



Tema 3

MODELOS BASADOS EN ECUACIONES Y SISTEMAS EN DIFERENCIAS

3.1. Introducción

En ocasiones, al construir un modelo matemático interesa elegir una variable que tome valores discretos. Así ocurre, por ejemplo, con el tiempo, ya que es común realizar mediciones regulares a la hora de controlar un experimento. Estos datos constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente. Para este tipo de modelos determinísticos discretos, las herramientas matemáticas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias. El presente tema es una breve introducción a su estudio. Comenzaremos con los conceptos y definiciones básicas y nos centraremos en el estudio de las ecuaciones en diferencias lineales de primer y segundo orden con coeficientes constantes, así como en los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes.

A lo largo del capítulo llamaremos t a la variable independiente, y supondremos que sólo toma los valores enteros $t = 0, 1, 2, \dots$. Generalmente, t representa el número de generaciones (años, trimestres, meses, días, \dots) que han transcurrido desde un momento inicial $t = 0$. Del mismo modo, $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ es una sucesión, donde y_t corresponde a un valor concreto de t .

3.1.1. Sucesión de Fibonacci

Leonardo Pisano es más conocido por su apellido *Fibonacci*. Nació en Pisa en el año 1170 y murió en la misma ciudad en 1250. Aunque nació en Italia, fue educado

en el Norte de África, donde su padre *Guilielmo*, era un representante diplomático de la república de Pisa en la ciudad argelina de Bugía. Durante su estancia en esta ciudad estudió con profesores árabes quienes le enseñaron el cálculo posicional hindú que posteriormente introdujo en Europa sustituyendo al sistema de numeración romano. En el año 1200 regresó a Pisa y escribió un número importante de trabajos, actualizando algunos resultados matemáticos, así como proporcionando nuevos e interesante conceptos, entre ellos, como se ha comentado, nuestro actual sistema de numeración posicional.



Figura: 3.1:Leonardo Fibonacci y Liber abbaci.

Hoy en día todavía se conservan copias de algunos de sus libros, como por ejemplo, *Liber abbaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225), y *Liber quadratorum*. Un problema que se encuentra en la tercera sección de su libro *Liber abbaci* llevó a la introducción de los números de Fibonacci y a la sucesión que lleva su nombre, y es la razón por la que aún hoy en día es tan recordado.

Supongamos que un par de conejos recién nacidos, un macho y una hembra se colocan en el campo. Los conejos son fértiles a la edad de un mes, así que al final del segundo mes una hembra puede producir otro par de conejos. Supongamos que nuestros conejos nunca mueren, y que las hembras siempre producen un nuevo par (un macho y una hembra) cada mes, desde el segundo de los meses. La pregunta que Fibonacci se hizo fue la siguiente, ¿cuántos pares de conejos tendremos en un año?

Si observamos atentamente del enunciado del problema deducimos que:

- Al final del primer mes, hay un solo par.
- Al final del segundo mes, la hembra produce un nuevo par, así que ahora tenemos dos parejas de conejos en el campo.
- Al final del tercer mes, la hembra inicial produce un segundo par, haciendo que en el campo tengamos tres pares de conejos.

- Al final del cuarto mes, la hembra original ha producido otro nuevo par y la hembra nacida dos meses antes produce su primer par, con lo que tendremos 5 pares.
- Y así sucesivamente.....

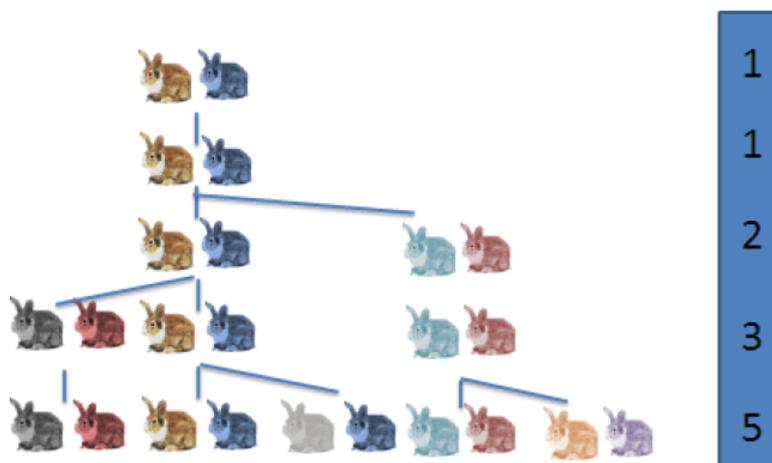


Figura: 3.2:Leonardo El problema de los conejos.

El número de pares de conejos en el campo al inicio de cada mes es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.,

una sucesión, que se inicia con 1 y 1 donde cada otro término es la suma de los dos anteriores, y que recibe el nombre de la sucesión de *Fibonacci*.

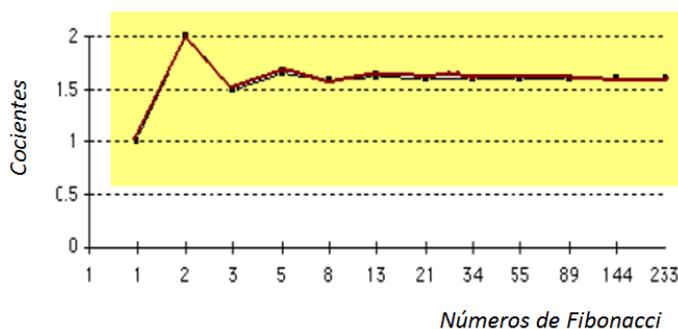


Figura: 3.3:Cociente de términos consecutivos.

Si hacemos el cociente de dos números consecutivos de la sucesión obtenemos esta otra:

$1/1 = 1, 2/1 = 2, 3/2 = 1.5, 5/3 = 1.666, 8/5 = 1.6, 13/8 = 1.625, 21/13 = 1.61538,$

Es fácil ver lo que sucede si dibujamos estos resultados en un gráfico (Figura 3.3), el cociente tiende a un valor particular, el cual recibe el nombre de número áureo, tiene un valor aproximado de 1.61804, y se representa por la letra griega ϕ (Phi).

Si la sucesión se inicia con otros dos números cualesquiera, $\{3, 7, 10, 17, 27, 71, \dots\}$ el cociente entre un término y el anterior en la sucesión tiende al número áureo ϕ .

También podemos hacer aparecer el número áureo a través de una cuestión estética, que aparece en el libro *La Divina proporción* de *Luca Pacioli*. Si consideramos un segmento y preguntamos cuál es la división más agradable en dos partes del mismo, algunas personas pensarán que el punto medio es el más adecuado, otras en cambio pensarán que la tercera o cuarta parte. La respuesta correcta no es ninguna de ellas, ya que la división correcta es la conocida con el nombre de razón áurea o divina proporción. Si el segmento es de longitud 1, entonces el segmento mayor tiene longitud 0.618.... A un segmento dividido de esta forma decimos que está dividido en la sección áurea. Pensemos que si u es la longitud del segmento, se tiene que verificar:

$$\frac{u}{u+v} = \frac{v}{u}$$

si llamamos $\phi = u/v$, entonces

$$\frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\phi} = \phi \Rightarrow \phi + 1 = \phi^2 \Rightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Simplificando, obtenemos la ecuación de segundo grado que tiene como raíz el valor

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$$

que como sabemos es el número áureo.

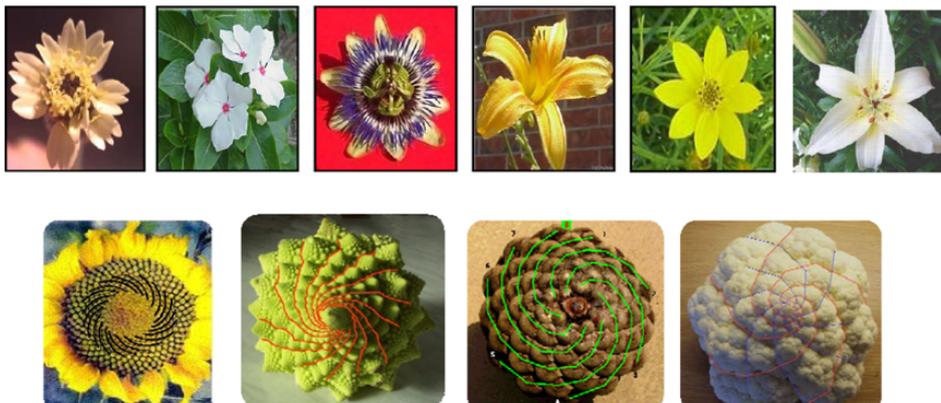


Figura 3.4: Plantas y sucesión de Fibonacci.

En muchas plantas, el número de pétalos es un número de la sucesión de *Fibonacci*. La azucena y el iris tienen tres pétalos; las rosas salvajes 5; el delphiniums 8; algunas

caléndulas granuladas 13; la achicoria 21; mientras que algunas margaritas pueden encontrarse con 34, 55 y hasta 89 pétalos. Algunas especies son muy precisas sobre el número de pétalos que tienen, (por ejemplo el botón de oro), pero otras tienen pétalos que están muy cerca de ellos, pero que su media es justo un número de *Fibonacci*.

Se puede comprobar que algunas semillas se disponen según espirales, una de ellas a la izquierda y otra a la derecha. Si contamos la espiral de la derecha al final del dibujo, nos encontramos con que hay 34. ¿Cuántas existen hacia el otro lado? Puede comprobarse que estos dos números son vecinos en la sucesión de *Fibonacci*.

La pregunta inmediata que nos planteamos es ¿por qué sucede esto? La respuesta se encuentra detrás de un problema de optimización. Si deseamos apilar objetos de la “mejor manera posible”, la respuesta será que dependerá de la forma que posean.

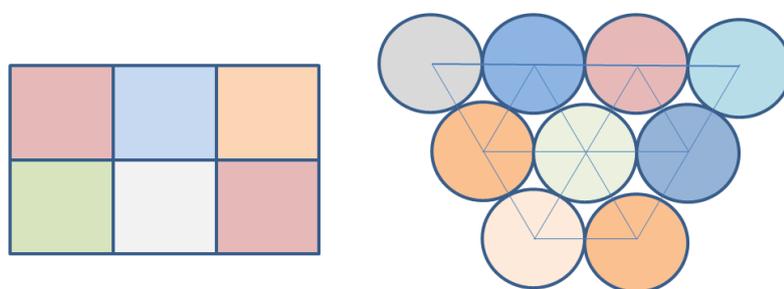


Figura 3.5: Formas de apilar objetos.

Si estos objetos son cuadrados, la respuesta correcta será la figura 3.5 de la izquierda. Sin embargo, si estos objetos son redondos la mejor disposición es la conocida con el nombre de hexagonal (figura 3.5 derecha). Por otro lado, muchas plantas que poseen un tallo alto tienen adheridas las hojas según un esquema bastante interesante, En efecto, se cumple la llamada ley de la *Filotaxis* (ciencia que estudia el ordenamiento de los elementos de una planta), “*para cada especie de plantas el ángulo que forman dos hojas consecutivas, llamado ángulo de divergencia, es constante*”.

Pero, ¿por qué la naturaleza no utiliza alguna de éstas disposiciones? La mayoría de las semillas son redondas, entonces ¿por qué no se disponen en forma hexagonal las semillas del girasol? La razón es que aunque la simetría hexagonal es la mejor manera de empaquetar semillas circulares, esto no responde a la pregunta de por qué las hojas se distribuyen alrededor del tallo o como se empaquetan las semillas del girasol (las cuales son circulares porque es la forma que encierra máxima área con una determinada longitud), cuando están creciendo en tamaño .

La naturaleza utiliza el mismo patrón para colocar las semillas del girasol, los pétalos alrededor del borde de una flor y las hojas alrededor del tallo. Además, sigue siendo eficiente cuando la planta continúa creciendo. Los botánicos han demostrado que las plantas crecen desde un grupo diminuto de células dispuestas en el extremo de cualquier planta en crecimiento, llamado el meristemo. Hay un meristemo separado

al final de cada rama o varita y allí es donde se forman las nuevas células, que crecen en tamaño, pero las nuevas células solo se forman en esos puntos de crecimiento.

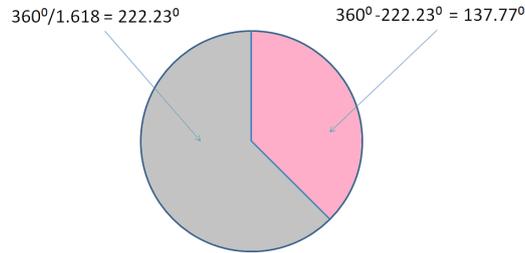


Figura 3.6: Ángulo de giro.

Las nuevas células expanden el tallo y de esta manera se produce el crecimiento. También estas células crecen en forma de espiral, como si el tallo girase un ángulo y entonces aparece la nueva célula, vuelve a girar de nuevo y entonces se forma otra nueva célula. Estas nuevas células dan lugar a una nueva rama, o tal vez a un nuevo pétalo en una flor. **Lo asombroso es que un simple ángulo fijo produce el diseño óptimo no importa como de grande sea el crecimiento de la planta.** Una vez que una semilla está situada en el girasol, esta semilla es empujada en línea recta por otra nueva semilla, pero guarda el ángulo original en el girasol. No importa como de grande sea el girasol, las semillas siempre se empaquetarán uniformemente.

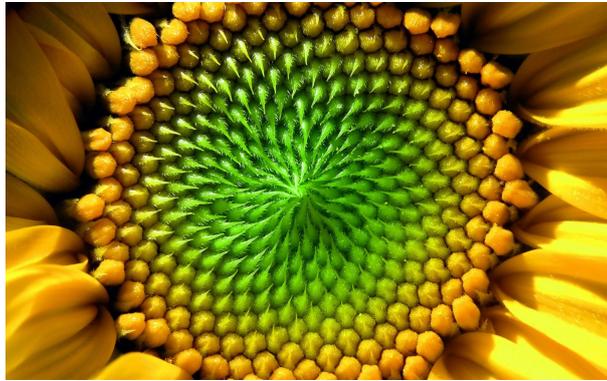


Figura 3.7: Disposición semillas del girasol.

Todo esto fue intuido por muchos científicos en el último siglo, pero el principio de que un ángulo fijo produce empaquetamientos uniformes sin importar el tamaño de este crecimiento, se demostró en 1993 por los matemáticos franceses *Douady* y *Couder*. La distribución de las hojas es la misma que el de las semillas y los pétalos. En todos ellos aparece el número 0.618034 por vuelta. Si hablamos de grados serán 0.61803 de 360° , que suponen 222.23° . Pero como siempre tendemos a diferenciar el ángulo mas pequeño, éste será 137.77° . Si hay $\phi = 1.618..$ hojas por vueltas, entonces tenemos la mejor manera de empaquetar, de esta manera, cada hoja recibirá la máxima cantidad de luz, proporcionando la menor sombra a las otras. También da la mejor área posible de exposición, para que cuando la lluvia caiga, baje a través de las hojas y se deposite en las raíces.

Pero debemos dejar claro que no siempre la sucesión de *Fibonacci* se encuentra en el número de pétalos de cualquier flor, o en el número de semillas de plantas del tipo del girasol, aunque si están cercanos a algunos términos de la sucesión de *Fibonacci*. De todos modos, en un trabajo publicado por *Jean* en 1992, de 12700 observaciones correspondientes a 650 especies de plantas diferentes, la sucesión de *Fibonacci* está presente en un 90% de todas aquellas donde sus elementos están dispuestos en formas de espirales.

Observemos que si notamos a y_n al valor del término que ocupa el lugar n de la sucesión de *Fibonacci*, entonces podemos modelizarla mediante la siguiente ecuación:

$$y_0 = y_1 = 1, \quad y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad n \geq 2$$

Se trata de una ecuación en diferencias homogénea de orden dos, lineal y de coeficientes constantes que posteriormente podemos resolver.

DEFINICIÓN 3.1.1 *Llamamos ecuación en diferencias a una expresión del tipo*

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, y_{t+n-2}, \dots, y_{t+1}, y_t, t) = 0.$$

Una solución de la misma, es toda sucesión y_t que la cumpla.

El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de **solución general**. Esta solución general presenta cierto número de parámetros, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes **soluciones particulares**.

DEFINICIÓN 3.1.2 *Llamamos orden de la ecuación, a la diferencia entre el mayor y el menor de los índices que afectan a y .*

La expresión $-2y_{t+3} + 3y_t = t + 1$, es una ecuación en diferencias de orden $t + 3 - t = 3$, o de tercer orden.

La ecuación en diferencias $y_{t+1} - y_t = 2$, es de primer orden y tiene por solución general a todas las progresiones aritméticas de razón 2, es decir

$$y_t = y(t) = 2t + C,$$

siendo C una constante cualquiera. Una solución particular, es la progresión aritmética

$$\{1, 3, 5, 7, \dots, 2t + 1, \dots\}.$$

EJEMPLO 3.1

- Vamos a construir el modelo que corresponde a la siguiente situación. Supongamos que una población de insectos crece el triple, en cada período de tiempo que transcurre entre dos medidas, de lo que creció en el período inmediatamente anterior.

Si llamamos y_t al número de individuos en el instante t ; del enunciado del ejemplo se deduce,

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t), \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

simplificando obtenemos,

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0, \quad (3.1)$$

que es una ecuación en diferencias de segundo orden. Si por ejemplo, conocemos el número inicial de insectos, $y_0 = y(0) = 100$, podemos sustituir y obtendríamos

$$y_2 - 4y_1 + 300 = 0,$$

lo cual nos indica que debemos saber otra medida, por ejemplo y_1 , para poder encontrar el resto de los valores. En las próximas secciones aprenderemos a resolver este tipo de ecuaciones, y volveremos sobre (3.1).

3.2. Ecuaciones lineales de primer orden

DEFINICIÓN 3.2.1 Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como

$$p_1(t)y_{t+1} + p_2(t)y_t = q(t), \quad (3.2)$$

donde $p_i(t)$, $i = 1, 2$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t . Si la sucesión $q(t)$ es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre de **ecuación homogénea** asociada a (3.2). Cuando las funciones $p_1(t)$ y $p_2(t)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal (3.2) es de **coeficientes constantes**.

Este tipo de ecuaciones son muy interesantes en el estudio de dinámica de poblaciones. Suelen aparecer escritas como

$$y_{t+1} = p(t)y_t + q(t),$$

donde $p(t)y_t$ representa el crecimiento de la población en el tiempo t y $q(t)$ el número de individuos que en el tiempo t se incorporan a la población como consecuencia de la inmigración.

EJEMPLO 3.2

- Supongamos que una determinada población de insectos con 100 individuos, duplica su número en cada generación, y que además, 10 nuevos individuos se incorporan en cada generación procedente de otro lugar. Vamos a construir una ecuación en diferencias que modele a esta situación y posteriormente la resolveremos.

Del enunciado se deduce,

$$y_t = 2y_{t-1} + 10, \quad y_0 = y(0) = 100,$$

lo que nos permite escribir,

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \times 100 + 10 \\ y_2 &= 2(2 \times 100 + 10) + 10 = 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 10 + 10 \\ y_3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 2 \times 10 + 2 \times 10 + 10 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_t &= \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t)} \times 100 + \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t-1)} \times 10 + \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t-2)} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10 \\ &= 2^t \times 100 + 2^{t-1} \times 10 + 2^{t-2} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10 \\ &= 2^t \times 100 + (2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2^1 + 2^0) \times 10 \\ &= 2^t \times 100 + (2^t - 1) \times 10 = 110 \times 2^t - 10, \end{aligned}$$

donde en el último de los pasos hemos utilizado la fórmula que nos da la suma de t términos de una progresión geométrica de razón 2. La solución es, por tanto,

$$\boxed{y_t = 110 \times 2^t - 10.}$$

3.3. Ecuaciones lineales de segundo orden

DEFINICIÓN 3.3.1 Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden es aquella que puede expresarse como

$$p_1(t)y_{t+2} + p_2(t)y_{t+1} + p_3(t)y_t = q(t), \quad (3.3)$$

donde $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t .

Si la función $q(t) = 0$, entonces (3.3) es su ecuación lineal en diferencias homogénea de segundo orden asociada. Además, si todas las funciones $p_i(t)$ son constantes, entonces (3.3) es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, y será en la que nos centraremos.

Veamos en primer lugar un teorema de existencia y unicidad de solución para una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n .

TEOREMA 3.3.2 *Dada la siguiente ecuación lineal en diferencias homogénea de orden n*

$$y_{t+n} + p_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + p_n(t)y_t = 0,$$

y dados n números reales k_0, k_1, \dots, k_{n-1} , existe una única solución, cumpliendo

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1}.$$

Demostración. Comenzamos definiendo la siguiente sucesión:

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1},$$

y para los valores de t mayores que $n - 1$, procedemos de la siguiente manera

$$y_n = -p_1(0)y_{n-1} - \cdots - p_n(0)y_0 = -p_1(0)k_{n-1} - \cdots - p_n(0)k_0,$$

$$y_{n+1} = -p_1(1)y_n - \cdots - p_n(1)k_1.$$

De esta manera, y_t queda definida por la ley de recurrencia anterior. Puede comprobarse que y_t es solución de la ecuación pedida y cumple las condiciones iniciales. Además, es la única solución, ya que si w_t es otra solución que cumple

$$w_0 = k_0, \quad w_1 = k_1, \quad \cdots \quad w_{n-1} = k_{n-1},$$

la ley de recurrencia que hemos encontrado anteriormente, determina el resto de los valores de w_t . ■

Consideremos la ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = 0, \tag{3.4}$$

cualquier combinación lineal de soluciones de (3.4) sigue siendo otra solución.

TEOREMA 3.3.3 *Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de (3.4), entonces $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, con k_1 y k_2 constantes, sigue siendo solución de (3.4).*

Demostración. Es inmediata, basta llevar $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$ en (3.4). ■

Del mismo modo, también es evidente la demostración del siguiente resultado.

TEOREMA 3.3.4 *Si y_t^c es una solución de*

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = q(t), \tag{3.5}$$

e y_t^h es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_t = y_t^h + y_t^c$ es solución de la ecuación completa (3.5).

A continuación veremos las condiciones bajo las cuales la combinación lineal de dos soluciones particulares de la ecuación homogénea dan lugar a su solución general.

TEOREMA 3.3.5 Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de (3.4), entonces

$$y = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

con k_1 y k_2 constantes, es la solución general de (3.4) si

$$\begin{vmatrix} y_0^1 & y_0^2 \\ y_1^1 & y_1^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{cases} \alpha_1 y_0^1 + \alpha_2 y_0^2 = \beta_1 \\ \alpha_1 y_1^1 + \alpha_2 y_1^2 = \beta_2, \end{cases}$$

cualesquiera que sean los valores de β_1 y β_2 , por hipótesis del teorema, el sistema es compatible determinado. Pero por el Teorema 3.3.2 existe una única solución de la ecuación homogénea que puede ser escrita como $y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, pues basta tomar $\beta_1 = y_0$ y $\beta_2 = y_1$, y calcular α_1 y α_2 . Para finalizar asignamos los siguientes valores, $k_1 = \alpha_1$ y $k_2 = \alpha_2$. ■

A dos soluciones y_t^1 y y_t^2 cumpliendo las hipótesis del Teorema 3.3.2 le daremos el nombre de **sistema fundamental de soluciones**. Siguiendo un razonamiento similar al realizado en el Teorema 3.3.2, podemos demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 3.3.6 Si y_t^p es una solución particular de

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = q(t), \quad (3.6)$$

e y_t^1, y_t^2 forman un sistema fundamental de soluciones, entonces

$$y_t^p + k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

es la solución general de (3.6).

3.3.1. Resolución de la ecuación homogénea

El Teorema 3.3.6 nos dice que para resolver una ecuación en diferencias lineal de segundo orden, tenemos que empezar encontrando la solución general de su ecuación homogénea asociada, y para ello hemos de localizar dos soluciones particulares que den lugar a un sistema fundamental. Supongamos por tanto, la ecuación homogénea

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = 0,$$

que admitirá la solución $y_t = \lambda^t$ si

$$a \lambda^{t+2} + b \lambda^{t+1} + c \lambda^t = \lambda^t (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0,$$

es decir,

$$\boxed{a \lambda^2 + b \lambda + c = 0.} \quad (3.7)$$

A esta ecuación se la conoce con el nombre de **ecuación característica** de la ecuación en diferencias.

A continuación, presentamos un procedimiento para resolver la ecuación en diferencias homogénea, basado en el estudio de las raíces de (3.7).

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces reales diferentes** λ_1, λ_2 , entonces

$$\boxed{y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t,}$$

forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación (3.7) tiene **una raíz real doble** λ , entonces

$$\boxed{y_t^1 = \lambda^t, \quad y_t^2 = t \lambda^t,}$$

forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces complejas conjugadas**

$$\lambda_1 = \alpha + i \beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i \beta,$$

entonces

$$y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t,$$

forman un sistema fundamental de soluciones. En este último caso, podemos escribir la solución general de la ecuación homogénea de la siguiente manera,

$$y_t = k_1 \lambda_1^t + k_2 \lambda_2^t,$$

y expresando los números complejos en su forma módulo argumental, teniendo en cuenta que poseen el mismo módulo y argumentos opuestos,

$$y_t = k_1 \rho^t (\cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta) + k_2 \rho^t (\cos t\theta - i \operatorname{sen} t\theta).$$

Al formar $\lambda_1^t = \rho^t (\cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta)$ y $\lambda_2^t = \rho^t (\cos t\theta - i \operatorname{sen} t\theta)$ un sistema fundamental de soluciones, también lo será cualquier combinación lineal de ellas, en particular

$$\frac{1}{2} (\lambda_1^t + \lambda_2^t) = \rho^t \cos t\theta$$

$$\frac{1}{2i} (\lambda_1^t - \lambda_2^t) = \rho^t \operatorname{sen} t\theta,$$

la solución general será entonces

$$\boxed{y_t = k_1 \rho^t \cos t\theta + k_2 \rho^t \operatorname{sen} t\theta.}$$

EJEMPLO 3.3

- Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias:

(a) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$

(b) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2y_t = 0$

(c) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 0$

- (a) La ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, tiene como raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. En consecuencia, 2^t y 1 , forman un sistema fundamental de soluciones, siendo la solución general

$$y_t = k_1 + k_2 2^t.$$

- (b) En el segundo de los casos, las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ son $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$. Los módulos de estos números complejos son $\sqrt{2}$ y el argumento $3\pi/4$, por consiguiente, la solución general es

$$y_t = k_1 (\sqrt{2})^t \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + k_2 (\sqrt{2})^t \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}t\right), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

- (c) La ecuación $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene a $\lambda = -1$ como raíz doble. La solución general de la ecuación propuesta es

$$y_t = k_1 (-1)^t + k_2 t (-1)^t, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

EJEMPLO 3.4

- Resolución de la ecuación en diferencias que modeliza a la sucesión de *Fibonacci*.**

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$

Puede expresarse por la ecuación en diferencias con condiciones iniciales siguiente:

$$y_{t+2} = y_{t+1} + y_t; \quad y_0 = 1; y_1 = 1$$

o bien, mediante la ecuación homogénea:

$$y_{t+2} - y_{t+1} - y_t = 0; \quad y_0 = 1; y_1 = 1$$

La ecuación característica $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ tiene como raíces

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

que aporta la solución general:

$$y_t = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^t + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^t$$

Para encontrar la solución particular resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 \\ y_1 = 1 \Rightarrow C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$C_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}; \quad C_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

En consecuencia, la solución particular de la sucesión de Fibonacci viene dada por la sucesión:

$$y_t = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^t - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^t$$

o bien

$$y_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} \right]$$

Se puede simular con Mathematica y comprobar que en efecto si $t = 5$, $t = 10$, y $t = 25$ el ordenador nos devuelve los términos de la sucesión de *Fibonacci* que ocupan esos lugares.

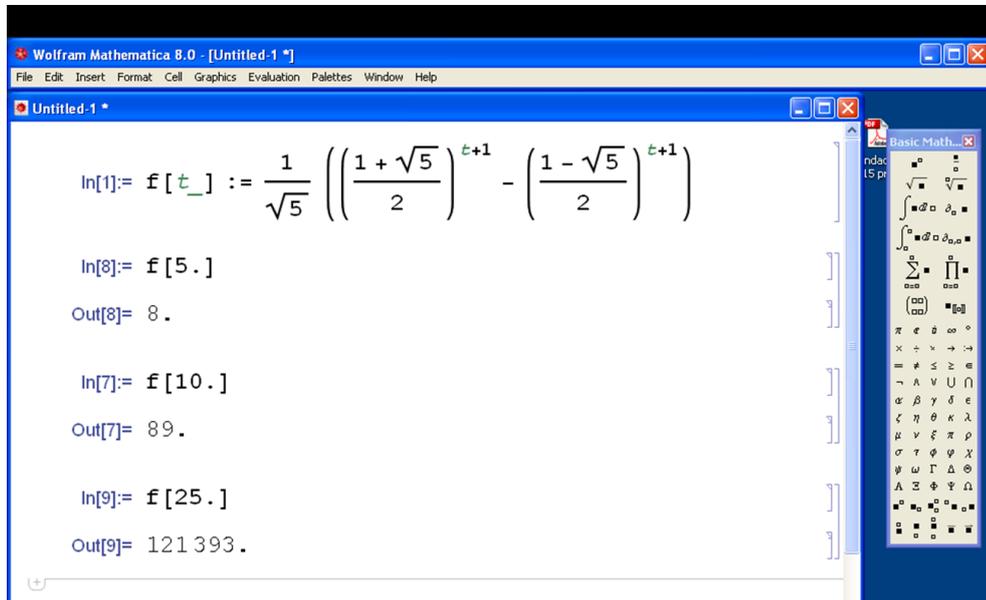


Figura 3.8: Simulación con Mathematica de la solución.

Veamos ahora la relación existente entre la sucesión de Fibonacci y el número áureo ϕ . En la introducción al tema comentamos que:

$$\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_{t+1}}{y_t},$$

en nuestro caso y_t es la solución de *Fibonacci* encontrada anteriormente:

$$\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+2} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} \right]},$$

simplificando

$$\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1}}$$

Si hacemos $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Entonces, $b < a$ y $\frac{b}{a} < 1$. En consecuencia, $\left(\frac{b}{a}\right)^{t+1}$ tiende a cero cuando t tiende a infinito.

El límite anterior puede escribirse como,

$$\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a a^{t+1} - b b^{t+1}}{a^{t+1} - b^{t+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a - b \left(\frac{b}{a}\right)^{t+1}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{t+1}} = a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Por otro lado, Si tenemos un segmento AB de longitud unidad, seleccionamos un punto C y llamamos x a la longitud del segmento AC , entonces, si:

$$\phi = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado,

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Es decir,

$$\phi = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{5}-2}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Finalmente, y como curiosidad, el número ϕ se puede encontrar también en:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}} \Rightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{x}} \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

O en este otro:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

al resolverlo obtenemos:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \quad ; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

3.3.2. Resolución de la ecuación completa

Para encontrar la solución general de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = q(t), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

podemos hacer uso de dos métodos diferentes.

Método de variación de parámetros.

Es también conocido como método de **coeficientes indeterminados**. Se empieza encontrando la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

y se supone que las constantes k_1 y k_2 dependen de t , es decir

$$y_t = k_1(t) y_t^1 + k_2(t) y_t^2. \quad (3.9)$$

De esta expresión deducimos inmediatamente

$$y_{t+1} = k_1(t+1) y_{t+1}^1 + k_2(t+1) y_{t+1}^2,$$

que sumando y restando $k_1(t) y_{t+1}^1 + k_2(t) y_{t+1}^2$, puede escribirse

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= k_1(t) y_{t+1}^1 + k_2(t) y_{t+1}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+1}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+1}^2. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior hacemos

$$[k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+1}^1 + [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+1}^2 = 0, \quad (3.10)$$

y nos queda la ecuación

$$y_{t+1} = k_1(t) y_{t+1}^1 + k_2(t) y_{t+1}^2, \quad (3.11)$$

que permite ser tratada utilizando el mismo procedimiento anterior

$$\begin{aligned} y_{t+2} &= k_1(t) y_{t+2}^1 + k_2(t) y_{t+2}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Llevando (3.9), (3.11) y (3.12) en (3.8),

$$\begin{aligned} &ak_1(t) y_{t+2}^1 + ak_2(t) y_{t+2}^2 + a [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 \\ &+ a [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2 + bk_1(t) y_{t+1}^1 + bk_2(t) y_{t+1}^2 \\ &+ ck_1(t) y_t^1 + ck_2(t) y_t^2 = q(t). \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} &k_1(t) [ay_{t+2}^1 + by_{t+1}^1 + cy_t^1] + k_2(t) [ay_{t+2}^2 + by_{t+1}^2 + cy_t^2] \\ &+ a [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 + a [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2 = q(t). \end{aligned}$$

Al ser y_t^1 y y_t^2 solución de la ecuación homogénea, la expresión anterior adopta la forma

$$a [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 + a [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2 = q(t). \quad (3.13)$$

Las ecuaciones (3.10) y (3.13) dan lugar a un sistema lineal, siendo $k_1(t+1) - k_1(t)$ y $k_2(t+1) - k_2(t)$ las incógnitas. Al ser y_t^1 y y_t^2 un sistema fundamental de soluciones, ocurre que

$$\begin{vmatrix} y_{t+1}^1 & y_{t+1}^2 \\ a y_{t+2}^1 & a y_{t+2}^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Usando la Regla de Cramer, podemos resolver el sistema anterior

$$\begin{aligned} k_1(t+1) - k_1(t) &= \frac{-q(t)}{ay_{t+1}^1(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ k_2(t+1) - k_2(t) &= \frac{q(t)}{ay_{t+1}^2(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

y nos permite encontrar los valores de $k_1(t)$ y $k_2(t)$. ■

EJEMPLO 3.5

- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, partiendo de 100 individuos, se llega el primer año a 110 y que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Deseamos determinar la ecuación general de la evolución de efectivos.

El problema a estudiar es el siguiente:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 2(y_{t+1} - y_t) + 10, \quad y_0 = 100, \quad y_1 = 110.$$

Tenemos que resolver la ecuación en diferencias lineal de segundo grado

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 10,$$

con las condiciones iniciales $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$. Para ello, empezamos encontrando las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Es decir, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_t^h = k_1 + k_2 2^t.$$

Para poder resolver la ecuación completa utilizamos el método de variación de las constantes. Teniendo en cuenta (3.14), deducimos

$$\begin{cases} k_1(t+1) - k_1(t) = -10 \\ k_2(t+1) - k_2(t) = 10/2^{t+1} \end{cases}$$

De la primera ley de recurrencia obtenemos

$$\begin{aligned} k_1(1) &= k_1(0) - 10 \\ k_1(2) &= k_1(1) - 10 = k_1(0) - 2 \times 10 \\ &\vdots \\ k_1(t) &= k_1(0) - 10t \end{aligned}$$

De manera similar, de la segunda de las ecuaciones

$$\begin{aligned} k_2(1) &= k_2(0) + 10/2 \\ k_2(2) &= k_2(1) + 10/2^2 = k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 \\ &\vdots \\ k_2(t) &= k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 + 10/2^3 + \dots + 10/2^t = \\ &= k_2(0) + 10(1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \dots + 1/2^t) \\ &= k_2(0) + 10(1 - 1/2^t). \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación completa es

$$y_t = k_1(0) - 10 \times t + [k_2(0) + 10(1 - 1/2^t)] 2^t.$$

Las constantes $k_1(0)$ y $k_2(0)$ pueden encontrarse con $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$,

$$100 = k_1(0) + k_2(0), \quad 110 = k_1(0) - 10 + (k_2(0) + 5) 2,$$

que dan como solución $k_1(0) = 90$, $k_2(0) = 10$. La ecuación de los efectivos de la población es:

$$y_t = 80 - 10t + 10 \times 2^{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Segundo método.

Para encontrar la solución general de una ecuación lineal completa de segundo orden nos fijaremos en el término independiente $q(t)$, y según sea, procederemos de una manera u otra. Los casos más usuales que suelen presentarse son:

- Si $q(t) = \alpha^t$, entonces para encontrar la solución de la ecuación completa probamos con la solución particular $\beta\alpha^t$ (excepto si α es raíz de la ecuación característica).
- Si $q(t)$ es un polinomio de grado n , entonces ensayamos con un polinomio del mismo grado. Si el 1 es raíz de la ecuación característica, tomaremos un polinomio de grado $n+1$, si además tiene grado de multiplicidad γ , probaremos con un polinomio de grado $n + \gamma$.
- Si $q(t)$ es seno o coseno de αt , entonces tomaremos $\beta \sin \alpha t + \gamma \cos \alpha t$ y determinaremos los valores de las constantes β y γ .

EJEMPLO 3.6

- Hallar la solución general de las ecuaciones en diferencias,

(a) $2y_{t+2} - y_t = 2^t$

(b) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3t^2$

(c) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t + 1$.

- (a) Empezamos resolviendo la ecuación característica

$$2\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

que nos permite escribir la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t^h = k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t + k_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t.$$

Ahora, para poder encontrar la solución de la ecuación completa, ensayamos con la solución particular $y_t^p = \beta 2^t$. Sustituyendo en la ecuación inicial

$$2\beta 2^{t+2} - \beta 2^t = 2^t \quad \Rightarrow \quad 2\beta 2^2 - \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1/7.$$

La solución general buscada es

$$y_t = k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t + k_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t + \frac{1}{7} 2^t.$$

- (b) Para el segundo de los casos, es inmediato comprobar que $\lambda = 2$ es una raíz doble de la ecuación característica. En consecuencia, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_t^h = k_1 2^t + k_2 t 2^t.$$

Al ser el término independiente un polinomio de segundo grado y el 1 no es raíz del polinomio característico, probamos con una solución particular del tipo

$$y_t^p = at^2 + bt + c,$$

llevando este valor en la ecuación en diferencias propuesta, e identificando coeficientes, se obtiene $a = 3$, $b = 12$ y $c = 24$.

La solución buscada es

$$y_t = k_1 2^t + k_2 t 2^t + 3t^2 + 12t + 24.$$

- (c) Al coincidir la ecuación homogénea con la del caso anterior, lo único que tenemos que hacer es encontrar una solución particular. Para ello, buscamos una solución particular de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t,$$

y otra de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 1.$$

Para la primera de ellas, al ser $\lambda = 2$ una raíz doble, ensayamos con la solución $y_t^1 = kt^2 2^t$.

$$k(t+2)^2 2^{t+2} - 4k(t+1)^2 2^{t+1} + 4kt^2 2^t = 2^t,$$

que una vez resuelto da $k = 1/8$.

Para la segunda de las ecuaciones, el término independiente es una constante (un polinomio de grado cero), y probamos como solución particular con otra constante, $y_t^2 = k$.

$$k - 4k + 4k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1.$$

La solución de la ecuación propuesta es

$$y_t = k_1 2^t + k_2 t 2^t + \frac{1}{8} t^2 2^t + 1.$$

3.4. Sistemas de ecuaciones en diferencias

Hemos visto en las secciones anteriores que cuando se analizan fenómenos biológicos dinámicos discretos, aparecen las ecuaciones en diferencias. Del mismo modo, cuando en estos fenómenos el número de variables es mayor que uno, entonces nos aparecerán los sistemas de ecuaciones en diferencias.

Como ya hemos tenido ocasión de comentar, el estudio que estamos realizando es

una breve introducción a las ecuaciones y a los sistemas en diferencias. Por este motivo, solo abordaremos aquellos sistemas de ecuaciones en diferencias lineales y de primer orden. Además, este tipo de sistemas son los que con más frecuencia se presentan en las aplicaciones biológicas.

DEFINICIÓN 3.4.1 *Un sistema en diferencias lineal con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \\ \vdots \\ y_{t+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

De entre este tipo de sistemas, el caso más elemental (aunque para casos más generales, el procedimiento a seguir es similar) consiste en dos ecuaciones y dos variables

$$\begin{cases} y_{t+1}^1 = a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + f_1(t) \\ y_{t+1}^2 = a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t) \end{cases}$$

La clave para resolver este tipo de sistemas, es intentar expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. En efecto, de la primera de las ecuaciones

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}y_{t+1}^2 + f_1(t+1), \quad (3.15)$$

sustituimos el valor de la segunda de las ecuaciones del sistema en (3.15)

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}(a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t)) + f_1(t+1),$$

en la que sólo aparece un término $a_{12}a_{22}y_t^2$, en el que no intervenga la función y_t^1 . Despejando de la primera de las ecuaciones del sistema

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t),$$

sustituyendo

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}a_{21}y_t^1 + a_{22}(y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1),$$

y sacando factor común, se obtiene finalmente,

$$y_{t+2}^1 = (a_{11} + a_{22})y_{t+1}^1 + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y_t^1 - a_{22}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1),$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden.

EJEMPLO 3.7

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ el número de individuos de dos poblaciones de animales en el mes t , que conviven en un ecosistema en el que realizamos un control cada mes. Supongamos que inicialmente tenemos $x_0 = 150$ e $y_0 = 325$, y que el desarrollo de la convivencia está gobernado por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t - y_t + 1 \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t + 3 \end{cases}$$

- Para encontrar el valor de x_t e y_t procedemos de la manera siguiente: De la primera de las ecuaciones

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - y_{t+1} + 1,$$

sustituimos la segunda de las ecuaciones en la expresión anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - (-x_t + 2y_t + 3) + 1 = 3x_{t+1} + x_t - 2y_t - 2,$$

que sigue dependiendo de y_t , pero podemos despejarlo de la primera de las ecuaciones y sustituir este valor en la ecuación anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} + x_t - 2(-x_{t+1} + 3x_t + 1) - 2 = 5x_{t+1} - 5x_t - 4,$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que puede ser escrita

$$\boxed{x_{t+2} - 5x_{t+1} + 5x_t = -4.} \quad (3.16)$$

Es fácil ver que las raíces de la ecuación característica de su ecuación homogénea son:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2},$$

dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea

$$x_t = k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t.$$

Para encontrar una solución particular de la solución completa, al ser el término independiente una constante, ensayamos con $x_t = a$. Sustituyendo en (3.16)

$$a - 5a + 5a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = -4,$$

la solución general de la ecuación completa será

$$\boxed{x_t = k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 4.}$$

- Ahora, tendremos que sustituir en la primera de las ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} y_t &= -x_{t+1} + 3x_t + 1 \\ &= -k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} + 4 + 3k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t \\ &\quad + 3k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 12 + 1. \end{aligned}$$

$$y_t = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 7.$$

- Para encontrar los valores de k_1 y k_2 , imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{cases} 150 = k_1 + k_2 - 4 \\ 325 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) k_1 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) k_2 - 7, \end{cases}$$

sistema de ecuaciones lineales que tiene por solución $k_1 = 77 - 45\sqrt{5}$ y $k_2 = 77 + 5145\sqrt{5}$. En consecuencia, la solución particular para estas condiciones iniciales es:

$$\begin{aligned} x_t &= (77 - 45\sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + (77 - 51\sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 4 \\ y_t &= (151 - 61\sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + (166 - 64\sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 7 \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 1

- 1.- Sea la ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t), \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (3.17)$$

siendo y_t el número de individuos de una población en el año t .

- Interpretar demográficamente (3.17).
 - Comprobar que $y_t = 2 + 5(3^t)$ es una solución particular de (3.17).
 - Encontrar la población al cabo de 4 años, sabiendo que $y_0 = 2, y_1 = 4$.
- 2.- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Plantear y resolver la ecuación en diferencias que modeliza la situación planteada.
- 3.- Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t . Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma,

$$y_{t+2} - y_{t+1} = \frac{1}{5}(y_{t+1} - y_t) + \left(\frac{1}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

probar que la población se estabiliza a largo plazo.

- 4.- Supongamos que si no intervienen factores externos, el incremento del número de conejos en un mes es la tres cuartas partes del incremento del mes anterior. Inicialmente el número de conejos es de 10 y al finalizar el primer mes es de 30, además cada mes se incorporan 25 conejos a la población. Determinar la población de conejos al finalizar el segundo año ¿Cuál será su comportamiento a largo plazo?
- 5.- Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:
- Sea la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$, donde y_t representa a la cantidad de individuos en el año t . Si el número inicial de individuos es 2 y al cabo de un año es 5, ¿cuál será el valor de la población al cabo de 10 años?
 - Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 8$$

- 6.- Estamos interesados en un determinado tipo de aves que viven en una laguna. La dinámica de la población está gobernada por la siguiente ecuación en diferencias,

$$6x_{t+2} + x_{t+1} = x_t + \left(\frac{1}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

siendo $x_0 = 2$ y $x_1 = 5$.

- Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias (3.18)
 - ¿Aumentará esta población a largo plazo?
- 7.- La evolución de dos especies que comparten un mismo territorio viene dada por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t \\ y_{t+1} = x_t - 2y_t \end{cases}$$

donde x_t, y_t representan al número de animales de la primera y segunda especie en el año t ¿Cuál es el comportamiento a largo plazo de estas poblaciones?

3.5. Sistemas dinámicos discretos

3.5.1. Introducción

La teoría de sistemas dinámicos es una rama de las Matemáticas que se ocupa del estudio del movimiento, y proporciona un lenguaje común para la Matemática, la Biología, la Economía, la Física, la Historia y la Literatura.

En la teoría de los sistemas dinámicos, un **sistema** se define como una colección de elementos que continuamente interactúan para formar un conjunto unificado. A las relaciones internas y las conexiones entre los componentes de un sistema se les llama la **estructura del sistema**. Un ejemplo de un sistema es un ecosistema. La estructura de un ecosistema está definida por las relaciones entre la población animal, nacimientos y muertes, cantidad de comida, y otras variables específicas para un ecosistema particular.

El término dinámico hace referencia al cambio a lo largo del tiempo. Si algo es dinámico, es porque se está modificando constantemente. Un sistema dinámico es aquel en el cual las variables se modifican para producir cambios a lo largo del tiempo. La manera por la cual los elementos o las variables de un sistema cambian con el tiempo se denomina **comportamiento del sistema**. En el ejemplo del ecosistema, el comportamiento está descrito por la dinámica que se produce como consecuencia de los nacimientos y las muertes de la población. El comportamiento está expuesto a la influencia de comida adicional, los depredadores, y al medio ambiente, los cuales son todos elementos del sistema.

Los sistemas dinámicos también pueden usarse para analizar, como pequeños cambios en una parte del sistema, pueden afectar al comportamiento del sistema completo. Si nos referimos al ejemplo del ecosistema, podemos analizar el impacto de la sequía en el ecosistema o analizar el impacto de la eliminación de una determinada especie animal en el comportamiento del ecosistema completo.

En relación con los sistemas dinámicos discretos, fue *H. Poincaré* en 1899 el primero en utilizarlos al intentar simplificar un modelo continuo, pero ha sido en la década de los cincuenta donde han sido estudiados y aplicados en problemas muy diversos. En 1976 *R. May*, analizando el comportamiento de las ecuaciones en diferencias en el modelo que lleva su nombre, observó que aún para el caso determinista, el modelo podía presentar comportamientos “muy complicados”. En 1963 el meteorólogo *E. Lorentz* descubre el caos matemático en un sistema dinámico continuo, presentando a la comunidad científica el atractor que lleva su nombre. Poco después, en 1973, *M. Heron* estudia el caso discreto, descubriendo un tipo de atractor muy parecido al de *Lorentz*. Dos años después, *Feigenbaum* presentó por primera vez el diagrama de bifurcación correspondiente al modelo logístico. Actualmente la teoría de las bifurcaciones es un campo donde se investiga intensamente.

3.5.2. Ejemplos de sistemas dinámicos

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos:

- 1.- **La ecuación de Malthus.** Queremos estudiar la evolución de la población de una determinada especie. Llamamos x_k al número de individuos de la población en el instante temporal k . Si suponemos que por cada individuo existente en el período k habrá, por término medio, α individuos en el período $k + 1$, se tendrá

$$x_{k+1} = \alpha x_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.19)$$

Esta ecuación en diferencias lineal de primer orden, es la llamada ecuación de *Malthus*, economista y pensador del siglo XIX, propuesta para estimar la evolución de la población humana.

Si $\alpha > 1$, es decir, si existe algún crecimiento vegetativo en la población, los valores de x_k crecen en progresión geométrica y se disparan de forma exponencial, razón por la que esta ecuación desató una fuerte polémica entre los contemporáneos de *Malthus*, suponiendo la primera llamada de atención sobre el problema de la sobrepoblación del planeta.

- 2.- **La parábola logística de May.** En 1976 el biólogo *Robert May* formuló otra ecuación para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema aislado, diferente de la de *Malthus*. *May* tuvo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema. Cuando la población se acerca al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, entonces el parámetro α debe disminuir, lo que equivale a considerar este parámetro función del número de individuos. Con ello se llega a una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = \alpha(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Podemos tomar como unidad de medida el máximo posible de la población, de manera que x_k expresa la fracción de población existente en el período k con respecto al nivel máximo de población. *May* formuló la hipótesis de que $\alpha(x_k)$ debería decrecer linealmente cuando x_k creciera, hasta hacerse nulo cuando x_k tomara el valor 1. Es decir que $\alpha(x_k)$ fuera de la forma $\mu(1 - x_k)$, llegando así a la ecuación de la **parábola logística de May**

$$x_{k+1} = \mu(1 - x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Observemos que para valores pequeños de x_k se tiene $1 - x_k \approx 1$, con lo que la ecuación (3.20) es equivalente a la ecuación de *Malthus* (3.19) con parámetro μ .

- 3.- **Modelo matricial.** Supongamos que una especie de aves que vive muchos años, resulta capaz de reproducirse a partir del segundo año de vida y que, por término medio, cada pareja de aves en edad reproductora cría anualmente una nidada de la que sobreviven dos crías, una de cada sexo. Se supone que

a partir del segundo año todas las aves han emparejado. Se suelta una pareja de aves en una región sin depredadores. ¿Cuál es la ley de evolución para la población de aves?

Ante un problema de esta naturaleza, el primer paso consiste en seleccionar las variables. Debido a las diferentes condiciones de reproducción, conviene considerar dos segmentos en la población de aves: las de un año y las de dos o más. Tomamos como variable $x_1(k)$ el número de parejas adultas en el período k . Debido a que existe siempre el mismo número de machos que de hembras, la población de aves de un año puede también contarse por el número $x_2(k)$ de parejas que pueden formarse entre ellas. Se tienen entonces las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \end{cases}$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

3.5.3. Conceptos de dinámica discreta

Un sistema dinámico discreto es simplemente, desde un punto de vista matemático, una ecuación en diferencias de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde f es una aplicación $f : X \rightarrow X$ definida en cierto conjunto X , que recibe el nombre de **espacio de fases o espacio de los estados**. Salvo que digamos lo contrario, siempre consideraremos funciones f suficientemente suaves, es decir, con derivadas continuas de todos los órdenes necesarios. Así, por ejemplo, cuando se quiere traducir un problema como los descritos en el apartado anterior al lenguaje de los sistemas dinámicos, se empieza por determinar el espacio de fases del problema que no es sino un conjunto cuyos elementos describen todos los posibles estados del sistema que se trata de analizar.

- En el modelo de *Malthus* se podría considerar como espacio de los estados el conjunto de los números reales no negativos (no son posibles poblaciones con un número negativo de individuos). Cuando el espacio de fases de un sistema es \mathbb{R} o algún subconjunto de \mathbb{R} se trata de un **sistema dinámico unidimensional**
- En el ejemplo la parábola logística de *May*, donde se estudia una única variable, que es la fracción de población con respecto a la máxima población posible, un espacio de fases adecuado es $X = [0, 1]$
- En el caso de la población de aves, el estado del sistema se describe a través de dos variables de estado $x_1(k)$ e $x_2(k)$ por lo que el espacio de los estados

adecuado es un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$, el de todos los pares de números enteros no negativos. En sistemas más complejos, se hacen necesarias más variables para describir completamente el estado del sistema, por lo que \mathbb{R}^m , o un subconjunto de \mathbb{R}^m , es un espacio de fases adecuado para muchos problemas. Por ejemplo, en mecánica se requieren 10 variables para describir completamente una partícula: tres para fijar su posición espacial, otras seis para conocer su velocidad y aceleración y una más para determinar su masa.

Las variables que describen un sistema, se llaman **variables de estado**. Se agrupan en un vector, que se conoce como **vector de estado**, y que almacena la información completa acerca del estado del sistema. El espacio de fases es entonces el conjunto de todos los posibles vectores de estado del sistema.

La ecuación de un sistema dinámico puede interpretarse de la siguiente forma: si el sistema adopta en un instante k un estado descrito a través de un cierto elemento $x_k \in X$, entonces en el instante $k + 1$ el estado del sistema será x_{k+1} . La aplicación f representa por consiguiente la **ley de evolución del sistema dinámico** que transforma cada estado en el siguiente estado que el sistema adopta.

Si el sistema se encuentra en un estado inicial x_0 , su evolución temporal corresponde a la sucesión x_0, x_1, x_2, \dots , también llamada **solución con condición inicial** x_0 . Se obtiene recursivamente

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),$$

y en general

$$x_k = f^k(x_0).$$

La expresión $f^k(x)$, es la **solución general o flujo de los sistemas dinámicos discretos**. Permite conocer el estado del sistema en cualquier instante a partir de su posición inicial. El conjunto de valores

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}$$

recibe el nombre de **órbita de x** , (se diferencia de la solución $x, f(x), f^2(x), \dots$ en que ésta última es una sucesión ordenada cuyos términos son los elementos de la órbita).

Es fácil realizar el siguiente experimento: marquemos un número en una calculadora, por ejemplo 0.25, y pulsemos de forma reiterativa la tecla 10^x , con lo cual obtendremos la órbita correspondiente,

$$0.25, 10^{0.25}, 10^{10^{0.25}}, \dots$$

Si continuamos con este proceso la calculadora nos dará un mensaje de error. La causa de este comportamiento es que la órbita tiende a infinito. Si repetimos el proceso tomando como semilla cualquier número y como función el seno o el coseno, observaremos que en este caso las órbitas son convergentes.

EJEMPLO 3.8

- Puede comprobarse fácilmente que la ecuación de *Malthus* admite por solución general la expresión

$$\Phi_x(k) = \alpha^k x$$

El comportamiento de esta expresión es sencillo de comprender. Si $x > 0$ entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ x & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

- Menos sencillo resulta el problema de encontrar una fórmula explícita para el problema de las aves. Se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

Si calculamos las sucesivas potencias de la matriz, nos aparece un hecho curioso como es la aparición en estas matrices de los célebres números de *Fibonacci* 1, 1, 2, 3, 5, 8,...

- Para el modelo de *May* la situación es más complicada, como tendremos ocasión de comprobar cuando estudiemos los modelos discretos no lineales. Podemos encontrar las primeras iteraciones de la solución general $f^k(x)$ y nos convenceremos de la enorme complicación de los cálculos involucrados. Ello nos ayuda a comprender la imposibilidad de obtener expresiones explícitas para las soluciones generales de los sistemas dinámicos no lineales (modelo de *May*), cuya conducta se pueda entender de forma global, como sucede en el caso (lineal) de la ecuación de *Malthus*.

El campo de **aplicaciones** de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales es muy amplio, y en los últimos años continúan aumentando. A continuación mostramos algunas de ellas.

- **En Matemáticas para la resolución numérica de ecuaciones.** Recordemos que el método del punto fijo nos permite encontrar la raíz de una ecuación $f(x) = 0$. El proceso se inicia reescribiendo la ecuación como $g(x) = x$, se toma un valor x_0 próximo a la solución buscada, y se reitera el proceso $x_{k+1} = g(x_k)$. Si la órbita correspondiente

$$\{x_0, x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1) = g(g(x_0)), \dots\},$$

converge a cierto valor x^* , entonces el método es convergente.

Recordemos que gráficamente el punto fijo $g(x^*) = x^*$ se encuentra como la intersección de la función $g(x)$ con la bisectriz del primer cuadrante.

- **Elaboración de modelos matemáticos.** Por ejemplo, el modelo logístico (del francés *logis* = alojamiento), que suele ser el punto de partida de los sistemas dinámicos unidimensionales,

$$x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.21)$$

se puede obtener de la manera siguiente: Supongamos que x_0 es la población relativa inicial, esto es, el cociente entre la población inicial y la población máxima que puede soportar el habitat. Sea x_k la población relativa al cabo de k años. El crecimiento relativo de la población en cada año será

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k},$$

que según las hipótesis de *Verhulst* (1845), es proporcional a $1 - x_k$. Es decir,

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = \alpha(1 - x_k),$$

despejando

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(1 - x_k)x_k = x_k(1 + \alpha)(1 - x_k).$$

Si llamamos $\mu = 1 + \alpha$, entonces obtenemos la expresión (3.21)

- **Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.** Sea la ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = f(x),$$

que podemos expresarla como

$$x(t + dt) - x(t) = f(x)dt.$$

Si sustituimos dt por un valor numérico h , obtenemos

$$x_{k+1} - x_k = hf(x_k) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k + hf(x_k),$$

tomando h suficientemente pequeño, podemos entonces dibujar la solución que pasa por un punto inicial dado.

3.5.4. Modelos dinámicos discretos lineales.

En general, obtener la expresión explícita de la solución general $f^k(x)$ es bastante complicado. Con ayuda de un ordenador podemos conseguir numéricamente cuantas iteraciones deseemos en esa expresión, pero esto no resulta en general de mucha ayuda para entender la conducta global del sistema. Un instrumento que resulta en muchas ocasiones adecuado en el caso de sistemas unidimensionales es el análisis gráfico, a través del llamado **diagrama de Cobweb**.

Supongamos una árida isla cerca de la costa de un rico continente. Estamos interesados en una especie particular de pájaros que anidan en estas islas. Desgraciadamente el habitat de la isla es muy desfavorable ya que si los pájaros estuvieran aislados su población disminuiría un 20 % cada año. Esta situación podemos reflejarla utilizando el modelo de *Malthus* (exponencial)

$$x_{k+1} = 0.80x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde x_k es la población de pájaros en el tiempo k . Hay una colonia de pájaros en el continente y cada año 1000 pájaros emigran a nuestra isla. Entonces, el cambio de población en la isla puede ser descrito por el modelo

$$x_{k+1} = 0.80x_k + 1000, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Observemos que el modelo es lineal en el sentido de que la función $f(x) = 0.80x + 1000$ representa a una línea recta.

Ahora descubriremos y probaremos un teorema sobre sistemas dinámicos lineales discretos, que corresponden al tipo

$$x_{k+1} = mx_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde m y b son constantes. Recordemos que los sistemas dinámicos discretos están descritos por una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

En el caso particular de sistemas dinámicos discretos lineales, la función f es del tipo $f(x) = mx + b$, y estamos interesados en puntos de equilibrio del sistema dinámico discreto. Aquellos puntos x tales que $f(x) = x$. Estos puntos se llaman de equilibrio porque si un término es uno de estos puntos, cada sucesión de términos siguientes permanece en el mismo punto. De esta manera decimos que el sistema se encuentra en equilibrio. Es inmediato comprobar el siguiente resultado.

RESULTADO 3.5.1 *Si m no vale 1 entonces hay un único punto de equilibrio*

$$x^* = \frac{b}{1 - m}$$

Los modelos dinámicos discretos pueden comportarse de manera sorprendente. Algunas veces una sucesión obtenida del sistema dinámico lineal discreto tiende directamente al punto de equilibrio. En otras ocasiones saltan alrededor de él, con saltos cada vez más pequeños hasta tender al punto de equilibrio. O por el contrario los saltos son cada vez más grandes y no tienden al punto de equilibrio.

Nuestro objetivo es formular y probar un teorema que nos determine cuando ocurre cada una de estas clases de comportamiento. Comenzamos la construcción del diagrama de *Cobweb* dibujando las gráficas

$$f(x) = mx + b, \quad g(x) = x$$

Dibujamos el punto x_1 en el eje OX. A continuación marcamos el valor $f(x_1) = x_2$ y obtenemos el punto (x_1, x_2) . El próximo paso es trazar una línea horizontal desde el punto (x_1, x_2) hasta que corte a la recta $g(x) = x$ en el punto (x_2, x_2) . Calculamos $x_3 = f(x_2)$ y repetimos sucesivamente este proceso.

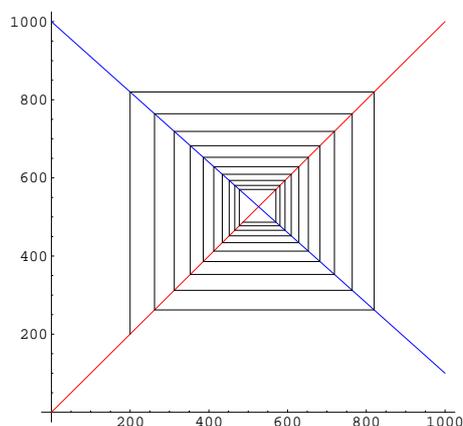


Figura 3.9: Diagrama de *Cobweb*.

Observemos en la Figura 3.9 que en este caso “la red de araña” nos lleva al punto de equilibrio. En la Figura 3.10 hemos representado en el eje de abscisas el tiempo y en el eje de ordenadas el número de individuos. Puede verse que si el tiempo aumenta la población tiende al punto de equilibrio. Se trata por tanto de un punto de equilibrio estable.

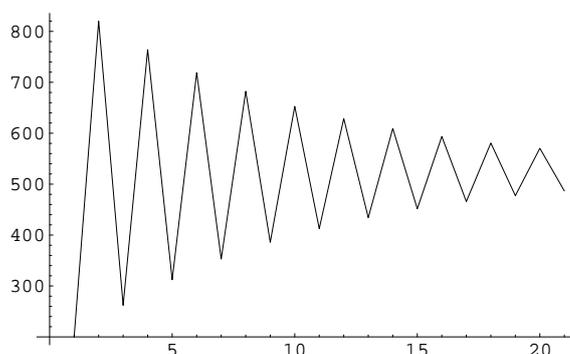


Figura 3.10: Punto de equilibrio estable.

EJEMPLO 3.9

- Vamos a calcular y dibujar x_2, x_3, \dots , para el modelo $x_{k+1} = 0.80x_k + 1000$ y el valor inicial $x_0 = 500$.

El modelo anterior podemos escribirlo como

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $f(x) = 0.80x + 1000$. Esta es una buena manera de representar a nuestro modelo porque la función $f(x)$ nos describe como la población, en cada año está determinada por la población en el año anterior.

Los dos gráficos $f(x) = 0.8x + 1000$ y $g(x) = x$ se cortan en el punto $x^* = 5000$. Este punto se llama **punto de equilibrio** ya que la población en los próximos años será la misma que la población actual.

$$f(5000) = 0.8 \times 5000 + 1000 = 5000$$

Podemos encontrar este valor también de manera algebraica

$$f(x) = x \Rightarrow x = 0.8x + 1000 \Rightarrow x = 5000$$

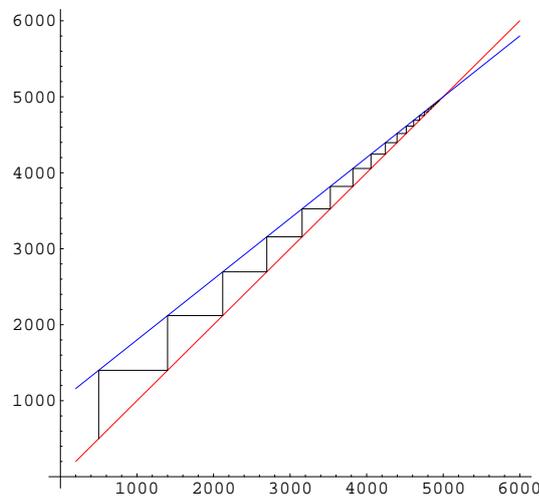


Figura 3.11: Estudio del punto de equilibrio.

La Figura 3.11 nos muestra como determinamos gráficamente el punto de equilibrio.

A continuación nos centraremos en la clasificación de los puntos de equilibrio o en el análisis de la estabilidad. En el análisis de la evolución de poblaciones el problema principal es:

- Evaluar la estabilidad de la población usando modelos matemáticos.
- Examinar los efectos de diferentes factores sobre la estabilidad de la población.

Hemos tenido ocasión de ver que en los sistemas dinámicos lineales discretos, el punto de equilibrio

$$x^* = \frac{b}{1 - m},$$

en algunas ocasiones es un **punto de equilibrio atractivo**, (aquel que a largo plazo los términos x_k tienden al x^* cuando k tiende a ∞), y otras veces es un **punto de equilibrio repulsivo**, (aquel donde x_k tiende a más o menos infinito). A continuación presentamos un teorema que nos permitirá determinar cuando un punto de equilibrio es atractivo o repulsivo.

TEOREMA 3.5.2 *Sea el sistema dinámico lineal discreto*

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad f(x) = mx + b$$

con $m \neq 1$. Sea $x^* = b/(1 - m)$ el punto de equilibrio,

- si $|m| < 1$ entonces x^* es atractivo, en el sentido de que para cualquier condición inicial x_0

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

- si $|m| > 1$, entonces x^* es repelente, y al menos que $x_0 = x^*$ se cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = \infty.$$

Demostración. Comenzamos calculando el valor de x_k

$$\begin{aligned} x_2 &= mx_1 + b \\ x_3 &= mx_2 + b = m^2x_1 + b(m + 1) \\ x_4 &= mx_3 + b = m(m^2x_1 + b(1 + m)) + b = m^3x_1 + b(1 + m + m^2) \\ &\dots \\ x_k &= m^{k-1}x_1 + b(1 + m + m^2 + \dots + m^{k-2}) = m^{k-1}x_1 + b \sum_{j=0}^{k-2} m^j. \end{aligned}$$

Si suponemos que $|m| < 1$ entonces al hacer que k tienda a infinito

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^{k-1}x_1 = 0.$$

Por otro lado,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-2} m^j = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \frac{1}{1 - m},$$

por ser la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $|m| < 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{b}{1 - m} = x^*.$$

Por un razonamiento similar, si $|m| > 1$ se cumple que $m^{k-1}x_1$ y $\sum_{j=0}^{k-2} m^j$ no están acotados cuando $k \rightarrow \infty$. ■

3.5.5. Modelos dinámicos discretos no lineales

Para un sistema de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.22)$$

donde ahora la función f no es lineal, la situación es diferente a lo estudiado en la sección anterior. Lo que debemos tener en cuenta, es que pueden existir muchos puntos de equilibrio. En el caso lineal el tipo de punto de equilibrio nos lo daba el parámetro m de la recta. En el caso no lineal el carácter de cada punto está determinado por la pendiente de la curva $f(x)$ en el punto x^* , y sabemos que este valor puede determinarse por la derivada de la función f en el punto x^* .

TEOREMA 3.5.3 *Consideremos el sistema dinámico (3.22) siendo x^* un punto de equilibrio $f(x^*) = x^*$. Entonces*

- *si $|f'(x^*)| < 1$ el punto de equilibrio es atractivo, en el sentido de que si x_0 está suficientemente cerca de x^* entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* .$$

Algunas veces a un equilibrio de esta características se le dice equilibrio estable, ya que si el sistema se mueve ligeramente del punto de equilibrio, al final retorna al mismo.

EJEMPLO 3.10

- Consideremos el sistema dinámico discreto no lineal de *May*

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k), \quad \alpha > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

- 1.- Encontrar los puntos de equilibrio y clasificarlos.
 - 2.- Sea $\alpha = 2.5$ y $x_0 = 0.1$. Utilizando el diagrama de *Cobweb*. clasificar el punto de equilibrio del sistema.
 - 3.- Repetir el proceso para $\alpha = 3.3, 3.55$
 - 4.- Cuando α aumenta de 3 a 4 ¿observas algún cambio en el tipo de soluciones obtenidas?
- Empezamos encontrando los puntos de equilibrio. En este caso la función f no lineal que nos define el modelo es

$$f(x) = \alpha x(1 - x) .$$

Por tanto, tendremos que resolver la ecuación $f(x) = x$, que tiene por soluciones,

$$x^* = 0, \quad x^* = 1 - \frac{1}{\alpha} .$$

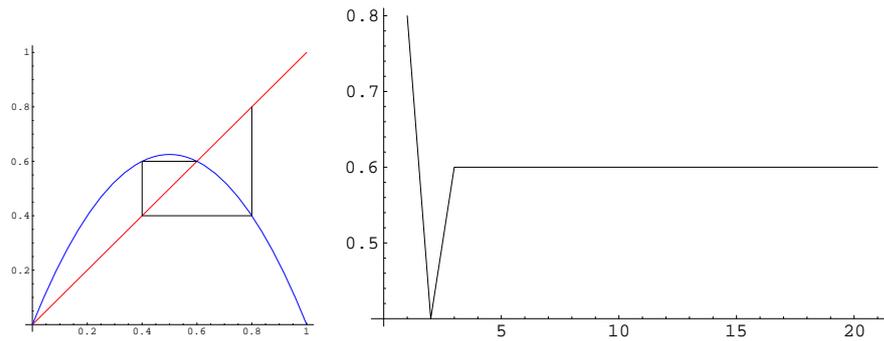


Figura 3.12: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 2.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Ahora, consideramos el diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.3x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$. Los primeros 25 elementos de su órbita son:

{ 0.8, 0.52799, 0.82241, 0.48196, 0.82392, 0.47873, 0.82350, 0.47963, 0.82363, 0.47936, 0.82359, 0.47944, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47946, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942 } .

Es decir, en este caso la población tiene un comportamiento periódico de orden dos tendiendo a los valores $x_1^* \approx 0.4794270$ y $x_2^* \approx 0.823603$.

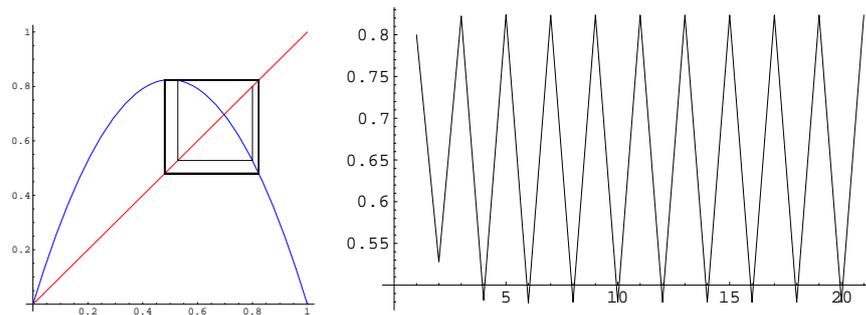


Figura 3.13: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.3x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Repitiendo los cálculos para $f(x) = 3.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$, se obtiene la órbita:

{ { 0.8, 0.559999, 0.8624, 0.41533, 0.84990, 0.44647, 0.86497, 0.40878, 0.84587, 0.45628, 0.86831, 0.40021, 0.84014, 0.47004, 0.87185, 0.391, 0.83343, 0.48587, 0.87430, 0.38464, 0.82842 } } .

La población se comporta de manera periódica de orden 4.

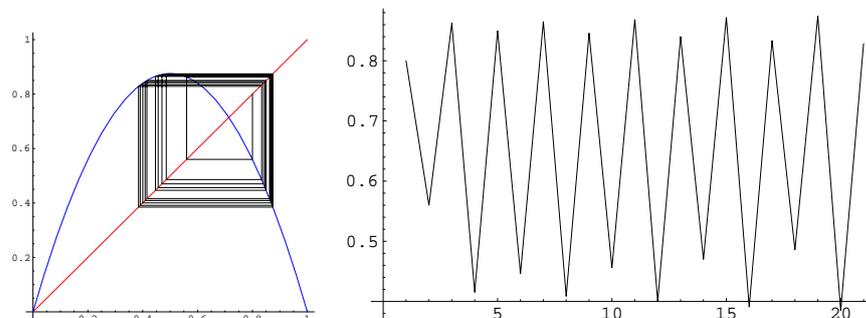


Figura 3.14: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Por último, si consideramos $f(x) = 4x(1-x)$ y $x_0 = 0,8$, ahora la población se comporta caóticamente.

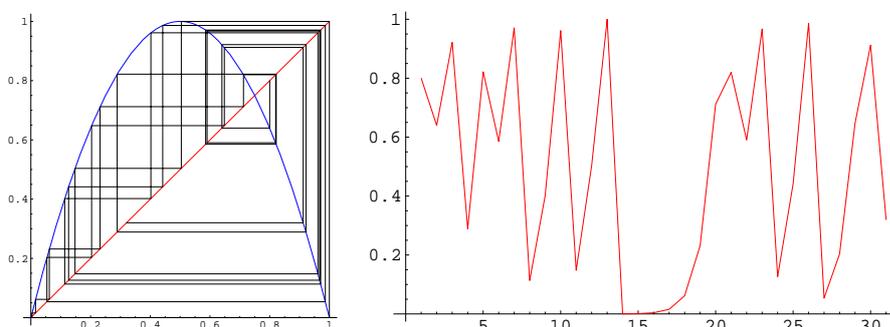


Figura 3.15: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 4x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

Tendremos ocasión de volver sobre este ejercicio cuando estudiemos los sistemas caóticos.

3.5.6. Puntos de equilibrio y periódicos.

En esta sección trataremos de sistematizar y formalizar los resultados obtenidos en las secciones anteriores, para estudiar los puntos de equilibrio y periódicos de un **sistema dinámico discreto unidimensional**.

Dado un sistema dinámico

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f : X \rightarrow X,$$

se dice que $x^* \in X$ es un punto de equilibrio del sistema si $f(x^*) = x^*$. Si x^* es un punto de equilibrio, la solución cuya condición inicial es $x_0 = x^*$ cumple $f^k(x_0) = x^*$. Esto significa que los puntos de equilibrio son estados fijos: una vez el sistema entra en ellos, permanece invariable en todos los instantes futuros.

Los puntos de equilibrio se clasifican según el comportamiento de las soluciones con condiciones iniciales cercanas a ellos, en **puntos de equilibrio atractivos, repulsivos e indiferentes**. En lo que sigue, consideraremos el siguiente sistema dinámico unidimensional

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- **Puntos de equilibrio atractivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es atractivo si $|f'(x^*)| < 1$
- **Puntos de equilibrio repulsivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es repulsivo si $|f'(x^*)| > 1$
- **Puntos de equilibrio indiferentes.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es indiferente si $|f'(x^*)| = 1$

- Puntos cíclicos.** Se dice que x^* es un punto periódico o cíclico del sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$, si existe un n tal que $f^n(x^*) = x^*$. Un punto es periódico si su órbita se “cierra” vuelve a comenzar por su valor inicial. El mínimo entero k tal que $f^k(x^*) = x^*$, se llama **orden del punto periódico**. En tal caso la órbita

$$\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{k-1}(x^*)\}$$

recibe el nombre de **período o ciclo de orden k** .

3.5.7. Estabilidad

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico representa un estado fijo del sistema. Ahora bien, no todos los estados de equilibrio tienen la misma naturaleza.

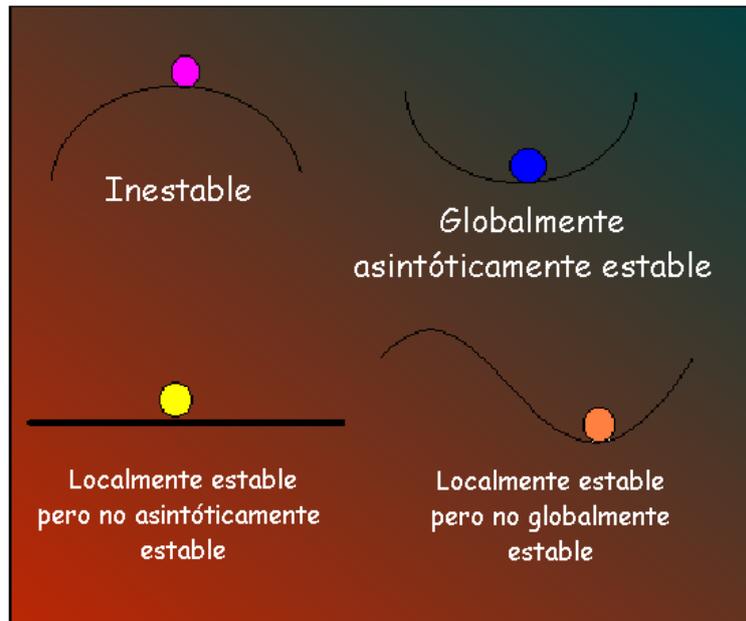


Figura 3.16: Tipos de estabilidad.

Si se deja rodar una bola en el cuenco de una copa, terminará deteniéndose en el centro de la misma. Si se desplaza la bola ligeramente de su posición de equilibrio, retornará a ella. Este es un equilibrio robusto frente a perturbaciones, conocido como **equilibrio asintóticamente estable**. Los puntos de equilibrio atractivos presentan esta forma de equilibrio.

La forma de equilibrio opuesta es el **equilibrio inestable**, representado por una pelota en el borde del tejado: basta una ligera perturbación para romper el equilibrio. Los puntos de equilibrio repulsivos presentan este tipo de equilibrio. Finalmente existe una forma intermedia de equilibrio, técnicamente conocido como **equilibrio estable**. Este se halla representado por un péndulo sin rozamiento en posición de

reposo. Si se somete al péndulo a una pequeña perturbación, éste permanecerá oscilando indefinidamente en torno a la posición de equilibrio, sin alejarse mucho de ella, pero sin retornar a ella de forma definitiva.

EJEMPLO 3.11

- Comprobemos que el origen es un punto de equilibrio estable para el sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$ si $f(x) = -x$.

Es evidente que $x^* = 0$ es solución de la ecuación $f(x) = x$, por lo tanto, es un punto de equilibrio. Para comprobar que su equilibrio es estable, perturbamos este valor tomando $x_0 = 0.5$. La Figura 3.17 muestra que la órbita sólo toma los valores -0.5 y 0.5 .

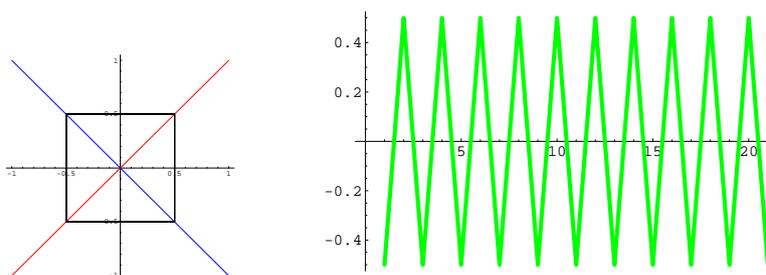


Figura 3.17: Diagrama de *Cobweb*.

3.5.8. Sistemas caóticos

En el Ejemplo 3.10 hemos tenido ocasión de comprobar que sistemas o modelos muy simples, pueden pasar de tener un comportamiento determinístico a un comportamiento caótico, modificando ligeramente los valores de un parámetro. En esta sección formalizaremos este concepto.

La teoría del caos fue introducida en ecología por *May* (1974, 1976) y *Oster* (1976) en el contexto de funciones reales de variable real está siendo estudiada con intensidad en los últimos años y aparece en casi todos los modelos discretos no lineales.

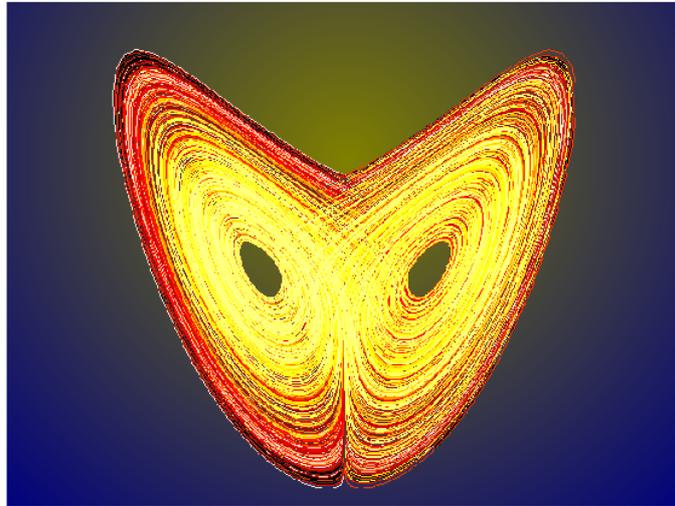


Figura 3.18: Mariposa o atractor de Lorentz.

Lo primero que nos llama la atención es el hecho de que vivimos inmersos en el caos. De manera usual, **llamamos caos a todo aquello que no somos capaces de sistematizar.**

El primer investigador del caos fue un meteorólogo llamado *Edward Lorentz*. En 1960 utilizaba un modelo matemático para predecir el tiempo, que consistía en un sistema de 12 ecuaciones no lineales. La simulación se realizaba con un ordenador, que daba como respuesta un comportamiento probable de la atmósfera. En cierta ocasión, quiso repetir de nuevo los cálculos anteriores, para ello volvió a introducir los números en el ordenador, pero para ahorrar papel y tiempo, solo utilizó 3 números decimales en vez de 6. Lo sorprendente fue que el resultado encontrado era totalmente diferente a los obtenidos en la vez anterior. Del análisis de esta situación surgió una nueva teoría que se conoce con el nombre de la teoría del caos.

Lo verdaderamente interesante era que diferencias muy pequeñas en las condiciones iniciales tenían una gran influencia en la resolución final del problema. A este efecto que tienen las pequeñas diferencias iniciales después se le dio el nombre de **efecto mariposa:**

“El movimiento de una simple ala de mariposa hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma.”

Como podemos comprender, este descubrimiento causó en *Lorentz* un gran impacto, ya que según esta nueva hipótesis, no sería posible predecir con exactitud el comportamiento de cualquier sistema, pues todas las medidas se ven afectadas por los errores de calibración de los instrumentos. Es imposible, por tanto, conocer las condiciones iniciales exactas de la mayoría de los sistemas dinámicos. Afortunadamente, *Lorentz* se dio cuenta de que las soluciones del sistema que parecían tener un

comportamiento hecho totalmente al azar, después de verlas representadas en una gráfica sucedía algo sorprendente. El resultado siempre ocupaba una determinada región del espacio, y tenía forma de una espiral doble.

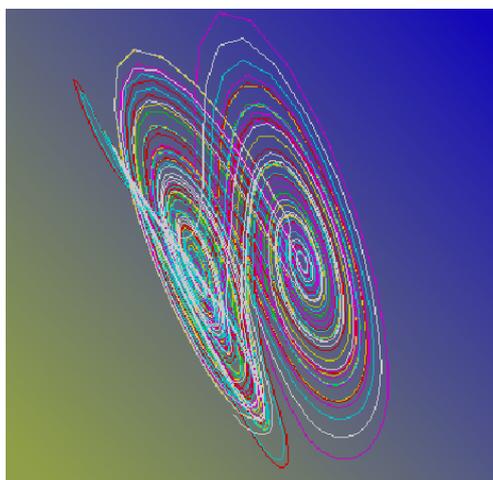


Figura 3.19: Atractor de Lorentz.

Antes de la aparición de esta nueva teoría, sólo había dos tipos de comportamientos conocidos para un sistema dinámico: un estado fijo, donde los variables nunca cambian, y el comportamiento periódico, donde el sistema está en un “circuito cerrado” y se repite infinitamente. Las soluciones del sistema de *Lorentz* son definitivamente ordenadas (siguen una espiral). Nunca se paran en un punto, ni se repiten, ni son periódicas. A su representación gráfica se la conoce con el nombre **Atractor de Lorentz**¹. Estas gráficas deben cumplir otra condición: no puede cortarse a sí misma ya que, si así fuese, habría dos curvas diferentes a partir de ese punto de corte, lo cual significaría dos realidades simultáneas y diferentes.

Una curva de estas características no puede estar contenida en un plano, y por supuesto su dimensión es fraccionaria. Este tipo de atractores reciben el nombre de **atractores extraños**, ya que su representación gráfica es un **fractal**. Queremos insistir en la idea fundamental que encierra el concepto de atractor, como es la siguiente: mientras es casi imposible predecir exactamente el estado futuro de un sistema, es posible, y aún más, muchas veces es fácil modelar el comportamiento general del sistema.

A continuación, resumimos algunos de los rasgos característicos de los sistemas caóticos.

- Son muy sensitivos a las condiciones iniciales. Un cambio muy pequeño en los datos iniciales dan lugar a resultados totalmente diferentes.

¹El atractor es la región del espacio hacia la cual convergen las trayectorias posibles dentro de un sistema.

- Parecen un desorden, o hechos al azar, pero no lo son, hay reglas que determinan su comportamiento. Los sistemas hechos al azar no son caóticos.

Supongamos una órbita periódica del sistema dinámico discreto $x_{t+1} = f(x_t)$. Si tomamos como semilla, o condición inicial x_0 , podemos elegir otro punto inicial muy próximo al anterior $y_0 = x_0 + \delta_0$, siendo $|\delta_0|$ la distancia (pequeña) entre estos dos puntos de partida. A continuación iteramos la función n veces obteniéndose los valores x_n y y_n . Podemos definir $\delta_n = y_n - x_n$, esto es, la separación de los dos puntos iniciales después de n iteraciones. Si ocurre que $|\delta_n| \simeq |\delta_0|e^{n\lambda}$, entonces este valor de λ se le conoce con el nombre de **exponente de Lyapunov**, y despejándolo de la expresión anterior nos permite dar su definición,

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} \right)$$

Puede probarse que el exponente de *Lyapunov* de una órbita puede calcularse como,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|$$

si existe este límite.

Observemos que el cálculo de λ nos sirve para detectar la presencia de caos, ya que si este parámetro es positivo entonces estaremos ante su presencia, ya que esto indica que el sistema es muy sensible a las condiciones iniciales.

3.5.9. Diagramas de bifurcación

Podemos preguntarnos si la teoría del caos puede ser utilizada para estudiar el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos biológicos. En efecto, la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = \mu x_t (1 - x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

donde x_t es la fracción de la población en el tiempo t , es una fórmula que hemos tenido ocasión de trabajar repetidamente con ella. Se trata de la curva logística, utilizada para estudiar la evolución de poblaciones en ecología.

Hemos visto en el Ejemplo 3.10 que al variar el valor del parámetro μ , el sistema puede tender a un solo punto de equilibrio, a dos, a cuatro, \dots , o bien presentar un comportamiento caótico.

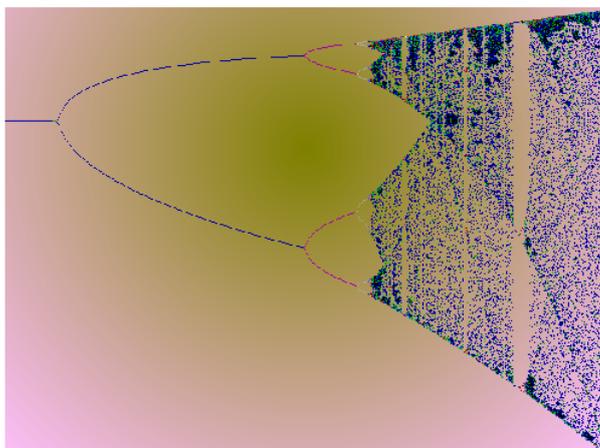


Figura 3.20: Diagrama de bifurcación del modelo de *May*.

Su diagrama de bifurcación se obtiene dibujando en el eje de abscisas los valores del parámetro μ y en el eje de ordenadas los valores a los que tiende el sistema. Por ejemplo si $\mu = 2.5$ entonces $x_t \rightarrow 0.6$, o bien, en el caso $\mu = 3.3$ entonces $x_t \rightarrow 0.823$ y $x_t \rightarrow 0.479$. La Figura 3.20 representa la gráfica obtenida. Si seleccionamos cualquiera de las zonas del diagrama de bifurcación de la Figura 10.12 y la ampliamos obtenemos la Figura 3.21. Podemos comprobar una de las propiedades que definen a un objeto fractal, como es la **autosemejanza**.

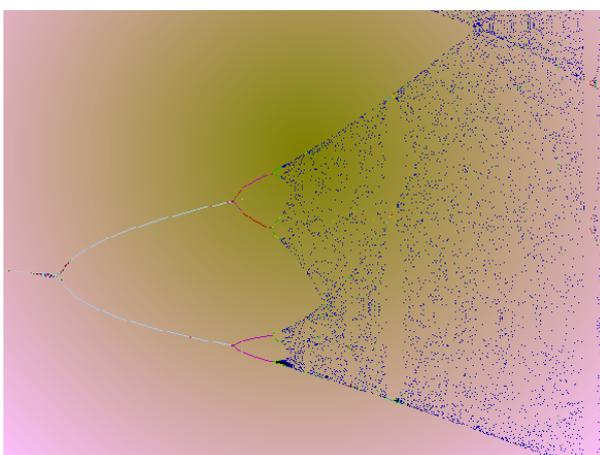


Figura 3.21: Autosemejanza del diagrama de bifurcación.

El diagrama de bifurcación tiene propiedades importantes. Entre ellas presentamos la siguiente: sabemos que a medida que aumentamos el valor del μ el período se va duplicando.

PERIODOS	INTERVALOS	COCIENTES
2	$3 < C < 3.4495$
4	$3.4495 < C < 3.5441$	4.75159
8	$3.5441 < C < 3.5644$	4.6601
16	$3.5644 < C < 3.5688$	4.61364

Tabla 3.1

La Tabla 3.1 muestra algunos de estos valores, y además los cocientes entre la amplitud de un intervalo y el inmediatamente anterior, por ejemplo $(3.5441 - 3.4495)/(3.4495 - 3)$. Lo llamativo de este hecho, es que los cocientes tienden al número trascendente:

$$4.669201609110299067185532038204662016\dots$$

que se conoce con el nombre de **constante de Feigenbaum**. Es un problema abierto el estudiar la importancia que este número juega en la naturaleza. Se piensa que puede tener un protagonismo similar al número e .

Las **aplicaciones de la teoría del caos** son múltiples y en campos muy diversos, en Biología, en Economía, en Medicina,... etc. Hasta ahora parecía que al estallar el caos no seríamos capaces de hacer nada, por ejemplo, si el avión empieza a moverse de una manera extraña pensamos que la catástrofe es inevitable; o bien, si el corazón empieza a latir rápidamente y sin ayuda inmediata puede ocurrir lo peor. En los últimos años, en el campo de la Medicina, las investigaciones actuales, nos ofrecen esperanzas de “domesticar” el caos. *Edward Ott*, *Ceslo Grebogi* (físicos) y *James A. Yorke* (matemático) han elaborado un algoritmo matemático que permite convertir un determinado tipo de caos en un proceso periódico sencillo. La idea que encierra el algoritmo, es que no es necesario comprender todo el movimiento caótico para poderlo regular. Lo que tenemos que hacer es “mirar” continuamente a que dirección tiende el proceso, y realizar perturbaciones pequeñas para volver a dirigirlo en el camino deseado. Naturalmente aquí no se termina de vigilar el sistema, porque después el caos aparecerá de nuevo. Por otro lado, el profesor *A. Garfinkel* de la Universidad de California, ha conseguido transformar el movimiento caótico de un corazón sacado a un conejo en un movimiento regular.

3.5.10. Modelos discretos con retardo

Hasta ahora en todos los modelos discretos estudiados hemos supuesto que cada miembro de la especie en el tiempo k contribuye al crecimiento de la población para el tiempo $k + 1$ de la siguiente manera:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esto ocurre, por ejemplo en la mayoría de poblaciones de insectos, pero no para otros muchos animales, donde son fértiles en una época muy concreta del año. En tales casos, para analizar la dinámica del modelo, hemos de incorporar el efecto del retardo, que en cierta manera viene a jugar un papel parecido al estudio que realizamos de la población por estructura de edades. Si el retardo (por ejemplo, la madurez), es de un paso T , entonces nos aparece el siguiente modelo de ecuaciones en diferencias

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-T}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Por ejemplo, se sabe que para cierto tipo de población de ballenas, el retardo T es del orden de varios años.

A continuación analizaremos un caso concreto con el objetivo de realizar un análisis de la estabilidad del modelo.

EJEMPLO 3.12

- Supongamos

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-1}) = x_k e^{r(1-x_{k-1})}; \quad r > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

Sus puntos de equilibrio se encuentra resolviendo la ecuación $f(x) = x$, siendo $f(x) = x e^{r(1-x)}$. Las soluciones son $x^* = 0$ y $x^* = 1$.

Si estamos interesados en clasificar el estado de equilibrio no trivial, supongamos que $x_k = 1 + v_k$ con $|v_k| \ll 1$. Sustituimos en (3.23), utilizamos $e^t \approx 1 + t$

$$1 + v_{k+1} = (1 + v_k) e^{-rv_{k-1}} \approx (1 + v_k)(1 - rv_{k-1}),$$

y simplificando, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$v_{k+1} - v_k + rv_{k-1} = 0. \quad (3.24)$$

Para resolverla, tenemos que encontrar las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \lambda + r = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4r}}{2} & \text{si } r < \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4r}}{2} & \text{si } r < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Cuando $r > 1/4$ las raíces son dos números complejos conjugados: $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$ y $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$, donde

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4r-1}{4}} = \sqrt{r}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{4r-1}/2}{1/2} = \arctan \sqrt{4r-1}$$

La solución de (3.24) será:

$$v_k = A\lambda_1^k + B\lambda_2^k,$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

- 1.- Si $0 < r < 1/4$, entonces λ_1 y λ_2 son dos números reales comprendidos estrictamente entre cero y uno. En consecuencia, si k tiende a infinito λ_1^k y λ_2^k tienden a cero.

Conclusión: El punto de equilibrio $x^* = 1$ será estable. Además, después de una pequeña perturbación la solución tiende de forma monótona al punto de equilibrio. Puede verse gráficamente en la Figura 3.22 (izquierda).

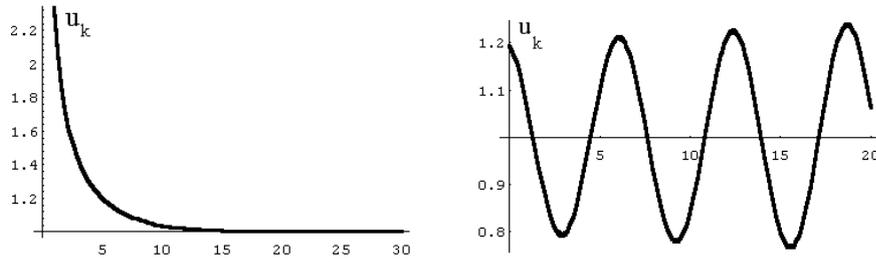


Figura 3.22: Soluciones de la ecuación en diferencias con retardo. Izquierda: $r = 0.2$, $A = 0.1e^{1.26t}$; derecha: $r = 1.02$, $A = 0.1e^{1.26t}$.

- 2.- Si $1/4 < r$, entonces λ_1 y λ_2 son dos números complejos conjugados, con $\lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = \rho^2 = r$. Además, si $1/4 < r < 1$, entonces para que la solución

$$v_k = A\lambda_1^k + B\bar{\lambda}_1^k,$$

sea un número real, debe suceder que $B = \bar{A}$. Supongamos entonces que $A = \alpha e^{i\gamma}$ y $B = \alpha e^{-i\gamma}$, llevando estos valores en la solución

$$v_k = A\lambda_1^k + B\bar{\lambda}_1^k = \alpha e^{i\gamma} \rho^k e^{i\theta k} + \alpha e^{-i\gamma} \rho^k e^{-i\theta k} =$$

$$\alpha \rho^k (e^{i(\gamma+\theta k)} + e^{-i(\gamma+\theta k)}) = 2\alpha \rho^k \cos(\gamma + \theta k),$$

y por lo tanto, cuando el parámetro r tiende a uno, entonces el ángulo θ tiende hacia $\arctan \sqrt{3} = \pi/3$.

(b1) Cuando r sea mayor que uno, entonces $|\lambda_1| > 1$ y v_k crece indefinidamente al tender k hacia infinito. En consecuencia $x^* = 1$ será un punto de equilibrio inestable.

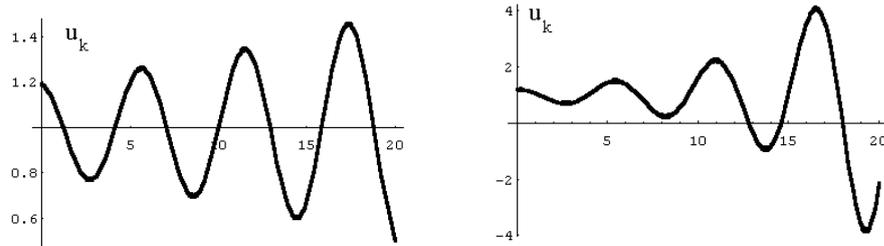


Figura 3.23: Soluciones de la ecuación en diferencias con retardo. Izquierda: $r = 1.1$, $A = 0.1e^{1.26t}$; derecha: $r = 1.4$, $A = 0.1e^{1.26t}$.

- (b2) Para valores de r próximos a uno, el ángulo $\theta \approx \pi/3$, y

$$v_k \approx 2\alpha \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}k\right),$$

que es una función periódica de orden 6. En las Figuras 3.22 (derecha) y 3.23, hemos representado las soluciones $u(k)$ para tres valores de r mayores de uno. En la Figura 10.14 (derecha) puede apreciarse que es periódica de periodo 6. En la Figura 10.15 puede verse que se está cerca del caos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 2

1.- Sea x_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t . Se sabe que año tras año sobreviven la tercera parte de los animales y además se incorporan 200 a la población.

- Construir un modelo discreto lineal para la situación planteada.
- Calcular los seis primeros términos de las órbitas correspondientes a las semillas: $x_0 = 90$, $x_0 = 600$.
- Construir los diagramas de Cobweb del apartado anterior, e interpretar biológicamente los resultados obtenidos.

2.- Sea N_t la población de ardillas en el año t . Es conocido que la población en un año cualquiera disminuye en un 40 % de la población del año anterior, y que además siempre se incorporan 20 ardillas del exterior.

- Construir el modelo discreto y dibujar su diagrama de cobweb para los valores iniciales $N_0 = 10$ y $N_0 = 80$. Interpretar el resultado.
- Encontrar la población de ardillas N_t para un año cualquiera, sabiendo que inicialmente hay 15 ardillas.
- Relacionar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores.

3.- Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$y_{t+1} - y_t = t, \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t .

- Explicar el significado “biológico” de la ecuación anterior
- Resuelve la ecuación en diferencias anterior.

4.- La evolución de una población x_t viene determinada por el siguiente modelo discreto exponencial con inmigración y emigración,

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t - \mu, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

siendo el parámetro positivo μ la diferencia entre el número de personas que entran y las que salen, el parámetro r la tasa de crecimiento de la población, y x_0 el número inicial de individuos.

- Estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo según los diferentes valores del parámetro r .
- Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb, para $r = 0.2$ y $\mu = 10$.

5.- Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:

- Un modelo discreto frecuentemente utilizado para estudiar la dinámica de una población de insectos es el modelo de *Ricker*, que viene definido por la ecuación en diferencias:

$$x_{k+1} = x_k e^{r\left(1 - \frac{x_k}{\alpha}\right)}, \quad r, \alpha \in \mathbf{R}^+, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio no triviales.

- En el modelo logístico discreto:

$$x_{k+1} = 2.5x_k(1 - x_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Encontrar los cinco primeros términos de la órbita correspondiente a la semilla $x_0 = 0.8$ y dibujar su diagrama de Cobweb correspondiente. Analizar el resultado.

6.- La siguiente ecuación en diferencias describe la población de ardillas en años sucesivos,

$$x_{t+1} = x_t^3 - 3x_t^2 - 3x_t + a, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

siendo a un parámetros positivo y x_t el número de ardillas en el año t .

- Encuentra el valor del parámetro a sabiendo que existe un punto de equilibrio en $x^* = 2$
- Clasificar los puntos de equilibrios que tienen sentido biológico para conocer el comportamiento a largo plazo de la población.

7.- Calcular y clasificar los puntos de equilibrio para el modelo discreto:

$$N(t+1) = \frac{\lambda N(t)k}{N(t)(\lambda - 1) + k}, \quad k > 0, \quad \lambda > 1, \quad t = 0, 1, \dots,$$

donde $N(t)$ representa a la población en el período t .

8.- Responder a las siguientes cuestiones:

- La ecuación:

$$x_{t+1} = \lambda x_t(1 + ax_t)^{-b}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

donde $\lambda, a, b > 0$ es utilizada frecuentemente como un modelo de crecimiento de poblaciones que dependen de la densidad de dicha población.

Encontrar los puntos de equilibrio del modelo anterior, y probar que $x^* = 0$ es un punto de equilibrio estable si $\lambda < 1$.

- En el modelo logístico discreto:

$$x_{t+1} = 3x_t(1 - x_t), \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Encontrar los cinco primeros términos de la órbita correspondiente a la semilla $x_0 = 0.3$ y dibujar el diagrama de Cobweb correspondiente.

- 9.- Muchas poblaciones de insectos se rigen por el siguiente modelo

$$f(N_t) = N_{t+1} = \frac{\lambda}{\alpha} N_t^{1-b}, \quad \alpha, b, \lambda > 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

donde λ representa a la tasa reproductiva ($\lambda > 1$) y N_t^{-b}/α es la fracción de la población que sobreviven desde la infancia a la edad adulta reproductiva. Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

- 10.- Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del siguiente modelo discreto:

$$x_{t+1} = \frac{kx_t}{a + x_t}, \quad k > a > 0,$$

donde x_t representa al número de individuos de una población en el tiempo t ¿Cuál será el comportamiento de la población a largo plazo, si $k = 30$, $a = 10$ y $x_0 = 15$ individuos?

- 11.- Sea N_t el número de individuos de una población en el tiempo t . Si la evolución de N_t queda definida por la siguiente ecuación en diferencias

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{1}{3} (-N_t^3 + N_t^2 + 4N_t - 1)$$

Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo para discutir la evolución a largo plazo de la población según los distintos valores de N_0 .

- 12.- La siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{t+1} = \frac{\alpha x_t}{1 + \beta x_t}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x_t \geq 0,$$

fue propuesta por *Kaplan & Glais* en 1995 y juega un papel muy importante en análisis de modelos no lineales genéticos y en redes neuronales.

- Encontrar y analizar los puntos de equilibrio
 - Sea $\alpha = \beta = 1$. Dibujar de forma aproximada el diagrama en telaraña (cobweb) tomando como semilla $x_0 = 4$.
-

3.6. Ejemplo de sistema dinámico: la Geometría Fractal

“La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares.”

Con estas rotundas palabras inicia el profesor *Michael Barnsley* su famoso libro sobre fractales. En efecto, una vez que conocemos esta nueva geometría es difícil contemplar la naturaleza, y el mundo que nos rodea, con los mismos ojos. La geometría fractal, no sólo es interesante por la belleza de las imágenes que crea, sino que en la actualidad es difícil encontrar una rama de conocimiento donde los fractales no estén presentes.

El significado de la palabra *Matemática* es “lo que se aprende”, pero en el fondo de su filosofía se encuentra la búsqueda de patrones. En un principio, nuestros antepasados observaban los fenómenos naturales, como los eclipses, con verdadero terror. No podían entender cómo repentinamente el sol desaparecía del cielo y la más terrible oscuridad se cernía sobre ellos. Tenían que buscar explicaciones y al no encontrarlas, le atribuyeron a estos fenómenos naturales un carácter divino. Sin embargo, el poder del razonamiento de nuestra especie se impuso y algunos matemáticos griegos se dieron cuenta que la naturaleza estaba regida por leyes que eran necesarias conocer.

La búsqueda de estos patrones ha sido lenta, larga y complicada. Se inició con *Hiparco*, continuó con el modelo heliocéntrico de *Aristóteles* y *Ptolomeo*, fue revisado y mejorado por *Copérnico* y *Galileo*, posteriormente formalizado por *Newton* y modificado por *Einstein*. Lo importante es comprender que no es necesario recurrir a los dioses para entender los fenómenos naturales. Nuestro universo, se rige por unas leyes muy precisas y los científicos, los matemáticos entre ellos, se ocupan de descubrirlas.

En la larga búsqueda de estos patrones, los matemáticos griegos encontraron una geometría que representaba perfectamente **al orden y lo regular**. Apoyándose en la herencia de las matemáticas egipcias y babilonias, los griegos construyeron los cimientos de nuestras matemáticas actuales, con la invención de unas matemáticas basadas en definiciones, axiomas, teoremas y demostraciones.

Desconocemos gran parte de la vida de *Euclides*, aunque la repercusión de su obra, en especial *Los Elementos*, ha sido crucial para la humanidad. Con la invención de la imprenta el libro de texto más reeditado ha sido la Biblia y a continuación *Los Elementos*, con más de mil ediciones. Los Elementos son 13 libros donde se recoge, estructura y organiza todo el saber conocido, especialmente en Geometría y en Teoría de Números.



Figura 3.24: *Euclides, Galileo y Laplace*

Los cuatro primeros axiomas son de enunciado muy simple que tienen que ver con puntos y rectas, mientras que el quinto es largo y complicado, conocido como el axioma de las paralelas. A pesar de la controversia que este último postulado ha generado en la historia de las matemáticas, en el siglo XX se pudo demostrar que no puede deducirse del resto de los axiomas.

Esta geometría, que se conoce con el nombre de euclídea, es ideal para representar a todos aquellos objetos construidos por el hombre. Está basada en puntos, rectas y planos que pueden describirse y manipularse mediante ecuaciones. A propósito de ello, a principios del XVII el gran científico Galileo comentaba en uno de sus trabajos:

“La filosofía está escrita en ese gran libro que es el Universo, siempre abierto ante nuestros ojos, pero imposible de leer salvo que uno aprenda a comprender el idioma en que está escrito. Ese idioma es el de la matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas . . .”

Uno de sus rasgos más significativo de la geometría euclídea es que a estos objetos se le puede asignar un número, conocido como su dimensión topológica, que sólo puede tomar valores enteros. De esta manera, un punto no tiene tamaño, su dimensión es cero, una recta tiene dimensión uno, un plano dimensión dos, y así sucesivamente. Otra característica de los objetos que representa la geometría euclídea es que cuando se amplían tienden a perder la forma que tienen inicialmente. Si se aumenta sucesivamente una parte de una circunferencia al final adopta la forma de una recta y no de una circunferencia.

Sin embargo, *Galileo* no estaba en lo cierto. Existen otros objetos y situaciones que no son regulares o que son caóticos, ¿qué pasa con ellos?, ¿cómo pueden ser representados y manipulados? Empecemos fijándonos en los sistemas caóticos. El caos es una apasionante teoría, surgida en los últimos años, que ocupa a un elevado número de científicos, con la esperanza de simplificar fenómenos complejos. Hasta finales del siglo XIX se creía que todo nuestro entorno estaba regido por leyes determinista. Los científicos estaban convencidos de que nuestro mundo era predecible, estable

y se podía conocer completamente. De hecho *Laplace* se inventó un personaje, *el demonio de Laplace*, con tal poder que si conociera todas las leyes de la naturaleza y, en un instante dado, la velocidad y posición de todas las partículas de un sistema, entonces sería capaz de predecir con exactitud el comportamiento pasado y futuro del sistema. Pensemos en la amplitud de esta afirmación, puesto que este personaje podría conocer el más pequeño movimiento de una persona que viviera en el futuro. Puro determinismo, todo estaría escrito y no quedaría lugar para la improvisación.

Frente a esta posición tan inquietante, se encuentran las teorías científicas del siglo XX, en especial la mecánica cuántica, donde el principio de incertidumbre de *Heisenberg* afirma que es imposible determinar simultáneamente la posición y velocidad de una partícula. Teniendo en cuenta la naturaleza de nuestro universo, ninguna longitud menor de $1.6 * 10^{-33}$ centímetros, ninguna masa inferior a $2.2 * 10^{-5}$ gramos, ninguna duración menor de $5. * 10^{-44}$ segundos puede existir. Por tanto, ¿cómo puede pretender *el demonio de Laplace* predecir el futuro, cuando es imposible medir exactamente la posición y velocidad de una sola partícula?

En la naturaleza existen muy pocos fenómenos tales que, el resultado al aplicarles una acción es proporcional a la causa que lo ha originado. En estos casos, el fenómeno se puede describir linealmente. Por desgracia, la mayoría de los fenómenos son no-lineales, y su estudio se hace terriblemente complicado ya que no pueden utilizarse las técnicas de resolución clásicas. De entrada suele ser imposible resolver de forma exacta las ecuaciones que los describen, siendo necesario utilizar el ordenador y hacer uso de métodos aproximados, pero la estabilidad de estas soluciones no puede asegurarse. De hecho, pequeñas variaciones en los datos iniciales dan lugar a soluciones muy diferentes del problema. Es lo que se conoce con el nombre de **efecto mariposa**, y es una característica básica de los sistemas caóticos.

¿Pero qué relación existe entre los fractales y el caos? La respuesta está en que la geometría fractal es la herramienta ideal para describir y estudiar a los sistemas dinámicos caóticos que se encuentran en la naturaleza.

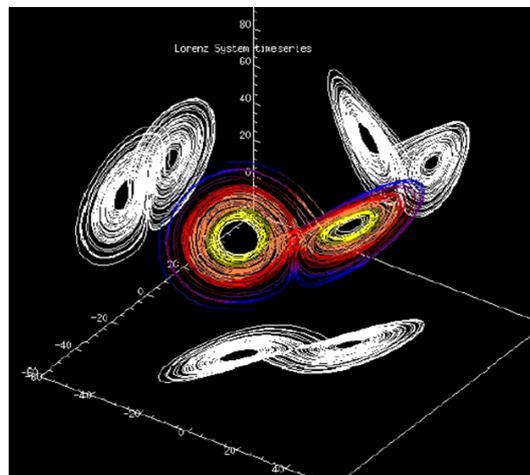


Figura 3.25: Atractor de Lorentz

Un ejemplo típico de sistema caótico es el clima. En 1963 *Edward Lorenz* presentó un modelo climático, basado en la interrelación entre la temperatura, la presión y la velocidad del viento, titulado “puede el aleteo de una mariposa en Brasil provocar un tornado en Texas” que se convirtió en un artículo básico de la teoría del caos. El objetivo básico del trabajo era mostrar que el comportamiento de este modelo del clima era muy sensible a las condiciones iniciales, y además que la representación gráfica de la soluciones del modelo era una figura tridimensional, llamada atractor extraño, en forma de mariposa. Si se amplía alguna de las zonas de la mariposa de Lorenz se obtiene otra figura que es muy similar a la inicial. Es decir, la figura tiene estructura fractal.

En 1972 el matemático *J. Yorke* divulgó el trabajo de *Lorenz*, que había pasado desapercibido para la comunidad científica. Al mismo tiempo, el biólogo *R. May* descubrió, que un modelo muy simple como es el logístico, que describe cómo evoluciona una población de animales, predice que la población a largo plazo puede estabilizarse en un número, ó comportarse de manera periódica, o bien tener un comportamiento caótico. Todo este rango de soluciones distintas se puede obtener con tan sólo variar el valor de un parámetro. Es decir, modelos simples pueden tener comportamientos muy complicados.

Insistimos en que en los sistemas caóticos un ligero cambio en las condiciones iniciales, a largo plazo, implica un comportamiento totalmente distinto del modelo. Pero por lo visto anteriormente, es imposible medir con total precisión ninguna variable, es decir, y según esta teoría, aunque mejore la capacidad de cálculo de los ordenadores, será imposible predecir a largo plazo el comportamiento del sistema, en particular el meteorológico.

3.6.1. Antecedentes históricos

Como se ha comentado, los matemáticos podían abordar con ciertas garantías de éxito todos aquellos problemas relacionados con “lo regularz ”lo lineal”. +Qué pasa entonces con lo irregular¿

Los fractales se presentaron, a mediados del siglo XX, como una nueva herramienta de trabajo con el objetivo de poder analizar y modelizar los objetos irregulares de la naturaleza. En realidad existen aplicaciones y conceptos que son anteriores a esta fecha y que aparecieron con otros objetivos y en contextos distintos. *Richard Bentley* en el siglo XVII escribió:

“... no hemos de creer que las orillas del mar sean realmente deformes por no tener la forma de un baluarte regular; que las montañas no son exactamente como conos o pirámides, ni las estrellas están situadas desmañadamente por no estar a una distancia uniforme ... “

En 1875 el matemático *Reymond* llamó la atención a la comunidad científica de una extraña función propuesta por *Riemann* que podía dibujarse sin levantar el

lápiz del papel (era continua) pero que estaba llena de irregularidades (no tiene derivada en ninguno de sus puntos). Esto era algo que aborrecían el resto de sus compañeros. Sin embargo, a pesar de lo extraño de esta función, lo sorprendente es que su gráfica representa muy bien a fenómenos de la vida cotidiana, como por ejemplo las cotizaciones en bolsa de las acciones de un banco español.

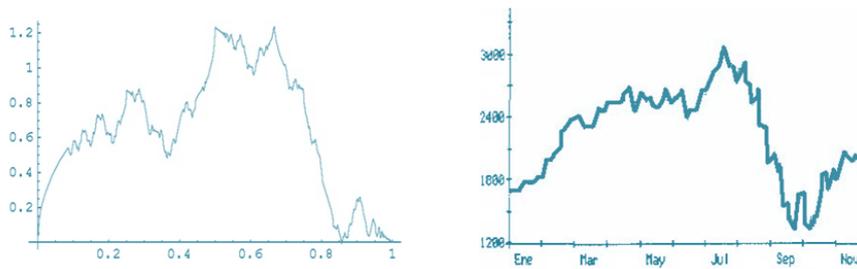


Figura 3.26: La función de Riemann.

Eran tiempos de crisis en los fundamentos de las matemáticas y rápidamente muchos matemáticos, *Cantor*, *Peano*, *Lebesgue*, *Hausdorff*, *Besicovitch*, *Koch*, entre otros, investigaron sobre este tipo de funciones. Sin embargo, para analizar estas estructuras eran necesarias unas “nuevas matemáticas” puesto que no encajaban dentro de la geometría euclídea.

Aparecieron curvas como la de *Hilbert* que eran capaces “de llenar” todo un cuadrado, o un cubo. Pero esto daba lugar a la siguiente paradoja: una curva, según la geometría euclídea, debía tener dimensión uno, pero al “llenar” todo el espacio tendría dimensión dos en el caso del cuadrado y tres en el del cubo.

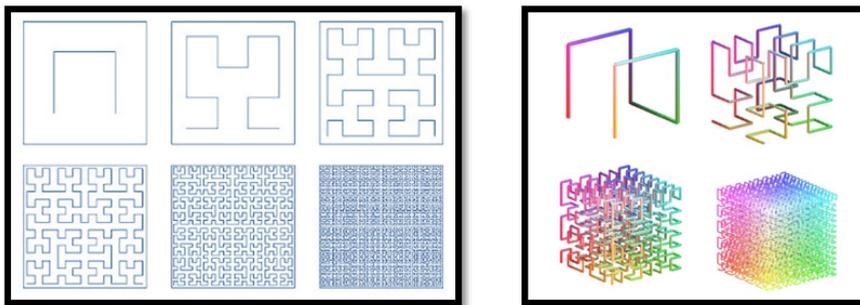


Figura 3.27: La curva de Hilbert.

Estas nuevas extrañas estructuras fueron bautizadas por el gran matemático francés *Poincaré* como “monstruos matemáticos”, curvas que estaban en contra de toda intuición.

La comunidad matemática focalizó todo su esfuerzo en estudiar estas funciones llenas de irregularidades, hasta tal punto que el famoso matemático *Hermite* dirigió una carta a su buen amigo *Stieljes* diciendo, “*... abandono con espanto y horror esta*

lamentable plaga de funciones sin derivada ...". En este mismo sentido *Poincaré* comentaba " ... cuando uno inventaba una nueva función, estaba en vista de alguna meta conveniente; ahora se inventan intencionalmente para poner los defectos de los razonamientos de nuestros padres".

Hay que esperar hasta mediados del siglo XX con la aparición de *Norbert Wiener* cuando, analizando el movimiento browniano de las partículas, construye un modelo matemático totalmente irregular. En este trabajo aparece por primera vez la palabra caos. En la introducción del trabajo comenta:

"La geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de la geometría euclídea o el cálculo diferencial de Newton ..."

Como hemos tenido oportunidad de ver, en el ambiente se respiraba la necesidad de acometer urgentemente y de una manera más detallada el estudio de los objetos irregulares. Esta labor la desarrolló, en torno al 1975, el matemático *Benoit Mandelbrot*. Las siguientes palabras, en la línea de las pronunciadas por *Bentley* y *Wiener*, dieron origen al inicio de la geometría fractal tal y como hoy en día la entendemos:

"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta, ... La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad"

En la actualidad, matemáticos como *Barnsley*, *Devanay*, *Hubbarc* y *Sullivan*, estudian los fractales tanto desde el punto de vista teórico como el aplicado. Desde finales de los años 70 y con la ayuda de potentes ordenadores, los fractales han estado presentes en la investigación matemática.

3.6.2. La geometría fractal.

La palabra fractal la acuñó *Mandelbrot*, procede del adjetivo latino *fractus*, y puede traducirse como fragmentado e irregular. Los fractales son objetos matemáticos que se sitúan en el campo de la teoría geométrica de la medida cuya definición exacta está por establecer.

Es muy difícil dar una definición exacta de un fractal, puesto que requiere de un nivel muy elevado de abstracción. Por otro lado, el número de sus aplicaciones es tan enorme y en materias tan distintas, que según sea la disciplina a estudiar ofrecerá una definición u otra. Evidentemente la definición propuesta por un artista no será igual a la de un matemático.

Existe un gran consenso en que bajo el nombre de fractales se incluyen aquellos objetos matemáticos con los mismos rasgos, si bien la definición concreta no es aplicable a todos ellos. Por este motivo, la mejor manera de poderlos describir es señalando una serie de propiedades que tienen en común.

- Tienen el mismo aspecto a cualquier escala de observación.
- Tienen longitud infinita.
- No son diferenciable. Esto es, están lleno de irregularidades.
- Tienen dimensión no entera.

Para comprender mejor algunas de estas propiedades, vamos a centrarnos en un tipo concreto de fractales, los llamados determinísticos o matemáticos, que se obtienen a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado.

El proceso geométrico suele ser de enunciado muy simple pero que al final da lugar a una estructura compleja, obtenida mediante la repetición infinita del proceso. En este tipo de fractales, es muy evidente la propiedad de autosemejanza, ya que una pequeña sección del fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el objeto.

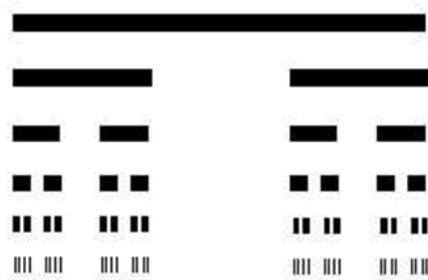


Figura 3.28: El fractal de Cantor.

El conjunto de Cantor es un clásico fractal matemático que se obtiene de la siguiente manera: se parte de un segmento unitario, se divide en tres partes y se elimina la parte central. Cada uno de los dos nuevos segmentos de longitud un tercio se divide en tres partes y se vuelve a quitar el segmento central, y así sucesivamente.



Figura 3.29: El fractal de Cantor en 3D.

Después de infinitos pasos se obtiene un conjunto que recibe el nombre de polvo de Cantor, debido a que la longitud de los segmentos en cada una de las sucesivas etapas tiende a cero. De hecho el número de puntos del conjunto es infinito y sin embargo su longitud total es cero.

Observemos que el mismo procedimiento, de iterar de forma infinita un proceso geométrico concreto, puede aplicarse a un cubo en lugar de a un segmento. En la figura puede apreciarse su aspecto después de 1, 2 y 3 iteraciones.

Una de las características básicas de las matemáticas es la capacidad de aplicación de los conceptos teóricos introducidos. El conjunto de Cantor se inventó estudiando un problema muy complicado, resuelto hace pocos años, conocido con el nombre de la hipótesis del continuo. De entrada da la impresión que poco tiene que ver este conjunto con nuestra vida cotidiana, pero eso no es así.

En efecto, la información circula de ordenador a ordenador a través de las líneas telefónicas, pero este tráfico se ve afectado por un ruido de fondo que se produce en la transmisión. Hace unos años, los ingenieros informáticos se enfrentaban al problema de eliminar o mitigar este ruido y no lograban encontrar un método para ello, puesto que el ruido aparecía sin un patrón fijo, parecía producirse de una manera aleatoria. Mandelbrot, tuvo noticias del problema y empezó dividiendo el tiempo en períodos de días, posteriormente en horas, y de esta manera encontró una hora que no tenía errores. Posteriormente dividió la hora que contenía errores en períodos de media hora y de nuevo apareció un intervalo con error y otro sin error. Es decir, la secuencia de los errores seguía el mismo patrón que el conjunto de Cantor. Con esta información, basada en este patrón de comportamiento, los ingenieros pudieron construir filtros electrónicos que mejoraron la calidad de la transmisión. El conjunto de Cantor también se utiliza como modelo matemático para analizar la estructura de los anillos de Saturno, o el espectro de algunas moléculas orgánicas.

Otro fractal matemático importante es el conocido con el nombre de triángulo de *Sierpinski*. Su método de construcción es muy sencillo puesto que se parte de un triángulo, tal y como aparece en la figura,



Figura 3.30: Triángulo de Sierpinski

se unen los puntos medios de sus tres lados y se elimina el triángulo central. Tenemos ahora tres triángulos y en cada uno de ellos se aplica el procedimiento descrito en el triángulo inicial. Se reitera este proceso geométrico hasta el infinito, y el conjunto teórico que se obtiene es el triángulo de *Sierpinski*.

Por supuesto que el mismo razonamiento puede aplicarse a un cuadrado, o a un cubo, en lugar del triángulo. En este caso, el conjunto obtenido se llama la alfombra de *Sierpinski*, y tiene la sorprendente particularidad de que el área (o el volumen en el caso del cubo) de esta alfombra es cero. Es decir, una maravillosa alfombra que nunca estaría sucia ya que no podría acumular polvo, al carecer de área.



Figura 3.31: Alfombra de Sierpinski.

Al igual que hemos comentado en el fractal anterior, también este conjunto está presente en nuestra vida diaria. Se encuentra con frecuencia en los diseños más variados, como por ejemplo, una alfombra, o bien en las antenas receptoras de nuestros teléfonos móviles.



Figura 3.32: Aplicaciones del fractal de Sierpinski.

Para terminar con los ejemplos de fractales matemáticos presentamos al conocido con el nombre de copo de nieve o curva de *Koch*. Se obtiene tomando un triángulo equilátero, cada uno de sus lados se divide en tres partes, y se sustituye el segmento central por dos segmentos de la misma longitud en forma de triángulo equilátero. En la figura puede apreciarse las primeras iteraciones del proceso.

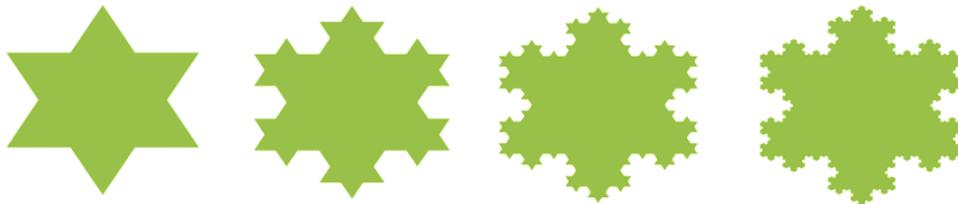


Figura 3.33: Curva de Koch.

En teoría, al ser el proceso infinito, el resultado que se obtiene es una figura tremendamente compleja e irregular, que tiene área finita, siendo su perímetro una poligonal de longitud infinita. Una variante del copo de nieve de *Koch* se utiliza como forma básica para diseñar el corte de un pulmón, o para mejorar la forma de una costa.

Como hemos tenido oportunidad de ver en estos ejemplos de fractales, la potencia de la geometría fractal radica en la posibilidad de construir una estructura geométrica muy complicada a través de un proceso muy simple. Por esta razón, es especialmente útil para modelizar los fenómenos naturales donde la complejidad de su estructura viene originada por la repetición de procesos muy sencillos. Como tendremos ocasión de comprobar, ésta es una de las características más destacada de los fractales,

objetos de tremenda complejidad pero que sin embargo para su descripción y su construcción requieren de muy poca información.

El ordenador, con su potencia de cálculo, ha sido el culpable del gran auge que ha experimentado en los últimos años la geometría fractal. Recordemos que la idea básica de los fractales está en la iteración, la repetición infinita de un proceso simple, y para esta tarea nada mejor que el ordenador, teniendo además la posibilidad de representaciones gráficas cada vez más precisas.

Los fractales matemáticos que hemos introducido, los lineales, son demasiados perfectos para poder representar a los objetos de la naturaleza, como la hoja de un árbol o el rayo. Por tal motivo se introducirán más adelante los fractales no lineales entre los que se encuentran los obtenidos por un algoritmo de escape.

3.6.3. Autosemejanza

“... un naturalista observa que una pulga tenía pequeñas pulgas en ella y éstas a su vez otras más pequeñas que las mordían. Así se procede hasta el infinito.”

De esta manera tan sencilla el escritor *Jonathan Swift* describe el concepto de autosimilitud. La autosemejanza o autosimilitud es una de las características de los objetos fractales, por la cual una de estas imágenes puede ser descompuesta en trozos más pequeños cada uno de los cuales es idéntico al objeto completo.

Existe una definición matemática más precisa que puede simplificarse diciendo que la autosemejanza es una transformación que conserva la forma y las proporciones, pero que puede variar en tamaño, posición y orientación. Lo importante es que cada uno de los trozos se obtenga de la estructura completa a través de las mismas transformaciones.

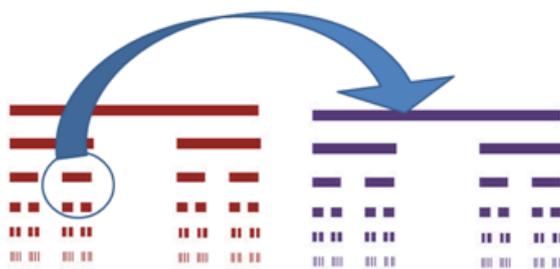


Figura 3.34: Autosemejanza del conjunto de Cantor.

Se puede realizar el siguiente experimento: se toma la curva de Koch y se sacan cuatro fotocopias con un factor de reducción de $1/3$, posteriormente se pegan y se obtendrá la curva original. Para ello, lo importante es que cada una de estas cuatro copias tenga el mismo factor de reducción.

No pensemos que el concepto de autosemejanza es una idea novedosa, en realidad

había sido estudiada por muchos científicos en siglos anteriores, Leibniz entre ellos, cuando propuso esta hermosa idea sobre la estructura del universo. Una gota de agua contenía todo un universo, que a su vez contenía gotas de agua más pequeñas; cada una de estas pequeñas gotas encerraba a su vez un universo que tenía en su interior otras gotas de agua, todavía más pequeñas y así sucesivamente.

En la naturaleza es fácil encontrarse con esta propiedad, por ejemplo la coliflor o el brócoli la posee. Si tomamos un trozo podemos observar que ésta ramita es idéntica a la coliflor completa. Esta misma experiencia podemos hacerla con la hoja de un helecho, o en mucho más diferente como es el sistema vascular.



Figura 3.35: Auto semejanza en la naturaleza.

Pero tenemos que ser muy cuidadoso a la hora de hablar de fractales ya que sería un error creer que todas las estructuras geométricas que tengan la propiedad de auto semejanza tienen que ser un fractal. Pensemos en una línea recta o en un cuadrado, es claro que tienen la propiedad de auto semejanza pero son figuras regulares y por lo tanto no son fractales

3.6.4. El conjunto de Mandelbrot

El conjunto de *Mandelbrot* es un ejemplo perfecto de un sistema dinámico discreto en el conjunto de los números complejos.

Aunque en la actualidad un gran número de personas se han acercado a la geometría fractal por la belleza de las imágenes que genera existen otras razones, tanto matemáticas como su amplio campo de aplicación, que justifican el estudio y la atención a este tipo de estructuras. Como ejemplo de belleza y complejidad se encuentra el mundialmente famoso fractal de *Mandelbrot*.

Benoit Mandelbrot nació en Polonia en 1924, se le considera el padre de la geometría fractal y su aplicación a la elaboración de modelos que representan a los elementos de la naturaleza. A causa de la segunda guerra mundial emigró, en un primer momento a Francia en 1936 para estudiar con su célebre tío, el matemático *Szolem Mandelbrot*, y posteriormente a Estados Unidos al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, siendo el último alumno de doctorado del famoso matemático *John von Neuman*. En 1955 regresó a Francia, al Centro Nacional de Investigaciones Matemáticas, donde permaneció muy poco tiempo ajeno al tipo de matemáticas que el grupo *Bourbaki* elaboraba en ese momento. Afortunadamente recabó en New York en la empresa IBM formando parte de su centro de investigación *Watson Research*

Center, donde encontró el ambiente y las herramientas adecuadas para poner en prácticas sus numerosas ideas.

En 1945 su tío *Szolem* le entregó un manuscrito escrito por el matemático francés *Gaston Maurice Juliá* donde se estudiaba desde un punto muy teórico la iteración de funciones racionales. *Mandelbrot* se enfrentó al mismo problema pero desde un punto de vista geométrico. Sus resultados dieron lugar al primer trabajo sobre fractales que llevó por título “*Les objets fractals, form hasard et dimension*” y fue completado en 1982 con la aparición de su célebre libro “*La geometría fractal de la naturaleza*”.



Figura 3.36: Benoit Mandelbrot.

Para construir el conjunto de *Mandelbrot* es necesario trabajar con pares de números reales, llamados números complejos, cuya representación gráfica son los puntos del plano, por ejemplo el punto $(3, 2)$. Con estos números complejos se puede operar de forma similar a como se hace con números reales, se pueden sumar, multiplicar, etc. Además de estos números es necesaria una fórmula, que no tiene que ser complicada, en el caso que nos ocupa es $z^2 + c$, donde c es un número complejo fijo.

A partir de un valor inicial de $z_0 = 0$ (llamado semilla) se eleva al cuadrado y se le suma el número c obteniéndose el número z_1 . Ahora repetimos el proceso y obtenemos otro número complejo z_2 , y así sucesivamente. De esta forma se ha conseguido una sucesión de números

$$\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots, \}$$

que recibe el nombre de órbita. Si todos los elementos de este conjunto de puntos permanecen a menos de dos unidades del origen de coordenadas, entonces el punto c , pertenecerá al conjunto de *Mandelbrot*, si la distancia es mayor de dos unidades c no formará parte del conjunto. Es decir, el conjunto de *Mandelbrot* es el conjunto de puntos cuyas órbitas generadas por la fórmula anterior nunca escapan de un círculo centrado en el origen de radio dos.

La genial idea de *Mandelbrot*, que pudo hacer porque la tecnología estaba a punto, fue la de pintar en color negro los puntos del conjunto de *Mandelbrot* y en blanco los que estaban fuera. Después de un largo tiempo de espera el resultado obtenido es el que puede apreciarse en la figura.

Por supuesto que una vez conocido el proceso, éste puede ser mejorado. Cuando los números no pertenezcan al conjunto de *Mandelbrot* (el exterior del fractal) entonces se le asignará un algoritmo de color, consistente en asociar colores diferentes a cada punto, de acuerdo a "la rapidez" del incremento de la órbita. Por ejemplo, si la sucesión se incrementa lentamente, entonces la semilla se puede pintar de color azul, por el contrario si crece más rápidamente, tendrá un color amarillo, naranja o verde en función de la velocidad de este crecimiento. Los primeros que utilizaron esta técnica fueron *Peiten* y *Ritchter*.

A mediados de los años 80, *A. Douady* y *J.H. Hubbard* probaron que este conjunto y su complementario son conexos. Es decir, de un solo trozo, aunque al ampliar la frontera del conjunto de la sensación de lo contrario. Debido a que siempre hemos estado acostumbrado a lo regular a las estructuras representadas por la geometría euclídea, al analizar la frontera de este fractal, percibimos que es un tipo de curva que desafía nuestra capacidad de entendimiento, puesto que cuanto más cerca se mire más se ramifica.

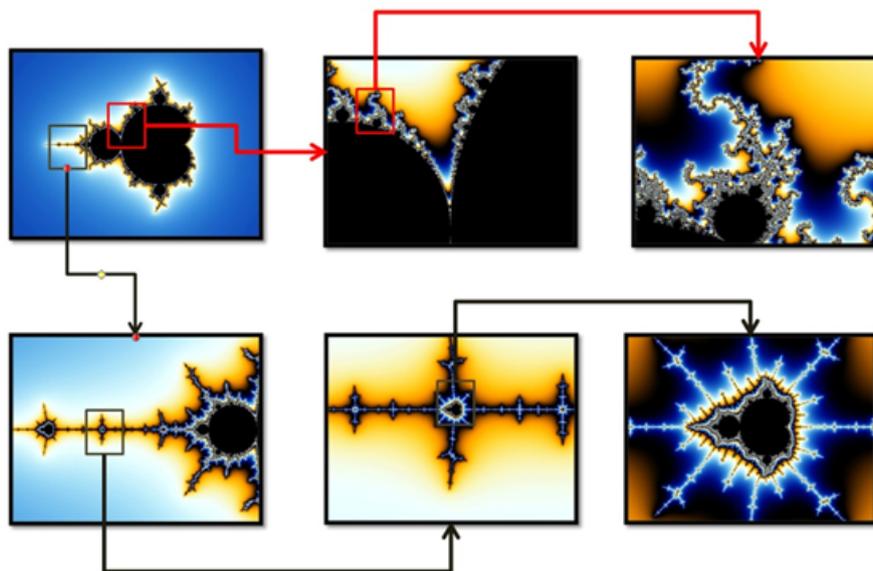


Figura 3.37: Autosemejanza del conjunto de Mandelbrot.

En la figura anterior puede apreciarse dos de las características básicas de los fractales. La primera es que la frontera del conjunto de *Mandelbrot* es una curva irregular tremendamente complicada, y la segunda que tiene la propiedad de autosemejanza, es decir, existen miles de réplicas del fractal a menor escalas.

Es posible obtener otro tipo de fractales, ya que bastara con cambiar la fórmula inicial con la salvedad de que ésta no puede ser lineal. Precisamente el hecho de no linealidad implica la aparición del caos matemático y de la geometría fractal.

Otra manera alternativa de modificar un fractal, como el de *Mandelbrot*, es alterar los algoritmos de color para representar su exterior o interior. Existen en el mercado un número variado de programas informáticos con los que es posible construir

hermosas imágenes. De entre ellos, uno de los más apropiados, por su sencillez de manejo y potencia de resultados, es Ultra Fractal. El programa tiene la ventaja de que no solo se puede construir bonitos fractales, sino que es posible realizar espectaculares animaciones de los mismos, así como fondos fractales con movimiento.

Precisamente la belleza de las imágenes obtenidas junto con la sencillez de su creación ha acercado al mundo de las Matemáticas a un gran número de personas. En boca de Mandelbrot “*ayudan a tender puentes en el abismo que separa las cuestiones matemáticas de la gente de la calle*”.

3.6.5. La dimensión fractal

Uno de los objetivos que ha perseguido la Geometría desde sus inicios ha sido el de encontrar patrones y formas, por un lado, y por el otro, buscar métodos para asignar una medida a estas formas. Es conocido que no es posible medir la diagonal de un cuadrado tomando como unidad el lado de dicho cuadrado. Este problema de medida originó la aparición de los números irracionales. Del mismo modo, los intentos por encontrar la longitud exacta de una circunferencia llevaron a los matemáticos al descubrimiento del número π , o el problema de encontrar el área encerrada por dos curvas dio origen al cálculo diferencial e integral.

En la actualidad muchas personas creen que el cálculo de longitudes, áreas o volúmenes está totalmente resuelto, pero la realidad es que no es así. Es fácil comprobar, buscando el dato en distintas publicaciones, que existe una gran divergencia entre la longitud de la frontera entre dos países, o de un río, aportada por una publicación u otra. En enciclopedias españolas se dice que la longitud de la frontera entre España y Portugal es de 985 kilómetros, mientras que en una enciclopedia portuguesa es de 1212 kilómetros. La razón de esta discrepancia se encuentra en que no es posible dar un número exacto, puesto que al tratarse de una curva totalmente irregular, es imposible medirla, lo que resulta contradictorio con el hecho de que la isla tiene un área finita. Este era el argumento central del famoso artículo de Benoit Mandelbrot titulado -cuánto mide la costa de Gran Bretaña?



Figura 3.38: Medida de una costa.

Para poder medir el perímetro de la costa se toma, en primer lugar, una unidad de longitud. En este caso, el perímetro se estima a partir del número de veces que es necesario llevar el segmento para cubrir toda la costa. Es evidente, que al disminuir el tamaño del segmento unidad, la longitud de la costa aumenta. Los objetos irregulares carecen de medida exacta, puesto que la longitud dependerá de la unidad de medida elegida.

Al no poderse caracterizar la frontera de un fractal por una longitud, es necesario centrarse en un concepto diferente como es el de dimensión, procedente del latín *dimensio*, que significa medida. La idea es buscar un parámetro que, en cierto modo, mida el grado de irregularidad del fractal, y eso será la dimensión fractal.

Desgraciadamente no hay una única definición de dimensión. Existe una definición intuitiva de la dimensión euclídea que coincide con el número de valores reales que son necesarios para situar a un punto en el espacio donde nos encontremos trabajando. Una línea tiene dimensión uno, puesto que sólo se necesita un número real para localizar cualquier punto de la línea. Pensemos, por ejemplo, que cuando deseamos dar nuestra situación en una autopista aportamos sólo un número, su punto kilométrico, aunque esta carretera no sea una línea recta.

Otra definición intuitiva de dimensión euclídea hace referencia al número de direcciones perpendiculares diferentes que se pueden tomar. En nuestro mundo cotidiano contamos con tres direcciones: izquierda-derecha, adelante-atrás, y arriba-abajo; por este motivo decimos que el espacio en que nos movemos es tridimensional.

Pero la aparición de los “monstruos matemáticos”, aquellas curvas que llenaban todo el espacio, desafiaba la idea intuitiva del concepto de dimensión. Este tipo de objetos fractales fueron estudiados dentro de una nueva rama de las matemáticas creada por *Poincaré* que recibe el nombre de Topología. Una curiosa ciencia que trata sobre la manera en que los objetos pueden ser deformados como si pareciesen de goma. Un círculo puede estirarse y convertirse en un triángulo, o en el copo de nieve de *Knoch*. Desde el punto de vista topológico no es posible distinguir una línea recta de la curva de *Hilbert*, o una hoja de papel plana de aquella que se encuentra completamente arrugada.

Definir el concepto de dimensión de manera rigurosa fue una tarea larga y complicada que desafió a los mejores matemáticos de finales del siglo XIX y principios del XX, entre los que se encontraban, *Poincaré*, *Lebesgue*, *Brouwer*, *Cantor*, *Menger*, *Peano*, y *Hilbert*. Era inevitable que tan intenso trabajo diese como resultado un número numeroso de definiciones, todas ellas relacionadas pero distintas: dimensión topológica, dimensión por conteo por cajas, dimensión de autosimilitud, dimensión euclídea, ..., etc.

Por los comentarios anteriores queda claro que estudiar a fondo el concepto de dimensión no es una tarea fácil, pero para el propósito que nos ocupa podemos simplificarlo de la siguiente manera. Si tomamos un segmento de longitud uno y lo dividimos en cinco partes iguales, es evidente que obtendremos 5 segmentos cada

uno de ellos de longitud $1/5$. De la misma manera, si partimos de un cuadrado de lado unidad y dividimos sus lados en cinco partes iguales, obtenemos 25 cuadrados de lado $1/5$. Por último, si elegimos un cubo de lado unidad y dividimos los lados en cinco partes iguales, aparecerán 125 cuadrados más pequeños de lados $1/5$.

Para cada uno de los casos anteriores siempre se cumple que el producto del número de partes por el tamaño de las partes elevado a uno (en el primer caso), dos (en el segundo) y tres (para el tercero) siempre es la unidad. Es decir, se obtiene la fórmula $N(h) \cdot h^D = 1$, siendo h el tamaño de las partes, $N(h)$ el número de partes y D la dimensión. Lo comentado anteriormente puede verse de forma esquemática en la siguiente figura.

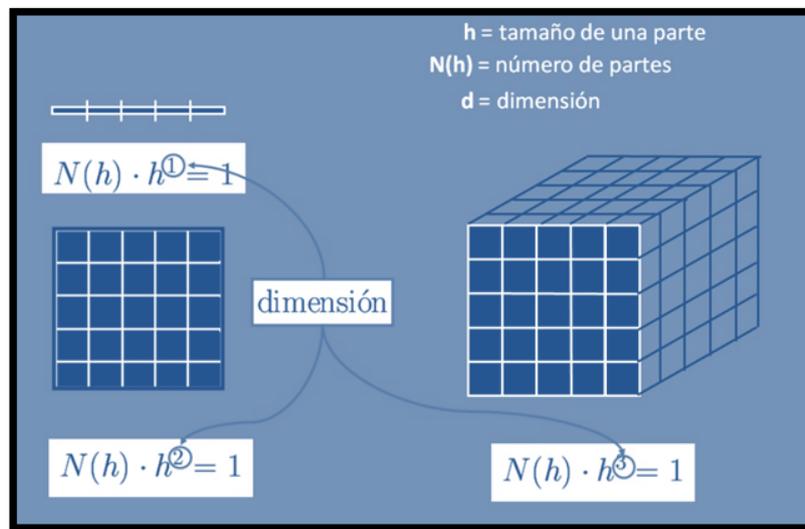


Figura 3.39: Concepto de dimensión

La fórmula anterior se conoce con el nombre de ley de potencia, puesto que el número de partes $N(h)$ cambia como si fuese una potencia de $1/h$. Con unos básicos conocimientos matemáticos es posible despejar de esta expresión la dimensión, siendo su valor

$$D = -\frac{\log(N(h))}{\log(h)}$$

. De esta manera, la dimensión fraccionaria o fractal del Conjunto de *Cantor* es aproximadamente 0.63093, obtenido del cociente $\log(2)/\log(3)$, y la dimensión de la curva de *Knoth* $\log(2)/\log(3) = 1.26186$.

Tenemos que darnos cuenta de la importancia de estos resultados, ya que a través de la dimensión fractal disponemos de un parámetro que caracteriza, de alguna manera, lo sinuoso e irregular de un objeto. Si el fractal es relativamente “suave” su dimensión fractal estará próxima a su dimensión euclídea que es uno, por el contrario si “retuerce” hasta ocupar la forma de un cuadrado, su dimensión fractal estará próxima a dos. La costa de Inglaterra tiene dimensión fractal 1.25, mientras que la dimensión fractal de la costa de Australia es 1.13; en conclusión, la costa de

Inglaterra es mucho más sinuosa e irregular que la de Australia.

Una vez conocidos los conceptos de dimensión euclídea y dimensión fractal de un objeto, tenemos una manera alternativa y algo más precisa de definir a un fractal, ya que será aquél objeto donde su dimensión euclídea sea menor que su dimensión fraccionaria.

Ahora bien, hasta ahora hemos estado refiriéndonos a un tipo de fractales muy concretos como son los obtenidos a través de un algoritmo matemático, pero ¿qué pasa con aquellos objetos de la naturaleza con estructura fractal? Es evidente que su dimensión no se puede obtener a través de la fórmula que hemos deducido anteriormente, puesto que no estamos ante una curva que pueda medirse con escalas diferentes y además no es autosemejante, aunque posee ciertas propiedades de escala”son semejantes estadísticamente.

Los matemáticos *Hausdorff* y *Besicovitch* publicaron en 1919 un artículo donde se generalizaba la fórmula para el cálculo de la dimensión fraccionaria para este tipo de objetos. Su cálculo es extremadamente complejo, pero existe un algoritmo, con el nombre de Box-Counting (método de conteo de cajas), implementado en la mayoría de los programas informáticos que trabajan con imágenes, como por ejemplo *Harfa* o *ImageJ*. [

1.5ex] El algoritmo de Box-Counting consiste en lo siguiente: a partir de la imagen del objeto se obtiene una versión binaria de la misma, a cada punto brillante se le asocia el valor 1 y un 0 al resto. Posteriormente se obtiene una imagen del contorno y se superpone una malla de un tamaño dado. El proceso consiste en contar el número de veces que la imagen corta al cuadrado de la malla. A continuación se hace disminuir el lado del cuadrado y se representa el logaritmo del número de intersecciones en función del logaritmo de la inversa del lado. La dimensión del objeto coincide con la pendiente de la recta de regresión definida por los puntos.

Hemos visto como la longitud de formas irregulares depende de la escala de medida. Este hecho origina un verdadero problema a los biólogos, ya que los lagos que tienen orillas muy irregulares tienen más área con aguas poco profundas y esto produce comunidades más ricas en vida animal. Hasta hoy, no ha sido posible caracterizar las comunidades de un lago con parámetros que relacione la longitud de la orilla con la superficie del agua. La aparición de la dimensión fractal ha llevado a muchos científicos de campos muy diferentes a interesarse por el tema, con la intención de aplicarla a estructuras muy complejas. Sin embargo, tenemos que comentar que hay que ser cuidadoso con su uso, puesto que existen limitaciones en su aplicación. Existen objetos muy complejos que son una mezcla de diferentes fractales, cada uno de los cuales tiene una dimensión distinta.

3.6.6. Tipos de fractales

Aunque existe una primera clasificación muy general de los fractales, llamados lineales, como la curva de Koch, y no lineales, los que se generan a partir de una

fórmula no lineal como el conjunto de Mandelbrot. Sin embargo, podemos hacer una clasificación un poco más detallada de los mismos.

Fractales construidos a partir de un algoritmo de escape. Un ejemplo clásico de ellos es el fractal de *Mandelbrot* obtenido, como sabemos, de la manera siguiente: para cada punto del plano (la semilla), se calcula una serie de valores (su órbita), mediante la repetición de una fórmula hasta que se cumpla una determinada condición, y en ese momento al punto inicial se le asigna un color relacionado con el número de repeticiones.

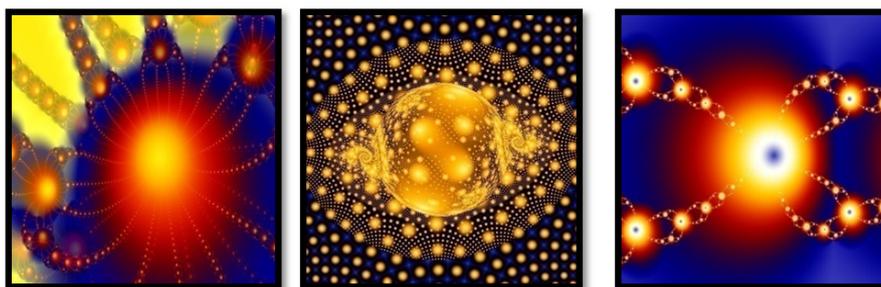


Figura 3.40: Fractales y algoritmo de escape.

Para poder construir un fractal de este tipo es imprescindible realizar miles de millones de operaciones, por lo cual requieren la ayuda de un ordenador. Uno de los más famosos fractales correspondiente a este tipo es el conocido como conjunto de *Julia*, en honor del matemático francés *Gaston Maurice Julia*. Nació el 3 de Febrero de 1893 en Sidi Bel Abbés (Argelia) y falleció en París el 19 de Marzo de 1978. Con solo 25 años publicó un manuscrito titulado “*Mémoire sur l’iteration des fonctions rationnelles*”, con el cual ha llegado a ser uno de los matemáticos más famosos de los que se han dedicado al estudio de los fractales. Fue soldado en la Primera Guerra Mundial, y cayó herido en un ataque en el frente francés, donde perdió parte de su nariz, lo cual le obligó a llevarla tapada durante el resto de sus días. Por sus importantes investigaciones fue nombrado profesor titular en la Escuela Politécnica de París. En el artículo que hemos citado dio una descripción precisa de los conjuntos, que llevan su nombre, para los cuales la n -ésima iteración de un número complejo permanece acotada, cuando el número de iteraciones tiende a infinito.

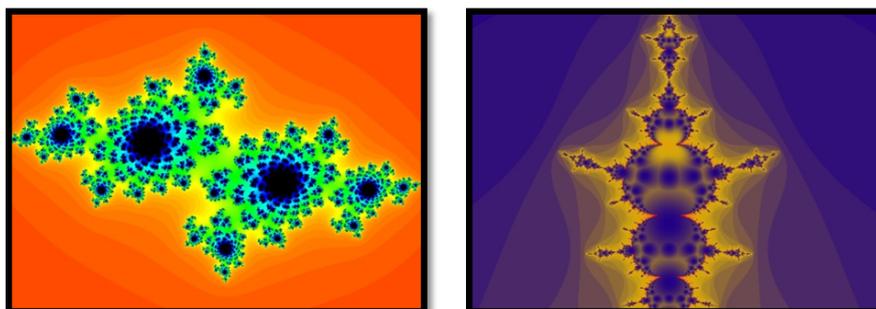


Figura 3.41: Fractales de Julia.

Por este trabajo recibió el gran premio de la Academia de las Ciencias. Durante los años 20 disfrutó de gran fama, pero posteriormente su trabajo fue olvidado, hasta que *B. Mandelbrot* lo puso de actualidad en 1970 con sus experimentos con los ordenadores.

Otro tipo de fractales muy interesantes son los obtenidos por medio de un **Sistema de Funciones Iteradas (IFS)**. Es un método creado por *M. Barnsley*, basándose en el principio de autosemejanza. En un fractal IFS siempre se puede encontrar una parte de la figura que guarda una relación de semejanza con la figura completa. Esa relación es a menudo muy difícil de apreciar, pero en el caso del helecho de la figura siguiente es bastante clara: cualquier hoja es una réplica exacta de la figura completa.



Figura 3.42: Sistema de Funciones Iteradas (IFS)

Existen fractales asociados con la teoría del caos que reciben el nombre de fractales caóticos. Entre ellos, el más conocido es el atractor de Lorenz (izquierda) y el diagrama de bifurcación (centro).

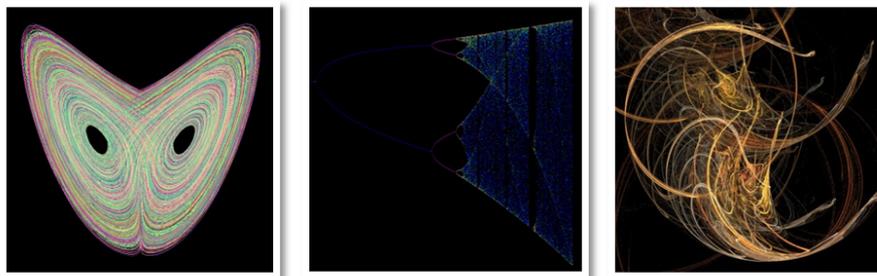


Figura 3.43: Fractales caóticos.

Merece la atención detenerse sobre un tipo particular de fractales obtenidos a través de un método conocido con el nombre de **L-System**. El método fue creado por *Lindemayer* en 1968 y publicado en el *Journal of Theoretical Biology*, como un modelo matemático para la construcción de un filamento celular de la bacteria *Anabaena Catenula*.

Básicamente el algoritmo consiste en suponer un sistema celular con dos posibles estados citológicos, A y B, y la regla de crecimiento: una célula en el estado A se

divide y da lugar a una en el estado A y otra célula en el estado B; que se representa por AB. En el siguiente paso, una célula en el estado B se divide en una célula en el estado B y otra en el estado A, es decir BA. En la tabla se ha representado el resultado de la división para las cuatro primera fases, tomando como célula de partida del tipo A.

Fase	Núm. células	Resultado división
1	1(A)	AB
2	2(AB)	ABBA
3	4(ABBA)	ABBABAAB
4	8(ABBABAAB)	ABBABAABBAABABBA

Figura 3.44: L-sistemas y fractales.

Estos fractales se pueden generar utilizando como software *FantasticFractal*. En la figura siguiente aparecen los parámetros con los que se genera la curva de *Koch*.

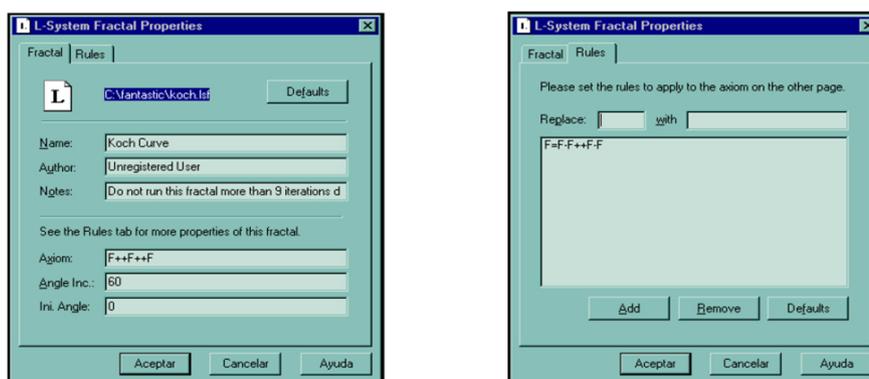


Figura 3.45: L-sistemas con FantasticFractal.

El signo + representa un giro de 60 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj, y el signo - un giro de 60 grados en la dirección de las agujas del reloj. Para poder dibujar el fractal es necesario indicar la regla, que en nuestro caso viene dada por, $F=F-F++F-F$.

Es decir, F estará definida como: se traza un segmento unitario, en su extremo giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y dibujamos un segundo segmento; después giramos 120 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj y dibujamos otro segmento finalmente giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y trazamos el último de los segmentos.

Los L-systems son muy adecuados para modelar muchos sistemas biológicos, especialmente aquellos que presentan bifurcaciones o ramificaciones en su desarrollo. El esquema básico para dibujar una bifurcación con un ángulo dado (por ejemplo 20 grados) es el siguiente: $F=F[+F]F$, donde los corchetes indican que al final se debe retroceder a la posición donde empezaba la bifurcación. Naturalmente, se puede definir una regla más complicada y obtener un modelo mucho más realista. Por ejemplo,

para representar un árbol se ha elegido como Regla: $F=F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]$ y un ángulo de 22 grados. En la figura siguiente pueden verse los resultados para un número diferente de iteraciones.



Figura 3.46: Simulación de un árbol con L-sistemas.

En el programa de televisión *Redes*, el divulgador científico *Eduardo Punset*, entrevistó a *Mandelbrot*, donde comentó que se sentía muy impresionado por los cuadros del pintor japonés *Katsushika Hokusai*, puesto que sin ser consciente de ello, el pintor había sabido captar las propiedades básicas de los fractales. En las imágenes que presentamos se aprecia como un río se divide y subdivide hasta formar la catarata, o bien como una ola está formada por muchas otras olas más pequeñas, propiedad que conocemos con el nombre de autosemejanza.



Figura 3.47: Katsushika Hokusai y los fractales.

3.6.7. El juego del Caos

Todos hemos sufrido la desagradable experiencia de que al coger una bolsa de legumbres se caigan al suelo adoptando una forma caprichosa debido al azar. Si repetimos la experiencia, las legumbres describirán un patrón final distinto. éste fue el punto de partida de *Michael Barnsley* para la construcción de fractales sin hacer uso del proceso de iteración. Partiendo del azar obtuvo una manera diferente de generar

patrones fractales, y a esta técnica la denominó el juego del caos.

Para ejecutar el juego es aconsejable utilizar un ordenador o en su defecto una hoja de papel cuadrículada y un dado. Existen muchas variantes del mismo pero el juego clásico consiste en generar el triángulo de *Sierpinsky*. Se colocan tres puntos numerados del 1 al 3 formando un triángulo equilátero.

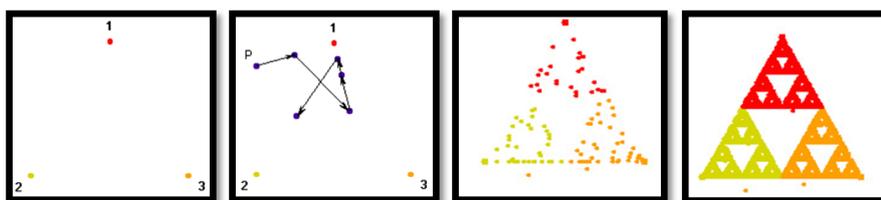


Figura 3.48: El juego del caos.

A continuación identificamos los lados 1 y 2 del dado con el punto 1, los lados 3 y 4 con el punto 2 y los lados 5 y 6 con el tercer punto. Ahora se elige un punto cualquiera P de la hoja y lo desplazamos de la manera siguiente: lanzamos el dado y movemos el punto P hasta la mitad de la distancia existente entre el punto P y el vértice que indique el dado. Por ejemplo: si ha salido un 1 en el dado, entonces situamos el punto P en la mitad de la distancia entre P y el vértice 1, si en el segundo lanzamiento sale un 5, situamos el punto en la mitad de la última posición de P y el vértice 3, y así sucesivamente.

3.6.8. Aplicaciones de la Geometría Fractal.

Para muchas personas el gran atractivo de los fractales reside en la belleza de las imágenes que genera, de hecho mucha gente se acerca a esta rama de las matemáticas atraídas únicamente por lo impactante y plasticidad de los resultados gráficos obtenidos. Sin embargo, y como tendremos oportunidad de ver en esta sección, lo verdadero importante de la Geometría Fractal es el amplio rango de aplicaciones en campos muy diferentes.

Aunque la geometría fractal fue concebida hace unos años, ha sido recientemente cuando se han logrado los avances más notables. En un principio, *Mandelbrot*, los utilizó en el ámbito de la Economía con la intención de analizar las fluctuaciones bursátiles. Ahora bien tenemos que empezar preguntándonos; ¿qué significado tiene decir que un objeto real, tal como una costa o la red capilar del sistema venoso, es un fractal? Lo que queremos decir con ello, es que puede definirse un modelo matemático que se aproxima bastante bien al objeto. Aunque al ser sólo una aproximación tiene que estar limitada a una franja de escalas limitada por ciertos valores máximo y mínimo. Es evidente, entonces, que en el mundo real no existen fractales perfectos, como tampoco existen esferas perfectas, cuando se pretende representar a la tierra.

Como sabemos, los modelos no lineales son el origen del comportamiento caótico de

los sistemas dinámicos, y que la Geometría Fractal es la herramienta adecuada para estudiar el caos. Por este motivo empezaremos comentando algunas aplicaciones de esta teoría.

- **Economía:** en el estudio errático e imprevisible de la bolsa y del flujo del dinero.
- Amplificadores de sonido: se producen cortas descargas eléctricas dentro de los circuitos, debido a la electricidad estática, lo que origina que el sonido tenga períodos caóticos.
- **Rotación de la tierra:** se ha descubierto, por medio de relojes atómicos, que la tierra sufre alteraciones en su movimiento de rotación, no funciona con la perfección de un reloj suizo. Como consecuencia de ello el paso de la tierra no es totalmente regular y se producen fases intermitentes de caos.
- **Lavadoras:** en 1993 la empresa Goldstar construyó una revolucionara lavadora, donde la el ritmo de rotación del tambor de lavado no era regular, sino caótico. La eficacia del lavado superó con creces a las construidas por la competencia.
- **El cuerpo humano:** son abundantes los ejemplos donde el caos está presente en nuestro cuerpo.
 - Para que el sistema inmunológico tenga un funcionamiento eficaz es necesario que su comportamiento sea no lineal y caótico, para que tengan la posibilidad de adaptarse a los cambios externos.
 - Si un sistema, que rige nuestra salud, fuese totalmente determinista, al producirse cualquier cambio en su evolución nuestro cuerpo enfermaría.
 - Provocando el caos en determinadas zonas del cerebro, mediante la generación de turbulencias eléctricas, se puede bloquear la aparición de ataques epilépticos.
 - En cuerpo humano es un sistema caótico. Constantemente estamos sustituyendo nuestras células de tal manera que cada siete años se produce la regeneración de todas las células de nuestro cuerpo. La razón de que conservemos nuestra forma es debido a que el cuerpo humano es un atractor, y por tanto, a largo plazo tiende a mantener la misma estructura.
 - El ritmo cardiaco es caótico, de hecho cuanto más regular sea el ritmo más enfermo estará una persona. En 1983, R. Ideker, estudiando los ciclos biológicos, comprobó que la actividad eléctrica, que es la hace contraer los músculos del corazón, presenta períodos de orden dos, cuatro, ocho, dieciséis, y así hasta llegar a ser caótico. De hecho éste es el estado del corazón cuando sufre un ataque de fibrilación, por tal motivo se somete al enfermo a un shock eléctrico que hace volver al ritmo periódico y regular. Sorprendentemente, las pequeñas alteraciones de la cadencia del corazón es síntoma de buena salud.

- Por último, una aplicación curiosa de la dinámica caótica está relacionada con el movimiento de los ojos. A partir de la masa del ojo, la viscosidad del humor vítreo, y otros parámetros es posible construir un modelo matemático no lineal del movimiento de los ojos. Cuando a una persona sana mira la oscilación de un péndulo, sus ojos siguen continuamente el movimiento. Por el contrario, cuando un esquizofrénico realiza el mismo experimento sus ojos se mueven de forma caótica.



Figura 3.49: Ramificaciones en la naturaleza y fractales.

También los fractales tienen un amplio número de aplicaciones. De hecho, es difícil encontrar en la actualidad una disciplina científica donde no hayan sido aplicados.

Las fronteras entre diferentes medios físicos o biológicos dan lugar a buenos ejemplos de sistemas que se pueden modelizar mediante fractales. Un ejemplo clásico, que responde a ciertos modelos de curvas fractales, es el de las costas, pero también los son los bordes de una nube, la superficie montañosa, la orilla de un río o la frontera entre dos países diferentes. La evolución y construcción a lo largo de la historia de una frontera entre dos naciones sigue un proceso muy parecido a como se construye un fractal lineal, como la curva de *Koch*. Lo mismo le ocurre a la formación de la línea de costa puesto que el contacto entre el agua del mar y la tierra modifica constantemente su perfil. No obstante, la construcción de la curva de *Koch* es un proceso matemático, mientras que en la formación de una línea de costa están presentes procesos aleatorios. A pesar de ello, la dimensión fractal es de 1.26128 para la curva de *koch* y 1.3 el valor aproximado para la costa de Gran Bretaña, ó, 1.5 para la costa de Noruega (mucho más irregular).

Tenemos que hacer una llamada de atención sobre el hecho de que no todos los objetos de la naturaleza tienen estructura fractal. En la naturaleza aparecen espontáneamente figuras regulares como círculos, esferas o rectas. Por ejemplo, las formas de algunas hojas, las gotas de lluvia, etc., pero en estas ocasiones la forma adoptada es consecuencia de un problema de optimización. Es conocido que una esfera presenta, a igual volumen, una superficie mínima. Por esta razón, y como resultado de optimizar la tensión superficial, una gota de agua adopta la forma de una esfera.

Ramificaciones. Desde el punto de vista matemático, se entiende por árbol a un conjunto de puntos (vértices) unidos entre sí por arcos (ramas). Bajo este epígrafe ubicaremos no sólo a los árboles con sus ramas, sino que extenderemos el concepto

para incluir otros objetos de la naturaleza que adoptan esta forma, o el sistema arterial y bronquial de un mamífero.

El proceso mediante el cual una rama principal se divide y subdivide sucesivamente es el culpable de que el objeto tenga estructura fractal. La clave se encuentra en la propiedad de autosemejanza por la cual se añade la misma estructura a escala cada vez más pequeña. Pensemos, por ejemplo, en la red de afluentes de una cuenca hidrográfica, donde el agua de lluvia tiene que ser desaguada, o en el sistema arterial, donde la sangre tiene que llegar a todos los tejidos del cuerpo ocupando sólo un 5% del volumen total. Estos procesos pueden modelarse por un tipo de curva (dimensión uno) que ocupa una superficie (dimensión dos), es decir, un fractal.



Figura 3.50: Ramificaciones en el cuerpo humano y fractales.

Texturas y paisajes fractales. La geometría fractal es la herramienta perfecta para la creación de paisajes imaginarios utilizados en cine y juegos de ordenador. También es posible elaborar texturas diferentes mediante la creación de un espacio tridimensional coloreado que rodea a un objeto digital utilizando una fórmula matemática iterativa.

El análisis de la textura de una imagen es un campo de investigación abierto y de continua expansión, especialmente en medicina como herramienta de diagnóstico, o en imágenes de reconocimiento, como el estudio de las fracturas del terreno.

De manera resumida, la forma de construir un paisaje fractal es la siguiente: se parte de un cuadrado y se unen los puntos medios de los lados para obtener otros cuatro cuadrados más pequeños. Antes de la siguiente iteración, se le aplica una transformación a los vértices, de tal forma que se eleven o desciendan una cantidad aleatoria.

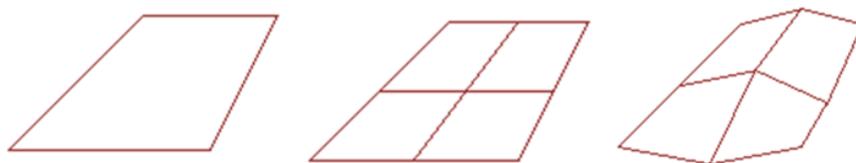


Figura 3.51: Construcción de paisajes fractales I

Una vez conocido el proceso geométrico, el ordenador repite (itera) el mismo esquema un número elevado de veces.

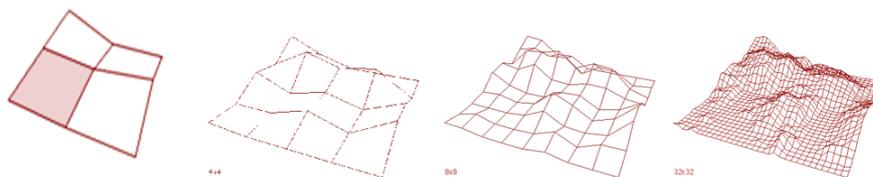


Figura 3.52: Construcción de paisajes fractales II

Por último, se aplica el color, la textura, y un programa de animación se encarga del resto de la película.

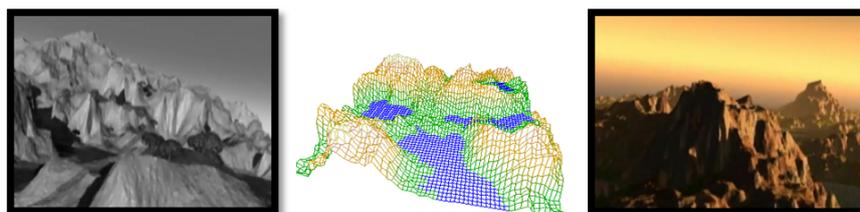


Figura 3.53: Construcción de paisajes fractales III

Mediante una técnica parecida la productora Lucasfilms recreó los efectos especiales de la película “*Star Trek 2*”, la saga de “*La guerra de las galaxias*”, o el mar en la película “*Titanic*”.

Compresión de imágenes digitales. Cuando realizamos la clasificación de los fractales, vimos que algunos de ellos podían generarse a través de un Sistema de Funciones Iteradas (IFS). Esto es, un conjunto de funciones que repetidas sucesivamente generan al objeto fractal. Uno de los grandes problemas en el uso de la información digital es el de su manipulación, sobre todo cuando el volumen de transmisión es grande. Por ejemplo, si se desea enviar por Internet una imagen de alta resolución es posible que tengamos problema de capacidad de memoria. Entonces, ¿cómo podemos resolver esta cuestión? Existen muchas técnicas diferentes relacionadas con la compresión de imágenes, pero una de ellas está basada en la geometría fractal. En efecto, por medio de un Sistema de Funciones Iteradas podemos eliminar una gran parte de la información a transmitir puesto que sólo se necesita la función generadora del objeto fractal, en lugar de todos los píxeles de la imagen.

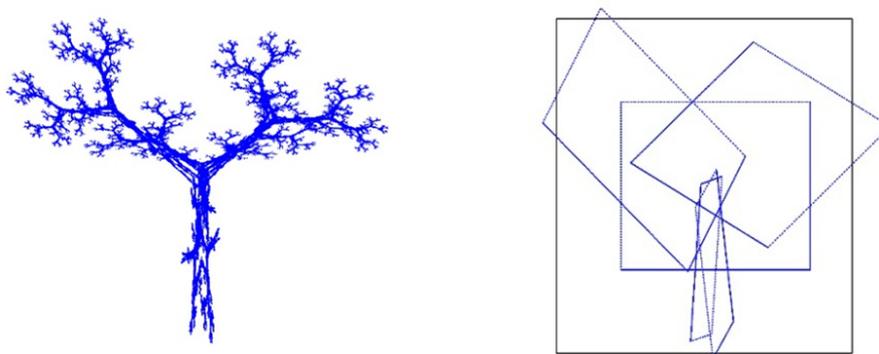


Figura 3.54: Compresión de imágenes digitales.

De esta manera, si por ejemplo, deseamos remitir la figura de árbol de la izquierda, bastará con enviar la imagen geométrica de la derecha junto con su función generadora. A este método de tratar digitalmente una imagen, con el objetivo de reducir el tamaño de su archivo, se le conoce con el nombre de proceso de transformación fractal. Fue inventado en 1987 por *Barnsley* y la cuestión clave está en saber si a una imagen cualquiera se le puede aplicar dicha técnica. La respuesta es afirmativa y se conoce con el nombre de teorema del collage, a partir de una imagen es posible encontrar la fórmula que la genera.

Medicina. Es en este campo donde se han logrado grandes progresos con el uso de la geometría fractal. El número de aplicaciones es inmenso como puede comprobarse si se realiza una búsqueda en la base de datos más prestigiosa de publicaciones médicas PubMed.

Sin querer ser exhaustivo se han aplicado los fractales en los siguientes campos de la medicina:

- La distribución del flujo sanguíneo pulmonar.
- La estructura alveolar de los pulmones.
- Las superficies de las proteínas.
- Los patrones de formas en las mamografías.
- Al estudio del cáncer de mamas y al de próstata.
- Al análisis de fracturas de huesos.
- La regeneración de tejidos.
- Al estudio de enfermedades degenerativas del cerebro.

Comentaremos de una manera más detallada algunas de estas aplicaciones. En 2003 un grupo de científicos del *Harvard Medical School* y el *Massachusetts Institute of Technology* presentaron un método para obtener un órgano vivo de un paciente a partir de sus mismas células, y de esta manera minimizar el problema del rechazo. El objetivo del trabajo reside en construir un esqueleto, semejante al sistema arterial, que permite a los nutrientes llegar a todas las partes del tejido. El esqueleto se obtuvo a partir de patrones de crecimiento fractal y se introdujeron en unos chips de silicio. Los resultados fueron esperanzadores puesto que fue posible mantener células de hígado vivas durante dos semanas, debido a que había sido posible construir una estructura irregular muy resistente a las roturas.

Durante los últimos años un grupo de investigación interdisciplinar, liderado por el profesor *Francisco J. Esteban* del Departamento de Biología Experimental de la Universidad de Jaén, ha trabajado intensamente en la aplicación de la dimensión fractal de imágenes de Resonancia Magnética para la detección precoz de algunas

enfermedades neurodegenerativas. El proyecto tiene el nombre de *Fractalmed* y se ha centrado, en un primer momento, en la Esclerosis Múltiple.

La Esclerosis Múltiple es una enfermedad autoinmune, inflamatoria y neurodegenerativa que afecta principalmente a la Sustancia Blanca del Sistema Nervioso Central (cerebro y médula espinal). Es, después de la epilepsia, la enfermedad neurológica más frecuente entre los jóvenes, afectando aproximadamente a 1 de cada 1000 personas, en particular a las mujeres.

Se desconocen las causas que la producen aunque se cree que hay diversos mecanismos autoinmunes involucrados. La manera de actuación es la siguiente. El organismo lanza un ataque defensivo contra sus propios tejidos, y se origina una inflamación en áreas de la Sustancia Blanca del Sistema Nervioso Central, en regiones que se distribuyen aleatoriamente. A continuación se produce la destrucción de la mielina, que es una lámina envolvente de las fibras nerviosas que facilita la transmisión de los mensajes entre cerebro, la médula espinal y el resto del cuerpo. Desgraciadamente, cuando hay daño de la mielina, la transmisión neurológica de los mensajes ocurre más lentamente o queda bloqueada, lo que lleva a una movilidad reducida e invalidez, en los casos más severos, de la persona.

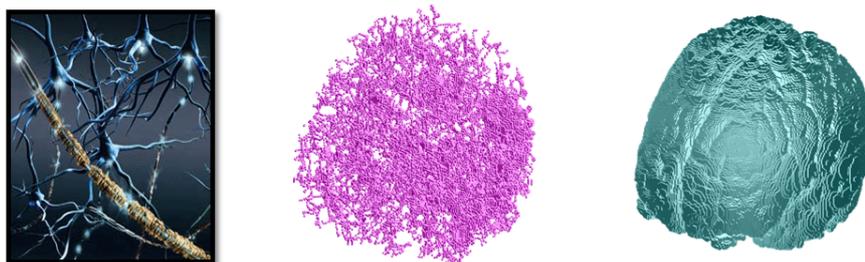


Figura 3.55: Fractales y Esclerosis Múltiple.

El gran problema para su tratamiento es que sólo puede ser diagnosticada con fiabilidad mediante una autopsia post-mortem o una biopsia, aunque existen criterios no invasivos para diagnosticarla con aceptable certeza. Sin embargo, su detección precoz es muy importante puesto que se puede empezar el tratamiento más rápidamente, con el consiguiente aumento de la calidad de vida, y retraso en la aparición de nuevos brotes. No hay ningún síntoma típico de la Esclerosis Múltiple que ayude en el diagnóstico inicial. Es frecuente que el primer brote pase desapercibido sin que la persona consulte con su médico.

Hasta ahora se había descrito un único método capaz de detectar cambios en la sustancia blanca aparentemente normal, la tasa de transferencia de magnetización, el cual, además de ser costoso y difícil de realizar en la gran mayoría de los centros hospitalarios, presenta resultados contradictorios en cuanto a su sensibilidad.

Se ha demostrado que, aunque están teniendo lugar procesos que contribuyen al desarrollo de la enfermedad a nivel de la sustancia blanca cerebral, dicha sustancia

blanca se observa en las imágenes de Resonancia Magnética Nuclear como aparentemente normal. En la mayoría de los casos el diagnóstico de la degeneración de la sustancia blanca depende de la experiencia del médico en la observación de las imágenes, debido a la carencia de medidas objetivas. Pero muchas de las alteraciones son muy sutiles y difíciles de apreciar. Los miembros del proyecto Fractalmed han demostrado que la aplicación de la dimensión fractal a imágenes de resonancia magnética del cerebro de enfermos de Esclerosis Múltiple es una herramienta muy útil en el diagnóstico precoz de esta enfermedad degenerativa. Los pacientes en un estado inicial de desarrollo, sin lesiones aparentes, mostraron un valor menor de la dimensión fractal a nivel de sustancia blanca cuando se compararon con los controles sanos.

La caracterización y cuantificación de la morfología del cerebro mediante el análisis de la dimensión fractal es un área de creciente interés desde hace unos años. La gran mayoría de los trabajos se centran en el análisis de la dimensión fractal de imágenes a nivel de dos dimensiones. Son muy pocas y puntuales las iniciativas de extender los resultados para estructuras en tres dimensiones.

Recientemente el grupo de investigación ha ampliado el rango de aplicaciones del método, siendo pioneros en la construcción de un programa informático para el cálculo de la dimensión fractal en tres dimensiones y su aplicación otras enfermedades neurodegenerativas con resultados muy positivos. A nivel tridimensional se ha demostrado que existe un aumento significativo del valor de dimensión fractal de la materia gris del cerebro aparentemente normal en enfermos de Esclerosis Múltiple que sufren los primeros ataques de la enfermedad.