el profesor *Michael Barnsley* su famoso libro sobre fractales. En efecto, una vez que conocemos esta nueva geometría es difícil contemplar la naturaleza, y el mundo que nos rodea, con los mismos ojos. La geometría fractal, no sólo es interesante por la belleza de las imágenes que crea, sino que en la actualidad es difícil encontrar una rama de conocimiento donde los fractales no estén presentes.

El significado de la palabra *Matemática* es “lo que se aprende”, pero en el fondo de su filosofía se encuentra la búsqueda de patrones. En un principio, nuestros antepasados observaban los fenómenos naturales, como los eclipses, con verdadero terror. No podían entender cómo repentinamente el sol desaparecía del cielo y la más terrible oscuridad se cernía sobre ellos. Tenían que buscar explicaciones y al no encontrarlas, le atribuyeron a estos fenómenos naturales un carácter divino. Sin embargo, el poder del razonamiento de nuestra especie se impuso y algunos matemáticos griegos se dieron cuenta que la naturaleza estaba regida por leyes que eran necesarias conocer.

La búsqueda de estos patrones ha sido lenta, larga y complicada. Se inició con *Hiparco*, continuó con el modelo heliocéntrico de *Aristóteles* y *Ptolomeo*, fue revisado y mejorado por *Copérnico* y *Galileo*, posteriormente formalizado por *Newton* y modificado por *Einstein*. Lo importante es comprender que no es necesario recurrir a los dioses para entender los fenómenos naturales. Nuestro universo, se rige por unas leyes muy precisas y los científicos, los matemáticos entre ellos, se ocupan de descubrirlas.

En la larga búsqueda de estos patrones, los matemáticos griegos encontraron una geometría que representaba perfectamente **al orden y lo regular**. Apoyándose en la herencia de las matemáticas egipcias y babilonias, los griegos construyeron los cimientos de nuestras matemáticas actuales, con la invención de unas matemáticas basadas en definiciones, axiomas, teoremas y demostraciones.

Desconocemos gran parte de la vida de *Euclides*, aunque la repercusión de su obra, en especial *Los Elementos*, ha sido crucial para la humanidad. Con la invención de la imprenta el libro de texto más reeditado ha sido la Biblia y a continuación *Los Elementos*, con más de mil ediciones. Los Elementos son 13 libros donde se recoge, estructura y organiza todo el saber conocido, especialmente en Geometría y en Teoría de Números.

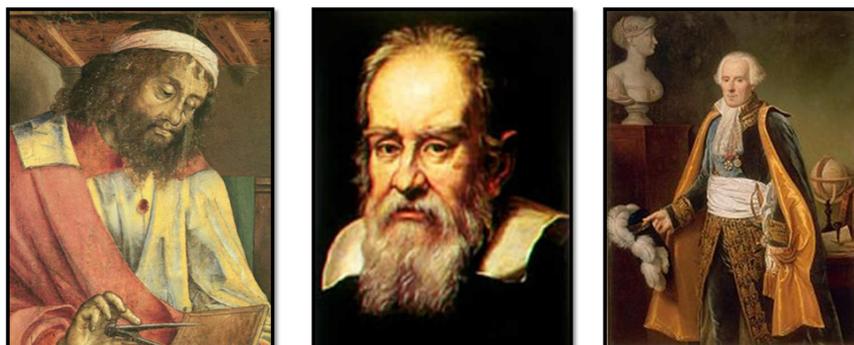


Figura 3.24: *Euclides, Galileo y Laplace*

Los cuatro primeros axiomas son de enunciado muy simple que tienen que ver con puntos y rectas, mientras que el quinto es largo y complicado, conocido como el axioma de las paralelas. A pesar de la controversia que este último postulado ha generado en la historia de las matemáticas, en el siglo XX se pudo demostrar que no puede deducirse del resto de los axiomas.

Esta geometría, que se conoce con el nombre de euclídea, es ideal para representar a todos aquellos objetos construidos por el hombre. Está basada en puntos, rectas y planos que pueden describirse y manipularse mediante ecuaciones. A propósito de ello, a principios del XVII el gran científico Galileo comentaba en uno de sus trabajos:

“La filosofía está escrita en ese gran libro que es el Universo, siempre abierto ante nuestros ojos, pero imposible de leer salvo que uno aprenda a comprender el idioma en que está escrito. Ese idioma es el de la matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas . . .”

Uno de sus rasgos más significativo de la geometría euclídea es que a estos objetos se le puede asignar un número, conocido como su dimensión topológica, que sólo puede tomar valores enteros. De esta manera, un punto no tiene tamaño, su dimensión es cero, una recta tiene dimensión uno, un plano dimensión dos, y así sucesivamente. Otra característica de los objetos que representa la geometría euclídea es que cuando se amplían tienden a perder la forma que tienen inicialmente. Si se aumenta sucesivamente una parte de una circunferencia al final adopta la forma de una recta y no de una circunferencia.

Sin embargo, *Galileo* no estaba en lo cierto. Existen otros objetos y situaciones que no son regulares o que son caóticos, ¿qué pasa con ellos?, ¿cómo pueden ser representados y manipulados? Empecemos fijándonos en los sistemas caóticos. El caos es una apasionante teoría, surgida en los últimos años, que ocupa a un elevado número de científicos, con la esperanza de simplificar fenómenos complejos. Hasta finales del siglo XIX se creía que todo nuestro entorno estaba regido por leyes determinista. Los científicos estaban convencidos de que nuestro mundo era predecible, estable

y se podía conocer completamente. De hecho *Laplace* se inventó un personaje, *el demonio de Laplace*, con tal poder que si conociera todas las leyes de la naturaleza y, en un instante dado, la velocidad y posición de todas las partículas de un sistema, entonces sería capaz de predecir con exactitud el comportamiento pasado y futuro del sistema. Pensemos en la amplitud de esta afirmación, puesto que este personaje podría conocer el más pequeño movimiento de una persona que viviera en el futuro. Puro determinismo, todo estaría escrito y no quedaría lugar para la improvisación.

Frente a esta posición tan inquietante, se encuentran las teorías científicas del siglo XX, en especial la mecánica cuántica, donde el principio de incertidumbre de *Heisenberg* afirma que es imposible determinar simultáneamente la posición y velocidad de una partícula. Teniendo en cuenta la naturaleza de nuestro universo, ninguna longitud menor de $1.6 * 10^{-33}$ centímetros, ninguna masa inferior a $2.2 * 10^{-5}$ gramos, ninguna duración menor de $5. * 10^{-44}$ segundos puede existir. Por tanto, ¿cómo puede pretender *el demonio de Laplace* predecir el futuro, cuando es imposible medir exactamente la posición y velocidad de una sola partícula?

En la naturaleza existen muy pocos fenómenos tales que, el resultado al aplicarles una acción es proporcional a la causa que lo ha originado. En estos casos, el fenómeno se puede describir linealmente. Por desgracia, la mayoría de los fenómenos son no-lineales, y su estudio se hace terriblemente complicado ya que no pueden utilizarse las técnicas de resolución clásicas. De entrada suele ser imposible resolver de forma exacta las ecuaciones que los describen, siendo necesario utilizar el ordenador y hacer uso de métodos aproximados, pero la estabilidad de estas soluciones no puede asegurarse. De hecho, pequeñas variaciones en los datos iniciales dan lugar a soluciones muy diferentes del problema. Es lo que se conoce con el nombre de **efecto mariposa**, y es una característica básica de los sistemas caóticos.

¿Pero qué relación existe entre los fractales y el caos? La respuesta está en que la geometría fractal es la herramienta ideal para describir y estudiar a los sistemas dinámicos caóticos que se encuentran en la naturaleza.

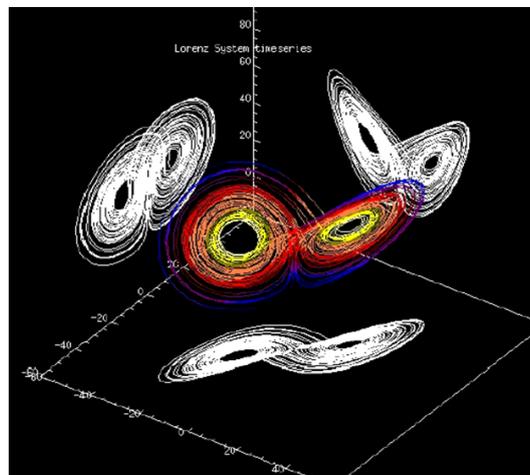


Figura 3.25: Atractor de Lorentz

Un ejemplo típico de sistema caótico es el clima. En 1963 *Edward Lorenz* presentó un modelo climático, basado en la interrelación entre la temperatura, la presión y la velocidad del viento, titulado “puede el aleteo de una mariposa en Brasil provocar un tornado en Texas” que se convirtió en un artículo básico de la teoría del caos. El objetivo básico del trabajo era mostrar que el comportamiento de este modelo del clima era muy sensible a las condiciones iniciales, y además que la representación gráfica de la soluciones del modelo era una figura tridimensional, llamada atractor extraño, en forma de mariposa. Si se amplía alguna de las zonas de la mariposa de Lorenz se obtiene otra figura que es muy similar a la inicial. Es decir, la figura tiene estructura fractal.

En 1972 el matemático *J. Yorke* divulgó el trabajo de *Lorenz*, que había pasado desapercibido para la comunidad científica. Al mismo tiempo, el biólogo *R. May* descubrió, que un modelo muy simple como es el logístico, que describe cómo evoluciona una población de animales, predice que la población a largo plazo puede estabilizarse en un número, ó comportarse de manera periódica, o bien tener un comportamiento caótico. Todo este rango de soluciones distintas se puede obtener con tan sólo variar el valor de un parámetro. Es decir, modelos simples pueden tener comportamientos muy complicados.

Insistimos en que en los sistemas caóticos un ligero cambio en las condiciones iniciales, a largo plazo, implica un comportamiento totalmente distinto del modelo. Pero por lo visto anteriormente, es imposible medir con total precisión ninguna variable, es decir, y según esta teoría, aunque mejore la capacidad de cálculo de los ordenadores, será imposible predecir a largo plazo el comportamiento del sistema, en particular el meteorológico.

3.6.1. Antecedentes históricos

Como se ha comentado, los matemáticos podían abordar con ciertas garantías de éxito todos aquellos problemas relacionados con “lo regularz ”lo lineal”. +Qué pasa entonces con lo irregular¿

Los fractales se presentaron, a mediados del siglo XX, como una nueva herramienta de trabajo con el objetivo de poder analizar y modelizar los objetos irregulares de la naturaleza. En realidad existen aplicaciones y conceptos que son anteriores a esta fecha y que aparecieron con otros objetivos y en contextos distintos. *Richard Bentley* en el siglo XVII escribió:

“... no hemos de creer que las orillas del mar sean realmente deformes por no tener la forma de un baluarte regular; que las montañas no son exactamente como conos o pirámides, ni las estrellas están situadas desmañadamente por no estar a una distancia uniforme ... “

En 1875 el matemático *Reymond* llamó la atención a la comunidad científica de una extraña función propuesta por *Riemann* que podía dibujarse sin levantar el

lápiz del papel (era continua) pero que estaba llena de irregularidades (no tiene derivada en ninguno de sus puntos). Esto era algo que aborrecían el resto de sus compañeros. Sin embargo, a pesar de lo extraño de esta función, lo sorprendente es que su gráfica representa muy bien a fenómenos de la vida cotidiana, como por ejemplo las cotizaciones en bolsa de las acciones de un banco español.

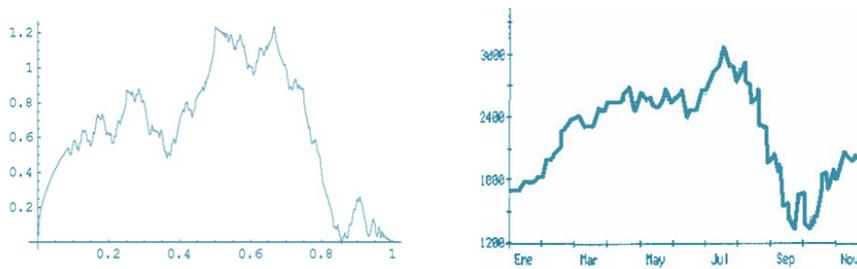


Figura 3.26: La función de Riemann.

Eran tiempos de crisis en los fundamentos de las matemáticas y rápidamente muchos matemáticos, *Cantor*, *Peano*, *Lebesgue*, *Hausdorff*, *Besicovitch*, *Koch*, entre otros, investigaron sobre este tipo de funciones. Sin embargo, para analizar estas estructuras eran necesarias unas “nuevas matemáticas” puesto que no encajaban dentro de la geometría euclídea.

Aparecieron curvas como la de *Hilbert* que eran capaces “de llenar” todo un cuadrado, o un cubo. Pero esto daba lugar a la siguiente paradoja: una curva, según la geometría euclídea, debía tener dimensión uno, pero al “llenar” todo el espacio tendría dimensión dos en el caso del cuadrado y tres en el del cubo.

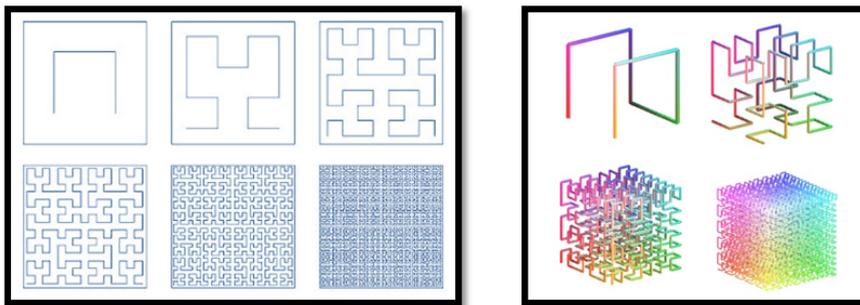


Figura 3.27: La curva de Hilbert.

Estas nuevas extrañas estructuras fueron bautizadas por el gran matemático francés *Poincaré* como “monstruos matemáticos”, curvas que estaban en contra de toda intuición.

La comunidad matemática focalizó todo su esfuerzo en estudiar estas funciones llenas de irregularidades, hasta tal punto que el famoso matemático *Hermite* dirigió una carta a su buen amigo *Stieljes* diciendo, “*... abandono con espanto y horror esta*

lamentable plaga de funciones sin derivada ...". En este mismo sentido *Poincaré* comentaba " ... cuando uno inventaba una nueva función, estaba en vista de alguna meta conveniente; ahora se inventan intencionalmente para poner los defectos de los razonamientos de nuestros padres".

Hay que esperar hasta mediados del siglo XX con la aparición de *Norbert Wiener* cuando, analizando el movimiento browniano de las partículas, construye un modelo matemático totalmente irregular. En este trabajo aparece por primera vez la palabra caos. En la introducción del trabajo comenta:

"La geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de la geometría euclídea o el cálculo diferencial de Newton ..."

Como hemos tenido oportunidad de ver, en el ambiente se respiraba la necesidad de acometer urgentemente y de una manera más detallada el estudio de los objetos irregulares. Esta labor la desarrolló, en torno al 1975, el matemático *Benoit Mandelbrot*. Las siguientes palabras, en la línea de las pronunciadas por *Bentley* y *Wiener*, dieron origen al inicio de la geometría fractal tal y como hoy en día la entendemos:

"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta, ... La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad"

En la actualidad, matemáticos como *Barnsley*, *Devanay*, *Hubbarc* y *Sullivan*, estudian los fractales tanto desde el punto de vista teórico como el aplicado. Desde finales de los años 70 y con la ayuda de potentes ordenadores, los fractales han estado presentes en la investigación matemática.

3.6.2. La geometría fractal.

La palabra fractal la acuñó *Mandelbrot*, procede del adjetivo latino *fractus*, y puede traducirse como fragmentado e irregular. Los fractales son objetos matemáticos que se sitúan en el campo de la teoría geométrica de la medida cuya definición exacta está por establecer.

Es muy difícil dar una definición exacta de un fractal, puesto que requiere de un nivel muy elevado de abstracción. Por otro lado, el número de sus aplicaciones es tan enorme y en materias tan distintas, que según sea la disciplina a estudiar ofrecerá una definición u otra. Evidentemente la definición propuesta por un artista no será igual a la de un matemático.

Existe un gran consenso en que bajo el nombre de fractales se incluyen aquellos objetos matemáticos con los mismos rasgos, si bien la definición concreta no es aplicable a todos ellos. Por este motivo, la mejor manera de poderlos describir es señalando una serie de propiedades que tienen en común.

- Tienen el mismo aspecto a cualquier escala de observación.
- Tienen longitud infinita.
- No son diferenciable. Esto es, están lleno de irregularidades.
- Tienen dimensión no entera.

Para comprender mejor algunas de estas propiedades, vamos a centrarnos en un tipo concreto de fractales, los llamados determinísticos o matemáticos, que se obtienen a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado.

El proceso geométrico suele ser de enunciado muy simple pero que al final da lugar a una estructura compleja, obtenida mediante la repetición infinita del proceso. En este tipo de fractales, es muy evidente la propiedad de autosemejanza, ya que una pequeña sección del fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el objeto.

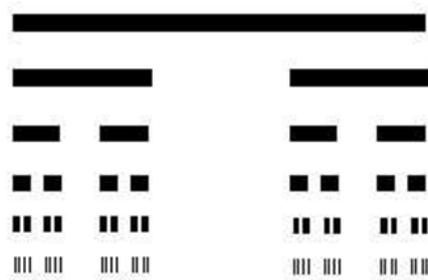


Figura 3.28: El fractal de Cantor.

El conjunto de Cantor es un clásico fractal matemático que se obtiene de la siguiente manera: se parte de un segmento unitario, se divide en tres partes y se elimina la parte central. Cada uno de los dos nuevos segmentos de longitud un tercio se divide en tres partes y se vuelve a quitar el segmento central, y así sucesivamente.



Figura 3.29: El fractal de Cantor en 3D.

Después de infinitos pasos se obtiene un conjunto que recibe el nombre de polvo de Cantor, debido a que la longitud de los segmentos en cada una de las sucesivas etapas tiende a cero. De hecho el número de puntos del conjunto es infinito y sin embargo su longitud total es cero.

Observemos que el mismo procedimiento, de iterar de forma infinita un proceso geométrico concreto, puede aplicarse a un cubo en lugar de a un segmento. En la figura puede apreciarse su aspecto después de 1, 2 y 3 iteraciones.

Una de las características básicas de las matemáticas es la capacidad de aplicación de los conceptos teóricos introducidos. El conjunto de Cantor se inventó estudiando un problema muy complicado, resuelto hace pocos años, conocido con el nombre de la hipótesis del continuo. De entrada da la impresión que poco tiene que ver este conjunto con nuestra vida cotidiana, pero eso no es así.

En efecto, la información circula de ordenador a ordenador a través de las líneas telefónicas, pero este tráfico se ve afectado por un ruido de fondo que se produce en la transmisión. Hace unos años, los ingenieros informáticos se enfrentaban al problema de eliminar o mitigar este ruido y no lograban encontrar un método para ello, puesto que el ruido aparecía sin un patrón fijo, parecía producirse de una manera aleatoria. Mandelbrot, tuvo noticias del problema y empezó dividiendo el tiempo en períodos de días, posteriormente en horas, y de esta manera encontró una hora que no tenía errores. Posteriormente dividió la hora que contenía errores en períodos de media hora y de nuevo apareció un intervalo con error y otro sin error. Es decir, la secuencia de los errores seguía el mismo patrón que el conjunto de Cantor. Con esta información, basada en este patrón de comportamiento, los ingenieros pudieron construir filtros electrónicos que mejoraron la calidad de la transmisión. El conjunto de Cantor también se utiliza como modelo matemático para analizar la estructura de los anillos de Saturno, o el espectro de algunas moléculas orgánicas.

Otro fractal matemático importante es el conocido con el nombre de triángulo de *Sierpinski*. Su método de construcción es muy sencillo puesto que se parte de un triángulo, tal y como aparece en la figura,



Figura 3.30: Triángulo de Sierpinski

se unen los puntos medios de sus tres lados y se elimina el triángulo central. Tenemos ahora tres triángulos y en cada uno de ellos se aplica el procedimiento descrito en el triángulo inicial. Se reitera este proceso geométrico hasta el infinito, y el conjunto teórico que se obtiene es el triángulo de *Sierpinski*.

Por supuesto que el mismo razonamiento puede aplicarse a un cuadrado, o a un cubo, en lugar del triángulo. En este caso, el conjunto obtenido se llama la alfombra de *Sierpinski*, y tiene la sorprendente particularidad de que el área (o el volumen en el caso del cubo) de esta alfombra es cero. Es decir, una maravillosa alfombra que nunca estaría sucia ya que no podría acumular polvo, al carecer de área.



Figura 3.31: Alfombra de Sierpinski.

Al igual que hemos comentado en el fractal anterior, también este conjunto está presente en nuestra vida diaria. Se encuentra con frecuencia en los diseños más variados, como por ejemplo, una alfombra, o bien en las antenas receptoras de nuestros teléfonos móviles.



Figura 3.32: Aplicaciones del fractal de Sierpinski.

Para terminar con los ejemplos de fractales matemáticos presentamos al conocido con el nombre de copo de nieve o curva de *Koch*. Se obtiene tomando un triángulo equilátero, cada uno de sus lados se divide en tres partes, y se sustituye el segmento central por dos segmentos de la misma longitud en forma de triángulo equilátero. En la figura puede apreciarse las primeras iteraciones del proceso.

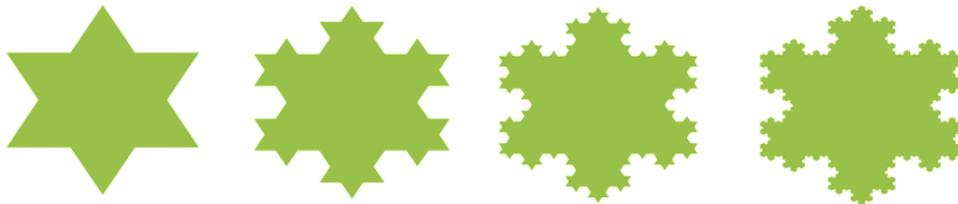


Figura 3.33: Curva de Koch.

En teoría, al ser el proceso infinito, el resultado que se obtiene es una figura tremendamente compleja e irregular, que tiene área finita, siendo su perímetro una poligonal de longitud infinita. Una variante del copo de nieve de *Koch* se utiliza como forma básica para diseñar el corte de un pulmón, o para mejorar la forma de una costa.

Como hemos tenido oportunidad de ver en estos ejemplos de fractales, la potencia de la geometría fractal radica en la posibilidad de construir una estructura geométrica muy complicada a través de un proceso muy simple. Por esta razón, es especialmente útil para modelizar los fenómenos naturales donde la complejidad de su estructura viene originada por la repetición de procesos muy sencillos. Como tendremos ocasión de comprobar, ésta es una de las características más destacada de los fractales,

objetos de tremenda complejidad pero que sin embargo para su descripción y su construcción requieren de muy poca información.

El ordenador, con su potencia de cálculo, ha sido el culpable del gran auge que ha experimentado en los últimos años la geometría fractal. Recordemos que la idea básica de los fractales está en la iteración, la repetición infinita de un proceso simple, y para esta tarea nada mejor que el ordenador, teniendo además la posibilidad de representaciones gráficas cada vez más precisas.

Los fractales matemáticos que hemos introducido, los lineales, son demasiados perfectos para poder representar a los objetos de la naturaleza, como la hoja de un árbol o el rayo. Por tal motivo se introducirán más adelante los fractales no lineales entre los que se encuentran los obtenidos por un algoritmo de escape.

3.6.3. Autosemejanza

“... un naturalista observa que una pulga tenía pequeñas pulgas en ella y éstas a su vez otras más pequeñas que las mordían. Así se procede hasta el infinito.”

De esta manera tan sencilla el escritor *Jonathan Swift* describe el concepto de autosimilitud. La autosemejanza o autosimilitud es una de las características de los objetos fractales, por la cual una de estas imágenes puede ser descompuesta en trozos más pequeños cada uno de los cuales es idéntico al objeto completo.

Existe una definición matemática más precisa que puede simplificarse diciendo que la autosemejanza es una transformación que conserva la forma y las proporciones, pero que puede variar en tamaño, posición y orientación. Lo importante es que cada uno de los trozos se obtenga de la estructura completa a través de las mismas transformaciones.

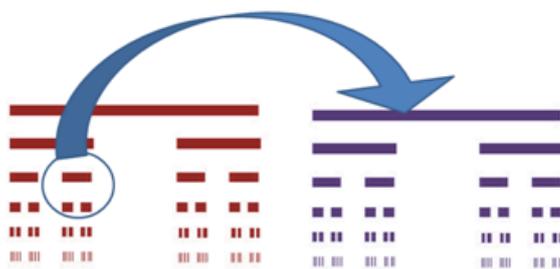


Figura 3.34: Autosemejanza del conjunto de Cantor.

Se puede realizar el siguiente experimento: se toma la curva de Koch y se sacan cuatro fotocopias con un factor de reducción de $1/3$, posteriormente se pegan y se obtendrá la curva original. Para ello, lo importante es que cada una de estas cuatro copias tenga el mismo factor de reducción.

No pensemos que el concepto de autosemejanza es una idea novedosa, en realidad

había sido estudiada por muchos científicos en siglos anteriores, Leibniz entre ellos, cuando propuso esta hermosa idea sobre la estructura del universo. Una gota de agua contenía todo un universo, que a su vez contenía gotas de agua más pequeñas; cada una de estas pequeñas gotas encerraba a su vez un universo que tenía en su interior otras gotas de agua, todavía más pequeñas y así sucesivamente.

En la naturaleza es fácil encontrarse con esta propiedad, por ejemplo la coliflor o el brócoli la posee. Si tomamos un trozo podemos observar que ésta ramita es idéntica a la coliflor completa. Esta misma experiencia podemos hacerla con la hoja de un helecho, o en mucho más diferente como es el sistema vascular.



Figura 3.35: Autosemejanza en la naturaleza.

Pero tenemos que ser muy cuidadoso a la hora de hablar de fractales ya que sería un error creer que todas las estructuras geométricas que tengan la propiedad de auto-semejanza tienen que ser un fractal. Pensemos en una línea recta o en un cuadrado, es claro que tienen la propiedad de auto-semejanza pero son figuras regulares y por lo tanto no son fractales

3.6.4. El conjunto de Mandelbrot

El conjunto de *Mandelbrot* es un ejemplo perfecto de un sistema dinámico discreto en el conjunto de los números complejos.

Aunque en la actualidad un gran número de personas se han acercado a la geometría fractal por la belleza de las imágenes que genera existen otras razones, tanto matemáticas como su amplio campo de aplicación, que justifican el estudio y la atención a este tipo de estructuras. Como ejemplo de belleza y complejidad se encuentra el mundialmente famoso fractal de *Mandelbrot*.

Benoit Mandelbrot nació en Polonia en 1924, se le considera el padre de la geometría fractal y su aplicación a la elaboración de modelos que representan a los elementos de la naturaleza. A causa de la segunda guerra mundial emigró, en un primer momento a Francia en 1936 para estudiar con su célebre tío, el matemático *Szolem Mandelbrot*, y posteriormente a Estados Unidos al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, siendo el último alumno de doctorado del famoso matemático *John von Neuman*. En 1955 regresó a Francia, al Centro Nacional de Investigaciones Matemáticas, donde permaneció muy poco tiempo ajeno al tipo de matemáticas que el grupo *Bourbaki* elaboraba en ese momento. Afortunadamente recabó en New York en la empresa IBM formando parte de su centro de investigación *Watson Research*

Center, donde encontró el ambiente y las herramientas adecuadas para poner en prácticas sus numerosas ideas.

En 1945 su tío *Szolem* le entregó un manuscrito escrito por el matemático francés *Gaston Maurice Juliá* donde se estudiaba desde un punto muy teórico la iteración de funciones racionales. *Mandelbrot* se enfrentó al mismo problema pero desde un punto de vista geométrico. Sus resultados dieron lugar al primer trabajo sobre fractales que llevó por título “*Les objets fractals, form hasard et dimension*” y fue completado en 1982 con la aparición de su célebre libro “*La geometría fractal de la naturaleza*”.

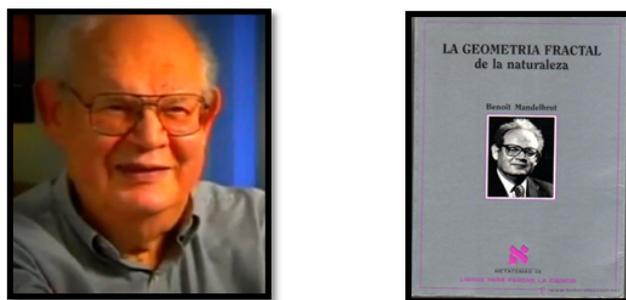


Figura 3.36: Benoit Mandelbrot.

Para construir el conjunto de *Mandelbrot* es necesario trabajar con pares de números reales, llamados números complejos, cuya representación gráfica son los puntos del plano, por ejemplo el punto $(3, 2)$. Con estos números complejos se puede operar de forma similar a como se hace con números reales, se pueden sumar, multiplicar, etc. Además de estos números es necesaria una fórmula, que no tiene que ser complicada, en el caso que nos ocupa es $z^2 + c$, donde c es un número complejo fijo.

A partir de un valor inicial de $z_0 = 0$ (llamado semilla) se eleva al cuadrado y se le suma el número c obteniéndose el número z_1 . Ahora repetimos el proceso y obtenemos otro número complejo z_2 , y así sucesivamente. De esta forma se ha conseguido una sucesión de números

$$\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots, \}$$

que recibe el nombre de órbita. Si todos los elementos de este conjunto de puntos permanecen a menos de dos unidades del origen de coordenadas, entonces el punto c , pertenecerá al conjunto de *Mandelbrot*, si la distancia es mayor de dos unidades c no formará parte del conjunto. Es decir, el conjunto de *Mandelbrot* es el conjunto de puntos cuyas órbitas generadas por la fórmula anterior nunca escapan de un círculo centrado en el origen de radio dos.

La genial idea de *Mandelbrot*, que pudo hacer porque la tecnología estaba a punto, fue la de pintar en color negro los puntos del conjunto de *Mandelbrot* y en blanco los que estaban fuera. Después de un largo tiempo de espera el resultado obtenido es el que puede apreciarse en la figura.

Por supuesto que una vez conocido el proceso, éste puede ser mejorado. Cuando los números no pertenezcan al conjunto de *Mandelbrot* (el exterior del fractal) entonces se le asignará un algoritmo de color, consistente en asociar colores diferentes a cada punto, de acuerdo a "la rapidez" del incremento de la órbita. Por ejemplo, si la sucesión se incrementa lentamente, entonces la semilla se puede pintar de color azul, por el contrario si crece más rápidamente, tendrá un color amarillo, naranja o verde en función de la velocidad de este crecimiento. Los primeros que utilizaron esta técnica fueron *Peiten* y *Ritchter*.

A mediados de los años 80, *A. Douady* y *J.H. Hubbard* probaron que este conjunto y su complementario son conexos. Es decir, de un solo trozo, aunque al ampliar la frontera del conjunto de la sensación de lo contrario. Debido a que siempre hemos estado acostumbrado a lo regular a las estructuras representadas por la geometría euclídea, al analizar la frontera de este fractal, percibimos que es un tipo de curva que desafía nuestra capacidad de entendimiento, puesto que cuanto más cerca se mire más se ramifica.

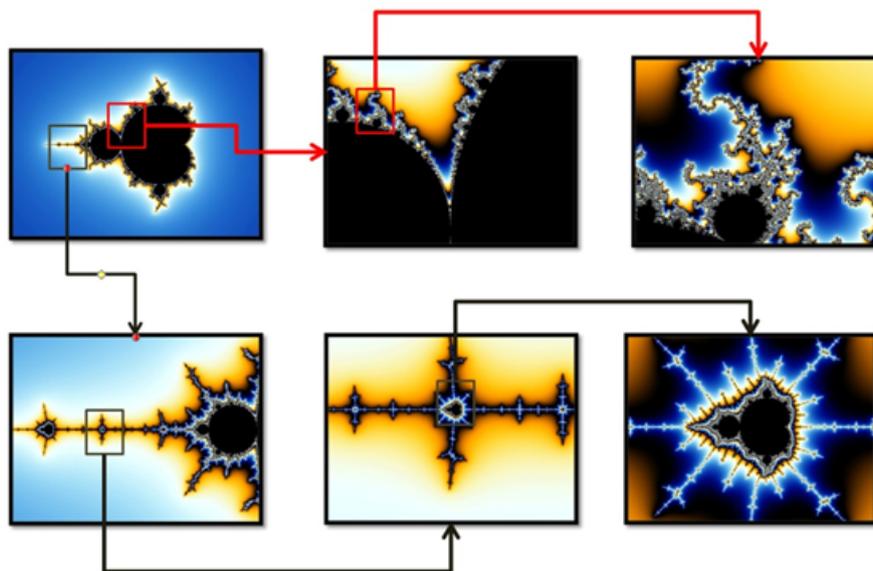


Figura 3.37: Autosemejanza del conjunto de Mandelbrot.

En la figura anterior puede apreciarse dos de las características básicas de los fractales. La primera es que la frontera del conjunto de *Mandelbrot* es una curva irregular tremendamente complicada, y la segunda que tiene la propiedad de autosemejanza, es decir, existen miles de réplicas del fractal a menor escalas.

Es posible obtener otro tipo de fractales, ya que bastara con cambiar la fórmula inicial con la salvedad de que ésta no puede ser lineal. Precisamente el hecho de no linealidad implica la aparición del caos matemático y de la geometría fractal.

Otra manera alternativa de modificar un fractal, como el de *Mandelbrot*, es alterar los algoritmos de color para representar su exterior o interior. Existen en el mercado un número variado de programas informáticos con los que es posible construir

hermosas imágenes. De entre ellos, uno de los más apropiados, por su sencillez de manejo y potencia de resultados, es Ultra Fractal. El programa tiene la ventaja de que no solo se puede construir bonitos fractales, sino que es posible realizar espectaculares animaciones de los mismos, así como fondos fractales con movimiento.

Precisamente la belleza de las imágenes obtenidas junto con la sencillez de su creación ha acercado al mundo de las Matemáticas a un gran número de personas. En boca de Mandelbrot “*ayudan a tender puentes en el abismo que separa las cuestiones matemáticas de la gente de la calle*”.

3.6.5. La dimensión fractal

Uno de los objetivos que ha perseguido la Geometría desde sus inicios ha sido el de encontrar patrones y formas, por un lado, y por el otro, buscar métodos para asignar una medida a estas formas. Es conocido que no es posible medir la diagonal de un cuadrado tomando como unidad el lado de dicho cuadrado. Este problema de medida originó la aparición de los números irracionales. Del mismo modo, los intentos por encontrar la longitud exacta de una circunferencia llevaron a los matemáticos al descubrimiento del número π , o el problema de encontrar el área encerrada por dos curvas dio origen al cálculo diferencial e integral.

En la actualidad muchas personas creen que el cálculo de longitudes, áreas o volúmenes está totalmente resuelto, pero la realidad es que no es así. Es fácil comprobar, buscando el dato en distintas publicaciones, que existe una gran divergencia entre la longitud de la frontera entre dos países, o de un río, aportada por una publicación u otra. En enciclopedias españolas se dice que la longitud de la frontera entre España y Portugal es de 985 kilómetros, mientras que en una enciclopedia portuguesa es de 1212 kilómetros. La razón de esta discrepancia se encuentra en que no es posible dar un número exacto, puesto que al tratarse de una curva totalmente irregular, es imposible medirla, lo que resulta contradictorio con el hecho de que la isla tiene un área finita. Este era el argumento central del famoso artículo de Benoit Mandelbrot titulado -cuánto mide la costa de Gran Bretaña?



Figura 3.38: Medida de una costa.

Para poder medir el perímetro de la costa se toma, en primer lugar, una unidad de longitud. En este caso, el perímetro se estima a partir del número de veces que es necesario llevar el segmento para cubrir toda la costa. Es evidente, que al disminuir el tamaño del segmento unidad, la longitud de la costa aumenta. Los objetos irregulares carecen de medida exacta, puesto que la longitud dependerá de la unidad de medida elegida.

Al no poderse caracterizar la frontera de un fractal por una longitud, es necesario centrarse en un concepto diferente como es el de dimensión, procedente del latín *dimensio*, que significa medida. La idea es buscar un parámetro que, en cierto modo, mida el grado de irregularidad del fractal, y eso será la dimensión fractal.

Desgraciadamente no hay una única definición de dimensión. Existe una definición intuitiva de la dimensión euclídea que coincide con el número de valores reales que son necesarios para situar a un punto en el espacio donde nos encontremos trabajando. Una línea tiene dimensión uno, puesto que sólo se necesita un número real para localizar cualquier punto de la línea. Pensemos, por ejemplo, que cuando deseamos dar nuestra situación en una autopista aportamos sólo un número, su punto kilométrico, aunque esta carretera no sea una línea recta.

Otra definición intuitiva de dimensión euclídea hace referencia al número de direcciones perpendiculares diferentes que se pueden tomar. En nuestro mundo cotidiano contamos con tres direcciones: izquierda-derecha, adelante-atrás, y arriba-abajo; por este motivo decimos que el espacio en que nos movemos es tridimensional.

Pero la aparición de los “monstruos matemáticos”, aquellas curvas que llenaban todo el espacio, desafiaba la idea intuitiva del concepto de dimensión. Este tipo de objetos fractales fueron estudiados dentro de una nueva rama de las matemáticas creada por *Poincaré* que recibe el nombre de Topología. Una curiosa ciencia que trata sobre la manera en que los objetos pueden ser deformados como si pareciesen de goma. Un círculo puede estirarse y convertirse en un triángulo, o en el copo de nieve de *Knoch*. Desde el punto de vista topológico no es posible distinguir una línea recta de la curva de *Hilbert*, o una hoja de papel plana de aquella que se encuentra completamente arrugada.

Definir el concepto de dimensión de manera rigurosa fue una tarea larga y complicada que desafió a los mejores matemáticos de finales del siglo XIX y principios del XX, entre los que se encontraban, *Poincaré*, *Lebesgue*, *Brouwer*, *Cantor*, *Menger*, *Peano*, y *Hilbert*. Era inevitable que tan intenso trabajo diese como resultado un número numeroso de definiciones, todas ellas relacionadas pero distintas: dimensión topológica, dimensión por conteo por cajas, dimensión de autosimilitud, dimensión euclídea, ..., etc.

Por los comentarios anteriores queda claro que estudiar a fondo el concepto de dimensión no es una tarea fácil, pero para el propósito que nos ocupa podemos simplificarlo de la siguiente manera. Si tomamos un segmento de longitud uno y lo dividimos en cinco partes iguales, es evidente que obtendremos 5 segmentos cada

uno de ellos de longitud $1/5$. De la misma manera, si partimos de un cuadrado de lado unidad y dividimos sus lados en cinco partes iguales, obtenemos 25 cuadrados de lado $1/5$. Por último, si elegimos un cubo de lado unidad y dividimos los lados en cinco partes iguales, aparecerán 125 cuadrados más pequeños de lados $1/5$.

Para cada uno de los casos anteriores siempre se cumple que el producto del número de partes por el tamaño de las partes elevado a uno (en el primer caso), dos (en el segundo) y tres (para el tercero) siempre es la unidad. Es decir, se obtiene la fórmula $N(h) \cdot h^D = 1$, siendo h el tamaño de las partes, $N(h)$ el número de partes y D la dimensión. Lo comentado anteriormente puede verse de forma esquemática en la siguiente figura.

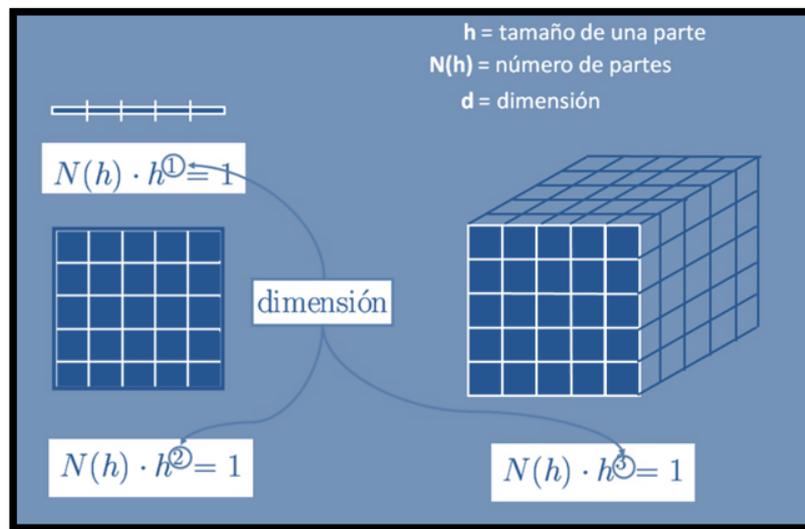


Figura 3.39: Concepto de dimensión

La fórmula anterior se conoce con el nombre de ley de potencia, puesto que el número de partes $N(h)$ cambia como si fuese una potencia de $1/h$. Con unos básicos conocimientos matemáticos es posible despejar de esta expresión la dimensión, siendo su valor

$$D = -\frac{\log(N(h))}{\log(h)}$$

. De esta manera, la dimensión fraccionaria o fractal del Conjunto de *Cantor* es aproximadamente 0.63093, obtenido del cociente $\log(2)/\log(3)$, y la dimensión de la curva de *Knoch* $\log(2)/\log(3) = 1.26186$.

Tenemos que darnos cuenta de la importancia de estos resultados, ya que a través de la dimensión fractal disponemos de un parámetro que caracteriza, de alguna manera, lo sinuoso e irregular de un objeto. Si el fractal es relativamente “suave” su dimensión fractal estará próxima a su dimensión euclídea que es uno, por el contrario si “retuerce” hasta ocupar la forma de un cuadrado, su dimensión fractal estará próxima a dos. La costa de Inglaterra tiene dimensión fractal 1.25, mientras que la dimensión fractal de la costa de Australia es 1.13; en conclusión, la costa de

Inglaterra es mucho más sinuosa e irregular que la de Australia.

Una vez conocidos los conceptos de dimensión euclídea y dimensión fractal de un objeto, tenemos una manera alternativa y algo más precisa de definir a un fractal, ya que será aquél objeto donde su dimensión euclídea sea menor que su dimensión fraccionaria.

Ahora bien, hasta ahora hemos estado refiriéndonos a un tipo de fractales muy concretos como son los obtenidos a través de un algoritmo matemático, pero ¿qué pasa con aquellos objetos de la naturaleza con estructura fractal? Es evidente que su dimensión no se puede obtener a través de la fórmula que hemos deducido anteriormente, puesto que no estamos ante una curva que pueda medirse con escalas diferentes y además no es autosemejante, aunque posee ciertas propiedades de escala”son semejantes estadísticamente.

Los matemáticos *Hausdorff* y *Besicovitch* publicaron en 1919 un artículo donde se generalizaba la fórmula para el cálculo de la dimensión fraccionaria para este tipo de objetos. Su cálculo es extremadamente complejo, pero existe un algoritmo, con el nombre de Box-Counting (método de conteo de cajas), implementado en la mayoría de los programas informáticos que trabajan con imágenes, como por ejemplo *Harfa* o *ImageJ*. [

1.5ex] El algoritmo de Box-Counting consiste en lo siguiente: a partir de la imagen del objeto se obtiene una versión binaria de la misma, a cada punto brillante se le asocia el valor 1 y un 0 al resto. Posteriormente se obtiene una imagen del contorno y se superpone una malla de un tamaño dado. El proceso consiste en contar el número de veces que la imagen corta al cuadrado de la malla. A continuación se hace disminuir el lado del cuadrado y se representa el logaritmo del número de intersecciones en función del logaritmo de la inversa del lado. La dimensión del objeto coincide con la pendiente de la recta de regresión definida por los puntos.

Hemos visto como la longitud de formas irregulares depende de la escala de medida. Este hecho origina un verdadero problema a los biólogos, ya que los lagos que tienen orillas muy irregulares tienen más área con aguas poco profundas y esto produce comunidades más ricas en vida animal. Hasta hoy, no ha sido posible caracterizar las comunidades de un lago con parámetros que relacione la longitud de la orilla con la superficie del agua. La aparición de la dimensión fractal ha llevado a muchos científicos de campos muy diferentes a interesarse por el tema, con la intención de aplicarla a estructuras muy complejas. Sin embargo, tenemos que comentar que hay que ser cuidadoso con su uso, puesto que existen limitaciones en su aplicación. Existen objetos muy complejos que son una mezcla de diferentes fractales, cada uno de los cuales tiene una dimensión distinta.

3.6.6. Tipos de fractales

Aunque existe una primera clasificación muy general de los fractales, llamados lineales, como la curva de Koch, y no lineales, los que se generan a partir de una

fórmula no lineal como el conjunto de Mandelbrot. Sin embargo, podemos hacer una clasificación un poco más detallada de los mismos.

Fractales construidos a partir de un algoritmo de escape. Un ejemplo clásico de ellos es el fractal de *Mandelbrot* obtenido, como sabemos, de la manera siguiente: para cada punto del plano (la semilla), se calcula una serie de valores (su órbita), mediante la repetición de una fórmula hasta que se cumpla una determinada condición, y en ese momento al punto inicial se le asigna un color relacionado con el número de repeticiones.

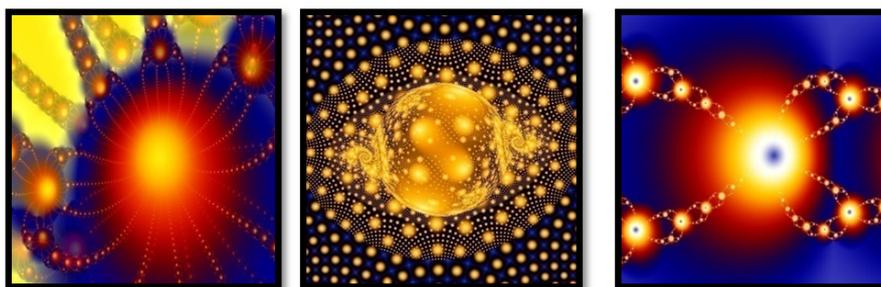


Figura 3.40: Fractales y algoritmo de escape.

Para poder construir un fractal de este tipo es imprescindible realizar miles de millones de operaciones, por lo cual requieren la ayuda de un ordenador. Uno de los más famosos fractales correspondiente a este tipo es el conocido como conjunto de *Julia*, en honor del matemático francés *Gaston Maurice Julia*. Nació el 3 de Febrero de 1893 en Sidi Bel Abbés (Argelia) y falleció en París el 19 de Marzo de 1978. Con solo 25 años publicó un manuscrito titulado “*Mémoire sur l’iteration des fonctions rationnelles*”, con el cual ha llegado a ser uno de los matemáticos más famosos de los que se han dedicado al estudio de los fractales. Fue soldado en la Primera Guerra Mundial, y cayó herido en un ataque en el frente francés, donde perdió parte de su nariz, lo cual le obligó a llevarla tapada durante el resto de sus días. Por sus importantes investigaciones fue nombrado profesor titular en la Escuela Politécnica de París. En el artículo que hemos citado dio una descripción precisa de los conjuntos, que llevan su nombre, para los cuales la n -ésima iteración de un número complejo permanece acotada, cuando el número de iteraciones tiende a infinito.

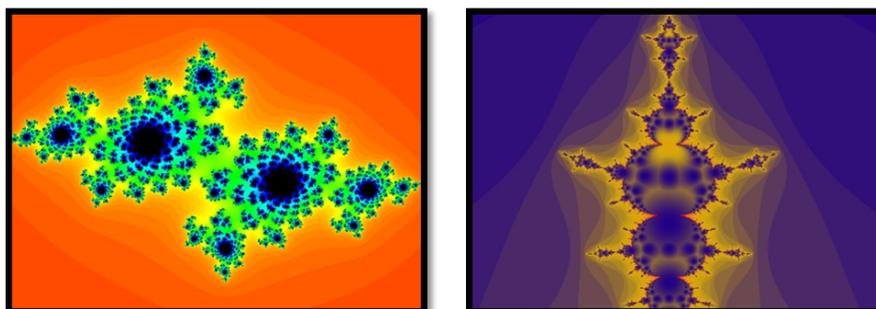


Figura 3.41: Fractales de Julia.

Por este trabajo recibió el gran premio de la Academia de las Ciencias. Durante los años 20 disfrutó de gran fama, pero posteriormente su trabajo fue olvidado, hasta que *B. Mandelbrot* lo puso de actualidad en 1970 con sus experimentos con los ordenadores.

Otro tipo de fractales muy interesantes son los obtenidos por medio de un **Sistema de Funciones Iteradas (IFS)**. Es un método creado por *M. Barnsley*, basándose en el principio de autosemejanza. En un fractal IFS siempre se puede encontrar una parte de la figura que guarda una relación de semejanza con la figura completa. Esa relación es a menudo muy difícil de apreciar, pero en el caso del helecho de la figura siguiente es bastante clara: cualquier hoja es una réplica exacta de la figura completa.



Figura 3.42: Sistema de Funciones Iteradas (IFS)

Existen fractales asociados con la teoría del caos que reciben el nombre de fractales caóticos. Entre ellos, el más conocido es el atractor de Lorenz (izquierda) y el diagrama de bifurcación (centro).

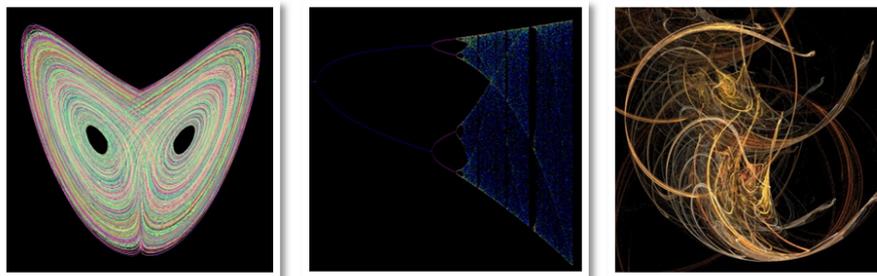


Figura 3.43: Fractales caóticos.

Merece la atención detenerse sobre un tipo particular de fractales obtenidos a través de un método conocido con el nombre de **L-System**. El método fue creado por *Lindemayer* en 1968 y publicado en el *Journal of Theoretical Biology*, como un modelo matemático para la construcción de un filamento celular de la bacteria *Anabaena Catenula*.

Básicamente el algoritmo consiste en suponer un sistema celular con dos posibles estados citológicos, A y B, y la regla de crecimiento: una célula en el estado A se

divide y da lugar a una en el estado A y otra célula en el estado B; que se representa por AB. En el siguiente paso, una célula en el estado B se divide en una célula en el estado B y otra en el estado A, es decir BA. En la tabla se ha representado el resultado de la división para las cuatro primera fases, tomando como célula de partida del tipo A.

Fase	Núm. células	Resultado división
1	1(A)	AB
2	2(AB)	ABBA
3	4(ABBA)	ABBABAAB
4	8(ABBABAAB)	ABBABAABBAABABBA

Figura 3.44: L-sistemas y fractales.

Estos fractales se pueden generar utilizando como software *FantasticFractal*. En la figura siguiente aparecen los parámetros con los que se genera la curva de *Koch*.

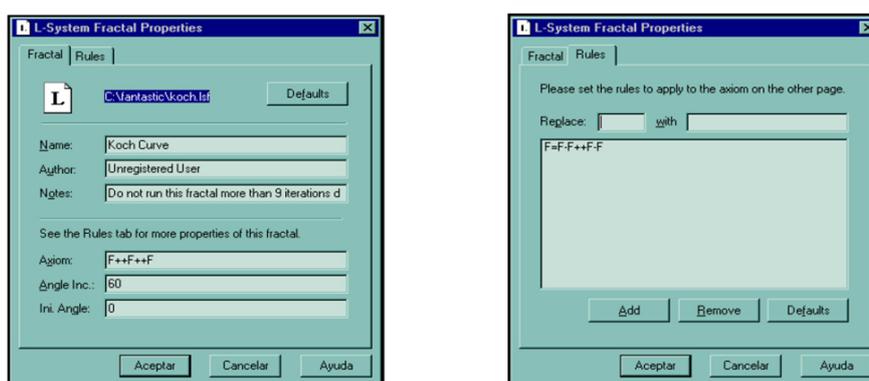


Figura 3.45: L-sistemas con FantasticFractal.

El signo + representa un giro de 60 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj, y el signo - un giro de 60 grados en la dirección de las agujas del reloj. Para poder dibujar el fractal es necesario indicar la regla, que en nuestro caso viene dada por, $F=F-F++F-F$.

Es decir, F estará definida como: se traza un segmento unitario, en su extremo giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y dibujamos un segundo segmento; después giramos 120 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj y dibujamos otro segmento finalmente giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y trazamos el último de los segmentos.

Los L-systems son muy adecuados para modelar muchos sistemas biológicos, especialmente aquellos que presentan bifurcaciones o ramificaciones en su desarrollo. El esquema básico para dibujar una bifurcación con un ángulo dado (por ejemplo 20 grados) es el siguiente: $F=F[+F]F$, donde los corchetes indican que al final se debe retroceder a la posición donde empezaba la bifurcación. Naturalmente, se puede definir una regla más complicada y obtener un modelo mucho más realista. Por ejemplo,

para representar un árbol se ha elegido como Regla: $F=F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]$ y un ángulo de 22 grados. En la figura siguiente pueden verse los resultados para un número diferente de iteraciones.



Figura 3.46: Simulación de un árbol con L-sistemas.

En el programa de televisión *Redes*, el divulgador científico *Eduardo Punset*, entrevistó a *Mandelbrot*, donde comentó que se sentía muy impresionado por los cuadros del pintor japonés *Katsushika Hokusai*, puesto que sin ser consciente de ello, el pintor había sabido captar las propiedades básicas de los fractales. En las imágenes que presentamos se aprecia como un río se divide y subdivide hasta formar la catarata, o bien como una ola está formada por muchas otras olas más pequeñas, propiedad que conocemos con el nombre de autosemejanza.



Figura 3.47: Katsushika Hokusai y los fractales.

3.6.7. El juego del Caos

Todos hemos sufrido la desagradable experiencia de que al coger una bolsa de legumbres se caigan al suelo adoptando una forma caprichosa debido al azar. Si repetimos la experiencia, las legumbres describirán un patrón final distinto. éste fue el punto de partida de *Michael Barnsley* para la construcción de fractales sin hacer uso del proceso de iteración. Partiendo del azar obtuvo una manera diferente de generar

patrones fractales, y a esta técnica la denominó el juego del caos.

Para ejecutar el juego es aconsejable utilizar un ordenador o en su defecto una hoja de papel cuadrículada y un dado. Existen muchas variantes del mismo pero el juego clásico consiste en generar el triángulo de *Sierpinsky*. Se colocan tres puntos numerados del 1 al 3 formando un triángulo equilátero.

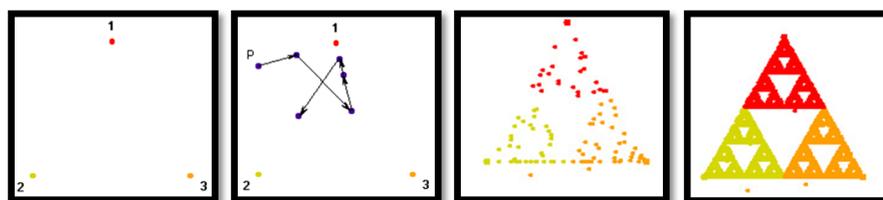


Figura 3.48: El juego del caos.

A continuación identificamos los lados 1 y 2 del dado con el punto 1, los lados 3 y 4 con el punto 2 y los lados 5 y 6 con el tercer punto. Ahora se elige un punto cualquiera P de la hoja y lo desplazamos de la manera siguiente: lanzamos el dado y movemos el punto P hasta la mitad de la distancia existente entre el punto P y el vértice que indique el dado. Por ejemplo: si ha salido un 1 en el dado, entonces situamos el punto P en la mitad de la distancia entre P y el vértice 1, si en el segundo lanzamiento sale un 5, situamos el punto en la mitad de la última posición de P y el vértice 3, y así sucesivamente.

3.6.8. Aplicaciones de la Geometría Fractal.

Para muchas personas el gran atractivo de los fractales reside en la belleza de las imágenes que genera, de hecho mucha gente se acerca a esta rama de las matemáticas atraídas únicamente por lo impactante y plasticidad de los resultados gráficos obtenidos. Sin embargo, y como tendremos oportunidad de ver en esta sección, lo verdadero importante de la Geometría Fractal es el amplio rango de aplicaciones en campos muy diferentes.

Aunque la geometría fractal fue concebida hace unos años, ha sido recientemente cuando se han logrado los avances más notables. En un principio, *Mandelbrot*, los utilizó en el ámbito de la Economía con la intención de analizar las fluctuaciones bursátiles. Ahora bien tenemos que empezar preguntándonos; ¿qué significado tiene decir que un objeto real, tal como una costa o la red capilar del sistema venoso, es un fractal? Lo que queremos decir con ello, es que puede definirse un modelo matemático que se aproxima bastante bien al objeto. Aunque al ser sólo una aproximación tiene que estar limitada a una franja de escalas limitada por ciertos valores máximo y mínimo. Es evidente, entonces, que en el mundo real no existen fractales perfectos, como tampoco existen esferas perfectas, cuando se pretende representar a la tierra.

Como sabemos, los modelos no lineales son el origen del comportamiento caótico de

los sistemas dinámicos, y que la Geometría Fractal es la herramienta adecuada para estudiar el caos. Por este motivo empezaremos comentando algunas aplicaciones de esta teoría.

- **Economía:** en el estudio errático e imprevisible de la bolsa y del flujo del dinero.
- **Amplificadores de sonido:** se producen cortas descargas eléctricas dentro de los circuitos, debido a la electricidad estática, lo que origina que el sonido tenga períodos caóticos.
- **Rotación de la tierra:** se ha descubierto, por medio de relojes atómicos, que la tierra sufre alteraciones en su movimiento de rotación, no funciona con la perfección de un reloj suizo. Como consecuencia de ello el paso de la tierra no es totalmente regular y se producen fases intermitentes de caos.
- **Lavadoras:** en 1993 la empresa Goldstar construyó una revolucionara lavadora, donde la el ritmo de rotación del tambor de lavado no era regular, sino caótico. La eficacia del lavado superó con creces a las construidas por la competencia.
- **El cuerpo humano:** son abundantes los ejemplos donde el caos está presente en nuestro cuerpo.
 - Para que el sistema inmunológico tenga un funcionamiento eficaz es necesario que su comportamiento sea no lineal y caótico, para que tengan la posibilidad de adaptarse a los cambios externos.
 - Si un sistema, que rige nuestra salud, fuese totalmente determinista, al producirse cualquier cambio en su evolución nuestro cuerpo enfermaría.
 - Provocando el caos en determinadas zonas del cerebro, mediante la generación de turbulencias eléctricas, se puede bloquear la aparición de ataques epilépticos.
 - En cuerpo humano es un sistema caótico. Constantemente estamos sustituyendo nuestras células de tal manera que cada siete años se produce la regeneración de todas las células de nuestro cuerpo. La razón de que conservemos nuestra forma es debido a que el cuerpo humano es un atractor, y por tanto, a largo plazo tiende a mantener la misma estructura.
 - El ritmo cardiaco es caótico, de hecho cuanto más regular sea el ritmo más enfermo estará una persona. En 1983, R. Ideker, estudiando los ciclos biológicos, comprobó que la actividad eléctrica, que es la hace contraer los músculos del corazón, presenta períodos de orden dos, cuatro, ocho, dieciséis, y así hasta llegar a ser caótico. De hecho éste es el estado del corazón cuando sufre un ataque de fibrilación, por tal motivo se somete al enfermo a un shock eléctrico que hace volver al ritmo periódico y regular. Sorprendentemente, las pequeñas alteraciones de la cadencia del corazón es síntoma de buena salud.

- Por último, una aplicación curiosa de la dinámica caótica está relacionada con el movimiento de los ojos. A partir de la masa del ojo, la viscosidad del humor vítreo, y otros parámetros es posible construir un modelo matemático no lineal del movimiento de los ojos. Cuando a una persona sana mira la oscilación de un péndulo, sus ojos siguen continuamente el movimiento. Por el contrario, cuando un esquizofrénico realiza el mismo experimento sus ojos se mueven de forma caótica.



Figura 3.49: Ramificaciones en la naturaleza y fractales.

También los fractales tienen un amplio número de aplicaciones. De hecho, es difícil encontrar en la actualidad una disciplina científica donde no hayan sido aplicados.

Las fronteras entre diferentes medios físicos o biológicos dan lugar a buenos ejemplos de sistemas que se pueden modelizar mediante fractales. Un ejemplo clásico, que responde a ciertos modelos de curvas fractales, es el de las costas, pero también los son los bordes de una nube, la superficie montañosa, la orilla de un río o la frontera entre dos países diferentes. La evolución y construcción a lo largo de la historia de una frontera entre dos naciones sigue un proceso muy parecido a como se construye un fractal lineal, como la curva de *Koch*. Lo mismo le ocurre a la formación de la línea de costa puesto que el contacto entre el agua del mar y la tierra modifica constantemente su perfil. No obstante, la construcción de la curva de *Koch* es un proceso matemático, mientras que en la formación de una línea de costa están presentes procesos aleatorios. A pesar de ello, la dimensión fractal es de 1.26128 para la curva de *koch* y 1.3 el valor aproximado para la costa de Gran Bretaña, ó, 1.5 para la costa de Noruega (mucho más irregular).

Tenemos que hacer una llamada de atención sobre el hecho de que no todos los objetos de la naturaleza tienen estructura fractal. En la naturaleza aparecen espontáneamente figuras regulares como círculos, esferas o rectas. Por ejemplo, las formas de algunas hojas, las gotas de lluvia, etc., pero en estas ocasiones la forma adoptada es consecuencia de un problema de optimización. Es conocido que una esfera presenta, a igual volumen, una superficie mínima. Por esta razón, y como resultado de optimizar la tensión superficial, una gota de agua adopta la forma de una esfera.

Ramificaciones. Desde el punto de vista matemático, se entiende por árbol a un conjunto de puntos (vértices) unidos entre sí por arcos (ramas). Bajo este epígrafe ubicaremos no sólo a los árboles con sus ramas, sino que extenderemos el concepto

para incluir otros objetos de la naturaleza que adoptan esta forma, o el sistema arterial y bronquial de un mamífero.

El proceso mediante el cual una rama principal se divide y subdivide sucesivamente es el culpable de que el objeto tenga estructura fractal. La clave se encuentra en la propiedad de autosemejanza por la cual se añade la misma estructura a escala cada vez más pequeña. Pensemos, por ejemplo, en la red de afluentes de una cuenca hidrográfica, donde el agua de lluvia tiene que ser desaguada, o en el sistema arterial, donde la sangre tiene que llegar a todos los tejidos del cuerpo ocupando sólo un 5% del volumen total. Estos procesos pueden modelarse por un tipo de curva (dimensión uno) que ocupa una superficie (dimensión dos), es decir, un fractal.



Figura 3.50: Ramificaciones en el cuerpo humano y fractales.

Texturas y paisajes fractales. La geometría fractal es la herramienta perfecta para la creación de paisajes imaginarios utilizados en cine y juegos de ordenador. También es posible elaborar texturas diferentes mediante la creación de un espacio tridimensional coloreado que rodea a un objeto digital utilizando una fórmula matemática iterativa.

El análisis de la textura de una imagen es un campo de investigación abierto y de continua expansión, especialmente en medicina como herramienta de diagnóstico, o en imágenes de reconocimiento, como el estudio de las fracturas del terreno.

De manera resumida, la forma de construir un paisaje fractal es la siguiente: se parte de un cuadrado y se unen los puntos medios de los lados para obtener otros cuatro cuadrados más pequeños. Antes de la siguiente iteración, se le aplica una transformación a los vértices, de tal forma que se eleven o desciendan una cantidad aleatoria.

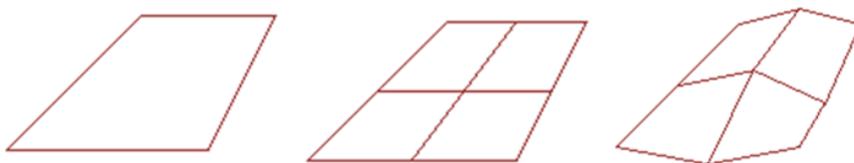


Figura 3.51: Construcción de paisajes fractales I

Una vez conocido el proceso geométrico, el ordenador repite (itera) el mismo esquema un número elevado de veces.

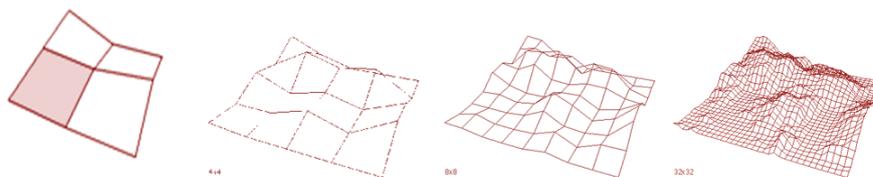


Figura 3.52: Construcción de paisajes fractales II

Por último, se aplica el color, la textura, y un programa de animación se encarga del resto de la película.

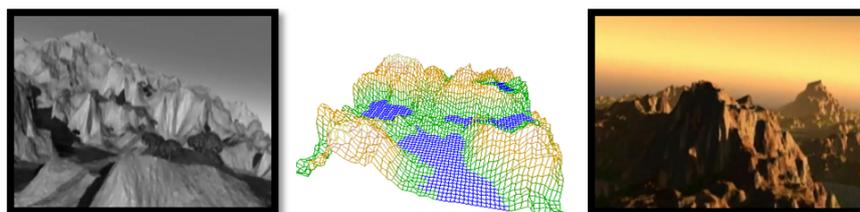


Figura 3.53: Construcción de paisajes fractales III

Mediante una técnica parecida la productora Lucasfilms recreó los efectos especiales de la película “*Star Trek 2*”, la saga de “*La guerra de las galaxias*”, o el mar en la película “*Titanic*”.

Compresión de imágenes digitales. Cuando realizamos la clasificación de los fractales, vimos que algunos de ellos podían generarse a través de un Sistema de Funciones Iteradas (IFS). Esto es, un conjunto de funciones que repetidas sucesivamente generan al objeto fractal. Uno de los grandes problemas en el uso de la información digital es el de su manipulación, sobre todo cuando el volumen de transmisión es grande. Por ejemplo, si se desea enviar por Internet una imagen de alta resolución es posible que tengamos problema de capacidad de memoria. Entonces, ¿cómo podemos resolver esta cuestión? Existen muchas técnicas diferentes relacionadas con la compresión de imágenes, pero una de ellas está basada en la geometría fractal. En efecto, por medio de un Sistema de Funciones Iteradas podemos eliminar una gran parte de la información a transmitir puesto que sólo se necesita la función generadora del objeto fractal, en lugar de todos los píxeles de la imagen.

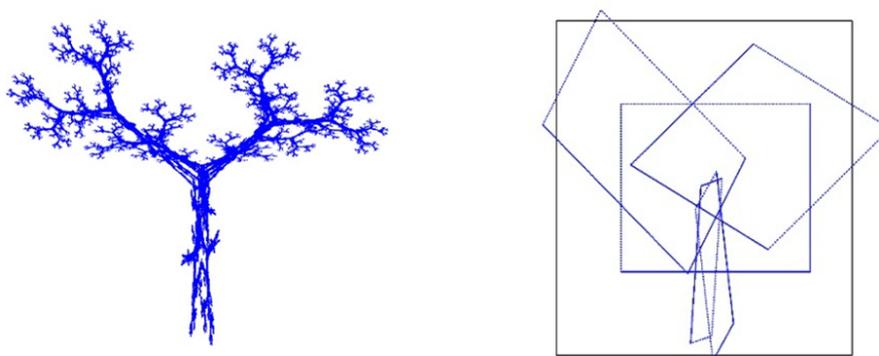


Figura 3.54: Compresión de imágenes digitales.

De esta manera, si por ejemplo, deseamos remitir la figura de árbol de la izquierda, bastará con enviar la imagen geométrica de la derecha junto con su función generadora. A este método de tratar digitalmente una imagen, con el objetivo de reducir el tamaño de su archivo, se le conoce con el nombre de proceso de transformación fractal. Fue inventado en 1987 por *Barnsley* y la cuestión clave está en saber si a una imagen cualquiera se le puede aplicar dicha técnica. La respuesta es afirmativa y se conoce con el nombre de teorema del collage, a partir de una imagen es posible encontrar la fórmula que la genera.

Medicina. Es en este campo donde se han logrado grandes progresos con el uso de la geometría fractal. El número de aplicaciones es inmenso como puede comprobarse si se realiza una búsqueda en la base de datos más prestigiosa de publicaciones médicas PubMed.

Sin querer ser exhaustivo se han aplicado los fractales en los siguientes campos de la medicina:

- La distribución del flujo sanguíneo pulmonar.
- La estructura alveolar de los pulmones.
- Las superficies de las proteínas.
- Los patrones de formas en las mamografías.
- Al estudio del cáncer de mamas y al de próstata.
- Al análisis de fracturas de huesos.
- La regeneración de tejidos.
- Al estudio de enfermedades degenerativas del cerebro.

Comentaremos de una manera más detallada algunas de estas aplicaciones. En 2003 un grupo de científicos del *Harvard Medical School* y el *Massachusetts Institute of Technology* presentaron un método para obtener un órgano vivo de un paciente a partir de sus mismas células, y de esta manera minimizar el problema del rechazo. El objetivo del trabajo reside en construir un esqueleto, semejante al sistema arterial, que permite a los nutrientes llegar a todas las partes del tejido. El esqueleto se obtuvo a partir de patrones de crecimiento fractal y se introdujeron en unos chips de silicio. Los resultados fueron esperanzadores puesto que fue posible mantener células de hígado vivas durante dos semanas, debido a que había sido posible construir una estructura irregular muy resistente a las roturas.

Durante los últimos años un grupo de investigación interdisciplinar, liderado por el profesor *Francisco J. Esteban* del Departamento de Biología Experimental de la Universidad de Jaén, ha trabajado intensamente en la aplicación de la dimensión fractal de imágenes de Resonancia Magnética para la detección precoz de algunas

enfermedades neurodegenerativas. El proyecto tiene el nombre de *Fractalmed* y se ha centrado, en un primer momento, en la Esclerosis Múltiple.

La Esclerosis Múltiple es una enfermedad autoinmune, inflamatoria y neurodegenerativa que afecta principalmente a la Sustancia Blanca del Sistema Nervioso Central (cerebro y médula espinal). Es, después de la epilepsia, la enfermedad neurológica más frecuente entre los jóvenes, afectando aproximadamente a 1 de cada 1000 personas, en particular a las mujeres.

Se desconocen las causas que la producen aunque se cree que hay diversos mecanismos autoinmunes involucrados. La manera de actuación es la siguiente. El organismo lanza un ataque defensivo contra sus propios tejidos, y se origina una inflamación en áreas de la Sustancia Blanca del Sistema Nervioso Central, en regiones que se distribuyen aleatoriamente. A continuación se produce la destrucción de la mielina, que es una lámina envolvente de las fibras nerviosas que facilita la transmisión de los mensajes entre cerebro, la médula espinal y el resto del cuerpo. Desgraciadamente, cuando hay daño de la mielina, la transmisión neurológica de los mensajes ocurre más lentamente o queda bloqueada, lo que lleva a una movilidad reducida e invalidez, en los casos más severos, de la persona.

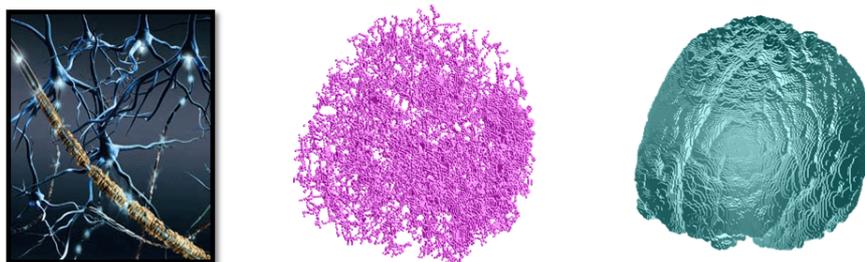


Figura 3.55: Fractales y Esclerosis Múltiple.

El gran problema para su tratamiento es que sólo puede ser diagnosticada con fiabilidad mediante una autopsia post-mortem o una biopsia, aunque existen criterios no invasivos para diagnosticarla con aceptable certeza. Sin embargo, su detección precoz es muy importante puesto que se puede empezar el tratamiento más rápidamente, con el consiguiente aumento de la calidad de vida, y retraso en la aparición de nuevos brotes. No hay ningún síntoma típico de la Esclerosis Múltiple que ayude en el diagnóstico inicial. Es frecuente que el primer brote pase desapercibido sin que la persona consulte con su médico.

Hasta ahora se había descrito un único método capaz de detectar cambios en la sustancia blanca aparentemente normal, la tasa de transferencia de magnetización, el cual, además de ser costoso y difícil de realizar en la gran mayoría de los centros hospitalarios, presenta resultados contradictorios en cuanto a su sensibilidad.

Se ha demostrado que, aunque están teniendo lugar procesos que contribuyen al desarrollo de la enfermedad a nivel de la sustancia blanca cerebral, dicha sustancia

blanca se observa en las imágenes de Resonancia Magnética Nuclear como aparentemente normal. En la mayoría de los casos el diagnóstico de la degeneración de la sustancia blanca depende de la experiencia del médico en la observación de las imágenes, debido a la carencia de medidas objetivas. Pero muchas de las alteraciones son muy sutiles y difíciles de apreciar. Los miembros del proyecto Fractalmed han demostrado que la aplicación de la dimensión fractal a imágenes de resonancia magnética del cerebro de enfermos de Esclerosis Múltiple es una herramienta muy útil en el diagnóstico precoz de esta enfermedad degenerativa. Los pacientes en un estado inicial de desarrollo, sin lesiones aparentes, mostraron un valor menor de la dimensión fractal a nivel de sustancia blanca cuando se compararon con los controles sanos.

La caracterización y cuantificación de la morfología del cerebro mediante el análisis de la dimensión fractal es un área de creciente interés desde hace unos años. La gran mayoría de los trabajos se centran en el análisis de la dimensión fractal de imágenes a nivel de dos dimensiones. Son muy pocas y puntuales las iniciativas de extender los resultados para estructuras en tres dimensiones.

Recientemente el grupo de investigación ha ampliado el rango de aplicaciones del método, siendo pioneros en la construcción de un programa informático para el cálculo de la dimensión fractal en tres dimensiones y su aplicación otras enfermedades neurodegenerativas con resultados muy positivos. A nivel tridimensional se ha demostrado que existe un aumento significativo del valor de dimensión fractal de la materia gris del cerebro aparentemente normal en enfermos de Esclerosis Múltiple que sufren los primeros ataques de la enfermedad.



Tema 4

MODELOS DISCRETOS MATRICIALES

4.1. Introducción

La dinámica de una población viene determinada por el número de nuevos nacimientos y la probabilidad de morir que tienen los individuos que componen la población. Por ello, es muy importante saber la estructura de edades de la población que estamos estudiando. Es decir, cómo se reparten los individuos en las diferentes clases de edad y lo que es más importante, conocer las probabilidades asociadas de supervivencia, mortalidad y fecundidad. Generalmente esta información se refleja en una tabla de vida, en la mayoría de los casos correspondiente a las hembras de la población, ya que son las que contribuyen a la dinámica de la población en términos de fecundidad.

El presente tema es una introducción al estudio de los modelos estructurados basados en el álgebra matricial. Se inicia con un modelo probabilístico clásico como son las cadenas de *Markov* y se centra fundamentalmente en el estudio de uno de los modelos más conocidos como es el modelo de *Leslie*.

4.2. Cadenas de Markov

Los dos resultados que podemos obtener al realizar el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire los designaremos por $E_1 = \text{salir cara}$ y $E_2 = \text{salir cruz}$. Si repetimos t veces este experimento la probabilidad de que en uno de ellos obtengamos E_1 no depende de lo que haya salido en el experimento anterior; ambos sucesos son independientes. Sin embargo, existen muchos otros fenómenos representados por variables aleatorias dependientes. En 1907 *Markov* estudió estas situaciones en las

cuales la probabilidad de que ocurra un suceso depende del suceso inmediatamente anterior, y son estas las que estudiaremos en esta sección.

Supongamos una secuencia de n pruebas o experimentos donde cada uno de ellos tiene un conjunto de resultados posibles (que consideraremos finito) y que designaremos por las letras $E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$, mutuamente exclusivos. Si al realizar una prueba se obtiene el resultado E_i , entonces diremos que el sistema o el fenómeno se encuentra en el estado E_i . Utilizaremos E_i^t para representar al estado E_i al cabo de t pruebas. En consecuencia, $P[E_i^t]$ será la probabilidad de que después de t experiencias el sistema se encuentre en el estado E_i . Por otro lado, llamaremos P_{ij}^t a la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado E_i en la prueba t condicionada a que en la prueba anterior $t - 1$ se encontrara en el estado E_j . Es decir,

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}]$$

DEFINICIÓN 4.2.1 Una sucesión de estados $E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$, mutuamente exclusivos constituyen una cadena de Markov cuando

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}] = P[E_i^t/E_j^{t-1} \cdot E_{j_{t-2}}^{t-2} \cdot E_{j_{t-3}}^{t-3} \cdot \dots \cdot E_{j_1}^1 \cdot E_{j_0}^0], \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Es decir, la probabilidad de que el objeto en el experimento t esté situado en el estado E_i sólo depende del estado E_j del experimento anterior $t - 1$ y es independiente de los otros experimentos anteriores. En cierto modo, es como si el sistema no tuviese “memoria”.

Es evidente que la probabilidad P_{ij}^t depende de tres variables: los sucesos E_i, E_j y el “tiempo” t . En general,

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}] \neq P_{ij}^{t'}.$$

DEFINICIÓN 4.2.2 En el caso particular en el que la probabilidad P_{ij}^t sea independiente de la prueba t , diremos que la cadena de Markov es **homogénea** o **estacionaria**, en cuyo caso escribiremos $P_{ij}^t = P_{ij}$.

Desde ahora y a lo largo del curso siempre consideraremos cadenas homogéneas.

Al ser P_{ij} una probabilidad se cumplirá:

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m P_{ij} = 1, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (4.1)$$

4.2.1. Matrices estocásticas

Si p_j^t , $j = 1, 2, \dots, m$ es la probabilidad de que el objeto esté situado en el experimento $t = 1, 2, \dots, n$, en el estado E_j , entonces

$$p_j^t = p_1^{t-1}P_{j1} + p_2^{t-1}P_{j2} + \dots + p_m^{t-1}P_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.2)$$

Con los números p_j^t formamos un vector columna $\vec{X}(t)$, y con los P_{jk} una matriz cuadrada A . Ahora, las identidades (4.2) podemos expresarlas

$$\vec{X}(t) = A \vec{X}(t-1), \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

La cadena de *Markov* homogénea está representada por el sistema de ecuaciones lineales en diferencias anteriores. Observemos que por las condiciones (4.1) la matriz A cumplirá:

- La suma de los elementos de cada una de sus columnas vale la unidad. Sin embargo, no ocurre lo mismo con la suma de los elementos de sus filas
- Todos sus elementos P_{jk} son mayores o iguales que cero y menores o iguales que uno.

A una matriz de transición de este tipo se la conoce con el nombre de **matriz estocástica**. Aquellas matrices estocásticas donde la suma de los elementos de cada fila sea la unidad reciben el nombre de doblemente estocásticas.

4.2.2. Diagramas de estados

Podemos representar las diferentes relaciones entre los estados de una cadena por medio de un diagrama formado por nodos y flechas orientadas con las probabilidades de transición. A esta representación se la conoce con el nombre de diagrama de transición o de estados.

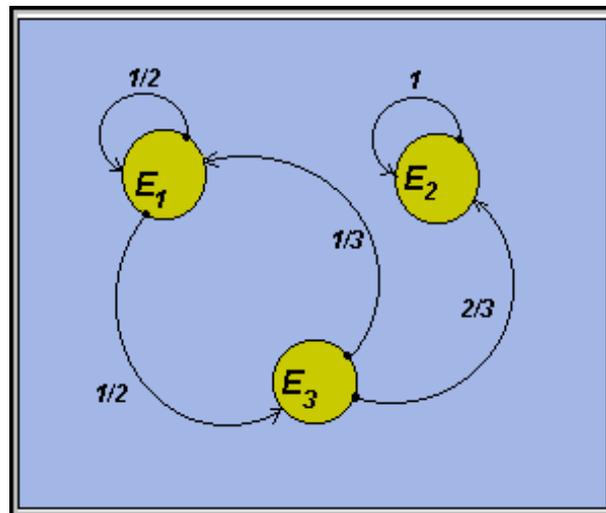


Figura 4.1. Diagrama de estados.

En la Figura 4.1 se ha dibujado el diagrama correspondiente a la matriz estocástica:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4.1

Para beber agua un animal puede ir a un lago o a un río. Se sabe que no va al lago dos días seguidos y que si toma agua en el río la probabilidad de que el día siguiente beba agua en cada uno de los sitios es la misma.

- Estamos ante una cadena de *Markov* homogénea con dos estados, E_1 que representa al hecho de que el animal beba agua en el lago y E_2 que beba agua en el río.
- La matriz de transición es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- Observemos que se trata de una cadena particular, ya que el paso de un estado al siguiente no depende de los anteriores, sino del primero de ellos.

EJEMPLO 4.2

Una tienda de animales que vende peces incluye una garantía por la que cualquier pez que muera antes de cumplir tres meses se reemplaza de forma gratuita. Una vez que el pez se ha reemplazado ya no queda cubierto por la garantía. Se sabe que:

- 1.- El 3% de los peces mueren durante su primer mes.
 - 2.- El 5% de los peces que han cumplido un mes mueren durante el segundo.
 - 3.- El 7% de los peces que han cumplido dos meses mueren durante el tercer mes.
- Podemos representar la situación anterior por medio de una cadena de *Markov* siendo los estados, $E_i :=$ pez en el mes $i = 1, 2, 3$ de garantía, $E_4 :=$ pez sin garantía por haber sido repuesto, y $E_5 :=$ pez sin garantía por tener más de 3 meses.
 - El diagrama de estados que representa a esta cadena aparece en la Figura 4.2.

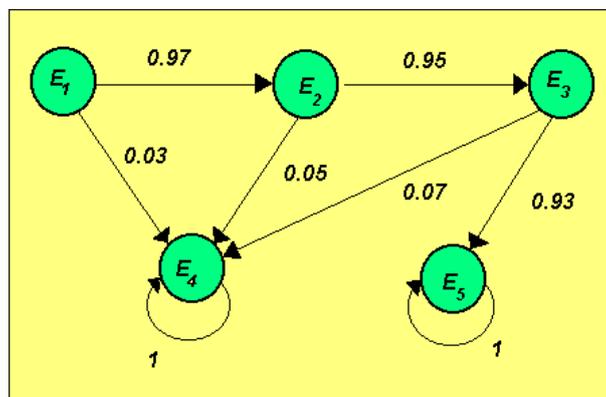


Figura 4.2. Diagrama de estados.

4.2.3. Cadenas de Markov regulares

Recordemos que estamos considerando un número finito de experimentos, no obstante podemos realizar un desarrollo similar considerando

$$\vec{X}(t) = A \vec{X}(t-1), \quad t = 1, 2, 3, \dots,$$

ya que uno de los objetivos que perseguimos al modelar una determinada situación real es el de poder conocer su comportamiento a largo plazo. Puesto que la matriz de transición A nos resuelve el problema de encontrar la ley de probabilidad, el límite de esta ley cuando el tiempo tiende a infinito, nos proporciona un método para estudiar el comportamiento a largo plazo de la cadena de *Markov*.

TEOREMA 4.2.3 *Si A^n representa a la potencia n -ésima de la matriz de transición A , entonces $P[E_i^n/E_j^0] = A^n(i, j)$.*

Demostración. Vamos a utilizar el método de inducción sobre la potencia n de la matriz de transición. Sean i, j dos valores cualesquiera de $\{1, 2, \dots, m\}$, por definición de los elementos de la matriz A tenemos

$$P[E_i^1/E_j^0] = P_{ij} = A(i, j).$$

Supongamos ahora que el teorema sea cierto para el paso $n-1$, es decir

$$P[E_i^{n-1}/E_j^0] = A^{n-1}(i, j). \quad (4.4)$$

Haciendo uso de la ley de la probabilidad total,

$$P[E_i^n/E_j^0] = \sum_{k=1}^m P[E_i^{n-1}/E_k^0] P[E_i^n/E_k^{n-1}.E_j^0],$$

Por la hipótesis (4.4) de inducción $P[E_i^{n-1}/E_k^0] = A^{n-1}(i, k)$, y por la definición de cadena de *Markov* $P[E_i^n/E_k^{n-1}.E_j^0] = P[E_i^n/E_k^{n-1}] = P_{ik} = A(i, k)$. Es decir,

$$P[E_i^n/E_j^0] = \sum_{k=1}^m A(i, k) A^{n-1}(k, j),$$

que corresponde al elemento de la fila i columna j del producto de las matrices $AA^{n-1} = A^n$.

DEFINICIÓN 4.2.4 *Una cadena de Markov es **regular** si existe un número natural n tal que la potencia n -ésima de su matriz de transición A tiene todos sus elementos positivos.*

Observemos que si la cadena es regular, entonces las matrices A^m con $m > n$ también tendrán todos sus elementos positivos.

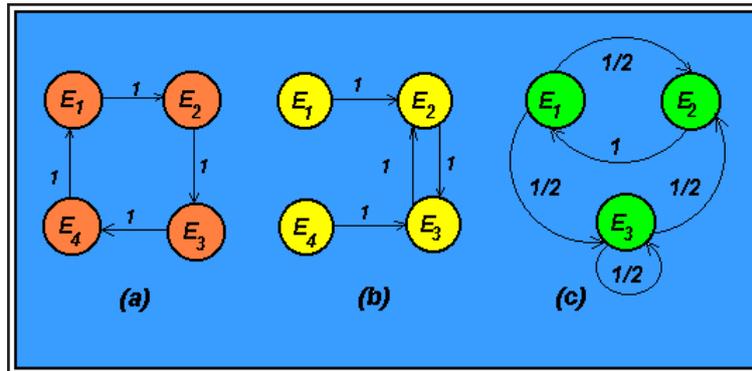


Figura 4.3. Ejemplos de cadenas de *Markov*.

Una manera alternativa de probar que una cadena es regular es:

- Viendo si todos los estados son accesibles.
- Comprobando que existan dos ciclos al menos uno de ellos impar.

Las cadenas (a) y (b) de la Figura 4.3 no son regulares, ya que en el primer caso sólo contiene un ciclo, y en el segundo el estado E_4 no es accesible. Sin embargo, la cadena (c) si es regular pues todos los estados son accesibles y además existen los ciclos $E_2E_1E_3E_2$ (impar) y $E_1E_2E_1$ (par). En este último caso (c), la potencia n -ésima de su matriz de transición es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

4.2.4. Propiedades de las matrices estocásticas

Las matrices estocásticas por la forma particular en el que han sido definidas cumplen cierto número de propiedades interesantes, de entre las cuales destacaremos por el uso que haremos de ellas, las siguientes.

TEOREMA 4.2.5 *Si A es una matriz de orden n estocástica, entonces tiene al uno como valor propio.*

Su demostración está basada en probar que el determinante $|A - I|$ es nulo. Para facilitar la notación consideraremos $n = 4$,

$$|A - I| = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

sumamos a la primera de las filas el resto de ellas

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^4 a_{j1} - 1 & \sum_{j=1}^4 a_{j2} - 1 & \sum_{j=1}^4 a_{j3} - 1 & \sum_{j=1}^4 a_{j4} - 1 \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Pero al ser A una matriz estocástica

$$\sum_{j=1}^4 a_{j1} = \sum_{j=1}^4 a_{j2} = \sum_{j=1}^4 a_{j3} = \sum_{j=1}^4 a_{j4} = 1,$$

y por tanto, todos los elementos de la primera fila del determinante anterior son ceros, lo cual implica que este determinante es nulo, tal y como deseábamos probar.

TEOREMA 4.2.6 *Si A es una matriz estocástica de orden n con todos sus elementos positivos (regular), entonces la sucesión de matrices A^n , $n = 1, 2, \dots$ converge hacia una matriz que tiene todas sus columnas iguales que coinciden con $\vec{\Pi}$ tal que:*

- $\sum_{j=1}^m \Pi(\vec{j}) = 1.$
- *La distribución $\vec{\Pi}$ es el autovector asociado al autovalor 1 de la matriz estocástica A . Esto es, $A\vec{\Pi} = \vec{\Pi}$.*

La demostración de esta propiedad queda fuera del alcance del objetivo del curso pero puede consultarse en la página 264 del libro “*Modelos matemáticos y procesos dinámicos*” de *Santiago Pérez-Cacho y otros*.

Como aplicación inmediata del Teorema 4.2.6 anterior, observemos que en el Ejemplo 4.1 la matriz de transición A de la cadena de *Markov* regular tiene como valor propio $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -0.5$ y autovectores $\vec{U}_1 = (1, 2)$, $\vec{U}_2 = (-1, 1)$. En consecuencia, $\vec{\Pi} = (1/3, 2/3)$ y por tanto

$$A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

EJEMPLO 4.3

Sea la matriz de transición correspondiente a seis estados

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que en el momento inicial el sistema se encuentra en el estado E_4 .

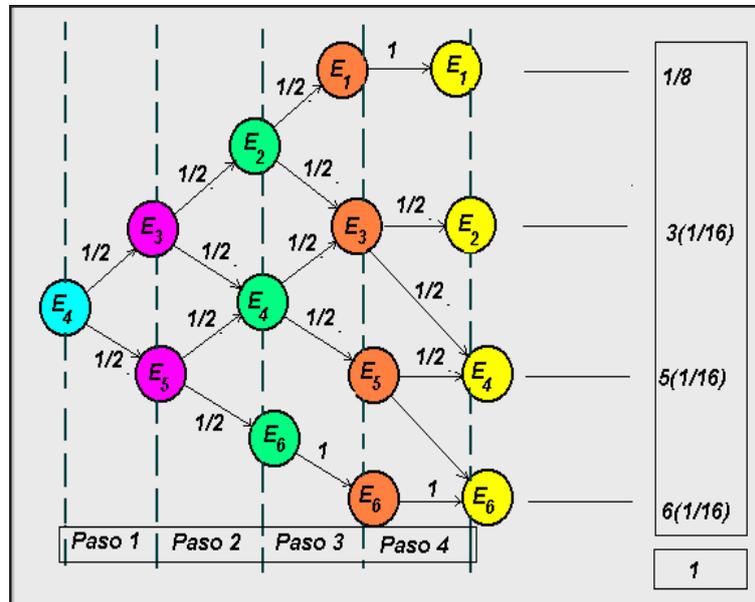


Figura 4.4.

- Veamos como podemos pasar del estado inicial E_4 al resto de los estados. Sabemos que

$$\vec{X}(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T.$$

Como puede apreciarse en la Figura 4.4, al cabo de un paso la probabilidad será,

$$\vec{X}(1) = (0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0)^T,$$

o bien $\vec{X}(1) = A \vec{X}(0)$. Del mismo gráfico deducimos que,

$$\vec{X}(2) = (0, 1/4, 0, 1/2, 0, 1/4)^T$$

$$\vec{X}(3) = (1/8, 0, 3/8, 0, 1/4, 1/4)^T$$

$$\vec{X}(4) = (1/8, 3/16, 0, 5/16, 0, 3/8).$$

O de forma matricial:

$$\vec{X}(2) = A \vec{X}(1), \quad \vec{X}(3) = A \vec{X}(2), \quad \vec{X}(4) = A \vec{X}(3).$$

- Con el programa Mathematica® podemos encontrar A^{200} ,

```
A := {{1., 1/2, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0.5, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0},
{0, 0, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1/2, 1}}
MatrixPower[A, 200]
```

```
{{1., 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.}, {0., 1.07909*10-19, 0., 1.746 *10-19, 0., 0.}, {0., 0.,
2.82509*10-19, 0., 1.746* 10-19, 0.}, {0., 1.746*10-19, 0., 2.82509*10-19, 0., 0.}, {0.,
0., 1.746*10-19, 0., 1.07909*10-19, 0.}, {0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.}}
```

- Del apartado anterior deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n X \vec{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Es decir, a largo plazo existe un 40% de posibilidades de que partiendo del estado E_4 la cadena se encuentre en el estado E_1 y un 60% de que esté en el E_6 .

EJEMPLO 4.4

Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la Figura 4.5. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Sabiendo que semana tras semana todos los ratones cambian de ubicación y que los ratones cuando salen eligen un compartimento al azar, veamos cuál será su distribución de los ratones al cabo de “infinitas” semanas.

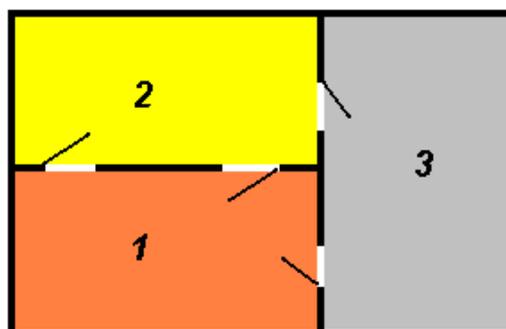
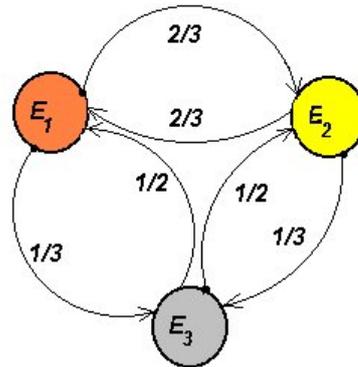


Figura 4.5.

- Observemos que estamos ante una cadena de *Markov* cuyo diagrama de estados es el siguiente:



A partir del diagrama es inmediato obtener la matriz de transición

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $X_i(t)$ representa al número de ratones en el compartimento $i = 1, 2, 3$ en la semana t y $\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$ es la distribución inicial, deducimos del enunciado que

$$\begin{cases} X_1(1) = & \frac{2}{3}X_2(0) + \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_2(1) = \frac{2}{3}X_1(0) + & \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_3(1) = \frac{1}{3}X_1(0) + \frac{1}{3}X_2(0) & . \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales que podemos expresarlo matricialmente

$$\begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\vec{X}(1) = A\vec{X}(0).$$

Razonando de la misma manera

$$\vec{X}(2) = A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0).$$

En general

$$\vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0), \quad t = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, para obtener el número de ratones en cada uno de los compartimentos en la semana t , tendremos que encontrar el valor de la matriz potencia A^t . Una aproximación de este valor podemos obtenerla con el **Mathematica**[®]

```
A := {{0, 2/3, 0.5}, {2/3, 0, 0.5}, {1/3, 1/3, 0}}
MatrixPower[A, 100]
```

```
{{0.375, 0.375, 0.375}, {0.375, 0.375, 0.375}, {0.250, 0.250, 0.250}}.
```

- Ahora, estamos interesados en deducir este valor de una manera diferente. Observemos que si la matriz A fuese diagonal, entonces A^t sería muy fácil de encontrar, bastaría elevar a t los elementos de la diagonal. Por esta razón, en primer lugar procederemos a diagonalizar la matriz simétrica A .

Los valores propios de la matriz A son los siguientes:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

desarrollando obtenemos la ecuación característica

$$9\lambda^3 - 7\lambda - 2 = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2/3$, $\lambda_3 = -1/3$. Por tanto, la matriz A es diagonalizable siendo los subespacios propios asociados a estos valor propio

$$S_1 = \langle (3, 3, 2) \rangle, \quad S_2 = \langle (-1, 1, 0) \rangle, \quad S_3 = \langle (-1, -1, 2) \rangle.$$

En consecuencia, la matriz de paso C es,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar A^t , actuamos de la manera siguiente

$$D = C^{-1}AC \Rightarrow A = CDC^{-1} \Rightarrow A^t = CD^tC^{-1},$$

que en nuestro caso

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Simplificando

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \left(3 + 4 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{1}{8} \left(3 - 4 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{3}{8} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) \\ \frac{1}{8} \left(3 - 4 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{1}{8} \left(3 + 4 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{3}{8} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) \\ \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{1}{4} \left(1 + 3 \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) \end{pmatrix}.$$

Finalmente hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces

$$A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia después de infinitas semanas la distribución de los ratones tiende hacia

$$\left. \begin{aligned} \text{Primero} &= \frac{3}{8}X_1(0) + \frac{3}{8}X_2(0) + \frac{3}{8}X_3(0) = \frac{3}{8}(X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) = \frac{3}{8}\text{Total} \\ \text{Segundo} &= \frac{3}{8}X_1(0) + \frac{3}{8}X_2(0) + \frac{3}{8}X_3(0) = \frac{3}{8}(X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) = \frac{3}{8}\text{Total} \\ \text{Tercero} &= \frac{1}{4}X_1(0) + \frac{1}{4}X_2(0) + \frac{1}{4}X_3(0) = \frac{1}{4}(X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) = \frac{1}{4}\text{Total} \end{aligned} \right\}$$

- Un camino alternativo para llegar a la conclusión anterior es utilizar el Teorema 4.2.6.

En efecto, la cadena de *Markov* es regular ya que todos los estados son accesibles y existen dos ciclos $E_1E_2E_3E_1$ y $E_1E_2E_1$ al menos uno de ellos impar (además A^2 tiene todos sus elementos positivos). Sabemos que el vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ es $(3, 3, 2)$.

$$\vec{\Pi} = (3/8, 3/8, 1/8),$$

y en consecuencia si $t \rightarrow \infty$,

$$A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4.5

Supongamos que al realizar estudios climáticos en una determinada zona de nuestra provincia obtenemos los siguientes datos. Si un día es caluroso, entonces la probabilidad de que el día siguiente sea también caluroso es 0.65, y 0.35 la probabilidad de que haga frío. Por otro lado, si un día es frío, entonces 0.7 es la probabilidad de que el día siguiente siga siendo frío y 0.3 de que sea un día caluroso.



Figura 4.6. Diagrama en árbol.

- Si hoy hace frío, vamos a calcular la probabilidad de que pasado mañana haga frío. Para encontrar la solución podemos utilizar el diagrama de la Figura 4.6. En él observamos que la probabilidad pedida es:

$$0.7 * 0.7 + 0.3 * 0.35 = 0.595 .$$

Es decir, existe casi un 60% de posibilidades de que si hoy hace frío pasado mañana también lo siga haciendo. De forma similar, la probabilidad de que si hoy hace frío pasado mañana sea un día caluroso es

$$0.7 * 0.3 + 0.3 * 0.65 = 0.445$$

- El ejemplo también puede resolverse utilizando las cadenas de *Markov*. Existen dos estados E_1 que representa al día frío y E_2 al día caluroso, siendo la matriz estocástica

$$A = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.35 \\ 0.30 & 0.65 \end{pmatrix}.$$

Si hoy hace frío podemos representar esta situación por el vector $\vec{X}(0) = (1, 0)^T$. El producto $\vec{X}(1) = A\vec{X}(0)$ nos dará las probabilidades del próximo día, y $\vec{X}(2) = A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0)$ las de pasado mañana

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.35 \\ 0.30 & 0.65 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 * 0.7 + 0.35 * 0.3 \\ 0.3 * 0.7 + 0.65 * 0.3 \end{pmatrix}$$

- Puede probarse fácilmente que La cadena de *Markov* es regular. Por tanto, para realizar un estudio a largo plazo de los diferentes escenarios que pueden presentarse debemos encontrar el valor de la matriz potencia A^n . Si utilizamos el programa **Mathematica**[®]

```

A :=  $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.35 \\ 0.3 & 0.65 \end{pmatrix}$ 

MatrixForm[MatrixPower[A, 100]]

 $\begin{pmatrix} 0.538462 & 0.538462 \\ 0.461538 & 0.461538 \end{pmatrix}$ 

Eigenvalues[A]

{1., 0.35}

Eigenvectors[A]

{{0.759257, 0.650791}, {-0.707107, 0.707107}}

0.759257 / (0.759257 + 0.650791)

0.538462

0.650791 / (0.759257 + 0.650791)

0.461538

```

Conclusión: independientemente de como sea el día de hoy, a largo plazo existe un 53.84 % de posibilidades de que el día sea frío y un 46.16 % de que sea caluroso.

- Si hoy es un día caluroso, ¿cuál es la probabilidad de que dentro de tres días sea un día frío?.

EJEMPLO 4.6

Representemos por $X_1(0)$ e $X_2(0)$ a las poblaciones iniciales de conejos y zorros respectivamente. Se sabe que el número de conejos en cualquier mes es la mitad de la población de conejos del mes anterior y que el número de zorros en dicho mes es la suma de las poblaciones de zorros mas la mitad de la de conejos en el mes anterior. Vamos a calcular las poblaciones de zorros y conejos al cabo de “mucho” tiempo para estudiar la evolución de las poblaciones a largo plazo.

- Sean $X_1(t)$ e $X_2(t)$ las poblaciones de conejos y zorros al cabo de t meses. Del enunciado del ejercicio se deduce

$$\begin{cases} X_1(t+1) = 0.5X_1(t) \\ X_2(t+1) = 0.5X_1(t) + X_2(t) \end{cases}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

O bien en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} X_1(t+1) \\ X_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Si llamamos

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

entonces

$$\begin{aligned} \vec{X}(1) &= A\vec{X}(0) \\ \vec{X}(2) &= A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0) \\ &\vdots \\ \vec{X}(t) &= A\vec{X}(t-1) = A^t\vec{X}(0). \end{aligned}$$

Para completar el resto del ejercicio utilizamos el ordenador.

```
A := {{0.5, 0}, {0.5, 1}}
Eigenvalues[A]
```

```
{0.5, 1}
```

```
P := Transpose[Eigenvectors[[A]]
Q := P.DiagonalMatrix[(0.5)^k, 1].Inverse[P]
MatrixForm[Limit[Q, k -> Infinity]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como sabemos, inicialmente $X_1(0)$ es la cantidad de conejos e $X_2(0)$ el número de zorros, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_1(0) + X_2(0) \end{pmatrix}.$$

Conclusión: A largo plazo desaparecerán los conejos y la cantidad de zorros será la suma inicial de zorros y conejos.

EJEMPLO 4.7

Supongamos que en una comunidad autónoma la población está dividida en cuatro clases, E_1, E_2, E_3 y E_4 , ordenadas de mayor a menor de acuerdo con la riqueza. Una persona que pertenece a una clase en un momento dado puede ascender, mantenerse o descender en el siguiente con probabilidades dadas por la tabla:

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	0.7	0.2	0.1	0
E_2	0.2	0.4	0.1	0.3
E_3	0.1	0.3	0.4	0.2
E_4	0	0.1	0.4	0.5

siendo el elemento P_{ij} la probabilidad de que un individuo que en un momento dado pertenece a la clase j en el siguiente período pertenezca a la clase i .

- Si en el año 2000 el 17% de la población pertenece a la clase E_1 , el 24% a la E_2 , el 30% a la E_3 y el 29% a la E_4 , podemos calcular la la distribución en el año 2001.

Sea A a la matriz de transición de esta cadena de *Markov* y el vector \vec{X}_k la situación correspondiente al año k , entonces

$$\vec{X}_{k+1} = A\vec{X}_k$$

$$\vec{X}_{2001} = A\vec{X}_{2000} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.24 \\ 0.30 \\ 0.29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.247 \\ 0.267 \\ 0.289 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo,

$$\vec{X}_{2002} = A\vec{X}_{2001} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.247 \\ 0.267 \\ 0.289 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.214 \\ 0.251 \\ 0.258 \\ 0.276 \end{pmatrix}$$

- Por otro lado, la distribución en 1999 puede calcularse de la siguiente manera,

$$\vec{X}_{2000} = A\vec{X}_{1999} \Rightarrow \vec{X}_{1999} = A^{-1}\vec{X}_{2000}$$

EJEMPLO 4.8

Los trabajadores de un parque natural se clasifican en 3 categorías profesionales: científicos X_1 , personal auxiliar X_2 y colaboradores X_3 . En cada generación t representaremos a la fuerza de trabajo del parque por el número de personas incluidas en las tres categorías anteriores, es decir $(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$. Supongamos que

- 1.- Cada trabajador activo sólo tiene un hijo que sigue trabajando en el parque.
 - 2.- La mitad de los hijos de los científicos lo son también, la cuarta parte pasa a ser personal auxiliar especializado y el resto es personal colaborador no especializado.
 - 3.- Los hijos del personal auxiliar se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes 30 %, 40 %, 30 %
 - 4.- Para los hijos de los colaboradores las proporciones de reparto entre las categorías son 50 %, 25 % y 25 %.
- Empezaremos el ejemplo planteando en forma matricial un modelo que represente la distribución de la fuerza de trabajo del parque de generación en generación. Para ello, sea $\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$ el vector de distribución inicial y

$$\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))^T$$

el vector de distribución correspondiente a la generación de orden t . Del enunciado se deduce,

$$\begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.3 & 0.50 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(1) = A\vec{X}(0), \dots, \vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0).$$

Estamos ante una cadena de *Markov* donde el estado E_1 representa a los científicos, E_2 al personal auxiliar, E_3 al personal colaborador y la matriz de transición es A . Es fácil ver que esta cadena es regular siendo el diagrama de estados el que aparece dibujado en la Figura 4.7.

Para estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo podemos calcular la matriz potencia A^t cuando $t \rightarrow \infty$. Un valor aproximado será

$$A := \{\{0.5, 0.3, 0.5\}, \{0.25, 0.4, 0.25\}, \{0.25, 0.3, 0.25\}\};$$

MatrixPower[A, 500]

$$\{\{0.44176, 0.44176, 0.44176\}, \{0.294118, 0.294118, 0.294118\}, \{0.264706, 0.264706, 0.264706\}\}$$

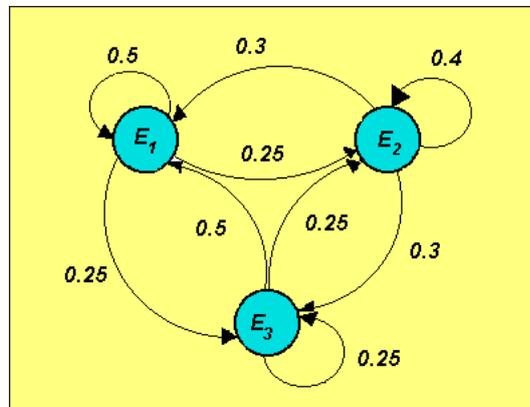


Figura 4.7. Diagrama de estados.

- Puesto que la cadena es regular, podemos utilizar el Teorema 4.2.6, para lo cual necesitamos conocer los valores y vectores propios de la matriz A .

Eigenvalues[A]

{1., 0.15, $-1.68812 \cdot 10^{-17}$ }

Eigenvectors[A]

{{0.744438, 0.496292, 0.446663}, {0.784465, 0.496292, 0.446663},
{ -0.707107 , $-3.18473 \cdot 10^{-16}$, 0.707107}}

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1

$$(0.744438, 0.496292, 0.446663)^T,$$

una vez normalizado $(0.44, 0.29, 0.27)^T$.

Conclusión: La distribución de los trabajadores a largo plazo independientemente de la distribución inicial es

- el 44 % serán científicos,
- el 29 % serán personal auxiliar,
- el 27 % serán personal colaborador.

EJEMPLO 4.9

Supongamos que disponemos de una casa, un granero, un gato y un ratón. Los animales pueden estar los dos en la casa, los dos en el granero o uno en el granero y otro en la casa. Realizamos de forma sucesiva la siguiente experiencia:

Lanzamos dos monedas al aire, si salen dos caras cambiamos al ratón del lugar donde se encuentre. Si salen una cara y una cruz, es el gato el que se cambia. Por último, si salen dos cruces, entonces cambiamos al gato y al ratón del sitio donde se encuentran.

- Si tenemos en cuenta las diferentes opciones para la casa, inmediatamente quedará también determinada las opciones para el granero. Los diferentes estados son:
 - 1.- E_1 : la casa está vacía.
 - 2.- E_2 : en la casa sólo se encuentra el gato.
 - 3.- E_3 : en la casa sólo está el ratón.
 - 4.- E_4 : los dos animales están en la casa.

Observemos que podemos modelizar la situación anterior por medio de una cadena de *Markov* ya que la probabilidad P_{ij} de pasar del estado E_j al E_i sólo depende del i y del j . Por otro lado, como $1/4$ es la probabilidad de sacar dos caras o dos cruces y $1/2$ la probabilidad de que salga una cara y una cruz, entonces la matriz de transición para esta cadena es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la probabilidad P_{23} de pasar del estado E_3 al E_2 será pasar de la situación de que el ratón está en la casa y el gato en el granero a la nueva situación de que se permuten los dos animales, y esto obliga a que al lanzar las dos monedas salgan dos caras, cuya probabilidad es $1/4$. De manera similar, P_{43} es la probabilidad de pasar del estado E_3 (ratón en la casa) al estado E_4 (los dos animales están en la casa) y por ello es necesario que en una moneda salga una cara y en la otra una cruz, cuya probabilidad es $1/2$.

- Para estudiar la evolución a largo plazo de esta cadena tenemos que ver en primer lugar si es regular. Para ello al calcular

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 3/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

observamos que todos sus elementos son no nulos y en consecuencia la matriz A es regular. Por tanto, podemos utilizar los Teoremas 4.2.5 y 4.2.6.

Eigenvalues[A]

$\{-1/2, -1/2, 0, 1\}$

Eigenvectors[A]

$\{\{0, 0, -1, 1\}, \{-1, 1, 0, 0\}, \{-1, -1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}\}$

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1

$$(1, 1, 1, 1)^T,$$

que una vez normalizado $(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T$.

- Finalmente

$$A^t \longrightarrow \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Si, por ejemplo, inicialmente la casa se encuentra vacía

$$\vec{X}(0) = (1, 0, 0, 0)^T,$$

entonces

$$\vec{X}(t) = A^t \vec{X}(0) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T,$$

y es igual de probable que a largo plazo nos encontremos en cualquiera de los cuatro estados posibles.

EJEMPLO 4.10

- Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la Figura 4.8. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Sabiendo que de los ratones que había en cada compartimento, la mitad va a cada uno de los restantes, veamos como estarán distribuidos los ratones al cabo de “infinitas” semanas.

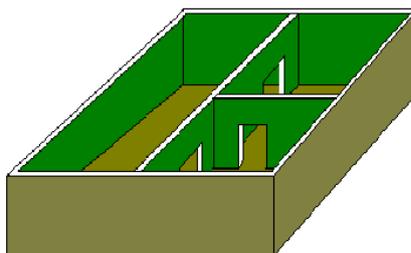


Figura 4.8.

Si $x_i(t)$ representa al número de ratones en el compartimento $i = 1, 2, 3$ en la semana t y $\vec{x}(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T$ es la distribución inicial, deducimos del enunciado que

$$\begin{cases} x_1(1) = & \frac{1}{2}x_2(0) + \frac{1}{2}x_3(0) \\ x_2(1) = \frac{1}{2}x_1(0) + & \frac{1}{2}x_3(0) \\ x_3(1) = \frac{1}{2}x_1(0) + \frac{1}{2}x_2(0) & . \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales que puede ser expresado matricialmente de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\vec{x}(1) = A\vec{x}(0).$$

Razonando de la misma manera

$$\vec{x}(2) = A\vec{x}(1) = A^2\vec{x}(0).$$

En general

$$\vec{x}(t) = A^t\vec{x}(0), \quad t = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, para obtener el número de ratones en cada uno de los compartimentos en la semana t , tendremos que encontrar el valor de la matriz potencia A^t . Una aproximación de este valor podemos obtenerla con el **Mathematica**[®]

```
A := {{0, 0.5, 0.5}, {0.5, 0, 0.5}, {0.5, 0.5, 0}}
MatrixPower[A, 30] = {0.333333, 0.333333, 0.333333}
MatrixPower[A, 50] = {0.333333, 0.333333, 0.333333}
MatrixPower[A, 400] = {0.333333, 0.333333, 0.333333}
```

Ahora, estamos interesados en deducir este valor de una manera diferente. Observemos que si la matriz A fuese diagonal, entonces A^t sería muy fácil de encontrar, bastaría elevar a t los elementos de la diagonal. Por esta razón, en primer lugar procederemos a diagonalizar la matriz simétrica A (recordemos que toda matriz simétrica es diagonalizable).

Los valores propios de la matriz A son los siguientes:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

desarrollando obtenemos la ecuación característica

$$-\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow -4\lambda^3 + 3\lambda + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$. Los vectores propios asociados a estos autovalores son:

$$S_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$S_2 = \langle (-1, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle.$$

La matriz de paso será:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la matriz A^t , actuamos de la manera siguiente

$$D = C^{-1}AC \Rightarrow A = CDC^{-1} \Rightarrow A^t = CD^tC^{-1},$$

que en nuestro caso será

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

simplificando

$$A^t = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 - 2(-\frac{1}{2})^t & -1 + (-\frac{1}{2})^t & -1 + (-\frac{1}{2})^t \\ -1 + (-\frac{1}{2})^t & -1 - 2(-\frac{1}{2})^t & -1 + (-\frac{1}{2})^t \\ -1 + (-\frac{1}{2})^t & -1 + (-\frac{1}{2})^t & -1 - 2(-\frac{1}{2})^t \end{pmatrix}.$$

Si hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces

$$A^t \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

y en consecuencia después de infinitas semanas la distribución de los ratones tiende hacia

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir,

$$x_1(t) = \frac{1}{3}x_1(0) + \frac{1}{3}x_2(0) + \frac{1}{3}x_3(0) = \frac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = \frac{\text{Total}}{3}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{3}x_1(0) + \frac{1}{3}x_2(0) + \frac{1}{3}x_3(0) = \frac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = \frac{\text{Total}}{3}$$

$$x_3(t) = \frac{1}{3}x_1(0) + \frac{1}{3}x_2(0) + \frac{1}{3}x_3(0) = \frac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = \frac{\text{Total}}{3}$$

EJEMPLO 4.11

- Se dispone de dos urnas A y B y de dos bolas, una blanca y otra roja, así como de dos monedas. Las bolas pueden estar las dos en A , las dos en B , o una en A y otra en B . Se realiza sucesivamente el siguiente experimento: se lanzan las dos monedas al aire y si salen dos caras, se cambia la bola roja de urna; si se obtiene una cara y una cruz, es la bola roja la que se cambia. Finalmente, si salen dos cruces se cambian las dos bolas, blanca y roja, de la urna en la que se encuentre cada una a la otra urna. ¿Estamos ante una cadena de *Markov*?, ¿cuál es la matriz de transición?

Evidentemente se trata de una cadena de *Markov* con los siguientes estados:

- E_1 : la urna A se encuentra vacía.
- E_2 : la urna A contiene a la bola blanca.
- E_3 : la urna A contiene a la bola roja.
- E_4 : la urna A contiene a las dos bolas.

Observemos que analizando la situación de la urna A , indirectamente, se estudia la urna B . Al ser las probabilidades de obtener dos caras, una cara y una cruz, y dos cruces $1/4$, $1/2$, y $1/4$ respectivamente, entonces la matriz de transición es:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Estamos ante una cadena de *Markov* regular ya que la matriz A^2 tiene a todos sus elementos no nulos. En consecuencia, la distribución a largo plazo viene dada por el vector propio (normalizado) asociado al valor propio estrictamente dominante $\lambda = 1$, cuyo valor es $(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$.

Conclusión: A largo plazo, existe la misma probabilidad (25%) de que la urna A se encuentre vacía, que contenga a la bola blanca, que contenga a la bola roja, o que contenga a las dos bolas.

4.3. Modelo de Leslie

Recordemos que al construir un modelo matemático lo que se intenta es determinar un conjunto de ecuaciones que representen, lo mejor posible, a una situación real. Cuando la variación de una población se realiza en función del tiempo, se obtiene un proceso (continuo o discreto) que recibe el nombre de dinámica de la población, siendo sus objetivos principales el estudiar los cambios numéricos que sufren las poblaciones, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas. En concreto, en ecología de poblaciones interesa encontrar métodos cuantitativos que permitan conocer la evolución del número de individuos a lo largo del tiempo, con el objetivo de “ajustar” los datos experimentales con los proporcionados por el modelo y además predecir la población futura.

EJEMPLO 4.12

La tabla siguiente recoge la población humana entre los años 1800 y 1995 en miles de millones de personas.

1800	1850	1870	1890	1910	1930	1950	1970	1975	1980	1985	1990	1995
0.91	1.13	1.30	1.49	1.70	2.02	2.51	3.62	3.97	4.41	4.84	5.29	5.75

- A la vista de estos datos, podemos preguntarnos si es posible encontrar una fórmula matemática (un modelo) que los represente “lo mejor posible”, y además, nos proporcione información sobre la evolución de la población del planeta en los próximos años. La respuesta a estas preguntas constituyen el núcleo central del presente curso.
-

Hay un amplio rango de modelos matemáticos todos ellos con un nivel más elevado de dificultad. En este curso estudiaremos los más elementales, no obstante, a pesar de su sencillez proporcionan un amplio número de aplicaciones.

Si representamos por y_t al tamaño de una población en el tiempo t , existen cuatro procesos que afectan al cambio de su tamaño, como son los nacimientos (N), las inmigraciones (I), las muertes (M) y las emigraciones (E). Si suponemos el intervalo de tiempo $[t, t + 1]$, entonces el cambio de la población puede expresarse por medio de la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} = y_t + N + I - M - E$$

Los modelos que estudian el crecimiento de poblaciones independientemente de la densidad de dichas poblaciones corresponden a los casos más simples, siendo las hipótesis más generales que se suelen establecer las siguientes:

- Todos los individuos son iguales.
- Los recursos disponibles son ilimitados.
- El número de hembras coincide con el de machos.

4.3.1. Modelo discreto exponencial

Este modelo suele ser el adecuado para describir el crecimiento de poblaciones de muchas plantas, insectos, mamíferos y otros organismos que se reproducen en cada estación. Supongamos que una población crece a una tasa constante, es decir, la población de la especie después de un período de tiempo (una hora, una semana, un mes, un año, ..., etc.) es un múltiplo constante de la población en el período anterior. Por ejemplo, podemos suponer que cada generación es distinta, cada organismo produce r hijos y después muere, entonces el crecimiento de la población en el intervalo $[t, t + 1]$ se describe por la ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} = ry_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

siendo r la tasa de crecimiento. Si nos fijamos en una población de bacterias, donde en un tiempo dado un organismo se divide en dos, entonces $r = 2$.

Si y_0 es la población inicial de (4.5) deducimos,

$$y_1 = ry_0, \quad y_2 = ry_1(t) = r^2y_0, \quad \dots \quad y_t = r^t y_0.$$

De este modelo $y_t = y_0 r^t$ se vé que la población aumenta indefinidamente si $r > 1$ y disminuye hasta su extinción si $r < 1$. Cuando $r = 1$ la población permanece en un valor constante y_0 .

Observemos que la ecuación anterior también puede representar a una situación diferente, por ejemplo $y_t = y_0 r^t$ es la fórmula utilizada por los bancos cuando depositamos cierta cantidad de dinero durante un tiempo. En este caso, y_0 es la cantidad depositada, r la tasa de interés anual y t el tiempo que hemos dejado el dinero.

EJEMPLO 4.13

Recuperemos el Ejemplo 4.12 relacionado con la población humana entre los años 1800 y 1995.

- En primer lugar, estamos interesados en calcular la tasa de crecimiento r del modelo discreto exponencial. Para ello realizamos los cocientes y_{t+1}/y_t en cada uno de los intervalos de tiempo $[t, t + 1]$. Los datos obtenidos se encuentran en esta tabla:

1.3/0.91=1.24176	1.15044	1.14615	1.14094	1.29412	1.24257
1.44223	1.09669	1.11083	1.09751	1.09298	5.75/5.29=1.08696

Como podemos apreciar la tasa de crecimiento varía de un período de tiempo a otro, por esta razón consideramos como dato representativo en el período [1800, 1995] la media aritmética, cuyo valor es 1.17861. En consecuencia, el modelo discreto exponencial viene dado por $y_t = 0.91 * 1.17861^t$

En la Figura 4.9 podemos apreciar como el modelo se ajusta muy bien a los datos reales en la primera fase, es decir en el período [1800, 1950], sin embargo existe una gran discrepancia en [1950, 1995]. Es necesario, por tanto, mejorar el modelo teniendo en cuenta la densidad de la población, pues es evidente que a medida que la población aumenta, disminuyen los recursos disponibles.

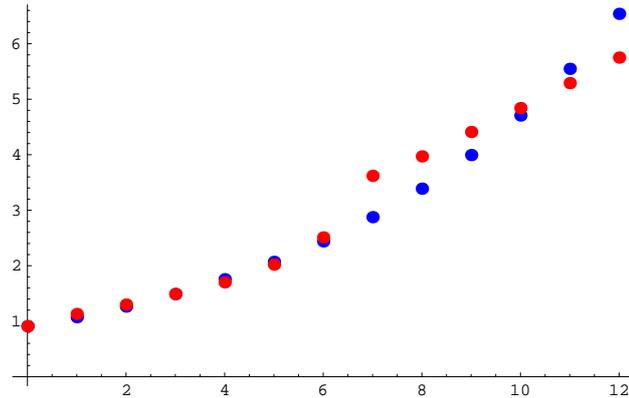


Figura 4.9. Rojo: Datos reales. Azul: $y_t = 0.91 * 1.17861^t$

- Una manera diferente de encontrar el valor de la tasa de crecimiento r es tomar logaritmos neperianos en la expresión $y_t = y_0 r^t$, es decir $\ln y_t = \ln y_0 + t \ln r$ y ajustar el logaritmo neperiano de los datos a una recta a través del método de los mínimos cuadrados. El procedimiento puede facilitarse haciendo uso del ordenador y utilizando un número muy variado de software, de entre los cuales elegiremos, por su sencillez, Statgraphics®

$\ln[y_t]$	-0.0943107	0.122218	0.262364	0.398776	0.530628	0.703098
-	0.920283	1.28647	1.37877	1.48387	1.57691	1.66582

Una vez ejecutado el programa se obtiene

$$\text{Log}[y_t] = \text{log}[y_0] + \text{Log}[r] * t = -0.0771347 + 0.169038 t,$$

o bien,

$$y_0 = e^{-0.0771347} = 0.925765, \quad r = e^{0.169038} = 1.18417,$$

y el modelo exponencial será ahora $y_t = 0.925765 * 1.18417^t$

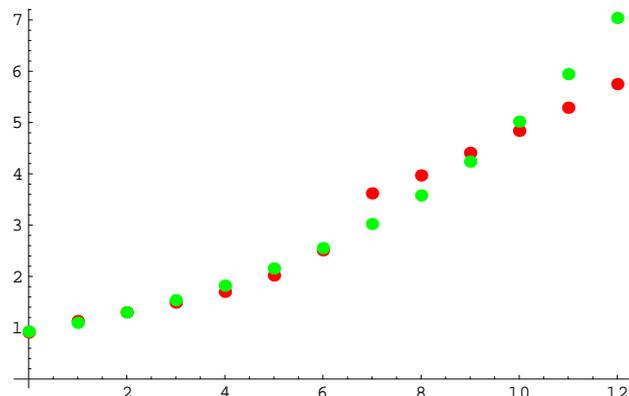


Figura 4.10. Rojo: Datos reales. Verde: $y_t = 0.925765 * 1.18417^t$.

El modelo discreto exponencial es muy simplista, ya que estamos suponiendo que todos los individuos de la población son iguales, pero es evidente que tanto la tasa de natalidad como la de mortalidad dependen de la edad del individuo. Una manera de poder resolver este inconveniente es dividir la población en clases de edades, y de esta manera asignar tasas de fertilidad y natalidad a los individuos dependiendo de la clase a la que pertenezcan.

4.3.2. Modelo discreto matricial

Estudiamos un modelo de crecimiento de la población para una especie de pájaros, donde el número de machos sea igual al de hembras. Además, sean $X_1(t-1)$ la población de hembras jóvenes en el año $t-1$ y $X_2(t-1)$ el número de hembras adultas en el mismo año. Suponemos que cierta proporción α de los pájaros jóvenes sobrevivirán para llegar a adultos en la primavera del año siguiente t . Cada hembra que sobrevive produce huevos en la primavera, los incuba y producen, en promedio γ pájaros hembras jóvenes en la siguiente primavera. Los adultos también mueren siendo β la proporción de adultos que sobreviven de una primavera a la siguiente.

Por las hipótesis que hemos establecidos podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones que relacionan a la población de hembras jóvenes y adultas en los años t y $t+1$,

$$\begin{cases} X_1(t) = & \gamma X_2(t-1) \\ X_2(t) = & \alpha X_1(t-1) + \beta X_2(t-1) \end{cases},$$

que podemos representar matricialmente,

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \end{pmatrix},$$

o bien de manera simbólica,

$$\vec{X}(t) = A \vec{X}(t-1) \quad \Rightarrow \quad \vec{X}(t) = A^t \vec{X}(0).$$

Observemos el parecido de las dos expresiones encontradas para los dos modelos estudiados $y_t = r^t y_0$, en el modelo discreto exponencial, y $\vec{X}(t) = A^t \vec{X}(0)$, en el modelo discreto matricial. No obstante, tenemos que hacer notar que ahora si podemos distinguir entre la tasa de supervivencia de pájaros jóvenes y adultos.

EJEMPLO 4.14

Supongamos que en el modelo discreto matricial anterior, cada hembra adulta produce por término medio cuatro hembras (lo cual indica al menos ocho huevos), la cuarta parte de las hembras jóvenes sobreviven para llegar a adultas y las tres cuartas partes de las hembras adultas sobreviven.

- A la vista de estos datos, la matriz que representa al modelo es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Puede observarse que $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y además $\alpha < \beta$ ya que no es tan probable que sobrevivan más los pájaros jóvenes que los adultos.

Supongamos que inicialmente tenemos 5 hembras adultas y 1 hembra joven.

$$\vec{X}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix},$$

el total de hembras de la población después de un año es 24 y la razón de hembras jóvenes a adultas es 5 a 1. En el segundo año, (si aproximamos los números decimales)

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0.1875 & 1.5625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

En la Tabla 4.1 hemos escrito las razones $X_1(t)/X_2(t)$ y T_t/T_{t-1} del total de hembras en los años sucesivos.

t	$X_1(t)$	$X_2(t)$	T_t	$X_1(t)/X_2(t)$	T_t/T_{t-1}
0	1	5	6	0.2	-
1	20	4	24	5	4
2	16	8	24	2	1
3	32	10	42	3.2	1.75
4	40	15	55	2.66	1.309
5	62	22	84	2.81	1.527
10	379	137	516	2.76	1.441
11	547	197	744	2.77	1.441
12	790	285	1075	2.77	1.444
19	10286	3711	13997	2.77	1.444
20	14844	5355	20199	2.77	1.443

Tabla 4.1.

Notemos como la razón $X_1(t)/X_2(t)$ se acerca a la constante 2.771 mientras que la población total parece aumentar a una tasa constante del 44% anual. Además, en la Figura 4.11 se han representado las diferentes proporciones de hembras jóvenes (en rojo) y de hembras adultas en función del tiempo, y se puede apreciar como a partir de un determinado momento estas proporciones permanecen constantes.

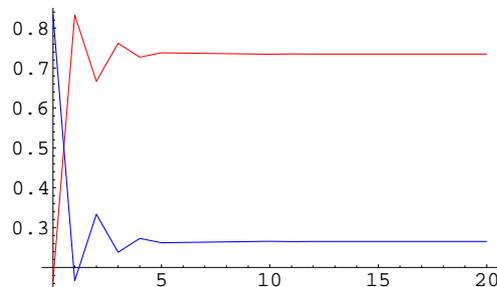


Figura 4.11. Rojo: proporción jóvenes. Azul: Proporción adultas

¿Cuál es la razón teórica para que se cumplan las observaciones del ejemplo anterior? Veamos que la respuesta a esta pregunta puede generalizarse y está muy relacionada con el método de las potencias utilizado para estimar el valor propio dominante de una matriz cuadrada.

Supongamos que \vec{U}_1, \vec{U}_2 sean los vectores propios asociados a los valores propios λ_1, λ_2 de la matriz A que representa al modelo discreto matricial. Entonces al formar estos vectores una base del plano vectorial, podemos escribir $\vec{X}(0) = c_1\vec{U}_1 + c_2\vec{U}_2$ con unos valores determinados de c_1 y c_2 . En consecuencia,

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1) = A^t\vec{X}(0) = A^t(c_1\vec{U}_1 + c_2\vec{U}_2),$$

pero por definición de valor y vector propio, $A\vec{U}_i = \lambda_i\vec{U}_i, \dots, A^t\vec{U}_i = \lambda_i^t\vec{U}_i$ con $i = 1, 2$. Llevando estos valores en la expresión anterior

$$\vec{X}(t) = c_1A^t\vec{U}_1 + c_2A^t\vec{U}_2 = c_1\lambda_1^t\vec{U}_1 + c_2\lambda_2^t\vec{U}_2.$$

Por otro lado, la ecuación característica de A es

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - \beta\lambda - \gamma\alpha = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\gamma\alpha}}{2}.$$

Sabemos, por hipótesis que $\gamma > 0$; $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta < 1$. Entonces, $4\alpha\gamma > 0$ y $\beta^2 + 4\gamma\alpha > 0$. Existirán, por tanto, dos valores propios reales y diferentes y además si un valor propio es positivo, el otro será negativo. Es decir, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, con lo que $|\lambda_2/\lambda_1| < 1$.

Ahora, podemos tener en cuenta este hecho en

$$\vec{X}(t) = c_1\lambda_1^t\vec{U}_1 + c_2\lambda_2^t\vec{U}_2 = \lambda_1^t \left(c_1\vec{U}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \vec{U}_2 \right).$$

Cuando el valor de t aumenta la expresión $(\lambda_2/\lambda_1)^t$ tiende a cero, luego

$$\vec{X}(t) \approx c_1\lambda_1^t\vec{U}_1$$

- **A largo plazo, la distribución de las edades se estabiliza y es proporcional al vector \vec{U}_1 .**

Cada grupo de edad cambiará por un factor λ_1 cada año. Así, a la larga, la ecuación $\vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0)$ actúa igual que la ecuación $y_t = r^t y_0$. En un corto plazo (es decir, antes de alcanzar la estabilidad) los números oscilan. La magnitud de esta oscilación depende de la magnitud de λ_2/λ_1 (que es negativa, con lo se explica la oscilación).

- **Los valores y vectores propios de A determinan el comportamiento de las generaciones futuras.**

Para la matriz A con la que trabajamos en el ejemplo, obtenemos como valores propios:

$$\lambda_1 \approx 1.4436; \quad \lambda_2 \approx -0.693.$$

Como $\lambda_1 \approx 1.44$, esto explica el 44 de aumento en la población de la última columna de la tabla.

$$\vec{U}_1 = (0.94066, 0.339344)^T; \quad \vec{U}_2 = (-0.985322, 0.170707)^T.$$

Observemos que \vec{U}_1 cumple $0.94066/0.33934 \approx 2.772$, que es la quinta columna de la tabla.

Sabemos que si $\lambda_1 > 1$, entonces la población aumentará cuando

$$(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma})/2 > 1 \Rightarrow \beta^2 + 4\alpha\gamma < (2 - \beta)^2 = 4 - 4\beta + \beta^2,$$

es decir si

$$\gamma > \frac{1 - \beta}{\alpha}.$$

Como en nuestro caso $\beta = 0.75$, $\alpha = 0.25$, resulta que $\gamma > \frac{0.25}{0.25} = 1$, con lo que la población aumentará, cosa que ya sabíamos (lo hace a un ritmo del 44%).

Consideraciones finales:

- 1.- Para que podamos aplicar el modelo discreto matricial, es necesario que el medio ambiente sea estable, es decir que los cambios ecológicos que se registren no modifiquen las tasas de natalidad y mortalidad de los individuos de la población.
- 2.- En las hipótesis del modelo no hemos tenido en cuenta un factor muy importante como es la densidad de la población. Es evidente que las tasas de natalidad y supervivencia varían con el tamaño de la población, ya que en caso contrario la población crecería de forma ilimitada y dominaría al resto de las especies.

4.3.3. Generalización del modelo matricial

(a) Descripción del modelo

Los primeros investigadores que aplicaron el algebra matricial al estudio del crecimiento de poblaciones fueron *Bernardelli y Lewis* (1942). Para ello, dividieron a la población en clases de edades y construyeron un modelo basado en un conjunto de ecuaciones en diferencias, una para cada clase de edad. Mas tarde, *Leslie* (1945, 1948) construyó la teoría y desde entonces a las matrices que aparecen en este tipo de modelos se las conoce con el nombre de matrices de *Leslie*. Entre las muchas personas que trabajaron en este campo, podemos citar, por la importancia de sus contribuciones a *Goodman* (1968), *Keyfitz* (1968) y *Pielon* (1969).

Patrick Holt Leslie (1900 - 1974) acabó sus estudios de Fisiología en Oxford en 1921, después de padecer diversos problemas médicos, los cuales condicionaron el resto de su vida. En 1935 empezó a trabajar en el Departamento de Población Animal de la Universidad de Oxford, bajo la dirección del profesor *Charles Elton*, y diez años después aparecieron publicados sus primeros trabajos en dinámica de poblaciones relacionados con la clasificación por edades. Posteriormente, en 1948 investigó el problema de introducir en los modelos matriciales el crecimiento logístico de poblaciones, así como las relaciones del tipo presa - depredador. Por último, en 1959 propuso nuevos modelos matriciales para tener en cuenta el efecto de retardo en el tiempo en la evolución de las poblaciones.

Una clasificación muy general de los modelos matriciales aplicados al estudio de la evolución de las poblaciones en función de la matriz A de proyección, puede verse en la siguiente figura:

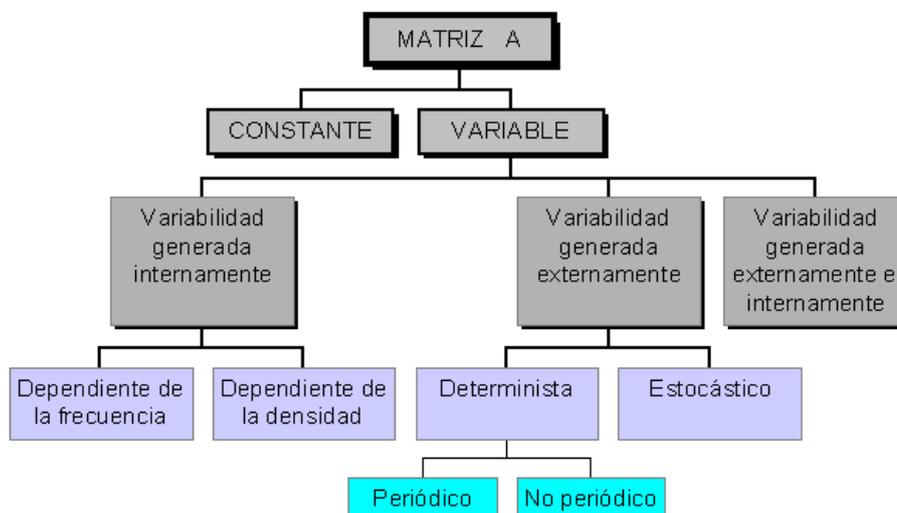


Figura 4.12. Clasificación de los modelos matriciales.

Como ya hemos indicado, el modelo de crecimiento constante es muy elemental, ya que es frecuente que el número de descendientes, así como el número de hembras que sobrevivan, dependan de la edad. Por ejemplo, en una población humana la mujer adulta con un promedio de edad de 47 años tendrá menos hijos que la mujer con un promedio de 27 años. Para evitar estos inconvenientes, es necesario disponer de un modelo que permita el agrupamiento por edades con diferentes tasas de natalidad y de supervivencia. Es por ello, que el objetivo que nos planteamos en esta sección es el de generalizar el modelo discreto matricial que hemos analizado en la sección anterior.

Es interesante comentar que, a pesar de su sencillez, éste es el modelo que con más frecuencia utilizan los demógrafos en sus estudios de predicción del crecimiento de poblaciones.

En primer lugar, tenemos que insistir en el hecho de que sólo se tiene en cuenta la población de hembras de la población, es por ello que la primera hipótesis del modelo es suponer que el número de hembras sea igual al número de machos. Cuando la población que tenemos que estudiar es tal que esta hipótesis no se cumple, entonces esta circunstancia supone una gran restricción sobre el modelo, pero por lo general, esta circunstancia no suele darse en la mayoría de los casos.

Por tanto, **el modelo de Leslie describe el crecimiento de la parte femenina de una población clasificando a las hembras por edades en intervalos de igual número de años.**

Supongamos que la edad máxima alcanzada por una hembra de una población, por término medio, sea E años y que esta población la dividimos en n clases de edades, donde para simplificar la notación consideraremos $n = 4$. Cada clase, es evidente que tendrá $E/n = E/4$ años de duración. Por lo tanto, podemos construir la tabla,

CLASE	EDAD
1	$[0, E/4)$
2	$[E/4, E/2)$
3	$[E/2, 3E/4)$
4	$[3E/4, E]$

Supongamos que en el momento inicial ($t = 0$) conocemos el número de hembras que hay en cada uno de los intervalos. Llamemos $X_i(0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, al número de hembras existentes en la clase i en el momento inicial. Con estos números podemos construir el vector

$$\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0), X_4(0))^T,$$

conocido con el nombre de vector de la distribución inicial de las edades. Es evidente que, por causas biológicas, a medida que transcurre el tiempo se modificará este vector inicial. Nuestra tarea será la de construir un modelo matricial para ver como se produce la evolución del vector $\vec{X}(0)$ con el paso del tiempo. Para ello, realizamos distintas observaciones de la población en tiempos discretos $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$.

La segunda hipótesis que exigiremos al modelo será la de obligar a que todas las hembras que están en la clase $(i + 1)$ en el tiempo t_{k+1} , se encontraban en la clase (i) en el tiempo anterior t_k (suponiendo que no existen muertes ni nacimientos). Como podemos fácilmente entender, esta restricción obliga a que la duración entre dos tiempos consecutivos de observación sea igual a la duración de los intervalos de edad; esto es:

$$t_0 = 0; t_1 = \frac{E}{4}, t_2 = \frac{2E}{4}; \dots; t_k = \frac{kE}{4}; \dots$$

Los procesos de nacimiento y muerte entre dos tiempos consecutivos de observación se pueden describir mediante los siguientes parámetros demográficos:

- Al **promedio del número de hijas** que tiene una hembra durante el tiempo que permanece en la clase de orden i , lo llamaremos a_i con $i = 1, 2, 3, 4$
- La **fracción de las hembras** que están en la clase i y se espera **que sobrevivan** y pasen a la clase de orden $i + 1$ la llamaremos b_i con $i = 1, 2, 3$.

Es evidente, según las definiciones dadas que

- 1.- $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- 2.- $0 < b_i \leq 1$ con $i = 1, 2, 3$.

El caso $b_i = 0$, no puede ocurrir ya que esto supondría que ninguna hembra viviría más allá de la clase i . También supondremos que hay al menos un $a_i > 0$ lo que garantiza que habrá nacimientos. A la clase donde $a_i > 0$ la llamaremos clase fértil.

Si $\vec{X}(k) = (X_1(k), X_2(k), X_3(k), X_4(k))^T$ representa al vector de distribución de las edades en el tiempo t_k , entonces el número de hembras de la primera clase en el tiempo t_k vendrá dado, únicamente por las nacidas entre los tiempos t_{k-1} y t_k . Podemos escribir,

$$X_1(k) = a_1 X_1(k-1) + a_2 X_2(k-1) + a_3 X_3(k-1) + a_4 X_4(k-1). \quad (4.6)$$

Por otro lado, el número de hembras en la clase de orden $i + 1$ con $i = 1, 2, 3$ en el tiempo t_k es igual al número de hembras de la clase de orden i en el tiempo t_{k-1} que todavía están vivas en el tiempo t_k .

$$X_{i+1}(k) = b_i X_i(k-1), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

Expresando matricialmente (4.6) y (4.7) tenemos,

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0, & 0, & b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ X_3(k-1) \\ X_4(k-1) \end{pmatrix}$$

O de una forma vectorial,

$$\vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1) \quad (4.8)$$

donde, de manera totalmente general, a la matriz

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

se la conoce con el nombre de **matriz de Leslie**.

De (4.8) es fácil ver que

$$\vec{X}(k) = L^k \vec{X}(0).$$

De este modo, conocida la distribución inicial $\vec{X}(0)$ y la matriz L , se puede determinar la distribución de las hembras en cualquier tiempo.

EJEMPLO 4.15

Supongamos que las hembras de una población animal viven por término medio 25 años y que esta población se divide en cinco clases de edades iguales con intervalos de 5 años. Supongamos que la matriz de crecimiento de *Leslie* viene dada por

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si inicialmente hay 10 hembras en la primera clase, 20 en la segunda, 5 en la tercera, 10 en la cuarta, y 8 en la última clase, podemos estudiar la evolución de la población para los próximos años.

- En efecto, el vector inicial es,

$$\vec{X}(0) = (10, 20, 5, 10, 8)^T .$$

Calculando

$$\vec{X}(1) = L\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 \\ 5 \\ 20/3 \\ 10/3 \\ 15/2 \end{pmatrix} .$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} \vec{X}(2) &= L\vec{X}(1) = L^2\vec{X}(0) = (205/6, 83/2, 5/3, 40/9, 5/2)^T \\ \vec{X}(3) &= L\vec{X}(2) = L^3\vec{X}(0) = (201/2, 205/12, 83/6, 10/9, 10/3)^T \\ \vec{X}(4) &= L\vec{X}(3) = L^4\vec{X}(0) = (164/3, 201/4, 205/36, 83/9, 5/6)^T \end{aligned}$$

Por tanto, después de 20 años (4 períodos), aproximadamente habrá 55 hembras en la primera clase, 50 de [5, 10); 6 de [10, 15), 9 de [15, 20) y 1 entre 20 y 25 años.

(b) Comportamiento en el límite del modelo

Para conocer la dinámica del crecimiento del modelo

$$\vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1) = L^k\vec{X}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

debemos recurrir al estudio de los valores y vectores propios de la matriz L de *Leslie*. Recordemos que los valores propios son las raíces de la ecuación característica:

$$p(\lambda) = |L - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollamos este determinante aplicando la definición, o por elementos de una fila o columna,

$$p(\lambda) = (a_1 - \lambda)(-\lambda)^3 - a_2b_1(-\lambda)^2 + a_3b_1b_2(-\lambda) - a_4b_1b_2b_3 = 0,$$

simplificando

$$p(\lambda) = \lambda^4 - a_1\lambda^3 - a_2b_1\lambda^2 - a_3b_1b_2\lambda - a_4b_1b_2b_3 = 0. \quad (4.9)$$

A la vista de la expresión anterior, se justifica la introducción de una nueva función,

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \frac{a_4b_1b_2b_3}{\lambda^4}. \quad (4.10)$$

Ahora, resolver la ecuación $p(\lambda) = 0$ es equivalente a resolver la equivalente $q(\lambda) = 1$. Un rápido estudio de la función $q(\lambda)$ nos permite deducir las siguientes propiedades:

- Decrece monótonamente para los valores de $\lambda > 0$, ya que si

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad q(\lambda_2) < q(\lambda_1).$$

- Tiene una asíntota vertical en $\lambda = 0$.
- El valor $q(\lambda)$ tiende a cero, cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

Estas propiedades nos permiten esbozar una gráfica de la función $q(\lambda)$, la cual puede verse en la Figura 4.13.

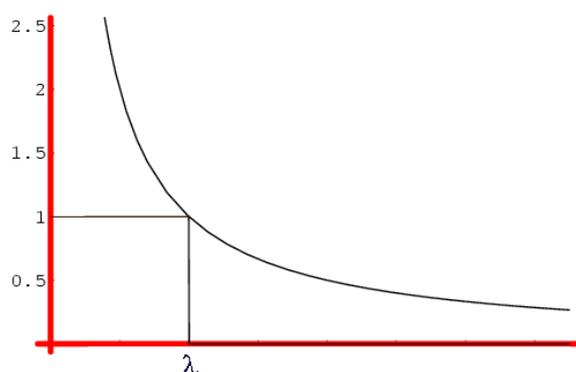


Figura 4.13. Representación gráfica de $q(\lambda)$

Observemos que existe un único valor λ_1 positivo, tal que $q(\lambda_1) = 1$. Esto es, la matriz de *Leslie*, L tiene un único valor propio λ_1 positivo para el cual $q(\lambda) = 1$. Además, al ser $q'(\lambda_1) \neq 0$ la raíz será simple, o bien, su grado de multiplicidad es 1.

El paso siguiente será el de calcular el autovector propio asociado al valor propio λ_1 . Por definición, λ_1 es aquel valor no nulo que cumple, $L\vec{U}_1 = \lambda_1\vec{U}_1$, siendo \vec{U}_1 el vector propio asociado. Si $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$, entonces

$$(L - \lambda_1 I) \vec{X} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el sistema lineal homogéneo anterior es compatible indeterminado, suprimimos la primera de las ecuaciones y llamamos $X_1 = \alpha$. El resto de las incógnitas valen

$$\left. \begin{array}{l} b_1 X_1 - \lambda_1 X_2 = 0 \\ b_2 X_2 - \lambda_1 X_3 = 0 \\ b_3 X_3 - \lambda_1 X_4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = \frac{b_1}{\lambda_1} X_1 = \frac{b_1}{\lambda_1} \alpha \\ X_3 = \frac{b_2}{\lambda_1} X_2 = \frac{b_2 b_1}{\lambda_1^2} \alpha \\ X_4 = \frac{b_3}{\lambda_1} X_3 = \frac{b_3 b_2 b_1}{\lambda_1^3} \alpha \end{cases}$$

La solución general del sistema homogéneo es el subespacio unidimensional de \mathbb{R}^4 ,

$$S = \left\{ \left(\alpha, \frac{b_1}{\lambda_1} \alpha, \frac{b_2 b_1}{\lambda_1^2} \alpha, \frac{b_3 b_2 b_1}{\lambda_1^3} \alpha \right)^T : \alpha \neq 0 \right\},$$

que puede ser generado por el vector

$$\left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_2 b_1}{\lambda_1^2}, \frac{b_3 b_2 b_1}{\lambda_1^3} \right)^T$$

Generalizando el resultado anterior, concluimos diciendo que el vector propio asociado al valor propio dominante λ_1 , para una matriz de *Leslie* de orden n es:

$$\vec{U}_1 = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}, \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3}, \dots, \frac{b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right)^T.$$

Insistimos en el hecho de que al tratarse de un valor propio λ_1 único el subespacio S de vectores propios asociados será de dimensión uno, y en consecuencia, cualquier otro vector propio asociado a λ_1 será un múltiplo de \vec{U}_1 . Estos resultados, podemos resumirlos en la siguiente propiedad,

TEOREMA 4.3.1 *Una matriz de Leslie L , tiene un único valor propio positivo λ_1 . Este valor propio es simple y tiene un vector propio asociado \vec{U}_1 cuyas coordenadas son todas positivas*

A continuación intentaremos justificar que el comportamiento a largo plazo de las edades de la población quedará determinado por este valor propio λ_1 y su vector propio \vec{U}_1 asociado.

TEOREMA 4.3.2 *Si λ_1 es el único valor propio positivo de una matriz de Leslie L y si λ_i es cualquier otro valor propio (real o complejo) de L , entonces:*

$$|\lambda_i| \leq \lambda_1$$

Para el estudio que estamos realizando se requiere que $|\lambda_i| < \lambda_1$ para todos los valores propios de L ; en este caso, ya sabemos por el tema anterior, que λ_1 será un **valor propio dominante** de L .

EJEMPLO 4.16

- Debemos observar que no todas las matrices de *Leslie* cumplen este requisito. En 1941 Harro Bernadelli publicó un trabajo en el *Journal of the Burma Research Society* con el título “Population Waves”, donde observó un comportamiento periódico en lugar de un comportamiento estable de la población. En concreto, propuso la siguiente matriz:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, los valores propios son :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

con lo cual $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$ y por tanto, $\lambda_1 = 1$ no es dominante. No obstante, esta matriz cumple que $L^3 = I$. Esto nos indicaría, que cualquiera que sea la distribución inicial de las edades:

$$\vec{X}(0) = \vec{X}(3) = \vec{X}(6) = \dots = \vec{X}(3k) = \dots$$

El vector de la distribución de las edades oscila con período de tres unidades de tiempo. Tales oscilaciones u ondulaciones de la población no podría ocurrir si λ_1 fuese dominante.

La siguiente propiedad caracteriza a los valores propios dominantes:

TEOREMA 4.3.3 *Si dos entradas consecutivas a_i, a_{i+1} de la primera fila de la matriz de Leslie son diferentes de cero, el vector propio positivo de L es dominante.*

Si tomamos los intervalos de clases lo suficientemente pequeños, entonces la propiedad anterior se cumplirá siempre. Por este motivo, de ahora en adelante supondremos que se dan las condiciones para que el valor propio positivo sea dominante.

Sabemos, por el tema dedicado a la diagonalización de matrices cuadradas, que si L es diagonalizable, entonces existirá una matriz regular C tal que,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = C^{-1}LC.$$

La potencia k -ésima de la matriz de Leslie viene dada por,

$$L^k = C \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^k \end{pmatrix} C^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, para cualquier vector de distribución inicial de edades, se tiene:

$$\vec{X}(k) = L^k \vec{X}(0) = C \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^k \end{pmatrix} C^{-1} \vec{X}(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Dividiendo los dos miembros por λ_1^k , obtenemos:

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \vec{X}(k) = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{\lambda_4}{\lambda_1})^k \end{pmatrix} C^{-1} \vec{X}(0).$$

Como λ_1 es dominante, $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ para $i = 2, 3, 4$. Se deduce que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0, \quad i = 2, 3, 4.$$

En consecuencia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} \vec{X}(k) = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} \vec{X}(0).$$

Puede probarse, que el lado derecho de la igualdad, correspondiente al producto de las matrices, coincide con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} \vec{X}(k) = d \vec{U}_1, \quad (4.11)$$

donde $d > 0$ es la componente del vector columna $C^{-1} \vec{X}(0)$ y depende únicamente de la distribución inicial $\vec{X}(0)$.

Esta última expresión (4.11) da para valores grandes de k la aproximación $\vec{X}(k) = d\lambda_1^k \vec{U}_1$, o bien $\vec{X}(k-1) = d\lambda_1^{k-1} \vec{U}_1$. Si comparamos estas dos expresiones, observamos que para k suficientemente grande

$$\boxed{\vec{X}(k) = d\lambda_1^k \vec{U}_1 = \lambda_1 d\lambda_1^{k-1} \vec{U}_1 \simeq \lambda_1 \vec{X}(k-1).}$$

Como conclusión, para valores grandes de tiempo:

- Cada vector de la distribución de las edades es un múltiplo escalar de la distribución inmediatamente anterior, siendo esta constante el valor propio positivo dominante de la matriz de Leslie.
- La proporción de hembras en cada una de las clases será constante.

EJEMPLO 4.17

- Supongamos que ahora la matriz de *Leslie* sea

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación característica :

$$|L - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8} = 0.$$

El valor propio positivo es el $\lambda_1 = 3/2$. Su vector propio asociado es

$$\vec{U}_1 = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}\right)^T = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}\right)^T.$$

En consecuencia, para k suficientemente grande,

$$\vec{X}(k) \simeq \frac{3}{2} \vec{X}(k-1).$$

Por tanto, para cada período de tiempo (5 años) aumentará en aproximadamente un 50% el número de hembras en cada una de las tres clases; como aumentará también el número de hembras en la población,

$$x(\vec{k}) \approx d \left(\frac{3}{2}\right)^k \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}\right)^T.$$

Las hembras estarán distribuidas de acuerdo con la relación $1 : 1/3 : 1/18$; lo cual corresponde a una distribución del 72% de hembras en la primera clase 24% en la segunda y 4% en la tercera.

Si consideramos de nuevo la ecuación

$$\vec{X}(k) = d \lambda_1^k \vec{U}_1$$

que da el vector de distribución de la población por edades, para valores grandes de tiempo. Se presentan tres casos que dependen del valor propio positivo λ_1 .

- La población finalmente crece si $\lambda_1 > 1$.
- La población finalmente decrece si $\lambda_1 < 1$.
- La población finalmente se estabiliza si $\lambda_1 = 1$.

Este último caso es de especial interés ya que determina una población de crecimiento cero.

Para cualquier distribución inicial de las edades, la población tiende a una distribución en el límite que es algún múltiplo del vector propio \vec{U}_1 . Teniendo en cuenta que $L \vec{U}_1 = \lambda_1 \vec{U}_1 = \vec{U}_1$, puede comprobarse que,

$$\lambda_1 = 1 \iff a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} = 1$$

La expresión $R = a_1 + a_2 b_1 + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}$ se conoce con el nombre de **tasa neta de reproducción** de la población, y su interpretación demográfica es la de ser el promedio de crías que tiene una hembra durante su esperanza de vida.

Por lo tanto, una población es de crecimiento nulo si y solo si su tasa neta de reproducción es igual a uno.

EJEMPLO 4.18

- Supongamos que una población de animales hembras está dividida en dos clases de edades. En cada período el 50% de la primera pasa a la segunda. El número medio de crías hembras de las de la primera clase es de 1 y de las de la segunda es 1.5.

Para construir el modelo de *Leslie* recordemos que conocemos por supervivencia el porcentaje de hembras que sobreviven en un periodo de tiempo o más y por fertilidad el número de hembras que por término medio tiene en un período de tiempo cada una de las hembras de la población.

La expresión matricial del modelo de *Leslie* $\vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1)$ es:

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \end{pmatrix}.$$

Con los datos que tenemos,

$$\vec{X}(1) = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo,

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} 175 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix},$$

y así sucesivamente.

Para estudiar su comportamiento en el límite es necesario en primer lugar resolver la ecuación característica,

$$|L - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1.5; \quad \lambda_2 = -0.5.$$

El vector propio correspondiente al valor propio positivo (que por el teorema estudiado será dominante) es,

$$\vec{U}_1 = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^T = \left(1, \frac{1}{3}\right)^T.$$

Por tanto,

$$\vec{X}(k) \simeq \frac{3}{2} \vec{X}(k-1),$$

lo cual indica, que para valores de k grandes, en cada período de tiempo aumentará el número de hembras en un 50% en cada una de las clases. Como además,

$$x(\vec{k}) = d\left(\frac{3}{2}\right)^k \left(1, \frac{1}{3}\right)^T.$$

En consecuencia, las hembras estarán distribuidas de acuerdo a la proporción 3 : 1.

EJEMPLO 4.19

La siguiente tabla corresponde a la distribución en tres intervalos de edad de la población femenina de EEUU de hasta 44 años en 1940 y 1955 (expresada en miles). Calcular la población en los años 1970 y 1985.

EDAD	N. MUJ. 1940	N. HIJAS 1940-55	N. MUJ.1955
0 - 14	14459	4651	16428
15 - 29	15264	10403	14258
30 - 44	11346	1374	14837

- De la tabla anterior, se deducen los coeficientes

$$a_1 = \frac{4651}{14459} = 0.3217 \quad b_1 = \frac{14258}{14459} = 0.9861$$

$$a_2 = \frac{10403}{15264} = 0.68153 \quad b_2 = \frac{14837}{15264} = 0.97202$$

$$a_3 = \frac{1374}{11346} = 0.12101$$

con los que construimos la matriz de *Leslie* correspondiente

$$L = \begin{pmatrix} 0.3217 & 0.6815 & 0.1210 \\ 0.9861 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9720 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con ayuda del ordenador encontramos los valores propios de esta matriz,

$$\lambda_1 = 1.05941, \quad \lambda_2 = -0.53186, \quad \lambda_3 = -0.205852.$$

Al ser $\lambda_1 = 1.05941 > 1$ el valor propio estrictamente dominante, nos indica que la población crece cada 15 años a un ritmo del 6% (aproximadamente).

Si nos fijamos en el vector propio \vec{v}_1 asociado al valor propio λ_1 ,

$$\vec{v}_1 = (0.620683, 0.577732, 0.530074),$$

podemos conocer cual será la distribución de las hembras por edades:

$$0.620683x + 0.577732x + 0.530074x = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 57.86$$

Los porcentajes serán

$$\begin{aligned} \text{Clase de 0 a 14 años } & 57.87 \times 0.620683 = 0.3591 & (35.91\%) \\ \text{Clase de 14 a 29 años } & 57.87 \times 0.577732 = 0.3340 & (33.40\%) \\ \text{Clase de 30 a 44 años } & 57.87 \times 0.530074 = 0.3069 & (30.69\%) \end{aligned}$$

4.4. Tablas de vida y modelo de Leslie

El modelo de crecimiento discreto exponencial,

$$y_t = y_0 r^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

que hemos estudiados en la sección anterior, o en su versión continua

$$y(t) = y(0) e^{rt}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

es adecuado, por ejemplo, para describir la evolución de una población de bacterias o de protozoos, en su primera fase de crecimiento. Sin embargo, la mayoría de las plantas y animales no siguen estos modelos tan elementales, ya que, como hemos tenido ocasión de comentar en la sección anterior, los nacimientos y las muertes dependen de la edad del individuo.

El objetivo básico de esta sección, es el de aprender a calcular la tasa de reproducción r para poblaciones donde la natalidad y la mortalidad dependen de la edad del organismo. Además construiremos un modelo matricial de *Leslie* a partir de los datos presentados en una tabla de vida. Para que los resultados que obtendremos sean fiables, debemos insistir en el hecho de que nos encontramos en un medioambiente aislado que cuenta con recursos ilimitados, y que existe cierta estabilidad en los parámetros que definen al modelo.

Es conocido que una tabla de vida es una tabla estadística, donde se recogen el número de individuos en cada una de las edades, sus probabilidades de supervivencia y sus tasas de fecundidad. Una primera dificultad con la que solemos encontrarnos al interpretar una tabla de vida es la del número tan elevado de notaciones diferentes que se utilizan para representar a un mismo concepto. Por este motivo, comenzaremos concretando la notación que usaremos.

- *Representaremos por x a la edad de un individuo, generalmente en años, aunque como puede entenderse esta unidad puede cambiarse.*

De esta manera, un individuo tiene la edad 0 si se encuentra entre 0 y 12 meses. Usaremos la constante k para referirnos a la edad final de la tabla de vida, que, en la mayor parte de los casos, será aquella en la que han muerto todos los individuos. De forma equivalente, como ya ha quedado dicho, podemos representar también la edad de un individuo por su clase de edad, de este modo, decir que una persona se encuentra en la clase i , es tanto como decir que su edad se encuentra entre $i - 1$ y i . Por lo tanto, si el rango de las edades de la población va de 0 a k , el rango de las clases de edades va de 1 hasta k . Nosotros analizaremos el modelo y la tabla de vida usando la notación de las edades y dejaremos las clases de edades, como ya veremos, para describir y analizar el modelo matricial.

Para que nuestro estudio sea coherente con la sección anterior, seguimos suponiendo que el número de hembras y machos son iguales y que estudiamos la evolución de una población de hembras.

- *Definimos la fertilidad como el número medio de hembras que han nacido al finalizar la primavera de una hembra con una edad x determinada, y la representaremos por $b(x)$.*

Por ejemplo $b(5) = 3$ significa que una hembra de 5 años tiene por término medio, al finalizar la primavera, 3 hembras recién nacidas. La fertilidad será por tanto un número positivo, que al expresar valores medios puede ser cero (el individuo de edad x no es fértil), o bien un número decimal.

La Tabla 4.2 nos da una hipotética tabla de vida para un organismo que vive 4 años.

x	$S(x)$	$b(x)$	$l(x) = S(x)/S(0)$	$g(x) = l(x+1)/l(x)$
0	500	0	1.0	0.80
1	400	2	0.8	0.50
2	200	3	0.4	0.25
3	50	1	0.1	0.00
4	0	0	0.0	-

Tabla 4.2.

A continuación definiremos la tasa de supervivencia,

- Representaremos por $S(x)$ al número de individuos que han sobrevivido al comenzar cada nuevo año.

En la tabla anterior, comenzamos con 500 individuos, los cuales todos han fallecido al iniciarse el quinto año.

- Representaremos por $l(x)$ a la probabilidad de que un individuo sobreviva desde el nacimiento hasta comienzos de la edad x .

Por la definición anterior, es evidente que

$$l(x) = \frac{S(x)}{S(0)}.$$

La representación gráfica de $l(x)$ en función de x nos da una gráfica que se conoce con el nombre de curva de supervivencia. Es bastante corriente utilizar la escala logarítmica, en el eje de abscisas colocamos la edad del individuo x y en el de ordenadas $\ln(l(x))$. Estas curvas corresponden a algunos de los tipos que aparecen a la izquierda de la Figura 4.14.

- La curva azul es típica de poblaciones en las cuales la mayor mortalidad ocurre en las edades mayores. Por ejemplo, en poblaciones humanas pertenecientes a países subdesarrollados.
- La curva en color verde se da cuando la mortalidad no depende de la edad. Por ejemplo, en muchas especies de pájaros grandes y peces.
- Por último, la curva roja es característica de poblaciones con un alto número de mortalidad infantil. Por ejemplo, en las plantas y en algunas especies animales que necesitan de una gran descendencia para que la especie sobreviva.

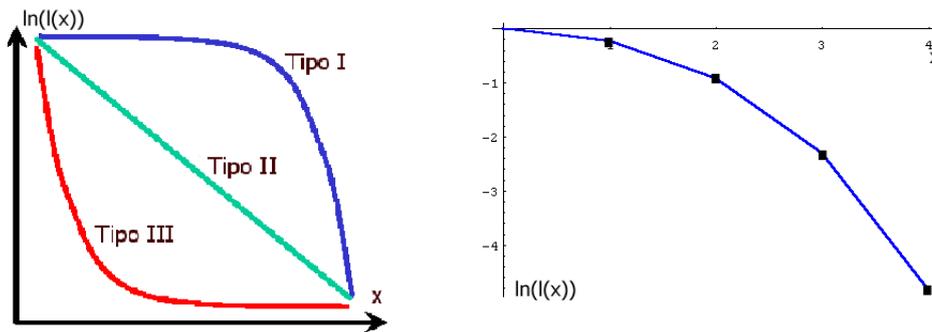


Figura 4.14. Tipos de curvas de supervivencia.

Observemos en la Tabla 4.5 que $l(1) = 0.8$, es decir, el 80 % de la población inicial sobrevive hasta llegar a la edad 1. Nuestra población corresponde al tipo I, como puede observarse en la Figura 4.14 (derecha).

- La probabilidad de supervivencia $g(x)$, se define como la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x + 1$, y viene dada por

$$g(x) = \frac{l(x+1)}{l(x)}.$$

EJEMPLO 4.20

Supongamos que para $x = 0$ tenemos 100 peces en un acuario. Contamos la población una vez al día y obtenemos los siguientes datos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Núm	100	85	72	61	52	44	37	31	26	22	19	16
x	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Núm	14	12	10	8	7	6	5	4	3	3	2	2

Vamos a construir y comentar la curva de vida correspondiente a esta población.

- De la tabla anterior obtenemos los diferentes valores de $l(x) = S(x)/100$, los cuales se encuentran reflejados en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l(x)$	1	0.85	0.72	0.61	0.52	0.44	0.37	0.31	0.26	0.22
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$l(x)$	0.19	0.16	0.14	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04
x	20	21	22	23	-	-	-	-	-	-
$l(x)$	0.03	0.03	0.02	0.02	-	-	-	-	-	-

Con ayuda del Mathematica[®], representamos gráficamente estos datos,

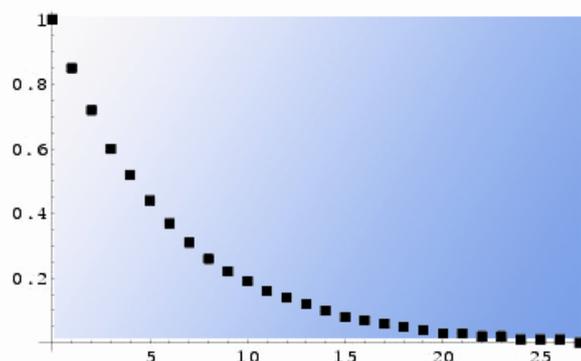


Figura 4.15. Representación gráfica de $(x, l(x))$

La curva corresponde al tercero de los tipos estudiados en teoría. Es decir, estamos ante una población con una elevada tasa de mortalidad infantil.

En nuestro ejemplo podemos ver en la Tabla 4.5 que la probabilidad de que un individuo de edad 1 sobreviva y llegue a la edad 2 es de un 50 %.

Para poder estimar el valor r en (4.12) a partir de $l(x)$ y $b(x)$ es necesario encontrar, en primer lugar, otros dos números como son la tasa neta de reproducción y el tiempo de generación G .

- Se define la tasa neta de reproducción R , como el número de individuos que por término medio tiene una hembra durante toda su esperanza de vida. Es decir,

$$R = l(0)b(0) + l(1)b(1) + \cdots + l(k)b(k) = \sum_{x=0}^k l(x)b(x).$$

Si $R > 1$ la población crecerá exponencialmente, por el contrario si la tasa neta de reproducción es menor que uno la población se extinguirá y finalmente si $R = 1$ entonces la población permanecerá constante.

- Se define el tiempo de generación, G , como la edad media de las hijas de todos los individuos producidos.

El concepto fue dado en 1977 por *Caughley*, y a efectos prácticos vale:

$$G = \frac{\sum_{x=0}^k l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^k l(x)b(x)}.$$

Si suponemos que la población crece exponencialmente, sustituimos el tiempo G en (4.12). De esta manera, $N_G = N_0 e^{rG}$, o bien, $N_G/N_0 = e^{rG}$. El número N_G/N_0 es aproximadamente la tasa neta de reproducción R .

$$R = e^{rG} \quad \Rightarrow \quad r \approx \frac{\ln R}{G}.$$

El valor de r encontrado es sólo una aproximación que se diferencia como máximo en un 10 % del valor real (*Stearms* 1992). Si deseamos saber el valor exacto de r debemos resolver la ecuación

$$1 = \sum_{x=0}^k e^{-rx} l(x) b(x), \quad (4.13)$$

que es una adaptación de la ecuación de *Euler* (1707-1783). Desgraciadamente resolver (4.13) es bastante difícil. Lo que a efectos prácticos se hace es calcular un primer valor aproximado $r \approx \ln R/G$ y a continuación sustituir este valor en (4.13). En nuestro caso, de la Tabla anterior obtenemos los valores

$$R = 2.9, \quad G = 1.48276, \quad r = \frac{\ln R}{G} = 0.718061,$$

que al sustituir en (4.13) con $r = 0.718061$ comprobamos que $1.07733 > 1$. Es decir, el valor encontrado para r es demasiado pequeño. Probamos con diferentes valores y finalmente vemos que $r = 0.776$ está cerca del valor exacto de la ecuación de Euler.

4.4.1. De las tablas de vida al modelo matricial

Desde este momento nos referiremos a la clase de edad a la que pertenece el individuo, en lugar de referirnos a su edad. Hemos visto la manera de calcular el valor de r , y en consecuencia, podemos predecir el tamaño total de la población usando las ecuaciones del crecimiento exponencial (4.12). Pero también sería interesante conocer como evoluciona el número de individuos que hay en cada una de las clases. Supongamos que

$$\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t))^T,$$

donde $X_i(t)$ indica el número de individuos en la clase i para el tiempo t .

Para confeccionar el modelo de *Leslie*, necesitamos conocer los parámetros de supervivencia y de natalidad. Si tenemos en cuenta las definiciones anteriores, la probabilidad de que un individuo que se encuentra en la clase i sobreviva y pase a la clase $i + 1$ vendrá dada por

$$b_i = \frac{l(i)}{l(i-1)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

De manera similar, la natalidad de los individuos que se encuentran en la clase i puede calcularse por

$$a_i = b(i)b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

En consecuencia, la evolución de una población dividida en 4 clases de edades, puede modelizarse por la ecuación matricial en diferencias:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = a_1 X_1(t) + a_2 X_2(t) + a_3 X_3(t) + a_4 X_4(t) \\ X_2(t+1) = b_1 X_1(t) \\ X_3(t+1) = b_2 X_2(t) \\ X_4(t+1) = b_3 X_3(t) \end{cases}$$

O bien,

$$\begin{pmatrix} X_1(t+1) \\ X_2(t+1) \\ X_3(t+1) \\ X_4(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{X}(t+1) = L\vec{X}(t).$$

La matriz L sabemos que es la matriz de *Leslie* que tiene como primera fila los valores de la natalidad y su subdiagonal principal son las probabilidades de supervivencia, el resto de los elementos de la matriz son ceros. En la sección anterior hemos demostrado que para una población con parámetros de nacimientos y muertes constantes, independientemente de los valores iniciales, cuando ha transcurrido un “número adecuado” de generaciones el porcentaje de individuos en cada una de las clases permanece constante, aunque el tamaño total de la población crece exponencialmente.

EJEMPLO 4.21

Supongamos la siguiente tabla de vida para una población de caracoles:

Edad en años	$S(x)$	$b(x)$
0	500	0
1	400	2.5
2	40	3
3	0	0

- Construimos la siguiente tabla para calcular $l(x)$, $g(x)$, R_0 , G y estimar el valor de r .

x	$S(x)$	$b(x)$	$l(x) = S(x)/S(0)$	$g(x) = l(x+1)/l(x)$	$l(x)b(x)$	$l(x)b(x)x$
0	500	0	1	0.8	0	0
1	400	2.5	0.8	0.1	2	2
2	40	3	0.08	0.0	0.24	0.48
3	0	0	0.00	–	0	0

Con los valores anteriores calculamos

$$R = \sum_{x=0}^3 l(x)b(x) = 2.24$$

$$G = \frac{\sum_{x=0}^3 l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^3 l(x)b(x)} = \frac{2.48}{2.24} = 1.107 \text{ años}$$

$$r = \frac{\ln R}{G} = 0.729 \text{ individuos}/(\text{individuos} \times \text{año})$$

Para encontrar el valor exacto de la tasa de reproducción r utilizamos la ecuación de Euler

$$1 = \sum_{x=0}^3 e^{-rx} l(x)b(x),$$

el valor $r = 0.729$ se encuentra por debajo del valor exacto. Probamos con diferentes valores hasta llegar al $r = 0.749$.

- Para construir el modelo de *Leslie* empezamos completando esta otra tabla, para encontrar las tasas de natalidad a_i , $i = 1, 2, 3$ y de supervivencia b_i , $i = 1, 2$.

x	$l(x)$	$b(x)$	i	$b_i = l(i)/l(i-1)$	$a_i = b(i)b_i$
0	1	0	-	-	-
1	0.8	2.5	1	0.8	2
2	0.08	3	2	0.10	0.30
3	0	0	3	0.00	-

Nuestro modelo matricial vendrá dado por:

$$\begin{pmatrix} X_1(t+1) \\ X_2(t+1) \\ X_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix},$$

Si suponemos que $\vec{X}(0) = (50, 100, 20)^T$, entonces podemos encontrar $\vec{X}(1)$ y $\vec{X}(2)$

$$\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} X_1(2) \\ X_2(2) \\ X_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 272 \\ 104 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Podemos hacer una proyección de la población teniendo en cuenta los valores y vectores propios de la matriz de *Leslie*. Como no existen dos valores consecutivos de a_i , entonces la matriz L posee un valor propio dominante. En efecto, si utilizamos el programa `Mathematica`[®],

`Eigenvalues[L]`

{2.11355, -0.113553, 0 }

`Eigenvectors[L]`

{{ -0.93511, -0.35395, -0.01667 }, { 0.10594, -0.74621, 0.65713, }, { 0, 0, 1 } }.

El valor propio dominante es $\lambda_1 = 2.11355$, es decir, a la larga, la población crece a un ritmo del 111 %. La estabilidad en los porcentajes en cada una de las clases viene dada por el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 2.11355$.

$$0.935114/(0.935114 + 0.35395 + 0.0167467) = 0.72 \Rightarrow 72\%$$

$$0.353950/(0.935114 + 0.35395 + 0.0167467) = 0.28 \Rightarrow 27\%$$

$$0.016746/(0.935114 + 0.35395 + 0.0167467) = 0.01 \Rightarrow 1\%$$

Para terminar, podemos relacionar la tasa de reproducción r del modelo exponencial con el valor propio dominante. En efecto, sabemos que

$$T_n = T_0 e^{rn} = T_0 e^{r(n-1)} e^r = e^r T_{n-1}.$$

Por otro lado, habíamos demostrado que $T_n \approx \lambda_1 T_{n-1}$. En consecuencia, $e^r \approx \lambda_1$, o bien $r \approx \ln(\lambda_1) = \ln(2.11355) = 0.748368$.

EJEMPLO 4.22

Supongamos la siguiente tabla de vida para una determinada población:

Edad en años x	$S(x)$	$b(x)$
0	500	0
1	400	2
2	200	3
3	50	1
4	0	0

- Empezamos completando la tabla para calcular $l(x)$, $g(x)$, R_0 , G y estimar el valor de r .

x	$S(x)$	$b(x)$	$l(x) = S(x)/S(0)$	$g(x) = l(x+1)/l(x)$	$l(x)b(x)$	$l(x)b(x)x$
0	500	0	1	0.8	0	0
1	400	2	0.8	0.5	1.6	1.6
2	200	3	0.4	0.25	1.2	2.4
3	50	1	0.1	0	0.1	0.3
4	0	0	0	-	0	0

Con los valores anteriores calculamos

$$R_0 = \sum_{x=0}^4 l(x)b(x) = 2.9$$

$$G = \frac{\sum_{x=0}^4 l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^4 l(x)b(x)} = \frac{4.3}{2.9} = 1.482 \text{ años}$$

$$r = \frac{\ln R_0}{G} = 0.718 \text{ individuos}/(\text{individuos} \times \text{año})$$

- Supongamos que inicialmente la población de caracoles es de 200 en la primera clase, 0 en la segunda, 0 en la tercera, y 0 en la cuarta. Estamos interesados en construir la matriz de *Leslie* para esta tabla de vida y proyectar la población “a largo plazo”. Para ello elaboramos la tabla.

x	i	$l(x)$	$b(x)$	$b_i = l(i)/l(i-1)$	$a_i = b(i)b_i$
0	-	1	0	-	-
1	1	0.8	2	0.8	1.6
2	2	0.4	3	0.5	1.5
3	3	0.1	1	0.25	0.25
4	4	0	0	-	0

El modelo escrito en forma matricial, es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ n_4(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.5 & 0.25 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ n_4(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N}(t+1) = L\vec{N}(t), t = 0, 1, 2, \dots$$

- Sabemos que el vector de valores iniciales es

$$\vec{N}(0) = (200, 0, 0, 0)^T,$$

lo que nos permite proyectar la población para cualquier año. Por ejemplo, al cabo de 5 años

$$\vec{N}(5) = L\vec{N}(4) = L^5\vec{N}(0) = (7613, 2804, 642, 75)^T,$$

o bien, al cabo de 25 años

$$\vec{N}(25) = L\vec{N}(24) = L^{25}\vec{N}(0) = (4.20 \times 10^{10}, 1.54 \times 10^{10}, 3.56 \times 10^9, 4.09 \times 10^8)^T.$$

Esto supone que un 68 % de la población se encuentra en la primera clase, un 25 % en la segunda, un 6 % en la tercera y un 1 % en la cuarta. Si ahora cambiamos el vector inicial, por ejemplo:

$$\vec{N}(0) = (10, 10, 10, 10)^T,$$

y realizamos las mismas proyecciones

$$\vec{N}(5) = L\vec{N}(4) = L^5\vec{N}(0) = (67, 27, 4, 2)^T,$$

o bien, al cabo de 25 años

$$\vec{N}(25) = L\vec{N}(24) = L^{25}\vec{N}(0) = (3.85 \times 10^9, 1.41 \times 10^9, 3.26 \times 10^8, 3.75 \times 10^7)^T.$$

Es decir, los porcentajes en cada una de las clases son 68 %, 25 %, 6 % y 1 %, idénticos a los encontrados en el caso anterior.

El ejemplo nos muestra el efecto de los valores iniciales en el crecimiento de la población. **Después de algunas fluctuaciones ambas poblaciones se comportan de manera similar.** Si representamos gráficamente las poblaciones para cada una de las clases en diferentes años, utilizando una escala logarítmica en el eje de ordenadas, obtenemos líneas rectas, lo cual nos indica un crecimiento exponencial de la población.

Calculamos los valores y vectores propios de la matriz de *Leslie*.

$$L := \{ \{1.6, 1.5, 0.25, 0\}, \{0.8, 0, 0, 0\}, \\ \{0, 0.5, 0, 0\}, \{0, 0, 0.25, 0\} \}$$

Eigenvalues [L]

$$\{2.17332, -0.47682, -0.096498, 0\},$$

al ser el valor propio estrictamente dominante $\lambda = 2.17332 > 1$, la población crece un 117 % cada año. Lo cual supone un crecimiento exponencial con una tasa $r =$

$\ln 2.17332 = 0.77625$. Observemos que el valor de r encontrado es el valor exacto, mientras que el obtenido en la primera parte del ejemplo $r = 0.718$ era un valor aproximado. Si $\vec{N}(0) = (200, 0, 0, 0)^T$ la población total crece de manera exponencial de acuerdo al siguiente modelo

$$P(t) = P(0)e^{rt} = 200e^{0.77625t}, \quad .$$

Para finalizar, representaremos gráficamente las poblaciones de hembras para cada una de las clases en las primeras 10 generaciones. Si $\vec{N}(t) = L^t \vec{N}(0)$ entonces, en el eje de abscisas situaremos los diferentes valores de $t = 0, \dots, 10$, y en el eje de ordenadas los $n_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, correspondientes en la escala logarítmica.

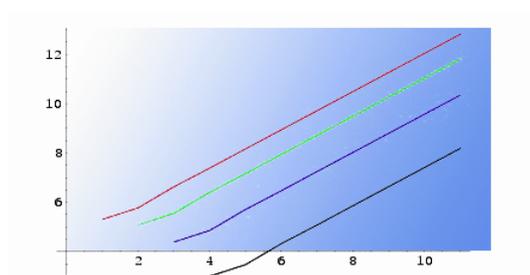


Figura 4.16. Evolución en cada clase de edad

La gráfica en rojo corresponde a la clase de menor edad, la verde a la segunda, la azul a la tercera y la coloreada en negro representa a las hembras de mayor edad. Como podemos apreciar, a “largo plazo” la población crece a un ritmo constante, que coincide con la pendiente de las rectas ($r = \ln 2.17332 = 0.77625$) y además los porcentajes en cada una de las clases permanecen constantes (las cuatro rectas son paralelas).

4.5. Modelo de Lefkovitch

A la hora de estudiar la evolución de muchos organismos, la variable edad, que hemos tenido en cuenta en el modelo de *Leslie*, no es la más importante. Por ejemplo, en el caso de los insectos, los individuos pasan por las etapas de ser huevos, larvas, crisálidas y por fin adultos. La tasa de supervivencia (b_i), puede estar más influenciada por la etapas del insecto que por su edad. De hecho, la supervivencia de un escarabajo no depende de que tenga 3 o 6 meses, sino de que sea una larva o que se encuentre en la etapa adulta. El paso de una etapa a otra es a menudo bastante flexible y depende de factores muy diversos como la densidad de población, la cantidad de comida suplementaria, la temperatura, la luminosidad, etc. Afortunadamente, podemos modificar la matriz de *Leslie* para tener en cuenta estos factores.

En 1965 *Lefkovich* propuso un modelo matricial para estudiar la evolución de una población que generalizaba al modelo propuesto por *Leslie*. La diferencia fundamental entre ambos modelos reside en el hecho de que ahora se clasifica a los individuos de la población en

etapas, en lugar de clases de edades.

L. P. Lefkovich nació en Londres en el año 1929, donde se graduó en zoología, entrando a trabajar en 1954 en el Agricultural Research Council Pest Infestation Laboratory de Londres. Fue el primero en estudiar los modelos matriciales clasificando previamente a los individuos por etapas en lugar de por edades.

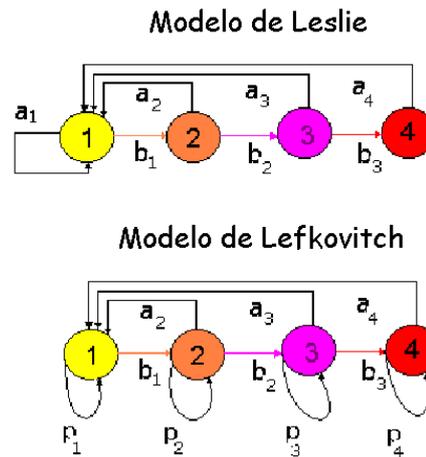


Figura 4.17. Comparación modelos de *Leslie* y *Lefkovich*.

La Figura 4.17 ilustra de manera esquemática a los dos modelos. Ahora p_i representa la probabilidad de que un individuo que se encuentra en la etapa i en el período n permanezca en la misma etapa para el período siguiente $n + 1$. En consecuencia, utilizando el razonamiento que venimos usando en los modelos discretos matriciales, es fácil comprobar que el modelo viene dado por,

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix}$$

En contraste con la matriz de *Leslie*, ahora tenemos entradas positivas p_i , en la diagonal principal.

A continuación mostramos una tabla que nos permite escribir la matriz de transición para un modelo simplificado que representa el ciclo de vida de un insecto, con tres etapas (huevo, larva, adulto).

	huevo	larva	adulto
huevo	0	0	F_{ah}
larva	P_{hl}	P_{ll}	0
adulto	0	P_{la}	P_{aa}

Como ejemplo más complejo, consideraremos un modelo que analiza el crecimiento de una colonia de corales. Hemos considerado tres clases de tamaños (pequeños, medianos y grandes). La tabla siguiente permite encontrar la matriz de transición

	pequeño	mediano	grande
pequeño	$P_{pp} + F_{pp}$	$P_{mp} + F_{mp}$	$P_{gp} + F_{gp}$
mediano	P_{pm}	P_{mm}	P_{gm}
grande	P_{pg}	P_{mg}	P_{gg}

Como antes, la diagonal principal representa la probabilidad de que una colonia permanezca en la misma clase de tamaño. Los elementos de la subdiagonal principal representan la probabilidad de que una colonia crezca y pase al tamaño siguiente. Sin embargo, ahora existe la posibilidad de que parte de la colonia pueda fragmentarse (P_{gm}) y pasar de ser grande a ser mediana, o bien (P_{mp}) pertenecer a las colonias pequeñas. Las colonias pequeñas pueden agruparse y formar colonias medianas (P_{pm}) o directamente colonias grandes (P_{pg}). Finalmente, observemos que la primera fila es la suma de dos términos, el primero de ellos corresponde a la fecundidad, y el segundo a la transición de un estado a otro. Puede probarse que para este tipo de modelos su comportamiento en el límite es exactamente igual al modelo de *Leslie*, es decir:

- La población tiene un tipo de crecimiento exponencial, y presenta una distribución estable de etapas.

EJEMPLO 4.23

- La siguiente tabla muestra la matriz de transición para un modelo simplificado que representa el ciclo de vida de un insecto, con tres etapas (huevo, larva, adulto).

	huevo	larva	adulto
huevo	0.25	0	2
larva	0.75	0.5	0
adulto	0	0.5	1

A continuación vamos a realizar una proyección a largo plazo de la población sabiendo que inicialmente hay 10 huevos, 5 larvas y 7 adultos.

Podemos calcular la población después de 25 y 26 años, utilizando el programa *Mathematica*®.

Si $\mathbf{x}_0 = (10, 5, 7)^T$ es el vector de los valores iniciales, y A la matriz de transición,

```
MatrixPower[A, 25].x0
```

```
MatrixPower[A, 26].x0
```

```
{547115.39, 390901.81, 355547.78}
```

```
{847874.41, 605787.45, 550998.68}
```

Es decir, tenemos un crecimiento con una tasa

$$\frac{847874.41}{547115.39} = \frac{605787.45}{390901.81} = \frac{550998.68}{355547.78} = 1.549718,$$

que coincide con el valor propio dominante de la matriz A .

Eigenvectors[A]

{ 1.5497176, 0.10001411+0.744708 i, 0.10001411+0.744708 i }

A la larga, la población crece a un ritmo del 55 %.

La distribución entre etapas es

$$\frac{547115.39}{547115.39 + 390901.81 + 355547.78} = 0.42295$$

$$\frac{390901.81}{547115.39 + 390901.81 + 355547.78} = 0.30218$$

$$\frac{355547.78}{547115.39 + 390901.81 + 355547.78} = 0.27485$$

La estabilidad en los porcentajes en cada una de las etapas viene dada por el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1.54971$

Eigenvectors[A]

{{0.719295, 0.5139203, 0.467440}, {0.7195268 - 5.5511151 10⁻¹⁷ i, -0.302013 - 0.5624783 i, -0.053913 + 0.26791885 i}, {0.7195268 + 5.5511151 10⁻¹⁷ i, -0.302013 + 0.5624783 i, -0.053913 - 0.26791885 i}}

$$0.719295/(0.719295 + 0.5139203 + 0.467440) = 0.422952 \Rightarrow 42.3\%$$

$$0.513903/(0.719295 + 0.5139203 + 0.467440) = 0.302189 \Rightarrow 30\%$$

$$0.467440/(0.719295 + 0.5139203 + 0.467440) = 0.274859 \Rightarrow 27.7\%$$

Podemos comprobar el resultado encontrando los porcentajes, por ejemplo, en la población al cabo de 25 años,

$$547115.39/(547115.39 + 390901.81 + 355547.78) = 0.422951$$

$$390901.81/(547115.39 + 390901.81 + 355547.78) = 0.302189$$

$$355547.78/(547115.39 + 390901.81 + 355547.78) = 0.274859$$

Estos modelos matriciales basados en el tamaño y no en la edad, suelen utilizarse para estudiar la evolución de poblaciones de plantas, donde es más fácil medir su tamaño que conocer su edad. Recordemos que en estos modelos, estamos suponiendo que las tasas de supervivencia y reproducción son constantes y esto hace que en la práctica solamente podamos usarlos para períodos cortos de tiempo, para los cuales estas hipótesis son ciertas.

4.6. Modelos que dependen de la densidad

En ciertas ocasiones, es posible que no todos los individuos de la población se reproduzcan y mueran con la misma tasa. Recordemos que la hipótesis que venimos manteniendo en este tema, es que era la edad la que produce la modificación de las tasas de supervivencia y natalidad, lo cual daba lugar al modelo de *Leslie*, que es independiente de la densidad de la población.

Es posible introducir esta nueva hipótesis en el estudio de los modelos matriciales. Por ello, al construir un modelo debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- ¿Dependerá la tasa de natalidad, o la tasa de supervivencia, de la densidad de la población?
- ¿La densidad depende sólo de la población total o por el contrario el efecto está distribuido sobre varias clases de edades?
- ¿Son los efectos de la densidad instantáneos, o existe un tiempo de retardo?

4.6.1. Caso práctico

Como un ejemplo que ilustra los comentarios anteriores comentaremos el trabajo de *Law* (1975), relacionado con un tipo de hierba llamada *Poa annua*. Para estudiar su crecimiento, *Law* consideró cuatro clases de edad y además la etapa de semillas (Figura 4.18). La duración de cada clase era aproximadamente de ocho semanas.

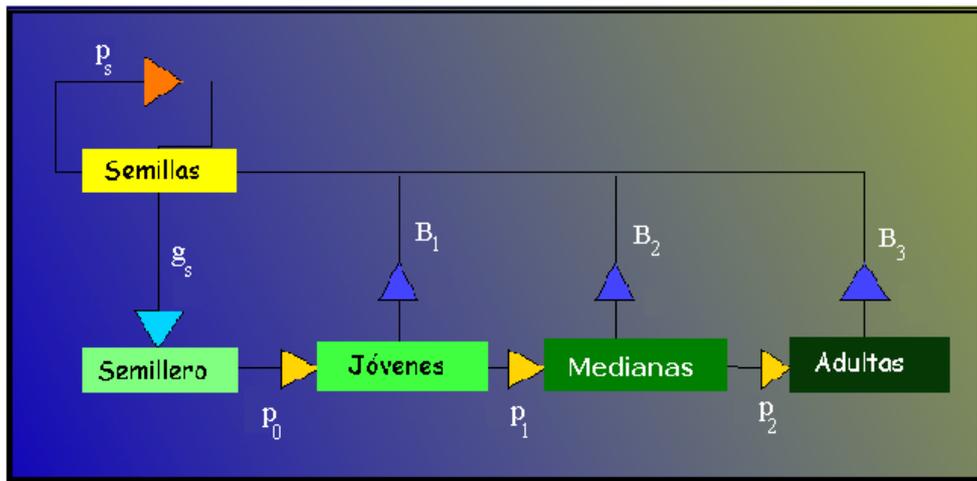


Figura 4.18. Ciclo de vida de *Poa annua*.

La matriz de transición para este ciclo de vida viene dada por

$$\begin{pmatrix} p_s & 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ g_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo su estructura muy parecida a la matriz de *Leslie*. No obstante, la incorporación de un banco de semillas (semillero) en el modelo hace que el primer elemento de la matriz p_s sea la probabilidad de que una semilla sobreviva pero no germine. *Law* encontró de

manera experimental los siguientes valores

$$p_0(N) = \begin{cases} 0.75 - 0.25e^{0.00005N} & \text{si } N < 27726 \\ 0 & \text{si } N > 27726 \end{cases}$$

$$p_1(N) = p_2(N) = 0.75$$

$$p_s = 0.2$$

$$g_s(N) = 0.05$$

$$B_1(N) = B_3(N) = 100e^{-0.0001N}$$

$$B_2(N) = 200e^{-0.0001N}$$

siendo N la densidad de la población. La representación gráfica de dichas funciones es la siguiente:

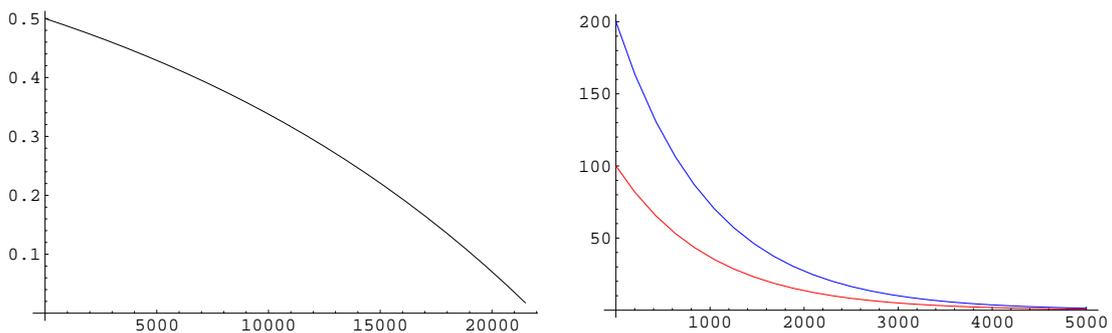


Figura 4.19. Izquierda = $p_0(N)$. Derecha = $B_1(N) = B_3(N)$ (rojo), $B_2(N)$ (azul).

Como puede apreciarse, entre dos intervalos de tiempo, el 20 % de las semillas del semillero sobrevivían pero seguían dormidas, mientras que 5 % de ellas germinaban. La proporción de individuos que sobreviven p_0 es inicialmente 0.75 cuando la densidad de la población es muy baja, pero a medida que ésta aumenta, dicha proporción va disminuyendo.

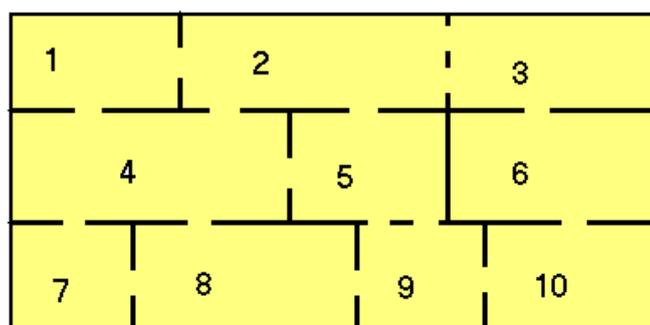
Puede comprobarse que la población crece y además se mantienen constantes las proporciones de cada una de las clases .

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 3

- 1.- Supongamos un sistema con dos estados: un cazador dispara contra unos animales. Existe el estado E_1 de acierto, y el estado E_2 de fallo. Se sabe que si el cazador acierta, entonces en el segundo disparo tiene una probabilidad de $3/4$ de acertar. Si por el contrario en un disparo falla, entonces la probabilidad de acertar en el siguiente es de $1/2$.
 - Escribir la matriz estocástica A que representa a esta cadena de *Markov*.
 - Dibujar el diagrama de estados de la cadena.
 - ¿Es la cadena regular?.
 - Encontrar el valor de A^t y analizar el resultado.

- 2.- Se encierra a una rata en una caja dividida en compartimentos con puertas que los comunican según se muestra en la figura. Cuando la rata sale de un compartimento elige uno al azar.



- Indicar si el proceso puede representarse por una cadena de *Markov*.
 - En caso afirmativo, calcular la matriz de transición A .
 - Estudiar si la cadena es regular.
 - Dibujar el diagrama de estados.
 - Estudiar la evolución a largo plazo del proceso.
- 3.- Las familias de un país se clasifican según residan en áreas rurales, urbanas o suburbanas. Los estudios de movilidad demográfica estiman que, en promedio, en el curso de un año, el 15 % de las familias urbanas cambian

de residencia y se trasladan a un área suburbana, y el 5% a un área rural; mientras que el 6% de las familias residentes en áreas suburbanas se trasladan a áreas urbanas, y el 4% a áreas rurales, y finalmente el 4% de las familias rurales emigran a las áreas urbanas y el 6% a las suburbanas.

- Calcular la probabilidad de que una familia que vive ahora en un área urbana siga viviendo en un área urbana dentro de dos años?. ¿Y en una suburbana?
 - Supongamos que actualmente el 40% de las familias del país viven en áreas urbanas, el 35% en suburbanas y el 25% en rurales ¿Qué porcentaje de familias vivirán en áreas urbanas dentro de dos años?,
 - ¿Qué distribución de población es de prever en el futuro?
- 4.- En la herencia autosómica, supongamos que cada planta se fecunda con una de su propio genotipo. Construir un modelo matricial y analizar su comportamiento a largo plazo.
- 5.- El parque natural Sierra de Cazorla decide programar mensualmente sus visitas guiadas siguiendo el siguiente método: Si en un mes se visitó el pueblo, al mes siguiente se visitará, dos de cada tres veces el parador, y una de cada tres veces el interior del parque. Si la visita fue al interior, al mes siguiente será a cualquiera de los tres lugares con igual probabilidad. Finalmente, si la visita fue al parador, al mes siguiente se visitará el parador una de cada tres veces, y el pueblo de Cazorla dos de cada tres veces. Después de seguir este esquema durante cinco años, ¿se habrá cumplido con la programación del parque de visitar al menos un 25% el parador nacional de turismo?
- 6.- El siguiente modelo discreto matricial $\vec{X}(t+1) = A\vec{X}(t)$, siendo $t = 0, 1, 2 \dots$ las distintas generaciones (períodos), representa a una población de venados hembras con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

- Demostrar que a largo plazo la población crecerá por un factor aproximado de 1.27
- Supongamos que no deseamos que la población crezca. Podemos controlar dicha población eliminando algunas hembras. Si α representa la proporción de hembras que sacrificamos en cada período, explicar por qué ahora la matriz que representa al modelo es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 - \alpha \end{pmatrix}.$$

- Explicar por qué no es deseable un $\alpha = 0.6$

- Experimentar con diferentes valores de α de manera tal que la población de hembras no crezca ni desaparezca.

7.- Supongamos un modelo de *Leslie* para describir la evolución de una población dividida en 7 clases de edades $\vec{X}(t+1) = L\vec{X}(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$, con

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.19 & 0.44 & 0.80 & 0.50 & 0.45 \\ 0.87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.87 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.87 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.87 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 521 \\ 403 \\ 316 \\ 253 \\ 200 \\ 143 \\ 411 \end{pmatrix}$$

- ¿Cuál es la interpretación de los valores $L_{1,j}$, $j \geq 2$?
 - ¿Cuál es la interpretación de los valores $L_{i+1,i}$, $1 \leq i \leq 6$?
 - Calcular el valor propio dominante de L , e interpretar el resultado.
 - Encontrar la tasa r de crecimiento de la población teniendo en cuenta el resultado obtenido en el apartado anterior.
 - Calcular el vector propio asociado al valor propio dominante, e interpretar el resultado.
- 8.- Una sala de cine decide programar las películas según el siguiente método: si una semana se proyectó una norteamericana, a la semana siguiente se programará, dos de cada tres veces, una española, y una de cada tres veces, una francesa. Si la película programada fue francesa, dos de cada tres veces será norteamericana y una de cada tres francesa. Finalmente, si la película programada fue española, la semana siguiente se programará española una de cada tres veces y norteamericana dos de cada tres veces. Si inicialmente las cuotas de pantalla son el 50 % para el cine norteamericano, el 35 % para el cine español, y el 15 % para el francés.

- ¿Estamos ante una cadena de Markov regular? Justifica la respuesta.
- Comprueba que la matriz que representa al modelo tiene a $\lambda = 1$ como valor propio.
- Analiza el comportamiento a largo plazo del modelo para contestar a la siguiente cuestión. Después de seguir este esquema durante un “largo plazo”, ¿se habrá cumplido con la cuota de pantalla que exige programar al mes el 25 % de películas de producción nacional?

9.- Supongamos el modelo discreto matricial

$$X(t+1) = AX(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.75 & 1 \end{pmatrix}$$

- ¿Son todos los estados accesibles?

- Si $X(0) = (10, 20, 0)$, ¿cuál será la distribución después de 30 años?
- 10.- Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedades A y B . Se sabe que cada día un 20% de aves del A se traslada a B mientras que un 30% de aves de B lo hace a A .
- Si inicialmente hay el mismo número de aves en cada humedad, ¿qué porcentaje de éstas se encuentran en cada uno de ellos después de dos días?
 - ¿Qué porcentaje de ellas debe haber en cada humedad si se sabe que este porcentaje se mantiene constante a través del tiempo?. Comprueba el resultado
 - ¿Cuál es el porcentaje de aves en cada humedad después de un número elevado de días?
- 11.- Se pretende realizar el estudio de la contaminación de cierta región en la que se están produciendo vertidos industriales. Se han clasificado los terrenos en los siguientes niveles de contaminación: (a) terrenos limpios, (b) terrenos con nivel de contaminación medio, y (c) terrenos con nivel de contaminación alto. Se comprueba que la evolución de la contaminación de un año para otro se ajusta a los siguientes datos. Cada año se contamina un 30% de los terrenos limpios de la siguiente manera:
- El 20% con un nivel de contaminación medio
 - El 10% con un nivel de contaminación alto.
- Anualmente el 30% de los terrenos con nivel de contaminación media pasan a tener contaminación alta. Ante esta situación, la autoridades emprenden un plan de recuperación de las zonas contaminadas. El plan actúa directamente sobre los terrenos más contaminados consiguiendo, por un lado, limpiar totalmente el 70% de los terrenos con contaminación alta, y por otro, reducir la contaminación de otro 10% de zona de alta contaminación que pasa a contaminación media. El territorio estudiado tiene una extensión de 1000 hectáreas e inicialmente todas ellas estaban limpias. Estudiar la tendencia pasado un número suficientemente grande de años, ¿cuántas hectáreas de terreno estarán totalmente limpias?, ¿cuántas hectáreas de terreno estarán con una alta concentración de productos contaminantes?
- 12.- Una población de ardillas está dividida en tres clases de edades de dos años de duración, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de Leslie viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra y una mediana 24, además la cuarta parte de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 50% de las medianas se hacen adultas.
- Estudiar la evolución de la población a través de la tasa neta de reproducción.

- ¿Tiene la matriz L un valor propio estrictamente dominante? Justifica la respuesta.
- Calcular el % de crecimiento o decrecimiento de la población.
- Si $\vec{X}(0) = (40, 20, 30)^T$. ¿Cuál será la población cuatro años después?.
- Si sabemos que a largo plazo la población de ardillas será de 7900. ¿Cómo estarán distribuidas en cada una de las clases?.

13.- Dado el modelo discreto matricial de Leslie,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

- Si la unidad de tiempo se considera un año, explicar el significado de cada uno de los coeficientes de la matriz
- Calcular los valores de α para los cuales la población a largo plazo desaparece, permanece constante y aumenta indefinidamente.
- Hallar el valor de α para que la población crezca un 10% anual ¿Tienden las clases de edad, en este caso, hacia unas proporciones constantes? En caso afirmativo, encontrarlas.

14.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 14.a.- ¿Es A una matriz de Leslie? Justificar la respuesta e interpretar biológicamente los elementos de la matriz.
- 14.b.- ¿Tiene la matriz A algún valor propio positivo estrictamente dominante? Justificar la respuesta
- 14.c.- Sea el modelo matricial:

$$\vec{x}(t+1) = A\vec{x}(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Si $\vec{x}(0) = (100, 100, 100)^T$, ¿cuál será el valor aproximado de $\vec{x}(30)$?

15.- Sea una población de hembras dividida en tres clases de edades de 5 años de duración. Su evolución está determinada por un modelo de Leslie siendo su matriz,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- ¿Desaparecerá esta población a largo plazo?
 - Encontrar el valor de a_2 para que cada 5 años la población aumente en un 50%
 - Para el valor de a_2 anteriormente encontrado. Si a largo plazo el número de hembras es de 800, ¿cuántas de ellas serán jóvenes?
-

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- [1] **ANTON, H., RORRES, C. Elementary Linear Algebra (applications version). John Wiley and Sons, Inc. New York, 2000.**

Es la última edición en inglés de [6]. El campo de aplicaciones que los autores presentan del Álgebra Lineal es muy completo y de plena actualidad. En relación a la presente Memoria, en el libro podemos encontrar ampliamente desarrollado el capítulo I, especialmente lo que hace referencia a las cadenas de *Markov*, al modelo de *Leslie* y sus aplicaciones, al estudio de la explotación de una población de animales y a la explotación racional y duradera de un bosque.

Los conceptos matemáticos se acompañan con numerosos ejemplos ilustrados generosamente con un nivel de calidad que no es frecuente en un texto de estas características. Se presta un gran interés en la forma de exponer los temas, de tal manera que puedan ser comprendidos por una gran parte de los alumnos. De esta manera, se ha potenciado la claridad de exposición de los conceptos, en detrimento de la profundidad. Finalmente, en cada uno de los capítulos se incluyen numerosos ejercicios resueltos y propuestos con diferentes grados de dificultad.

- [2] **BLANCHARD, P.; DEVANEY, R.L.; HALL, G.R. Ecuaciones Diferenciales. International Thomson Editores, S.A. de C.V., 1999.**

Las ecuaciones diferenciales son el lenguaje en el que se expresan los principios matemáticos que rigen muchos de los fenómenos biológicos. El enfoque clásico para su estudio es el de ofrecer procedimientos analíticos para poderlas resolver. Sin embargo, en muchas de ellas no pueden encontrarse las soluciones a través de estos métodos. Este texto elige para su estudio otro punto de vista, ya que se centra en la formulación de las ecuaciones diferenciales y en la interpretación de sus soluciones. Este camino, consideramos que es el más interesante para los alumnos de Biología, pues en la mayoría de los casos, se está más interesado en analizar el comportamiento de un determinado sistema biológico que en saber el valor exacto en un momento determinado. Siguiendo esta línea argumental, el libro aborda extensamente estos procedimientos geométricos o cualitativos. Al mismo tiempo, debido a la popularización del uso de los ordenadores y calculadoras programables, los autores presentan técnicas numéricas para conocer el valor aproximado de las soluciones. Frecuentemente, en aquellas ocasiones donde es posible aplicar los métodos clásicos de resolución, se encuentra la solución de la ecuación diferencial y paralelamente se realiza su estudio cualitativo y numérico con el objetivo de comparar los distintos métodos utilizados.

El libro puede utilizarse en gran parte de los capítulos III, IV, V y VI de la presente Memoria. El nivel con el que está escrito no es demasiado elevado, sirviendo de ejemplo como el rigor y la claridad de exposición pueden ir conjuntamente en un texto de matemáticas. A lo largo de su desarrollo se proponen diferentes prácticas a llevar a

cabo en el Laboratorio de Matemáticas y asimismo, aparecen pequeñas biografías de matemáticos actuales cuyas investigaciones están relacionadas con los temas que se estudian.

- [3] **ZILL, D.G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, 6^a. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1998.**

El texto es un manual esencial de ecuaciones diferenciales para los alumnos. Su objetivo prioritario es la construcción de modelos matemáticos, utilizando como herramientas las ecuaciones diferenciales, su resolución e interpretación. El autor presta especial interés en los conceptos y hechos matemáticos básicos, para que de esta forma los alumnos puedan diferenciar los aspectos fundamentales de los accesorios. A lo largo del libro aparece una gran colección de ejercicios resueltos muy diferentes y con distintos grados de dificultad, presentados de forma escalonada. Las aplicaciones a diferentes campos científicos no sólo están presentes en cada uno de los capítulos, sino que se dedican diversos capítulos independientes al estudio detallado de algunas de estas aplicaciones.

En el contenido del libro se incluye, entre otros, el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, la ecuación diferencial lineal de orden superior, los sistemas de ecuaciones diferenciales, y el estudio de la estabilidad y la teoría cualitativa.

- [4] **BURDEN, R.L.; FAIRES, J.D. Análisis Numérico, 2^a ed. Grupo Editorial Iberoamericano, S.A., 1996.**

Es un libro interesante para introducirse en el Análisis Numérico, ya que es eminentemente práctico, prescindiendo en una gran parte de los casos de las demostraciones. Cada tema se inicia con un ejemplo motivador del concepto a estudiar, posteriormente se desarrolla el aspecto teórico completado con un número elevado de ejemplos y finalmente, cuando es posible, se termina con los algoritmos adecuados para su implantación en el ordenador.

Sus doce capítulos desarrollan gran parte del temario clásico de un curso de Análisis Numérico. Es decir: Interpolación y Aproximación Polinomial. Diferenciación e Integración Numérica. Problemas de Valor Inicial para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Métodos Directos para la Solución de Sistemas Lineales. Técnicas Iterativas en Álgebra de Matrices. Teoría de Aproximación. Aproximación de Valores Propios. Soluciones Numéricas de Sistemas de Ecuaciones no Lineales. Problemas de Valores en la Frontera para EDO. Soluciones Numéricas a Ecuaciones en Derivas Parciales.

Es el complemento adecuado para que los alumnos interesados puedan profundizar en las cuestiones planteadas en clase, relacionadas con el cálculo aproximado de valores y vectores propios, así como con la resolución aproximada de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- [5] **HASTINGS, A. Population Biology (Concepts and Models). Springer - Verlag, New York, Inc., 1997.**

Es un libro básico dedicado a la construcción y posterior análisis de modelos matemáticos aplicados a la Biología. En palabras del profesor *R.F. Costantino* de la Universidad de Rhode Islans, "... *Alan Hastings ha conseguido en este libro integrar*

de forma completa la Biología, las Matemáticas y la Ecología.^{E1} libro se encuentra muy bien escrito, claro, conciso y con la interesante característica de que los ejemplos y modelos que se exponen están basados en problemas de la vida real, o en trabajos actuales de investigación.

Básicamente el libro es una introducción a la ecología de poblaciones, poniéndose especial interés en la construcción de modelos matemáticos sencillos que estudian el crecimiento y el comportamiento de distintas poblaciones. El autor acompaña los conceptos con numerosos gráficos, los cuales pueden ser reproducidos con ayuda de cualquier programa matemático de ordenador.

Tienen especial interés los capítulos dedicados al estudio dinámico de poblaciones, dependiendo o no de la densidad de población, los modelos de competencia y depredación, así como el correspondiente a la evolución de una epidemia. El texto puede ser una excelente introducción para cualquier alumno que esté interesado en problemas relacionados con la Ecología.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

MODELOS DISCRETOS

- [6] ANTON, H. Álgebra Lineal, 3^a ed. Limusa S.A., México, D.F., 1990.
- [7] CANCELO, J.R., LÓPEZ J., GONZÁLEZ-CONDE C.; MONTERO, J.M. Problemas de Álgebra Lineal para economistas, Tomos I y II. Editorial Tebar Flores, Madrid, 1987.
- [8] CASWELL, H. Matrix Population Models (construction, analysis, and interpretation), 2^a ed. Sinauer Associates, Inc. Publishers, Sunderland, Massachusetts, 1995.
- [9] DEVANEY R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems , 2^a ed. Perseus Books Publishing, L.L.C., 1989.
- [10] DEVANEY R.L. First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment. Addison - Wesley, 1992.
- [11] DEVANEY R.L. Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics. Addison - Wesley, 1990.
- [12] GROSSMAN, S.I. Álgebra lineal con aplicaciones, 4^a ed. McGraw Hill Interamericana de México S.A., México, D.F., 1991.
- [13] HOLMGREN, R.A. A first course in discrete dynamical systems, 2^a ed. Springer - Verlag, New York, Inc., 1996.
- [14] ROMERA, M. Técnicas de los Sistemas Dinámicos Discretos. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1997.

- [15] TAKAHASHI, T. Ecuaciones en diferencias con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1990.
- [16] TULJAPURKAR, S.; CASWELL, H. Structured - population models in marine, terrestrial, and freshwater systems. Chapman & Hall, London, 1996.

ECUACIONES DIFERENCIALES

- [17] BERMUDEZ, L., POCIELLO, E., RUÍZ, M.E.; VAREA, J. Ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas. Ediciones Media, Sant Cugat del Vallés, 1995.
- [18] BOYCE-DI PRIMA Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Limusa.
- [19] BRAUN, M. Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericano, 1990.
- [20] GUZMAN, M. DE El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis. Ediciones Pirámides, S.A., Madrid, 1997.
- [21] HIRSCH, M.W.; SMALE, S. Ecuaciones diferenciales. Sistemas dinámicos y Álgebra Lineal. Alianza Universidad, 1980.
- [22] JIMÉNEZ, V. Ecuaciones diferenciales. Cómo aprenderlas, cómo enseñarlas. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia, 2000.
- [23] LOMEN D.; LOVELOCK, D. Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos. Compañía Editorial Continental S.A. de C.V., México, 2000.
- [24] QUESADA, J.J. Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico y Métodos Matemáticos. Santa Rita, Granada, 1996.
- [25] QUESADA, J.M.; MOLINA, M.F.; SÁNCHEZ, F.T.; NAVAS, J. Problemas resueltos de Matemáticas II. Ecuaciones diferenciales. Jaén, Jabalcuz, 2001.
- [26] QUESADA, J.M.; MOLINA, M.F.; SÁNCHEZ, F.T. Matemáticas II para Ingeniería Técnica Industrial. Los autores, Jaén, 2000.
- [27] ROMERO, J.L.; GARCÍA, C. Modelos y Sistemas Dinámicos. Servicio de Publicaciones, Universidad de Cádiz, 1998.
- [28] SIMMONS, G.F. Ecuaciones Diferenciales: con Aplicaciones y Notas Históricas, 2ª. McGraw-Hill, Madrid, 2000.
- [29] SPIEGEL, M.R. Ecuaciones diferenciales aplicadas. Prentice Hall Hispanoamericana, 1997.

CÁLCULO NUMÉRICO

- [30] ISAACSON, E.; KELLER, H.B. Analysis of numerical methods. John Wiley and Sons, 1966.

- [31] NIEVES, A.; DOMINGUEZ, F.C. Métodos numéricos aplicados a la ingeniería. CECSA, México, 1995.

PAQUETES INFORMÁTICOS

- [32] BLACHMAN, N. Mathematica: un enfoque práctico, 1^a. Ariel, Barcelona, 1993.
- [33] FORRESTER, J. Road Maps. A Guide to Learning System Dynamics. System Dynamic in Education Projeet. Sloan School of Management Massachusetts Institute of Tecnology. Cambridge, Massachussets, USA, 1999.
- [34] RAMÍREZ V., ET AL. Matemáticas con Mathematica, vol. I,II y III. Proyecto Sur de Ediciones, Granada, 1995.
- [35] RAMÍREZ V., ET A Matemáticas con Mathematica. Cálculo Numérico. Proyecto Sur de Ediciones, Granada, 1996.

MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS

- [36] BEGON, M.; MORTIMER, M.; THOMPSON, D.J. Population Ecology. A unified study of animals and plants, 3^a. Blackwell Science, 2000.
- [37] CLEMENTS, R.R. Mathematical Modelling. A case study approach. Cambridge University Press, 1989.
- [38] GIORDANO, F.R.; WEIR, M.D.; FOX, W.P. A first course in Mathematical Modelling, 2^a ed. Brooks/Cole, Pacific, California, 1997.
- [39] GOTELLI, N.J. A primer of ecology. Sinauer Associates, Inc. Publishers, Sunderland, Massachusetts, 1995.
- [40] DE GUZMAN, M.; ET AL. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Labor. Serie Matemáticas. Barcelona, 1993.
- [41] DOUCET; SLOEP Mathematical Modeling in the Life Sciencies. Ellis Horwood, 1992.
- [42] EDELSTEIN-KESHET L. Mathematical Models in Biology. Birkhäuser Mathematics Series, McGraw Hill, 1988.
- [43] HADELER, K.P. Matemáticas para Biólogos. Editorial Reverté, 1982.
- [44] HANNON, B.; RUTH, M. Modeling dynamic biological systems. Springer - Verlag, New York, Inc., 1997.
- [45] LARSON R.; HOSTETLER, R.; EDWARDS, B. Cálculo y Geometría analítica. McGraw Hill, 1995.
- [46] LOMELI, H.;RUMBOS, B. Métodos dinámicos en economía. Thomson, 2003.
- [47] MAHAFFY, J.M. Modeling Mathematical. San Diego State University, USA, 2001.

- [48] MARGALEF, R. Ecología. Editorial Omega, 1995.
- [49] MARTINEZ CALVO, C.; PÉREZ DE VARGAS, A. Métodos matemáticos en Biología. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A., Madrid, 1993.
- [50] MARTINEZ CALVO, C.; PÉREZ DE VARGAS, A. Problemas de Biomatemática. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A., Madrid, 1995.
- [51] MURRAY, J.D. Mathematical Biology, 2^a ed. Springer - Verlag, New York, 1993.
- [52] RICKLEFS, R. Invitación a la Ecología la Economía de la Naturaleza, 4^a ed. Editorial Médica Panamericana, Buenos Aires, Argentina, 1998.
- [53] RIOS, S. Modelización. Alianza Universidad, Madrid, 1995.
- [54] RODRÍGUEZ, J. Ecología. Pirámide, Madrid, 1999.
- [55] VALDERRAMA BONNET, M. J. Modelos matemáticos en las ciencias experimentales. Ediciones Pirámide, 1990.
- [56] VANDERMEER, J. Elementary Mathematical Ecology. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1990.

PAQUETES DE CÁLCULO

MATHEMATICA. Mathematica Wolfram Research Inc. 201W. Springfield Av. Champaign.

VENSIM. The Ventana Simulation Environment. Vensim Professional 32, version 3.0A. Copyright © 1988-1997 Ventana Systems Inc.

STATGRAPHICS. Plus for Window version 3.1. Copyright © 1994-1997 by Statistical Graphics Corporation.

POPULUS. Version 3.41X, 1994. Don Alstad. Department of Ecology, Evolution & Behavior. University of Minnesota, 1987. Upper Buford Circle. St Paul, MN 55108-6097.

RECURSOS EN LA RED

- http://smub.st-and.ac.uk/jason_matthiopoulos/page5.html
- <http://www.epa.gov/epahome/models.htm>
- <http://www.uni-klu.ac.at/gossimit/links/bookmksd.htm>
- <http://cisat.isciii.es/supercourse/>

- http://perso.wanadoo.fr/l.d.v.dujardin/ct/eng_index.html
- <http://hypertextbook.com/chaos/links.shtml>
- <http://www3.uakron.edu/biology/mitchell/ecology/ecolinks.html>
- <http://rulbii.leidenuniv.nl/wwwkim/popdyn.html>
- <http://www.gypsymoth.ento.vt.edu/sharov/PopEcol/popecol.html>
- <http://www-rohan.sdsu.edu/jmahaffy/courses/s00/math121/>
- <http://everest.ento.vt.edu/sharov/3d/3dinsect.html>