

UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



MODELOS MATEMÁTICOS
DISCRETOS EN LA EMPRESA
GRADO EN ESTADÍSTICA Y EMPRESA
TEORÍA DE MODELOS CONTINUOS

Juan Navas Ureña

Jaén, 19 de octubre de 2017

Índice

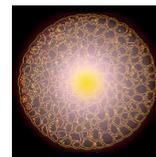
1. Ecuaciones diferenciales	3
1.1. Introducción	3
1.2. ¿Qué es una ecuación diferencial?	4
1.3. Solución de una ecuación diferencial	9
1.3.1. Existencia y unicidad de soluciones	10
1.4. Análisis geométrico de $y' = f(t, y)$	14
1.4.1. Campo de direcciones	14
1.5. Teoría cualitativa de EDO autónomas	16
1.5.1. Introducción.	16
1.5.2. Ecuaciones diferenciales autónomas	16
1.6. Resolución de E.D.O. de primer orden	20
1.6.1. Ecuaciones diferenciales en variables separables	20
1.6.2. Ecuaciones diferenciales exactas.	23
1.6.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	27
1.7. E.D.O. lineales de segundo orden	28
1.7.1. Método de reducción del orden	31
1.7.2. EDO lineal de segundo orden completa	33
1.7.3. Método de variación de parámetros	33
1.8. E.D.O. lineales de segundo orden con coeficientes constantes	36
1.8.1. La ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes	37
1.8.2. La ecuación diferencial lineal completa de segundo orden con coeficientes constantes	40
1.8.3. Método de los coeficientes indeterminados	41
1.9. Notas históricas	42
2. Modelos basados en E.D.O.	45
2.1. Introducción	45
2.2. Modelos exponencial	45
2.2.1. Dinámica independiente de la densidad	46
2.2.2. Desintegración radiactiva	48
2.2.3. Trazadores radiactivos	48
2.2.4. Fechado con C_{14}	49
2.2.5. Modelo de un riñón artificial I	52
2.2.6. Absorción de Rayos-X	54

2.3.	Modelos exponencial modificado	55
2.3.1.	Ley de enfriamiento de Newton	55
2.3.2.	Contaminación de un lago	57
2.3.3.	Genética de poblaciones	57
2.4.	Dinámica dependiente de la densidad	60
2.4.1.	Modelo epidemiológico I	63
2.5.	Modelos logístico modificado	66
2.5.1.	Caso I	66
2.5.2.	Caso II	67
2.6.	Otros modelos basados en E.D.O.	68
2.6.1.	Modelo de disolución	68
2.6.2.	Modelo para gestionar la pesca en un lago	71
2.6.3.	La edad del hielo	72
2.7.	Teoría de catástrofes	73
3.	Introducción a los sistemas de E.D.O	77
3.1.	Preliminares	77
3.2.	Diagonalización de matrices cuadradas	79
3.2.1.	Introducción	79
3.2.2.	Matrices semejantes	80
3.2.3.	Diagonalización de matrices cuadradas.	80
3.2.4.	Cálculo de la potencia de una matriz diagonalizable	83
3.3.	Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes	85
3.4.	Sistemas lineales completos con coeficientes constantes	87
3.4.1.	Método de variación de parámetros	89
3.5.	Teoría cualitativa de sistemas	90
3.5.1.	Órbitas y plano fase	93
3.5.2.	Sistemas autónomos lineales	96
3.5.3.	Sistemas autónomos no lineales	102
4.	Modelos basados en sistemas de E.D.O	107
4.1.	Modelo de un riñón artificial II	107
4.1.1.	Búsqueda de las soluciones	107
4.1.2.	Estudio cualitativo	108
4.2.	Un modelo elemental de dos poblaciones	109
4.2.1.	Resolución y análisis cualitativo	109
4.2.2.	Principio de exclusión competitiva	111
4.3.	El modelo presa-depredador	112
4.3.1.	Análisis cualitativo del sistema	114
4.3.2.	El problema de la pesca.	116
4.3.3.	Modelo presa-depredador modificado	118
4.4.	Especies en competencia	120
4.4.1.	Primer caso	121
4.4.2.	Segundo Caso	123

ÍNDICE

1

4.5. Modelo epidemiológico II	126
5. Cálculo numérico	131
5.1. Resolución numérica de E.D.O	131
5.1.1. Introducción	131
5.1.2. El método de Euler	132
5.1.3. Métodos de Taylor de orden superior	136
5.1.4. Método de Euler mejorado	140
5.1.5. Método de Runge-Kutta de cuarto orden	143
5.2. Resolución numérica de sistemas de E.D.O	145
5.2.1. Introducción	145
5.2.2. Generalización de los métodos	146
5.2.3. Resolución numérica de las ecuaciones de Lotka-Volterra	150
5.3. Cálculo aproximado de valores propios	151
5.3.1. Método de las potencias	152
5.3.2. El método de las potencias con cambio de escala	154
5.3.3. Deflación	155



Tema 1

ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1. Introducción

Gran parte de los sistemas que nos rodean están sometidos al **cambio**, por tanto, es un hecho cotidiano para todos nosotros. Las Matemáticas son muy útiles para investigar, entre otros, fenómenos como el movimiento de los planetas, la desintegración de sustancias radiactivas, la velocidad de las reacciones químicas y los patrones meteorológicos. Por otro lado, los biólogos investigan en campos tales como la contaminación o la dinámica de poblaciones. Incluso en áreas, aparentemente alejadas de la Matemáticas, como las Ciencias Políticas o la Medicina, es frecuente que recurran a los modelos matemáticos, en los cuales la clave está en el cambio.

Muchos de estos modelos se expresan a través de una ecuación diferencial. Si $y = f(t)$ es una función que relaciona las variables t e y , entonces su derivada

$$y' = \frac{dy}{dt},$$

nos indica la **tasa de cambio o velocidad de cambio** de la variable y con respecto de la variable t .

Cuando estudiamos un problema del mundo real necesitamos usualmente desarrollar un marco matemático. Sabemos que el proceso por el que se crea y evoluciona este marco es la construcción de un modelo matemático, siendo algunos de ellos muy precisos, especialmente los de la Física. Sin embargo, otros lo son menos, concretamente los que tratan de problemas de Biología o Ciencias Sociales. No obstante, en los últimos años los enunciados de estas materias se han vuelto lo suficientemente precisos como para poder expresarlos matemáticamente.

Un ejemplo de creación de un modelo continuo lo tenemos en la predicción del tiempo. En teoría, si pudiésemos programar en un ordenador todas las hipótesis correctas, así como los enunciados matemáticos apropiados sobre las formas en que las

condiciones climáticas operan, tendríamos un buen modelo para predecir el tiempo mundial. En el modelo del clima global, un sistema de ecuaciones calcula los cambios que dependen del tiempo, siendo las variables el viento, la temperatura y la humedad, tanto en la atmósfera como en la tierra. El modelo¹ puede predecir también las alteraciones de la temperatura en la superficie de los océanos.

Por todo lo comentado anteriormente, hemos puesto de manifiesto que en los modelos matemáticos del mundo real tienen gran importancia el estudio de las ecuaciones diferenciales. En cualquier lugar donde se lleve a cabo un proceso que cambie continuamente en relación al tiempo (rapidez de variación de una variable con respecto a otra), suele ser apropiado el uso de las ecuaciones diferenciales.

EJERCICIO 1

Escribir una ecuación diferencial que describa la situación dada.

- 1 La cantidad de bacterias en un cultivo crece, en cada momento, a un ritmo que es proporcional al número de bacterias presentes.
- 2 Cuando los factores ambientales imponen un límite superior sobre su tamaño, la población crece a un ritmo que es conjuntamente proporcional a su tamaño actual y a la diferencia entre su límite superior y su tamaño actual.
- 3 La razón a la que las personas oyen hablar sobre un nuevo aumento de precios es proporcional al número de personas en la ciudad que no han oído hablar al respecto.
- 4 El ritmo con el que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional a la cantidad de residentes que han sido infectados y al número de residentes propensos a la enfermedad que no han sido infectados.
- 5 Si es cierto que en una economía estable la velocidad de disminución del número de personas y , con un salario de por lo menos x euros, es directamente proporcional al número de personas e inversamente proporcional a su salario, obténgase la ley de Pareto, es decir la expresión de y en función de x .

1.2. ¿Qué es una ecuación diferencial?

Aunque no sepamos que es una ecuación diferencial, sin embargo estamos familiarizados con el problema de resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas. Además, sabemos lo que se entiende por solución de la ecuación, aunque en

¹En el Centro Nacional de Investigación Atmosférica de EEUU tienen un superordenador con el nombre de CRAY que puede ejecutar un modelo parecido.

ecuaciones polinómicas de grado elevado o en ecuaciones donde aparecen funciones trascendentes no podamos encontrar su valor exacto.

De manera general, $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, siendo F una función vectorial de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , representa a un sistema de m ecuaciones en las variables x_1, x_2, \dots, x_n .

Si utilizamos el lenguaje del cálculo diferencial podemos escribir ecuaciones donde aparezcan una función $y = y(t)$, definida sobre un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$, la variable t , y las derivadas de diferentes órdenes de y . Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} y' = 6t + 5 & y' = 6y \\ y' + 3y + t = 0 & (y'')^2 + 2ty + \text{sen } t = 0. \end{array}$$

Llamemos la atención sobre el hecho de que ya hemos tenido ocasión de estudiar este tipo de situaciones, concretamente cuando se realizó el estudio de las integrales indefinidas. En efecto, dada la ecuación $y'(t) = \text{sen } t$ la idea básica era encontrar una función $y(t) = -\cos t + C$ que cumpla la igual anterior.

Los siguientes ejemplos tratan de mostrar como las ecuaciones diferenciales aparecen al modelar situaciones muy simples.

EJEMPLO 1.1

- Un zoológico planea llevar un león marino a otra ciudad. El animal irá cubierto durante el viaje con una manta mojada. En cualquier tiempo t , la manta perderá humedad debido a la evaporación, a una razón proporcional a la cantidad $y(t)$ de agua presente en la manta. Inicialmente, la sábana contendrá 40 litros de agua de mar. Estamos interesados en encontrar una ecuación diferencial que describa este problema.

Al ser $y(t)$ la cantidad de agua en la manta en el tiempo t , del enunciado deducimos que la razón de cambio de $y(t)$ (su derivada $y'(t)$), es proporcional a $y(t)$. Entonces $y'(t) = ky(t)$, donde la constante de proporcionalidad k es negativa, ya que la cantidad de agua disminuye con el tiempo. Por tanto, nuestro modelo será

$$y'(t) = ky(t), \quad k \leq 0, \quad y(0) = 40.$$

EJEMPLO 1.2

- La tabla siguiente:

Horas	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Conc.(mg/l)	12.0	10.0	7.0	5.0	3.5	2.5	2.0	1.5	1.0	0.7	0.5

muestra la concentración de teofilina, una droga común para combatir el asma, en el torrente sanguíneo, como una función del tiempo después de la aplicación de una dosis inicial.

Si representamos la concentración de teofilina en función del tiempo nos aparece una gráfica que disminuye de manera exponencial (Figura 1.1 izquierda)

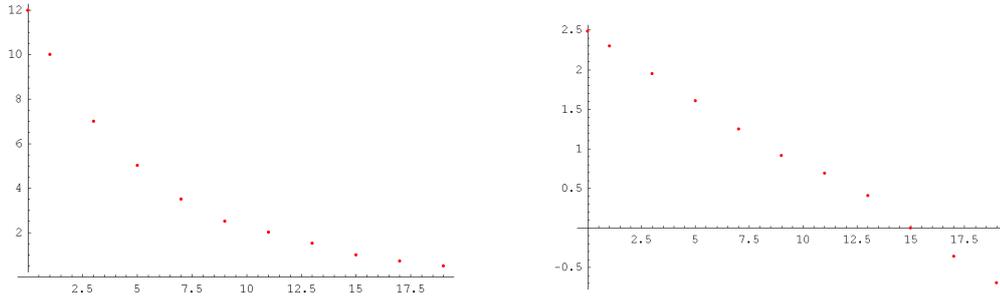


Figura 2.1. Izquierda: escala normal. Derecha: escala logarítmica

Si tomamos logaritmos neperianos (Figura 2.1 derecha) de los valores de la concentración, podemos ajustar esta nueva nube de puntos por una recta. Este proceso lo llevamos a cabo con el programa **Mathematica**[®] y su solución es la recta $2.45337 - 0.164264t$, que corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 2.45337)$ y su pendiente es -0.164264 . Por lo tanto, si la solución del modelo es del tipo exponencial $y(t) = Ce^{kt}$, entonces $\ln y = \ln C + kt$. En consecuencia,

$$\ln C = 2.45338 \quad \Rightarrow \quad C = e^{2.45338} = 11.6275; \quad k = -0.164265$$

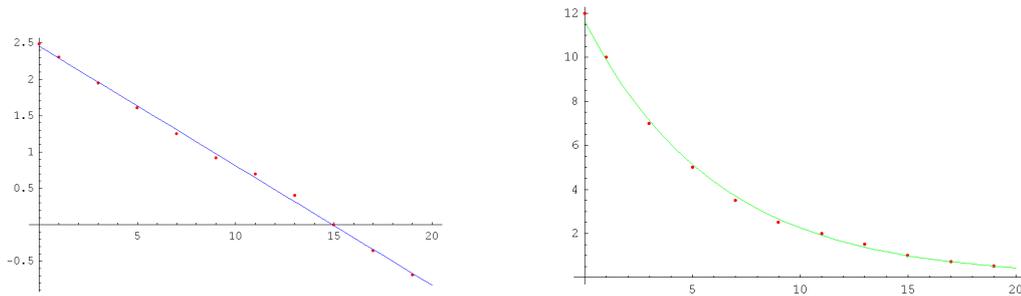


Figura 2.2. Izquierda: ajuste lineal. Derecha: ajuste exponencial

$$y(t) = 11.6275e^{-0.164264t}$$

Pasemos ahora a precisar algunos de los conceptos sugeridos.

Una **ecuación diferencial** es aquella en la que aparece una función desconocida y una o más de sus derivadas. Cuando la función desconocida depende de dos o más variables, entonces las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial serán derivadas parciales, y en este caso diremos que se trata de una **ecuación en derivadas parciales**. Si la función depende sólo de una variable independiente, entonces la ecuación recibe el nombre de **ecuación diferencial ordinaria** (E.D.O.). En este curso estudiaremos algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n que representaremos por

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

donde F es una expresión matemática en la que aparecen la variable t , una función desconocida y , y las derivadas de y hasta el orden n .

EJEMPLO 1.3

- Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$-2y'' + 3y' - y = e^t$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

$$-2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

- Las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = u(x, y, z, t),$$

son ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales.

El **orden** de una ecuación diferencial es el que corresponde a la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. De esta manera, $y' = ay - by^2$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, mientras que

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$

es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

EJEMPLO 1.4

- Clasificar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales como ordinarias o en derivadas parciales. Determinar el orden y la linealidad o no linealidad en cada caso.

(a) $y' + t^2y = te^t$ (b) $y''' + 4y'' - 5y' + 3y = \sin t$

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (d) $t^2 dy + y^2 dt = 0$

(e) $\frac{dy}{dt} + 3\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^5 + 5y = 0$ (f) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$

(g) $y'' + y \sin t = 0$ (h) $\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2}} + 1$

(i) $\frac{d^2y}{dt^2} + t \sin y = 0$ (j) $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0$

(k) $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$

Las soluciones son:

(a) $y' + t^2y = te^t$

Ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

(b) $y''' + 4y'' - 5y' + 3y = \text{sen } t$

Ecuación diferencial ordinaria lineal de tercer orden.

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

(d) $t^2 dy + y^2 dt = 0$

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal.

(e) $\frac{dy}{dt} + 3\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^5 + 5y = 0$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal.

(f) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$

Ecuación diferencial en derivadas parciales de cuarto orden.

(g) $y'' + y \text{sen } t = 0$

Ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden.

(h) $\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2} + 1}$

Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.

(i) $\frac{d^2y}{dt^2} + t \text{sen } y = 0$

Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.

(j) $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0$

Ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden.

(k) $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$

Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden

1.3. Solución de una ecuación diferencial

Antes de desarrollar esta sección consideremos la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$. Cuando nos planteamos el problema de encontrar soluciones de esta ecuación estamos suponiendo que existe un conjunto X donde la variable x puede tomar valores. En general, la ecuación no es válida para todo valor $x \in X$ y el problema de resolver la ecuación consiste en encontrar $S \subset X$ tal que $x^2 - 4x + 3 = 0$. Entonces S será el conjunto de soluciones, que en nuestro caso es $\{1, 3\}$, y por tanto decimos que 1 y 3 son soluciones.

DEFINICIÓN 1.3.1 *Una solución de la ecuación diferencial*

$$F(t, y, y', \dots, y^n) = 0,$$

es cualquier función $y = \varphi(t)$, definida en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$, con derivada de orden n en ese intervalo y tal que

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi(t)^n) = 0, \quad \forall t \in I.$$

El proceso de determinar todas las funciones que son soluciones de una ecuación diferencial se llama **resolver** la ecuación diferencial. Por ejemplo, la integración es un tipo muy simple de resolución de ecuaciones diferenciales.

A diferencia de las ecuaciones algebraicas, las ecuaciones diferenciales tienen por solución una función. Además, una ecuación diferencial tiene generalmente un número infinito de soluciones que recibe el nombre de **solución general**. Algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que no pueden obtenerse de la solución general y en este caso reciben el nombre de **soluciones singulares**.

En ocasiones, se desea encontrar una solución particular que satisfaga ciertas condiciones adicionales llamadas condiciones iniciales. Las condiciones iniciales especifican los valores de una solución y de cierto número de sus derivadas en un valor concreto de la variable t (con frecuencia es $t = 0$, pero puede ser cualquier otro). El problema de determinar una solución de una ecuación diferencial que satisfaga ciertas condiciones iniciales se llama un **problema de valores iniciales o de Cauchy**.

EJEMPLO 1.5

- La ecuación diferencial $(y'(t))^2 + 1 = 0$ no tiene solución real, ya que no existe un número real que elevado al cuadrado y sumado con uno valga cero.
- La ecuación $t^2 + y^2 - 4 = 0$ define en forma implícita una solución de la ecuación diferencial $t + yy' = 0$ en el intervalo $-2 < t < 2$. En efecto, si derivamos en forma implícita la expresión $t^2 + y^2 - 4 = 0$ obtenemos,

$$2t + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad t + yy' = 0.$$

Si despejamos en la solución el valor de y observamos que $y = \pm\sqrt{4 - t^2}$ sólo está definida en $-2 < t < 2$.

- Si derivamos la función

$$y = \begin{cases} -t^4 & \text{si } t < 0 \\ t^4 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

podemos comprobar que es solución de la ecuación diferencial $ty' - 4y = 0$ en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

EJEMPLO 1.6

- Estudiar si la función $y = 1/t$ es una solución de la ecuación $y' = -y^2$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

La función $y = 1/t$ es derivable en el intervalo $(0, +\infty)$ y su derivada viene dada por $y' = -1/t^2$. Por lo que resulta inmediato que la función $y = 1/t$ satisface la ecuación diferencial $y' = -y^2$.

1.3.1. Existencia y unicidad de soluciones

Una vez que sabemos lo que se entiende por ecuación diferencial y solución de la misma, podemos preguntarnos:

- ¿Toda ecuación diferencial tiene solución?
- En el caso de que ésta exista, ¿cuántas tiene?, ¿quiénes son?

Antes de responder a estas preguntas, veamos el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 1.7

- La ecuación diferencial $(y'(t))^2 + (y(t))^2 + 1 = 0$ no tiene solución ya que $(y'(t))^2 + (y(t))^2 \geq 0$ para cualquier pareja de valores reales que tomen las funciones $y'(t)$ e $y(t)$.
- Es inmediato comprobar que

$$y(t) = t^3 + C, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

es solución de la ecuación diferencial $y'(t) = 3t^2$, para cualquier valor de la constante C . Por tanto, existe un número infinito de soluciones.

- En cuanto a la ecuación $y''(t) = 0$, cualquier función cuya gráfica sea una recta será solución. También en este caso existe un número infinito de soluciones.
-

Es bastante corriente que si una ecuación diferencial tiene solución, tenga infinitas soluciones. En efecto, en el proceso de resolver la ecuación diferencial tenemos que hacer al menos una integral y en consecuencia nos aparecerá una constante que, al tomar diferentes valores, nos definirá una gama infinita de soluciones.

A partir de este momento, y salvo que no lo indiquemos, nos centraremos en las ecuaciones diferenciales de primer orden $F(t, y, y') = 0$, donde supondremos que podemos expresarlas como $y' = f(t, y)$.

Consideremos el problema de valores iniciales (P.V.I.):

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (1.1)$$

estamos interesados en saber si dicho problema tiene solución y en caso afirmativo si ésta es única.

EJEMPLO 1.8

- Es fácil ver que la ecuación diferencial $ty' + y = 1$ admite como solución general $y = c/t + 1, c \in \mathbb{R}$, en cualquier intervalo que no contenga al cero. En efecto, derivando la función $y(t)$ se tiene

$$y' = -\frac{c}{t^2} \Rightarrow ty' + y = -\frac{c}{t} + \frac{c}{t} = 1.$$

Si queremos determinar la solución que pasa por el punto $(1, 2)$ tenemos que imponer la condición $y(1) = 2$. El valor de c que cumple con el requisito anterior es $c = 1$, con lo cual la solución particular pedida es

$$y = \frac{1}{t} + 1. \quad (1.2)$$

En consecuencia, la función (1.2) es una solución del problema de valores iniciales

$$ty' + y = 1, \quad y(1) = 2, \quad (1.3)$$

en el intervalo $(0, +\infty)$. Puesto que en

$$y = \frac{c}{t} + 1, \quad c \in \mathbb{R},$$

están todas las soluciones de la ecuación diferencial $ty' + y = 1$, entonces el problema (1.3) **tiene solución única**.

En cambio, no es posible encontrar una solución que pase por el punto $(0, 2)$. Por tanto, en este caso diremos que el problema de valores iniciales

$$ty' + y = 1, \quad y(0) = 2, \quad (1.4)$$

no tiene solución.

- Es inmediato comprobar que el problema de valores iniciales

$$(y')^2 = 4y, \quad y(0) = 1, \quad (1.5)$$

tiene dos soluciones: (a) $y = (t - 1)^2$, (b) $y = (t + 1)^2$.

TEOREMA 1.3.2 (Teorema de Cauchy-Peano) Sea $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y supongamos que existe un rectángulo cerrado

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

en el que la función f es continua. Entonces el problema de valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

tiene al menos una solución definida en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, donde

$$\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(t,y) \in \mathbb{R}^2} |f(t, y)|. \quad (1.6)$$

Hemos visto en el teorema de *Cauchy-Peano* que la continuidad de la función $f(t, y)$ en una región R garantiza que por cada punto de R pasa una solución de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ ¿Será también cierto que la continuidad de la función $f(t, y)$ obliga a que por cada punto de R pase una única solución? El siguiente ejemplo nos dará la respuesta a esta pregunta.

EJEMPLO 1.9

- Supongamos la ecuación diferencial $y' = f(t, y) = y^{\frac{2}{3}}$, que podemos escribirla

$$y' y^{-\frac{2}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(3y^{\frac{1}{3}}) = 1.$$

Integrando

$$3y^{\frac{1}{3}} = t + c \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{t}{3} + k\right)^3, \quad k = \text{cte.}$$

El problema de valores iniciales

$$y' = y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0,$$

no tiene solución única, ya que $y = t^3/27$, e $y = 0$ son dos soluciones del mismo.

Este ejemplo muestra una ecuación diferencial con una función $f(t, y) = y^{2/3}$ continua en un rectángulo R que contiene al punto $(0, 0)$, y sin embargo no tiene una única solución. Si queremos conseguir este último objetivo será necesario exigir a la función f nuevas condiciones.

TEOREMA 1.3.3 (Teorema de Picard) *Sea $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y supongamos que existe un rectángulo cerrado*

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

en el que las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas. Entonces el problema de valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

tiene solución única definida en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, donde δ está dado por (1.6).

OBSERVACIÓN 1.3.4

- Los Teoremas 1.3.2 y 1.3.3 nos dan condiciones suficientes pero no necesarias para garantizar la existencia y unicidad de soluciones para un problema de valores iniciales.
- La solución de un problema de valores iniciales puede existir en un intervalo mayor que el mencionado en los Teoremas 1.3.2 y 1.3.3.
- En los Teoremas 1.3.2 y 1.3.3 hemos considerado rectángulos R cerrados y acotados. Pueden enunciarse teoremas análogos utilizando rectángulos abiertos

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| < a, |y - y_0| < b\},$$

o bien rectángulos del tipo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leq t < t_0 + a, |y - y_0| < b\}.$$

En estos casos tenemos que añadir la hipótesis de que las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ estén acotadas.

EJEMPLO 1.10

- En el problema de valores iniciales

$$ty' = 2y, \quad y(0) = 0, \tag{1.7}$$

las funciones

$$f(t, y) = \frac{2y}{t}, \quad \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = \frac{2}{t},$$

no están definidas en los puntos de la recta $t = 0$. Por tanto, no es posible encontrar un rectángulo R que contenga al punto $(0, 0)$ en el cual la función f sea continua. No podemos aplicar el Teorema 1.3.2 y, en consecuencia, no podemos asegurar nada sobre la existencia de solución del problema de valores iniciales (1.7). Sin embargo, es fácil ver que las funciones $y = ct^2$ con $c \in \mathbb{R}$ son soluciones del problema (1.7) en el intervalo $-\infty < t < \infty$. El problema de valores iniciales tiene infinitas soluciones.

1.4. Análisis geométrico de $y' = f(t, y)$

Recordemos que estamos considerando ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden $F(t, y, y') = 0$, donde F es una función de tres variables, y que será posible expresarla

$$y'(t) = f(t, y). \quad (1.8)$$

1.4.1. Campo de direcciones

Las soluciones de (1.8) son funciones y y las podemos representar gráficamente como una curva en el plano Oty . Supongamos que D sea el dominio de la función f , y $(t_0, y_0) \in D$ siendo $y(t)$ una solución de (1.8) de tal manera que su gráfica pasa por el punto (t_0, y_0) , por tanto $y(t_0) = y_0$. En consecuencia, la ecuación (1.8) expresa que $f(t_0, y_0)$ es el valor de la pendiente de la tangente a la gráfica de $y(t)$ en (t_0, y_0) .

De esta manera, para cada uno de los puntos del dominio D podemos dibujar un pequeño segmento con la dirección que $f(t, y)$ determina. Un subconjunto del plano Oty en el que para cada punto se ha definido una dirección se conoce con el nombre de **campo de direcciones**.

Resumiendo, lo que hemos hecho al plantear la ecuación (1.8) es definir un campo direccional y el problema de encontrar sus soluciones es el de encontrar aquellas curvas con la propiedad de ser tangentes a cada punto del campo de direcciones.

EJEMPLO 1.11

- Para dibujar el campo de direcciones y poder trazar algunas de las soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^2$, veamos qué información podemos extraer de nuestra ecuación diferencial.
 - (a) Es evidente que para cualquier valor de y su derivada y' es positiva. Por tanto, las curvas solución son crecientes
 - (b) Para estudiar la concavidad de las curvas solución necesitamos su segunda derivada $y'' = 2yy' = 2y^3$. En consecuencia, si $y > 0$, las curvas solución son convexas, mientras que si $y < 0$ son cóncavas.

- (c) Campo de direcciones. Nuestra ecuación diferencial define un campo de direcciones en todo el plano Oty cuyas direcciones son constantes a lo largo de rectas paralelas al eje de abscisas t .

Podemos construirlo (véase Figura 2.3) con ayuda del **Mathematica**[®].

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{1, y^2}, {t, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

Como la dirección que define el campo de la ecuación $y' = y^2$, en cada punto del plano depende sólo de la coordenada y , entonces para cualquier y_0 los puntos de la forma (t, y_0) con $t \in \mathbb{R}$, se encuentran rodeados de un campo direccional idéntico. En consecuencia, las soluciones pueden obtenerse una de otra haciendo traslaciones en la dirección del eje t

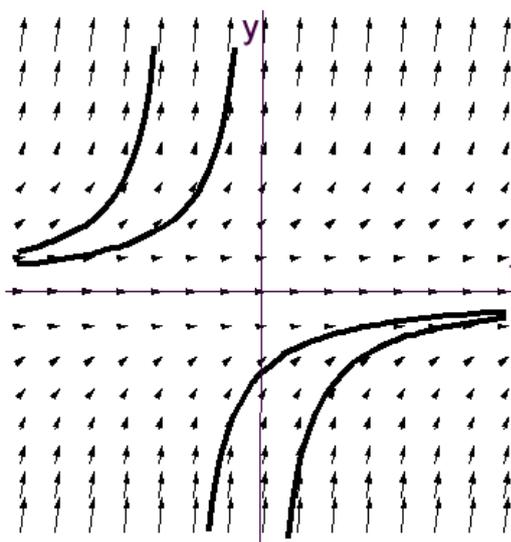


Figura 2.3. Campo de direcciones de $y' = y^2$.

- (d) Este hecho puede comprobarse si encontramos la solución explícita de la ecuación diferencial. Es inmediato comprobar que $y(t) = -1/(t + c)$. Observemos que esta familia de soluciones no contiene la solución $y = 0$ para cualquier c finita.

Para este ejemplo ha sido muy fácil encontrar la solución de la ecuación diferencial, pero esto no es lo más frecuente. Por tanto, en gran parte de los casos será necesario hacer un estudio geométrico para conocer, al menos, el comportamiento de las soluciones. Tengamos en cuenta que en muchos de los modelos que analizaremos estaremos interesados no en la solución concreta del problema, sino en su comportamiento a “largo plazo”.

1.5. Teoría cualitativa de EDO autónomas

1.5.1. Introducción.

A finales del 1600 *I. Newton* y *G. Leibnitz* descubrieron el Cálculo y pusieron las bases para el estudio de los Sistemas Dinámicos. En un principio y hasta momentos recientes se ha intentado encontrar de forma exacta la solución de la ecuación diferencial que modeliza a una determinada situación. Sin embargo, existen modelos aparentemente sencillos donde esto no es posible, por ejemplo el problema propuesto a finales del siglo XIX por Poincaré² conocido con el nombre de los tres cuerpos. Los matemáticos probaron que para este problema de atracción gravitatoria no era posible dar su solución explícita.

Por tanto, el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales ha seguido dos caminos diferentes. El primero, se caracteriza por una búsqueda de soluciones explícitas, bien sea en fórmulas exactas (lo que rara vez es posible) o bien en términos de series de potencias. En el segundo, se abandona toda intención de resolver las ecuaciones diferenciales en sentido tradicional y se intenta obtener información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones.

En esta sección realizaremos un estudio geométrico para obtener información sobre el comportamiento de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales llamadas autónomas. En las próximas secciones estudiaremos la forma de resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. En general, resolver una ecuación diferencial es un problema difícil, sin embargo, en muchas ocasiones es posible dar información sobre las soluciones sin necesidad de calcularlas.

1.5.2. Ecuaciones diferenciales autónomas

Ahora, nos centraremos en el problema de aprender cuanto sea posible sobre las características esenciales de las soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = g(y)$ por análisis directo de la propia ecuación. Este tipo de ecuaciones diferenciales recibe el nombre de autónomas pues el segundo miembro de la ecuación es “independiente del tiempo”, en el sentido de no aparecer t . Además, si $y(t)$ es solución de una ecuación autónoma también lo es la función $y(t + c)$, para cualquier constante c .

DEFINICIÓN 1.5.1 *Los puntos $c \in \mathbb{R}$ tales que $y(t) = c$ es solución de la ecuación diferencial se llaman puntos de equilibrio.*

Si suponemos que el comportamiento dinámico de un sistema biológico está modelado matemáticamente por las curvas solución de una ecuación diferencial autónoma

²A.H. Poincaré (1854 - 1912) se le consideró como el matemático más grande de su época. Fundó la dinámica topológica y la topología. En sus trabajos sobre la mecánica celeste elaboró la teoría de los desarrollos asintóticos, la cual, en la actualidad es una de las herramientas más poderosas del matemático aplicado

y estamos interesados por el comportamiento a largo plazo de las trayectorias (es decir, de las curvas solución), son de especial interés los estados de equilibrio, que son aquellos estados $y(t)$ que no cambian con el tiempo. Matemáticamente esto significa que $y(t) = c$ es una solución de la ecuación $y' = g(y)$.

EJEMPLO 1.12

- Dada la ecuación diferencial $y' = 7.5 - 24.25y + 22.25y^2 - 8y^3 + y^4$. Para encontrar los puntos de equilibrio resolvemos la ecuación $y' = 0$ y obtenemos $y = 0.5, 2, 2.5, 3$. Por tanto, las funciones $y = 0.5, y(t) = 2, y = 2.5, y(t) = 3$ son soluciones constantes. Por el Teorema 1.3.2 y Teorema 1.3.3 sabemos que la solución es única. En consecuencia, ninguna otra solución puede tomar los valores 0.5, 2, 2.5 o 3. De este modo, el plano Oty quedará dividido en regiones horizontales de tal manera que una solución que comience en una región no podrá salir de ella.

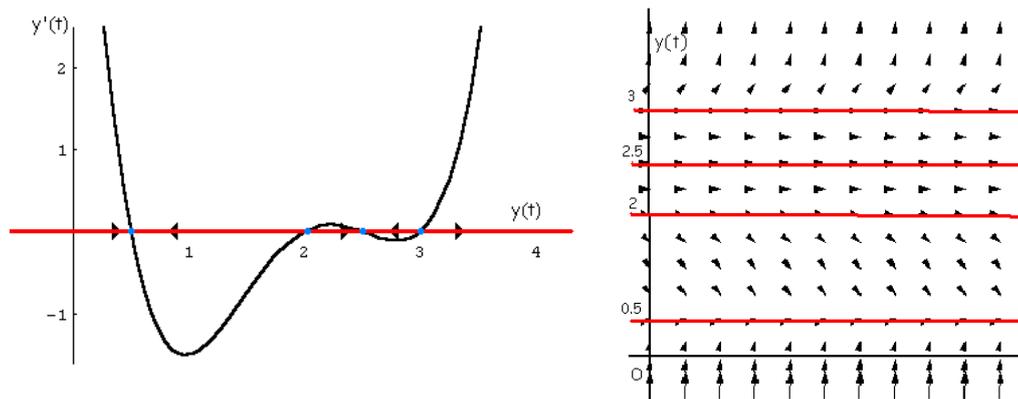


Figura 2.4. Línea fase de $y' = (y - 0.5)(y - 2)(y - 2.5)(y - 3)$.

Si la condición inicial y_0 es menor de 0.5 tendremos que $y'(t_0)$ es positiva y la solución será creciente. Si y está entre 0.5 y 2 o entre 2.5 y 3, entonces la derivada será negativa y la función decrecerá. Finalmente, si una solución comienza entre 2 y 2.5 o se encuentra por encima de 3 será creciente. En general se cumple la siguiente propiedad.

RESULTADO 1.5.2 Si g es una función con derivada continua en todo \mathbb{R} y consideramos la ecuación diferencial $y' = g(y)$. Entonces:

- Para cada una de las raíces de $g(y) = 0$, existe una solución constante de la ecuación diferencial. Si $g(c) = 0$ entonces $y = c$ es una solución.
- Las soluciones constantes dividen al plano Oty en franjas horizontales. Cualquier otra solución no constante estará contenida en una franja y será estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

- *Cada solución no constante es asintótica a una solución constante, o bien, crece o decrece sin límite.*

En nuestro ejemplo, observamos que si la condición inicial está próxima al 0.5 ó 2.5, entonces se tiene que la solución del problema de valores iniciales tiende a 0.5 ó 2.5 cuando t tiende a infinito. Por el contrario, si la condición inicial está próxima al 3 pero sin serlo, entonces la solución del problema de valores iniciales crece sin límite o decrece hacia 2.5. De alguna manera las soluciones constantes 0.5 y 2.5 **atraen** a las soluciones mientras que las soluciones constantes 2 y 3 las **repelen**.

Las ideas anteriores conducen a los conceptos de **estabilidad e inestabilidad**. Así, las soluciones $y(t) = 0.5$ e $y = 2.5$ son estables mientras que $y(t) = 2$ o $y(t) = 3$ tienen un comportamiento inestable.

Intuitivamente, desde un punto de vista físico solo interesan los puntos de equilibrio que son “estables”. Un péndulo en la posición vertical superior está en equilibrio, pero es muy improbable que eso ocurra. Además, la menor perturbación alterará completamente el comportamiento del péndulo. Tal equilibrio es inestable. En cambio, la posición de reposo inferior es estable; si la perturbamos ligeramente, el péndulo oscilará a su alrededor y (a causa del rozamiento) se aproximará gradualmente a ella de nuevo. De aquí nace la idea intuitiva de fuente y sumidero.

DEFINICIÓN 1.5.3 *Decimos que un punto de equilibrio y_0 es:*

- *Un sumidero si cualquier solución con condición inicial “suficientemente cercana.” a y_0 es asintótica a y_0 cuando t aumenta.*
- *Una fuente, cuando todas las soluciones que comienzan cerca de y_0 se alejan de y_0 cuando t aumenta.*
- *Un nodo si no es fuente o sumidero.*

En nuestro caso, el eje de ordenadas recibe el nombre de **línea fase**, siendo los puntos 0.5 y 2.5 sumideros y los puntos 2 y 3 fuentes.

Por lo comentado anteriormente, si c es un punto de equilibrio y $g'(c) < 0$ entonces el cambio de signo es de positivo a negativo y las condiciones iniciales justo por debajo de c dan lugar a funciones crecientes hacia c y las por encima de c funciones decrecientes a la solución constante. En el caso en que $g'(c) = 0$ no podemos asegurar nada y es necesario ver si se produce cambio de signo. Si no se produce cambio de signo tendremos que las soluciones por encima y por debajo de la constante son ambas crecientes o decrecientes, es decir, por un lado se alejarán de la solución constante y por otro se acercarán.

RESULTADO 1.5.4 *En general, se cumple:*

- Si $g(a) = 0$ y $g'(a) < 0$, entonces a es un estado de equilibrio estable para la ecuación diferencial autónoma $y' = g(y)$.
- Si $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$, entonces implica que a es un estado de equilibrio inestable para la ecuación diferencial autónoma $y' = g(y)$.
- Si a es un estado de equilibrio para $y' = g(y)$ en el cual $g'(a) = 0$, debemos estudiar la situación con más cuidado. Podemos encontrar ejemplos donde a sea estable o inestable.

EJEMPLO 1.13

- En el estudio de los efectos de la selección natural sobre una población aparece la siguiente ecuación diferencial,

$$y'(t) = 0.01y^2(t)(1 - y(t)) \quad (1.9)$$

donde $y(t)$ representa a la frecuencia con que se presenta cierto gen a , ¿contrá quien va la presión selectiva?

Para conocer el comportamiento a largo plazo del modelo bastará con realizar un estudio cualitativo de la ecuación diferencial autónoma (1.9)) y para ello será necesario encontrar y clasificar sus puntos de equilibrio.

Los puntos de equilibrio son las soluciones $y(t)$ constantes, por tanto aquellas funciones donde $y'(t) = 0$, es decir $y(t) = 1$, $y(t) = 0$.

Las soluciones constantes dividen a la región $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / t \geq 0, y \geq 0\}$ en dos franjas (Figura 2.5 colores verde y amarillo). Para valores iniciales de $y(t)$ pertenecientes a la primera región $0 < y(t) < 1$, la derivada es positiva y en consecuencia las soluciones $y(t)$ son crecientes. Sin embargo, en la segunda región $1 < y(t)$ (aunque sin sentido biológico) la derivada $y'(t)$ es negativa lo que indica que las funciones soluciones $y(t)$ son decrecientes. Estos resultados nos permiten decir que el punto de equilibrio $y(t) = 0$ es inestable, mientras que $y(t) = 1$ es asintóticamente estable (sumidero). A largo plazo, y para cualquier valor inicial $0 < y(0) < 1$ las soluciones $y(t) \rightarrow 1$

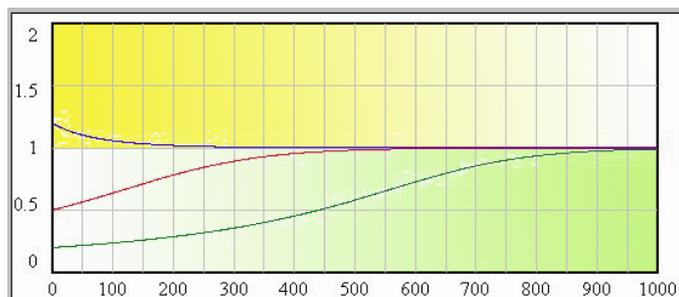


Figura 2.5.

EJERCICIO 2

- 1 En el estudio de los efectos de la selección natural sobre una población aparecen las siguientes ecuaciones diferenciales,

$$y'(t) = y(t)(1 - y(t))(0.15 - 0.5y(t))$$

$$y'(t) = 0.05y(t)(1 - y(t))(2y(t) - 1)$$

donde $y(t)$ representa a la frecuencia con que se presenta cierto gen a . Trazar las soluciones representativas considerando distintas condiciones iniciales entre 0 y 1 y discutir posible interpretaciones genéticas para estas curvas.

- 2 Obtener y clasificar los puntos de equilibrio de las ecuaciones diferenciales autónomas.

$$y'(t) = (1 - y)(y + 1)^2$$

$$y'(t) = y(y - 1)(8y - 2)$$

$$y'(t) = \sin\left(\frac{y}{2}\right)$$

- 3 La dinámica de una población viene dada por el siguiente modelo

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.25 \left(\frac{y(t)}{10} - 1 \right) \left(1 - \frac{y(t)}{200} \right)$$

donde $y(t)$ representa al número de individuos en el tiempo t .

- (a) Encuentra los valores de $y(t)$ para que la población se encuentre en equilibrio.
- (b) Encuentra los valores de $y(t)$ para los que decrece la población.

1.6. Resolución de E.D.O. de primer orden

1.6.1. Ecuaciones diferenciales en variables separables

Una importante clase de ecuaciones diferenciales está formada por aquellas que pueden expresarse de la forma: $y' = p(t)q(y)$, donde $p(t)$ es una función únicamente de la variable t y $q(y)$ es una función únicamente de la variable y .

Si $y' = p(t)q(y)$ entonces (si $q(y) \neq 0$) dividimos por $q(y)$ e integramos respecto de t , obteniendo:

$$\int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(t) dt.$$

EJEMPLO 1.14

- Si deseamos resolver

$$\frac{dy}{dt} = y \cos t, \quad y(\pi/2) = 1.$$

Estamos ante una ecuación diferencial de variables separables. Procediendo tal y como hemos comentado anteriormente llegamos a

$$\frac{dy}{y} = \cos t dt, \quad (y \neq 0).$$

Calculamos cada una de estas dos integrales

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos t dt \Rightarrow \ln |y| = \sin t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

O bien

$$|y| = e^{\sin t + c} = e^{\sin t} e^c \Rightarrow y = k e^{\sin t}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (k = \pm e^c), \quad (1.10)$$

Observemos que hemos podido separar las variables cuando y era distinto de cero. No obstante, es inmediato comprobar que la función $y = 0$ también es solución de la ecuación diferencial. Dicha solución también podemos obtenerla de (1.10), si admitimos que k pueda tomar el valor 0. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial viene dada por

$$y = k e^{\sin t}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

Ahora, si deseamos conocer la solución particular que pasa por el punto $(\pi/2, 1)$, sustituimos los valores en (1.11),

$$y(\pi/2) = 1 \Rightarrow 1 = k e^{\sin \pi/2} \Rightarrow k = 1/e.$$

La solución del problema de valores iniciales vendrá dada por

$$y = e^{\sin y - 1}$$

EJEMPLO 1.15

- En ciertas situaciones se plantea determinar la relación entre algún estímulo físico y la reacción correspondiente que se produce en el sujeto. Supongamos que la fuerza de un estímulo es s y que la intensidad de la reacción es una función de s , $f(s)$. Algunos datos experimentales sugieren que la razón de cambio de la intensidad de la reacción con respecto al estímulo es directamente proporcional a la intensidad de la reacción e inversamente proporcional a la fuerza del estímulo.

De los comentarios anteriores se desprende que $f(s)$ satisface la ecuación diferencial

$$f'(s) = k \frac{f(s)}{s}$$

para alguna constante positiva k . Es inmediato comprobar que la solución general de esta ecuación diferencial de variables separables viene dada por

$$f(s) = c s^k$$

EJEMPLO 1.16

- La tasa de variación de una población de bacterias viene dada por la ecuación diferencial $y'(t) = (1 - t)y(t)$, siendo $y(t)$ el número de bacterias en el minuto t . Si inicialmente el número de bacterias es y_0 , ¿cuántas bacterias habrá después de t minutos?

La ecuación diferencial es de variables separadas

$$\frac{dy}{y} = (1 - t)dt \Rightarrow \ln y = \left(t - \frac{t^2}{2}\right) + C \Rightarrow y = ke^{t - \frac{t^2}{2}}$$

Ahora encontramos la solución particular correspondiente al valor $y(0) = y_0$, es decir $k = y_0$. Por tanto

$$y(t) = y_0 e^{t - \frac{t^2}{2}}$$

EJEMPLO 1.17

- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{2y}; \quad (2) \quad y' = \frac{e^y t}{e^y + t^2 e^y}$$

$$(3) \quad y' + y = y(te^{t^2} + 1), \quad y(0) = 1$$

(a) $\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{2y}}$ Se trata de una ecuación de variables separables,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{2y} \Rightarrow 2y dy = e^t dt,$$

que se resuelve integrando en ambos términos de la ecuación

$$\int 2y dy = \int e^t dx \Rightarrow \boxed{y^2 = e^t + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

(b) $\boxed{y' = \frac{e^y t}{e^y + x^2 e^y}}$

Simplificando se reduce a una ecuación diferencial inmediata

$$y' = \frac{e^{yt}}{e^y + t^2 e^y} = \frac{e^{yt}}{e^y(1+t^2)} = \frac{t}{1+t^2},$$

que se resuelve por integración,

$$y = \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) $\boxed{y' + y = y(te^{t^2} + 1), \quad y(0) = 1}$

Simplificando la expresión, la ecuación diferencial se reduce a una de variables separables,

$$y' = yte^{t^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = yte^{t^2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = te^{t^2} dt, \quad (y \neq 0).$$

Integrando en ambos términos, se obtiene

$$\int \frac{dy}{y} = \int te^{t^2} dt, \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} e^{t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

que puede expresarse en forma explícita como

$$y = k e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (k = \pm e^c). \quad (1.12)$$

La división por y al separar las variables nos lleva a considerar la función $y = 0$ que también resulta ser solución de la ecuación diferencial. Dicha solución se obtiene de (1.12) si admitimos el valor $k = 0$. La solución general vendrá definitivamente dada por

$$y = k e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

Para determinar la solución particular que verifica la condición inicial $y(0) = 1$, sustituimos los valores $t = 0, y = 1$ en (1.13),

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = k e^{1/2} \Rightarrow k = e^{-1/2}.$$

Sustituyendo en (1.13) obtenemos la solución

$$\boxed{y = e^{\frac{1}{2}(e^{t^2}-1)}}.$$

1.6.2. Ecuaciones diferenciales exactas.

Una forma de obtener una ecuación diferencial es suponer $F(t, y) = C$ y calcular su diferencial total. En efecto,

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} dy = 0. \quad (1.14)$$

Es frecuente encontrarnos con ecuaciones diferenciales escritas en la forma

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0,$$

y por comparación con (1.14), podemos preguntarnos si existirá una función $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y), \quad \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y).$$

Es un hecho conocido (Teorema de *Schwartz*) que si la función $F(t, y)$ es “razonablemente buena”, entonces sus derivadas cruzadas coinciden. En consecuencia, tenemos una condición necesaria

$$\frac{\partial^2 F(t, y)}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F(t, y)}{\partial y \partial t} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Puede demostrarse, que esta condición también es suficiente.

DEFINICIÓN 1.6.1 Diremos que la ecuación diferencial

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0,$$

es exacta, si cumple

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Si la ecuación diferencial es exacta, entonces

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \Rightarrow F(t, y) = \int M(t, y) dt + \varphi(y).$$

Ahora, podemos derivar respecto de la variable y

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(t, y) dt \right] + \varphi'(y) = N(t, y).$$

En consecuencia,

$$\varphi'(y) = N(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(t, y) dt \right].$$

Integramos respecto de y para encontrar el valor de $\varphi(y)$. Finalmente, la solución de la ecuación diferencial es $F(t, y) = c$.

EJEMPLO 1.18

- Para la ecuación diferencial $(6ty + 2y^2 - 5)dt + (3t^2 + 4ty - 6)dy = 0$ se tiene

$$M(t, y) = 6ty + 2y^2 - 5, \quad N(t, y) = 3t^2 + 4ty - 6,$$

y puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t + 4y = \frac{\partial N}{\partial t},$$

es exacta. Por tanto, existirá una función $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y).$$

Aplicando la técnica de resolución expuesta anteriormente

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y) &\Rightarrow F(t, y) = \int M(t, y) dt = \int (6ty + 2y^2 - 5) dt \\ &= 3t^2y + 2ty^2 - 5t + \varphi(y), \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y) &\Rightarrow 3t^2 + 4ty + \varphi'(y) = 3t^2 + 4ty - 6. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\varphi'(y) = -6 \Rightarrow \varphi(y) = \int -6 dy = -6y.$$

La función $F(t, y)$ será: $F(t, y) = 3t^2 + 2ty^2 - 5t - 6y$, y la solución general vendrá dada en forma implícita por $3t^2 + 2ty^2 - 5t - 6y = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Factor integrante

A veces podemos encontrarnos con ecuaciones diferenciales

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0 \tag{1.16}$$

que no son exactas, pero es posible buscar una función $\mu(t, y)$ tal que la ecuación

$$\mu(t, y)M(t, y)dt + \mu(t, y)N(t, y)dy = 0,$$

si sea exacta. En este caso, la función $\mu(t, y)$ recibe el nombre de factor integrante de la ecuación (1.16). Notemos que un método para encontrar la función $\mu(t, y)$ es resolver la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial y},$$

problema que como podemos comprender es bastante complejo. Por esta razón lo que se hace es simplificarlo. Por ejemplo suponer que la función μ depende solo de t , sólo de y , o bien de ty , de $t + y$, etc.

EJEMPLO 1.19

- La ecuación diferencial

$$(t + t^4 + t^4 y^2) dt + y dy = 0 \quad (1.17)$$

no es exacta, ya que

$$M(t, y) = t + t^4 + t^4 y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2t^4 y, \quad N(t, y) = y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial t} = 0.$$

Si multiplicamos la ecuación (1.17) por $1/(t^2 + y^2)$ se obtiene la ecuación

$$\left(\frac{t}{t^2 + y^2} + t^2 \right) dt + \frac{y}{t^2 + y^2} dy = 0. \quad (1.18)$$

Esta nueva ecuación diferencial es exacta. En efecto,

$$\begin{aligned} M_1(t, y) = \left(\frac{t}{t^2 + y^2} + t^2 \right) &\Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{-2ty}{(t^2 + y^2)^2} \\ N_1(t, y) = \frac{y}{t^2 + y^2} &\Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{-2ty}{(t^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Por tanto, la función

$$\mu(t, y) = \frac{1}{t^2 + y^2}$$

es un factor integrante de la ecuación diferencial (1.17). Ahora podemos resolver la ecuación diferencial exacta (1.18). Es decir, existe una función $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M_1(t, y) = \frac{t}{t^2 + y^2} + t^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N_1(t, y) = \frac{y}{t^2 + y^2}.$$

Operando

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{t^2 + y^2} \Rightarrow F(t, y) = \int \frac{y}{t^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \ln(t^2 + y^2) + \varphi(t).$$

Por otro lado

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{t}{t^2 + y^2} + t^2 \Rightarrow \frac{t}{t^2 + y^2} + \varphi'(t) = \frac{t}{t^2 + y^2} + t^2,$$

es decir

$$\varphi'(t) = t^2 \Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{3} t^3.$$

La solución general de (1.17) vendrá dada en forma explícita por

$$\frac{1}{2} \ln(t^2 + y^2) + \frac{1}{3} t^3 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1.6.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

La teoría de ecuaciones diferenciales lineales ha sido objeto de profundos estudios a lo largo de los últimos 200 años y es un campo muy bien conocido y muy completo. Por el contrario, no se sabe casi nada de carácter general acerca de las ecuaciones diferenciales no lineales.

DEFINICIÓN 1.6.2 *Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación del tipo*

$$y' + p(t)y = q(t). \quad (1.19)$$

Su ecuación homogénea asociada es

$$y' + p(t)y = 0. \quad (1.20)$$

TEOREMA 1.6.3 *El problema de valores iniciales con una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene solución y es única si las funciones $p(t)$ y $q(t)$ son continuas.*

La resolución de la ecuación homogénea (1.20) es fácil pues es una ecuación de variables separables y su solución es de la forma

$$y = ce^{-\int p(t)dt}.$$

Para la resolución de la ecuación lineal completa, se utiliza un método llamado **variación de las constantes** que consiste en tomar la solución general de la ecuación homogénea e imponerla como solución de la ecuación completa haciendo depender de t a la constante c de integración.

Existe un **segundo método de resolución** que consiste en encontrar el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$, se obtiene

$$\mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y(t) = \mu(t)q(t),$$

que puede expresarse como

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)q(t) \quad \Rightarrow \quad \mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + c.$$

Tan sólo queda despejar el valor de $y(t)$ para encontrar la solución de la ecuación.

EJEMPLO 1.20

- Para resolver la ecuación diferencial lineal $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = 3t$ utilizamos el primer método, encontrando la solución de la ecuación homogénea

$$\varphi(t) = e^{-\int \frac{1}{t} dt} = e^{-\ln t} = e^{\ln(t^{-1})} = \frac{1}{t}.$$

Calculamos

$$c(t) = \int \frac{q(t)}{\varphi(t)} dt = \int \frac{3t}{1/t} dt = t^3,$$

$$c(t)\varphi(t) = t^3 \cdot \frac{1}{t} = t^2.$$

La solución buscada será

$$y(t) = t^2 + c \frac{1}{t}.$$

- Utilizando el segundo método encontramos el factor integrante,

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = t,$$

multiplicando la ecuación diferencial por esta función, obtenemos

$$y't + y = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad (yt)' = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad yt = t^3 + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = t^2 + c \frac{1}{t}.$$

1.7. E.D.O. lineales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales ordinarias podemos clasificarlas en dos grandes bloques: las lineales y las no lineales. Las más sencillas de estudiar son las del primer tipo ya que debido a las propiedades de sus soluciones pueden caracterizarse de manera general y además disponemos de métodos para resolver muchas de ellas.

DEFINICIÓN 1.7.1 Una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación del tipo

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (1.21)$$

donde $a_i(t)$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$ y $b(t)$ son funciones continuas en algún intervalo I y además $a_n(t) \neq 0, \forall t \in I$.

DEFINICIÓN 1.7.2 La ecuación diferencial

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad (1.22)$$

se llama ecuación diferencial lineal homogénea asociada a la ecuación (1.21).

Si las funciones $a_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ son funciones constantes, entonces la ecuación (1.21) se llama ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes.

Nos centraremos en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden por un doble motivo. En primer lugar, podemos hacer un desarrollo teórico relativamente simple y, en segundo lugar, son muy importantes desde el punto de vista práctico.

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden es una ecuación del tipo

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (1.23)$$

donde $a_2(t)$, $a_1(t)$, $a_0(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en algún intervalo I y además $a_2(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Lo usual es escribir la ecuación (1.23) en su forma canónica

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (1.24)$$

Empezaremos su estudio analizando la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a (1.24), dada por

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (1.25)$$

TEOREMA 1.7.3 Sean $p(t)$ y $q(t)$ dos funciones continuas en algún intervalo I . Entonces, para cualquier $t \in I$, el problema de valores iniciales

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

tiene una única solución definida en el intervalo I , cualesquiera que sean los valores $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$.

RESULTADO 1.7.4 Si $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son dos soluciones de (1.25), entonces cualquier combinación lineal de ambas,

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es también solución de (1.25).

EJEMPLO 1.21

- La ecuación diferencial lineal de segundo orden $y'' + 4y = 0$ tiene por soluciones $y_1(t) = \cos 2t$, $y_2(t) = \sin 2t$. Por tanto, si hacemos uso del Resultado 1.7.4 la función

$$y(t) = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

será también solución de $y'' + 4y = 0$.

- Si consideramos la ecuación diferencial de segundo orden no lineal

$$ty'' + 2yy' = 0, \quad (1.26)$$

es inmediato comprobar que las funciones

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = \frac{t}{1+t}$$

son soluciones de (1.26). Sin embargo la función

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 + \frac{c_2 t}{1+t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

no es solución de (1.26). En efecto,

$$ty' + 2yy' = \frac{2c_2(c_1 + c_2 - 1) + 2c_1 c_2}{(t+1)^3},$$

no es idénticamente nula para cualquier valor de c_1 y c_2 .

RESULTADO 1.7.5 Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dos soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (1.27)$$

definidas en el intervalo I , tales que

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.28)$$

para algún $t_0 \in I$. Entonces cualquier solución de (1.27) es combinación lineal de $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Es decir,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general de (1.27).

DEFINICIÓN 1.7.6 Dadas dos funciones $y_1, y_2 \in C^1(I)$, se define el Wronskiano de y_1 e y_2 como la función

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I. \quad (1.29)$$

Observemos que el resultado anterior lo que hace es reducir el problema de resolver la ecuación diferencial (1.27) a encontrar dos soluciones particulares $y_1(t)$ e $y_2(t)$ que cumplan con la condición

$$W[y_1, y_2](t_0) \neq 0,$$

para algún $t_0 \in I$. Dos funciones $y_1(t)$ e $y_2(t)$ con estas características se dicen que forman un **conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial** (1.27).

EJEMPLO 1.22

- Las funciones $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-4t}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' + 8y = 0 \quad (1.30)$$

en el intervalo $-\infty < t < \infty$. Además

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ -2e^{-2t} & -4e^{-4t} \end{vmatrix} = -2e^{-6t} \neq 0, \forall t \in (-\infty, \infty).$$

Por lo tanto, forman un conjunto fundamental de soluciones de (1.30) en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La solución general de (1.30) será

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1.7.1. Método de reducción del orden

Si conocemos una solución particular de la ecuación lineal homogénea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1.31)$$

podemos encontrar otra solución de (1.31) aplicando el método de reducción del orden.

Sea $y_1(t)$ una solución particular de (1.31) hacemos el cambio de variable $y = z(t)y_1(t)$ y derivamos

$$y' = z'y_1 + zy_1', \quad y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''.$$

Si sustituimos estos valores en (1.31) y tenemos en cuenta que y_1 es una solución particular de (1.31), la ecuación diferencial inicial se transforma en esta otra

$$y_1(t)z'' + (2y_1'(t) + p(t)y_1(t))z' = 0.$$

Ahora el cambio $v = z'$ reduce la ecuación anterior a la ecuación lineal homogénea de primer orden

$$y_1(t)v' + (2y_1'(t) + p(t)y_1(t))v = 0,$$

que podemos resolver por separación de variables

$$v(t) = \frac{c}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int p(t)dt\right), \quad c \in \mathbb{R},$$

y como sólo necesitamos una solución podemos tomar $c = 1$. Entonces

$$z' = v \quad \Rightarrow \quad z = \int v(t)dt,$$

y la nueva solución de (1.31) será

$$y_2(t) = zy_1(t) = y_1(t) \int v(t)dt.$$

Puede probarse que estas dos soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (1.31). La solución general de (1.31) podemos escribirla como

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

EJEMPLO 1.23

- La función $y_1(t) = e^{2t}$ es una solución particular de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Podemos encontrar una segunda solución utilizando el método de reducción del grado de la ecuación diferencial.

Sea $y(t) = z(t)y_1(t) = z(t)e^{2t}$, derivando

$$y'(t) = z'(t)e^{2t} + 2z(t)e^{2t}, \quad y''(t) = z''(t)e^{2t} + 4z'(t)e^{2t} + 4z(t)e^{2t},$$

sustituimos estas derivadas en la ecuación diferencial lineal homogénea inicial y simplificamos

$$z''(t) = 0.$$

A continuación procedemos a rebajar el orden, para ello llamamos $v(t) := z'(t)$ y resolvemos la ecuación diferencial que aparece

$$v'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = c = 1 \quad \Rightarrow \quad z(t) = \int v(t)dt = t,$$

y la segunda de las soluciones buscada será $y_2(t) = u(t)y_1(t) = te^{2t}$.

Estas dos soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial inicial. En efecto

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0, \quad \forall t \in (-\infty, \infty).$$

La solución general de la ecuación diferencial inicial es

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1.7.2. EDO lineal de segundo orden completa

La solución general de la ecuación diferencial lineal

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (1.32)$$

la obtendremos a partir de las soluciones de su ecuación lineal homogénea asociada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

y una solución particular de (1.32).

RESULTADO 1.7.7 *Sea $y_p(t)$ una solución particular de la ecuación diferencial lineal*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1.33)$$

e $\{y_1(t), y_2(t)\}$ un conjunto fundamental de soluciones de su ecuación diferencial lineal homogénea asociada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (1.34)$$

Entonces

$$y(t) = y_p(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

será la solución general de (1.33)

1.7.3. Método de variación de parámetros

Como hemos visto en el Resultado 1.7.7, para poder encontrar la solución general de (1.33) necesitamos conocer una solución particular. El método de variación de parámetros nos proporciona un procedimiento para calcular dicha solución particular.

Supongamos que $\{y_1(t), y_2(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada (1.33), entonces su solución general $y_h(t)$ viene dada por

$$y_h(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

El objetivo es encontrar una solución particular de (1.33) que sea de la forma

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t), \quad (1.35)$$

donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ son dos funciones a determinar. La duda que surge de forma natural es saber si es posible encontrar dos funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ tales que

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t),$$

sean una solución particular de la ecuación diferencial (1.33). Observemos que lo que hemos realizado ha sido en la solución $y_h(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, reemplazar las constantes por los parámetros variables $c_1(t)$, $c_2(t)$.

Derivando

$$y'_p = c_1 y'_1 + c'_1 y_1 + c_2 y'_2 + c'_2 y_2.$$

Si además exigimos que $c_1(t)$ y $c_2(t)$ sean funciones tales que

$$c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_p = c_1 y'_1 + c_2 y'_2. \quad (1.36)$$

Volviendo a derivar

$$y''_p = c_1 y''_1 + c'_1 y'_1 + c_2 y''_2 + c'_2 y'_2,$$

y sustituyendo estos valores en (1.33)

$$\begin{aligned} y''_p + p(t)y'_p + q(t)y_p &= c_1(y''_1 + p(t)y'_1 + q(t)y_1) \\ &+ c_2(y''_2 + p(t)y'_2 + q(t)y_2) \\ &+ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = g(t). \end{aligned}$$

Pero al ser $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y''_1 + p(t)y'_1 + q(t)y_1 = 0, \quad y''_2 + p(t)y'_2 + q(t)y_2 = 0.$$

Es decir

$$y'_1 c'_1 + y'_2 c'_2 = g(t). \quad (1.37)$$

De (1.36) y (1.37) obtenemos el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 c'_1 + y_2 c'_2 = 0 \\ y'_1 c'_1 + y'_2 c'_2 = g(t), \end{cases}$$

que resolviéndolo, encontramos las soluciones:

$$c'_1(t) = \frac{W_1}{W}, \quad c'_2(t) = \frac{W_2}{W},$$

donde

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y'_2 \end{vmatrix} = -y_2 g(t), \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & g(t) \end{vmatrix} = y_1 g(t)$$

y W es el Wronskiano de $y_1(t)$, $y_2(t)$, que como sabemos viene dado por

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}.$$

Resumiendo, para resolver la ecuación diferencial (1.33) procedemos de la manera siguiente:

- (a) Encontramos la función $y_h(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ y posteriormente evaluamos el Wronskiano $W[y_1, y_2](t)$.

(b) Obtenemos $c_1(t)$, $c_2(t)$ integrando las expresiones

$$c_1'(t) = \frac{-y_2(t)g(t)}{W[y_1, y_2](t)}, \quad c_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W[y_1, y_2](t)}.$$

(c) Construimos la solución particular

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

EJEMPLO 1.24

- Supongamos que queremos resolver la ecuación diferencial lineal completa de segundo orden

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2}y' + \frac{2}{1+t^2}y = 1+t^2. \quad (1.38)$$

- (a) En primer lugar necesitamos encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2}y' + \frac{2}{1+t^2}y = 0. \quad (1.39)$$

Es inmediato comprobar que una solución particular de (1.39) es $y_1(t) = t$. Para calcular otra solución particular aplicamos el método de reducción del grado. Para ello, si realizamos el cambio de variable

$$y(t) = z(t)y_1(t) = tz(t),$$

se llega a la ecuación diferencial

$$tz'' + \frac{2}{1+t^2}z' = 0.$$

Llamando $v(t) = z'(t)$ la ecuación diferencial anterior se transforma en

$$tv' + \frac{2}{1+t^2}v = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1+t^2}{t^2}.$$

Por tanto,

$$z(t) = \int v(t)dt = \int \frac{1+t^2}{t^2}dt = t - \frac{1}{t}.$$

En consecuencia, la otra solución particular es

$$y_2(t) = t \left(t - \frac{1}{t} \right) = t^2 - 1.$$

La solución general de (1.39) viene dada por

$$y_h(t) = c_1 t + c_2(t^2 - 1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Ahora buscamos una solución particular de la forma

$$y_h(t) = c_1(t)t + c_2(t)(t^2 - 1),$$

siendo

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ g(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^2 - 1 \\ 1 + t^2 & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix}} = 1 - t^2,$$

integramos

$$c_1(t) = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3}.$$

Del mismo modo

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & 1 + t^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix}} = t,$$

y, por tanto,

$$c_2(t) = \int (t) dt = \frac{t^2}{2}.$$

(c) Por consiguiente

$$y_p(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)t + \frac{t^2}{2}(t^2 - 1) = \frac{1}{6}(t^4 + 3t^2).$$

(d) Finalmente, la solución general de (1.38) vendrá dada por

$$y(t) = \frac{1}{6}(t^4 + 3t^2) + c_1 t + c_2 (t^2 - 1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1.8. E.D.O. lineales de segundo orden con coeficientes constantes

En esta sección estudiaremos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden del tipo

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g(t), \quad (1.40)$$

donde a_1 y a_2 son constantes.

Para poder resolver estas ecuaciones procedemos tal y como lo hicimos en la sección anterior.

1.8.1. La ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (1.41)$$

donde a_1 y a_2 son constantes.

Sabemos que la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + ay = 0$, siendo a una constante, tiene por solución

$$y(t) = ce^{-at}, \quad -\infty < t < \infty.$$

En consecuencia, es lógico tratar de determinar si existen soluciones exponenciales en $-\infty < t < \infty$, de la ecuación lineal homogénea (1.41). Comprobaremos que todas sus soluciones son funciones exponenciales o se construyen a partir de funciones exponenciales.

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (1.42)$$

Probamos una solución de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$. Para ello derivamos y sustituimos en (1.42)

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0.$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$, $\forall t \in (-\infty, \infty)$, debe ocurrir que

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de **ecuación característica de la ecuación diferencial** (1.42). Examinemos los diferentes casos que pueden presentarse:

- **Primer caso.** La ecuación característica tiene dos raíces, λ_1 , λ_2 , reales y distintas. Las soluciones

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t},$$

son linealmente independientes en $-\infty < t < \infty$ y por lo tanto forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial (1.42). La solución general es

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- **Segundo caso.** Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces sólo existe una solución exponencial $y(t) = e^{\lambda t}$. Podemos encontrar una segunda solución utilizando el **método de reducción del grado** de la ecuación diferencial.

Sea $y(t) = z(t)e^{\lambda t}$, derivando

$$y'(t) = z'e^{\lambda t} + z\lambda e^{\lambda t}, \quad y''(t) = z''e^{\lambda t} + 2\lambda z'e^{\lambda t} + z\lambda^2 e^{\lambda t},$$

sustituimos estas derivadas en la ecuación diferencial (1.42), y simplificamos

$$z(\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_2 e^{\lambda t}) + (z''e^{\lambda t} + 2\lambda z'e^{\lambda t} + a_1 z'e^{\lambda t}) = 0,$$

pero al ser $e^{\lambda t}$ una solución de la ecuación diferencial, podemos simplificar la expresión anterior y nos queda $z'' + 2\lambda z' + a_1 z' = 0$.

A continuación procedemos a rebajar el orden, para ello llamamos $v(t) := z'(t)$ y resolvemos la ecuación de variables separadas que aparece

$$v' + (2\lambda + a_1)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v'}{v} = -(2\lambda + a_1).$$

Es decir

$$\ln |v| = - \int (2\lambda + a_1) dt \quad \Rightarrow \quad v = k_1 e^{- \int (2\lambda + a_1) dt} = z'.$$

Calculando el valor de $z(t)$

$$z(t) = k_1 \int e^{- \int (2\lambda + a_1) dt} dt + k_2.$$

Si $k_1 = 1$, $k_2 = 0$

$$z(t) = \int e^{- \int (2\lambda + a_1) dt} dt = \int e^{-(2\lambda + a_1)t} dt.$$

Por otro lado, para que la ecuación $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ tenga una raíz doble, tiene que ocurrir que su discriminante se anule. Calculando el valor de la raíz

$$\lambda = -\frac{a_1}{2}.$$

Es decir,

$$z(t) = \int e^{- (2(-\frac{a_1}{2}) + a_1)t} dt = \int dt = t,$$

y la segunda de las soluciones buscada será $y_2(t) = z(t)y_1(t) = te^{\lambda t}$.

La solución general de la ecuación diferencial inicial es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Tercer caso.** Si λ_1 y λ_2 son raíces complejas

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Estamos dentro del primer caso y por tanto

$$y(t) = k_1 e^{\alpha+i\beta)t} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

A continuación, aplicamos la fórmula de *Moirve* para los números complejos y simplificamos

$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) + k_2 e^{\alpha t} (\cos(-\beta t) + i \operatorname{sen}(-\beta t)) \\ &= e^{\alpha t} ((k_1 + k_2) \cos \beta t + (k_1 i - k_2 i) \operatorname{sen} \beta t) \\ &= \boxed{e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.25

- La ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' + 6y' + 8y = 0 \tag{1.43}$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0.$$

Las raíces son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial (1.43) es de la forma

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

- La ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{1.44}$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

que admite la solución real doble $\lambda = 2$. Por tanto, la solución general de (1.44) es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

- La ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \quad (1.45)$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

que admite las soluciones complejas conjugadas

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i.$$

En consecuencia, la solución general de (1.45) es

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1.8.2. La ecuación diferencial lineal completa de segundo orden con coeficientes constantes

Como sabemos por la sección 9.7.2, una vez resuelta la ecuación lineal homogénea asociada, la resolución de la ecuación diferencial completa

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g(t) \quad (1.46)$$

se reduce a buscar una solución particular de (1.46), y podemos utilizar el método de variación de parámetros para encontrarla.

EJEMPLO 1.26 *texto*

- Supongamos que queremos encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = (t - 1)e^t. \quad (1.47)$$

- (a) El polinomio característico $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ tiene por raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. Por tanto, $y_c(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$.

Si $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t e^t$, su Wronskiano vale

$$W[e^t, t e^t] = W = e^{2t} \neq 0, \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

- (b) Calculamos

$$c_1' = \frac{-y_2 g(t)}{W} = \frac{-t e^t (t - 1) e^t}{e^{2t}} = -t^2 + t \Rightarrow c_1 = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}$$

y

$$c_2' = \frac{y_1 f(t)}{W} = \frac{e^t (t - 1) e^t}{e^{2t}} = t - 1 \Rightarrow c_2 = -\frac{t^2}{2} - t$$

(c) Por consiguiente,

$$y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right) e^t + \left(\frac{t^2}{2} - t\right) t e^t = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right) e^t$$

(d) La solución general de (1.47) vendrá dada por

$$y(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right) e^t + c_1 e^t + c_2 t e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1.8.3. Método de los coeficientes indeterminados

Ahora presentaremos un nuevo método para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial lineal completa con coeficientes constantes que no requiere el cálculo de integrales.

EJEMPLO 1.27

- Supongamos que queremos encontrar una **solución particular** de

$$y'' + 4y = e^{3t}.$$

El método consiste en conjeturar la solución a la vista de la función $g(t) = e^{3t}$. Como en este caso estamos ante una función exponencial probamos con la solución $y = Ae^{3t}$. Si sustituimos en la ecuación diferencial llegamos a

$$9Ae^{3t} + 4Ae^{3t} = Ae^{3t} \Rightarrow A = 1/13,$$

y la solución particular buscada es $y(t) = 1/13 e^{3t}$.

- Repitamos el método para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = t^2 + e^{-t}.$$

Ahora el segundo miembro $g(t)$ está compuesto por dos tipos de funciones. La primera de ellas t^2 sugiere ensayar con un polinomio de segundo grado $At^2 + Bt + C$. La segunda es la función exponencial e^{-t} la cual nos indica que debemos buscar una función del tipo Dt^2e^{-t} , ya que tanto e^{-t} como te^{-t} son soluciones de la ecuación homogénea. Por tanto, probamos con la función

$$y(t) = At^2 + Bt + C + Dt^2e^{-t}.$$

Al sustituir en la ecuación diferencial e identificar coeficientes se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que una vez resuelto presenta las soluciones

$$A = 1, \quad B = -4, \quad C = 6, \quad D = \frac{1}{2}.$$

La solución particular buscada es

$$y(t) = t^2 - 4t + 6 + \frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

El procedimiento descrito en el ejemplo anterior se denomina método de los coeficientes indeterminados. Se aplica cuando la función $g(t)$ es de algunos tipos particulares. Como regla general, probamos con una solución particular del mismo tipo que la función $g(t)$ y con coeficientes indeterminados, multiplicando por t o t^2 , si fuese necesario, para conseguir que ninguno de los términos de la solución ensayada sea solución de la ecuación lineal homogénea asociada.

1.9. Notas históricas

Si no se tienen ciertos conocimientos de ecuaciones diferenciales y de los métodos usados para resolverlas, es difícil estudiar la historia y el desarrollo de esta importante rama de las matemáticas. Más aún, la evolución de la teoría de las ecuaciones diferenciales está íntimamente ligada al desarrollo general de las matemáticas, y no puede separarse de ella.

La teoría de las ecuaciones diferenciales se origina en los inicios del cálculo, con *Isaac Newton* (1642-1727) y *Gottfried Wilhelm Leibnitz* (1646-1716) en el siglo XVII. Aún cuando Newton realizó, relativamente, poco trabajo en la teoría de las ecuaciones diferenciales, su desarrollo del cálculo y la aclaración de los principios básicos de la mecánica proporcionaron una base para el desarrollo de sus aplicaciones, en el siglo XVIII, con mayor alcance por parte de *Euler*. *Newton* clasificó las ecuaciones de primer orden de acuerdo con las formas

$$dy/dx = f(x) ; \quad dy/dx = f(y) ; \quad dy/dx = f(x, y)$$

Para la última desarrolló un método de solución, usando series infinitas, cuando $f(x, y)$ es un polinomio en x e y . Era muy sensible a la crítica y, como consecuencia de ello, tardó bastante en publicar muchos de sus descubrimientos.

Leibnitz llegó a los resultados fundamentales del cálculo independientemente, aunque un poco más tarde que *Newton*. Nuestra notación moderna para la derivada dy/dx y el signo de la integral se deben a *Leibnitz*. Descubrió el método de separación de las variables, así como procedimientos para resolver las ecuaciones homogéneas de primer orden y las ecuaciones lineales de primer orden. Mantuvo una abundante correspondencia con otros matemáticos, especialmente con los hermanos *Bernoulli*. En el curso de esta correspondencia se resolvieron muchos problemas de ecuaciones diferenciales, durante las últimas décadas del siglo XVII.

A *Newton* y *Leibnitz* le siguieron los hermanos *Jakob Bernoulli* (1654-1705) y *Johann Bernoulli* (1667-1748) y, el hijo de *Johann*, *Daniel Bernoulli* (1700-1782). Justamente, éstos son tres de los ocho miembros de la familia *Bernoulli*, quienes en su tiempo, fueron prominentes matemáticos y hombres de ciencia. Con ayuda del cálculo, formularon y resolvieron las ecuaciones diferenciales de muchos problemas de mecánica. Un problema (1696-1697) al cual contribuyeron ambos hermanos, y el cual provocó problemas entre ellos, fue el de la *braquistócrona*³ que conduce a la ecuación

³Determinación de la curva de descenso más rápido

no lineal de primer orden

$$y(1 + (y')^2) = c$$

donde c es una constante. *Newton* también resolvió el problema antes, en 1697. Se dice, tal vez no sea cierto, que *Newton* supo del problema al final de la tarde de un fatigoso día en la Casa de la Moneda, y lo resolvió en la noche, después de la cena. Publicó la solución en forma anónima, pero *J. Bernoulli*, al verla, exclamó “... conozco al león por su zarpa ...”

En 1690 *J. Bernoulli* publicó la solución de la ecuación diferencial, que en forma diferencial se escribe

$$(b^2y^2 - a^3)^{1/2}dy = a^{3/2}dx$$

Actualmente esta ecuación se toma como un simple ejercicio, pero, en aquel tiempo, encontrar la solución, constituyó un avance trascendental.

A finales del siglo XVII, muchos de los métodos elementales de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se conocían y, la atención se dirigió hacia las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior y hacia las ecuaciones diferenciales parciales. *Jacob Riccati* (1676-1754), matemático italiano, consideró ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$. También consideró una importante ecuación no lineal, conocida como ecuación de Riccati

$$dy/dx = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$$

aunque no en forma general.

Leonhard Euler uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos, también vivió en el siglo XVII. Sus trabajos reunidos llenan más de sesenta volúmenes. Aunque quedó ciego, durante los últimos diecisiete años de su vida, su trabajo no disminuyó. De particular interés es su trabajo sobre el planteamiento de problemas de la mecánica y su desarrollo de métodos de solución para estos problemas matemáticos. Refiriéndose al trabajo de *Euler* en la mecánica, *Lagrange* dijo que era el primer gran trabajo en el que se aplica el análisis a la ciencia del movimiento. *Euler* también consideró la posibilidad de reducir ecuaciones de segundo orden a ecuaciones de primer orden, mediante un cambio adecuado de variables; creó el concepto de *factor integrante*, en 1739 dio un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes. Contribuyó al método de las soluciones en series de potencias y dio un procedimiento numérico para resolver ecuaciones diferenciales. También hizo contribuciones importantes a la teoría de las series de *Fourier* y creó la primera discusión sistemática del *cálculo de variaciones*.

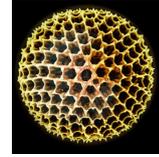
En el siglo XVIII, los grandes matemáticos franceses *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813) y *Pierre-Simon Laplace* (1749-1827) hicieron importantes aportaciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales. Posiblemente sea la ecuación de *Laplace*, la ecuación diferencial en derivadas parciales más conocida en la física matemática, la ecuación del potencial

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

donde los subíndices indican derivadas parciales. El trabajo monumental de *Lagrange*, *Mecanique analytique*, contiene las ecuaciones generales del movimiento de un sistema dinámico, conocidas actualmente como las ecuaciones de *Lagrange*. Para *Laplace* la naturaleza era esencial y las matemáticas, eran su herramienta en el aprendizaje de sus secretos; para *Lagrange* las matemáticas eran un arte que justificaba su propio ser. Sin embargo, ambos hombres realizaron avances de gran alcance, tanto en la teoría como en las aplicaciones de las matemáticas.

En los últimos años, algunos matemáticos dedicados al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales han tratado de elaborar una teoría sistemática (pero general) rigurosa. La finalidad no es tanto crear métodos de solución para ecuaciones diferenciales particulares, sino desarrollar técnicas apropiadas para el tratamiento de diferentes clases de ecuaciones .





Tema 2

MODELOS BASADOS EN E.D.O.

2.1. Introducción

En este tema construiremos algunos modelos biológicos elementales basados en las ecuaciones diferenciales. En la mayor parte de ellos será posible resolver la ecuación diferencial y de esta forma podremos encontrar la solución explícita del problema planteado. No obstante, en algunos de ellos, también realizaremos el estudio cualitativo correspondiente para analizar el comportamiento de las soluciones a “largo plazo”.

2.2. Modelos exponencial

Si $y(t)$ representa a una cantidad desconocida que depende del tiempo, entonces para poder encontrar esta función será necesario establecer algún tipo de hipótesis sobre la forma que dicha función cambia con el tiempo. De entre todas ellas, una de la más elemental, es suponer que la tasa de cambio de $y(t)$, en cada momento, es directamente proporcional a la cantidad presente. Es decir,

$$y'(t) = \alpha y(t),$$

donde α es la constante de proporcionalidad.

Resolviendo esta ecuación diferencial de variables separables,

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)} = \int \alpha dt \quad \Rightarrow \quad \ln |y(t)| = \alpha t + \ln c.$$

O bien,

$$\ln y(t) - \ln c = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{y(t)}{c} \right) = \alpha t.$$

Despejando

$$y(t) = c e^{\alpha t}.$$

Si suponemos que $y(0) = y_0$, entonces

$$y(0) = c e^0 = c = y_0,$$

y la solución viene dada por

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{\alpha t}}. \quad (2.1)$$

Observemos que si $\alpha > 0$, entonces la función $y(t)$ crece sin límite, mientras que si $\alpha < 0$ la función $y(t)$ disminuirá cuando t aumente.

2.2.1. Dinámica independiente de la densidad

El análisis de las relaciones entre las estructuras y el movimiento de una población, se basa en la noción de población estable. *Leonard Euler* (1760) fue el primero en definir este concepto y en darle un contenido analítico, pero en realidad fue *Alfred J. Lotka*, en una serie de publicaciones que se iniciaron en 1907 y terminaron en 1937, quien primero trató lo que podemos considerar como el fundamento de la dinámica de poblaciones.

La tasa de natalidad de una población humana se da usualmente en términos de número de nacimientos por mil, en un año. La referencia a mil es simplemente para evitar cifras decimales; en lugar de una tasa de natalidad de 17 por mil se podría hablar igualmente de una tasa de 0.017 por individuo. Del mismo modo, el período de un año también es únicamente una convención; la tasa de natalidad podría igualmente darse en términos de una semana, un segundo, o cualquier otra unidad de tiempo. Análogas observaciones se aplican a la tasa de mortalidad y a la tasa de crecimiento, o tasa de natalidad menos tasa de mortalidad. La tasa de crecimiento es pues la variación neta de población por unidad de tiempo dividida por la población total al comienzo del período.

Supongamos que la población $y(t)$, en el instante t , cambia a $y + \Delta y$ en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$. Entonces, la tasa media de crecimiento es

$$\frac{\Delta y}{y(t)\Delta t}. \quad (2.2)$$

En la práctica, $y(t)$ se conoce únicamente en aquellos instantes t_0, t_1, \dots en que se hace recuento de la población, y su valor es un entero no negativo. Suponemos que $y(t)$ se extiende (por interpolación, por ejemplo) a una función con valores reales no negativa, de una variable real, con derivada continua. Si tomamos límite en (2.2),

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y(t)}{y(t)\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

Esta función de t es la tasa de crecimiento de la población en el instante t . **La hipótesis más simple es la de una tasa de crecimiento constante r .** Éste es

el caso si el número de nacimientos y de muertes en un pequeño período de tiempo Δt tienen una razón fija respecto a la población total. Esas razones serán funciones lineales de Δt pero independientes del tamaño de la población. Así pues, la variación neta será $r y \Delta t$, siendo r una constante. Por tanto

$$r = \frac{y'(t)}{y(t)}.$$

Esta es una ecuación lineal y como es sabido se conoce con el nombre de Ley de Malthus para el crecimiento de una población. Si la población de una especie dada es y_0 en el tiempo t_0 , entonces $y(t)$ satisface el problema del valor inicial. Integrando se tiene la conocida fórmula para el crecimiento ilimitado,

$$y(t) = y(t_0)e^{r(t-t_0)}.$$

De aquí que toda especie que satisface la ley de crecimiento de *Malthus* crece exponencialmente con el tiempo.

Ahora bien, sólo se ha propuesto un modelo sencillo para el crecimiento de una población, tan sencillo que fue posible resolverlo completamente en pocas líneas. Por lo tanto, es importante ver si este modelo, con su sencillez, tiene alguna relación con la realidad. Sea $y(t)$ la población humana de la Tierra en el tiempo t . Se estima que la población del planeta aumentó con una tasa promedio de 2% anual durante el período 1960–1970. Al empezar la mitad de la década, el 1 de enero de 1965, cuando el Departamento de Comercio del gobierno de Estados Unidos, estimaba la población de la Tierra en 3340 millones de personas, entonces $t_0 = 1965$; $y_0 = 3.34 \times 10^9$ y $r = 0.02$, de modo que $y(t) = (3.34) \cdot 10^9 \cdot e^{0.02(t-1965)}$. Una manera de comprobar la precisión de esta fórmula es calcular el tiempo requerido para que se duplique la población del planeta y compararlo con el valor observado de 35 años. La fórmula predice que la población de la Tierra se duplica cada T años, donde $e^{0.02T} = 2$. Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación se obtiene $0.02T = \ln 2$, de modo que $T = 50 \ln 2 \simeq 34.6$ años.

Esto constituye una excelente coincidencia con el valor observado. Por otro lado, sin embargo, mirando hacia el futuro, la ecuación predice que la población de la Tierra será de 200 billones en el año 2515, de 1800 billones en 2625, y de 3600 billones en 2660. Estas son cifras astronómicas cuyo significado es difícil de imaginar. La superficie total del planeta es de aproximadamente 167.4 billones de metros cuadrados. El 80% de la superficie está cubierta por agua. Suponiendo que se está dispuesto a vivir en botes al igual que en tierra firme, puede verse fácilmente que para el año 2515 habrá solamente 0.837 metros cuadrados por persona; en el año 2625 cada persona dispondrá de solamente 0.09 metros cuadrados en el cual estar de pie y para el año 2660 las personas estarán unas en los hombros de otras. Parece por lo tanto, que el modelo no es razonable y debería ser descartado.

Sin embargo, consideremos el caso del *Microtus Arvallis Pall*, un pequeño roedor

que se reproduce muy rápidamente. Tomemos como unidad de tiempo el mes y que la población crece con una tasa del 40 % mensual.

Si hay dos roedores presentes en el momento inicial $t = 0$, entonces $y(t)$, el número de roedores en el tiempo t , verifica $y(t) = 2e^{0.4t}$.

Meses	0	2	6	10
y(t) observada	2	5	20	109
y(t) calculada	2	4.5	22	109.1

Tabla 3.1

En la Tabla 10.1 se comparan las poblaciones observadas con las poblaciones calculadas utilizando el modelo de crecimiento exponencial. Como podemos apreciar, existe una gran coincidencia.

En el caso del *Microtus Arvallis Pall*, la población observada es muy precisa, ya que el período de gestación es de tres semanas y el tiempo que se requiere para medir la población es mucho menor.

Los modelos lineales para el crecimiento de poblaciones son satisfactorios siempre que la población no sea demasiado grande. Cuando la población es demasiado grande, estos modelos no pueden ser exactos ya que no reflejan el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible.

2.2.2. Desintegración radiactiva

El físico *Rutherford* y sus colaboradores probaron que los átomos de ciertos elementos radiactivos son inestables y que, en un intervalo de tiempo dado, una fracción fija de los átomos se desintegra espontáneamente para formar un nuevo elemento. Ya que la radiactividad es una propiedad del átomo, *Rutherford* demostró que la descomposición de una sustancia es directamente proporcional al número de átomos presentes en la misma.

Si $y(t)$ es la cantidad de material radiactivo existente en el tiempo t , entonces

$$y'(t) = -ry(t), \quad r > 0,$$

donde r es una constante que depende del elemento radiactivo considerado, y se conoce como **constante de decaimiento**. Este modelo es un caso particular de un modelo de crecimiento exponencial.

2.2.3. Trazadores radiactivos

Los elementos radiactivos juegan un papel muy importante en Biología. Por ejemplo, el H_3 se suele usar para marcar ciertos pares de ADN, los cuales se añaden a cadenas

mutantes de *E. coli*, que son incapaces de fabricar una base particular de ADN. Para tratar el cultivo con un antibiótico apropiado, se usa una señal radiactiva para determinar cuanto ADN se ha replicado bajo las condiciones particulares del experimento. El yodo radiactivo se usa con frecuencia para detectar problemas en el tiroides de los humanos.

2.2.4. Fechado con C_{14}

Alrededor del año 1950, el químico *Willard Libby* ideó un método en el cual se usa carbono radiactivo para determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. El cociente de la cantidad de C_{14} y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atmósfera es constante y, en consecuencia, la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C_{14} cesa. Así, comparando la proporción de C_{14} que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método utiliza la vida media¹ del C_{14} radiactivo que es de aproximadamente 5600 años.

EJEMPLO 2.1

- Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene 1/1000 de la cantidad original de C_{14} . Para determinar la edad del fósil utilizamos la fórmula $y(t) = y(0)e^{rt}$.

Cuando $t = 5600$ años, $y(t) = y(0)/2$, de lo cual es posible determinar el valor de r ,

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{5600r} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{\ln 2}{5600} = -0.00012378.$$

Por lo tanto

$$y(t) = y_0 e^{-0.00012378t}.$$

Si $y(t) = y_0/1000$, se tiene que

$$\frac{y_0}{1000} = y_0 e^{-0.00012378t} \quad \Rightarrow \quad t \approx \frac{\ln 1000}{0.00012378} \approx 55800 \text{ años.}$$

La edad encontrada en el ejemplo anterior está, en realidad, al borde del límite dentro del cual este método es exacto. La técnica usual del carbono 14 se limita a aproximadamente 9 semividas del isótopo, es decir alrededor de 50.000 años. Una razón es que el análisis químico necesario para obtener una medida exacta del C_{14} restante se hace un tanto problemático alrededor de $y_0/1000$. Además, este análisis

¹Tiempo que ha de transcurrir para que cierta cantidad de material radiactivo quede reducido a la mitad.

exige la destrucción de una muestra un tanto grande. Si se logra hacer esta medición de modo indirecto, basándose en la radiactividad efectivamente presente en la muestra, entonces es muy difícil distinguir entre la radiación que proviene del fósil y la radiación ambiental normal. Sin embargo, recientemente, el uso de un acelerador de partículas ha hecho posible que los científicos separen directamente el C_{14} del C_{12} estable. Calculando el valor preciso de la razón entre C_{14} y C_{12} , la exactitud de este método puede extenderse a un período de 70.000 a 100.000 años. Otras técnicas isotópicas, tales como el uso de potasio 40 y argón 40, permiten obtener edades de varios millones de años. A veces también es posible emplear métodos no isotópicos, que se basan en el empleo de aminoácidos.

EJEMPLO 2.2

- **Desintegración radiactiva en cascada.**

Supongamos que una sustancia radiactiva $x(t)$ se desintegra dando lugar a una nueva sustancia radiactiva $y(t)$. La primera sustancia se desintegra totalmente, con una constante k_1 de desintegración. Sea k_2 la constante de desintegración de $y(t)$, con $k_2 \neq k_1$. La variación de la sustancia $y(t)$ en el instante t viene dada por la ecuación diferencial ordinaria,

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{dx(t)}{dt} - k_2 y(t) \quad (2.3)$$

Al ser $x(t) = x_0 e^{-k_1 t}$, entonces $x'(t) = -k_1 x_0 e^{-k_1 t}$. Sustituyendo este valor en la ecuación diferencial anterior (2.3) obtenemos la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y'(t) = k_1 x_0 e^{-k_1 t} - k_2 y(t).$$

Su factor integrante es la función $\mu(t) = e^{k_2 t}$. Al multiplicar la ecuación por el factor integrante, podemos escribir,

$$\left(y(t) e^{k_2 t} \right)' = k_1 e^{k_2 t} x_0 e^{-k_1 t} = k_1 x_0 e^{(k_2 - k_1)t} + C$$

Integrando los dos miembros de la ecuación,

$$y e^{k_2 t} = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + C$$

despejando

$$y(t) = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + C e^{-k_2 t}$$

Al ser $y(0) = y_0$, entonces

$$C = y_0 - \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} \Rightarrow y(t) = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + y_0 e^{-k_2 t} - \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} e^{-k_2 t}$$

finalmente,

$$y(t) = y_0 e^{-k_2 t} + \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \right) \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}$$

Las soluciones graficadas con Mathematica® puede verse en la figura siguiente para los parámetros:

$$k_1 = 0.000018; \quad k_2 = 0.000039; \quad x_0 = 3.7; \quad y_0 = 0$$

siendo,

$$x(t) = 3.7e^{-0.000018t}; \quad y(t) = 3.171428(e^{-0.000018t} - e^{-0.000039t})$$

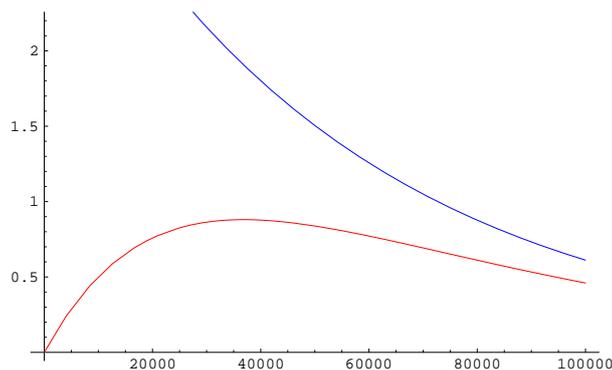


Figura En rojo $y(t)$, en azul $x(t)$.

En la próxima figura se ha incorporado el campo de vectores, realizado con Maple® y la solución con valor inicial $y_0 = 6$, manteniendo los mismos parámetros del modelo.

```
with(DEtools);
DEplot(diff(y(t),t)=000018*3.7*exp(-0.000018*t)-0.0000*y, [y(t)],
t=0..10000, [[y(0)=6], stepsize=.2, arrows=LARGE);
```

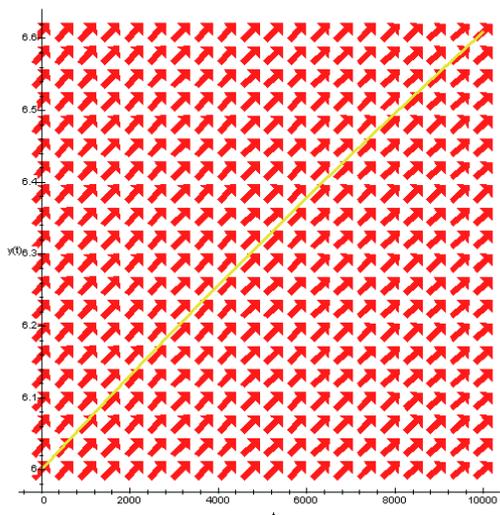


Figura En rojo $y(t)$, en azul $x(t)$.

2.2.5. Modelo de un riñón artificial I

El funcionamiento de una máquina de diálisis es el siguiente: la sangre del paciente circula a lo largo de una membrana a una velocidad fija, mientras que al mismo tiempo un líquido purificador se encuentra circulando en la dirección opuesta al otro lado de la membrana a una velocidad diferente. Este líquido purificador atrae las impurezas en la sangre, y la tasa de cambio de las impurezas a través de la membrana sigue la **ley de Fick**, la cual afirma que la cantidad de material de desecho que pasa por una membrana es proporcional a la diferencia de concentración a un lado y otro de la misma.

La sangre, que tiene una concentración de desechos $u(t)$ (creatina, urea, ...), al circular por la membrana que la separa del dializador, elimina una parte de las impurezas que pasan al dializador cuya concentración es $v(t)$. La ecuación diferencial que modeliza a esta situación es

$$\frac{d(u(t) - v(t))}{dt} = -k(u(t) - v(t)), \quad k > 0,$$

cuya integración permite calcular la cantidad de material de desecho removido de la sangre por unidad de tiempo.

EJEMPLO 2.3

- Supongamos dos compartimientos que se encuentran separados por una barrera (membrana) a través de la cual se disuelve una sustancia. La tasa de disolución de un compartimiento a otro viene dada por la ley de Fick: proporcional a la diferencia entre las concentraciones de los dos compartimientos. Sea $C_1(t)$ la concentración (en el minuto t) más baja que se encuentra en el primero de los compartimientos y $C_2(t)$ la concentración del segundo. Supongamos también que V_1 y V_2 son los volúmenes de cada uno de los compartimientos. Sea un intervalo pequeño de tiempo Δt , entonces la cantidad de sustancia que atraviesa la membrana será

$$\Delta Q = \Delta t k (C_1 - C_2)$$

donde la constante de proporcionalidad k dependerá del tipo de membrana y de la sustancia. De la expresión anterior se deduce

$$\left. \begin{aligned} \Delta C_1 = \frac{\Delta Q}{V_1} = \frac{\Delta t k (C_2 - C_1)}{V_1} \\ \Delta C_2 = \frac{\Delta Q}{V_2} = \frac{\Delta t k (C_1 - C_2)}{V_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} = \frac{k}{V_1} (C_2 - C_1) \\ \frac{dC_2}{dt} = \frac{k}{V_2} (C_1 - C_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Si las concentraciones iniciales en los dos compartimientos son $C_1(0)$ y $C_2(0)$, entonces la cantidad inicial total de sustancia será $Q_T = V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0)$. Después

de cierto tiempo se habrá alcanzado la condición de equilibrio y en ambos compartimientos existirá la misma concentración (C_∞). Ahora la sustancia se encontrará distribuida en el volumen $V_1 + V_2$, y por tanto

$$C_\infty = \frac{V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0)}{V_1 + V_2} \quad (2.5)$$

esta expresión nos indica que si son conocidas las concentraciones iniciales y los volúmenes, entonces es posible conocer la concentración en ambos compartimientos “a largo plazo”.

Es evidente que la diferencia más grande entre ambas concentraciones se encuentra en el momento inicial $t = 0$, y que esta diferencia va disminuyendo de forma progresiva hasta alcanzar el punto de equilibrio.

La función $C_1(t)$ será creciente, mientras que $C_2(t)$ será decreciente y podemos establecer la hipótesis (por ejemplo) de que tienden al valor de equilibrio de forma exponencial. Es decir, que responden a expresiones del tipo

$$\begin{cases} C_1(t) = C_1(0) + (1 - e^{-\alpha t})(C_\infty - C_1(0)) \\ C_2(t) = C_2(0) + (1 - e^{-\beta t})(C_\infty - C_2(0)) \end{cases}$$

donde las constantes α y β se obtendrán al sustituir en las ecuaciones diferenciales (2.4). Observemos que, ambas funciones, cuando $t = 0$ toman el valor inicial y además tienden a C_∞ si $t \rightarrow \infty$.

Restando estas funciones

$$C_2(t) - C_1(t) = C_\infty(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) + C_2(0)e^{-\beta t} - C_1(0)e^{-\alpha t} \quad (2.6)$$

apreciamos al sustituir en cualquiera de las ecuaciones diferenciales (2.4), que las dos funciones exponenciales tienen que coincidir para que se cumpla la igual, lo cual obliga a que $\alpha = \beta$. De esta forma, la expresión (2.6) se reduce a

$$C_2(t) - C_1(t) = e^{-\alpha t}(C_2(0) - C_1(0)) \quad (2.7)$$

Los valores de las derivadas de estas funciones son,

$$\frac{dC_1}{dt} = \alpha e^{-\alpha t}(C_\infty - C_1(0)); \quad \frac{dC_2}{dt} = \alpha e^{-\alpha t}(C_\infty - C_2(0)) \quad (2.8)$$

sustituyendo (2.8) en (2.4)

$$\frac{V_1}{k} \frac{dC_1}{dt} = -\frac{V_2}{k} \frac{dC_2}{dt} = C_2 - C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{k} (\alpha e^{-\alpha t}(C_\infty - C_1(0))) = e^{-\alpha t}(C_2(0) - C_1(0))$$

simplificando y despejando

$$\alpha = \frac{k}{V_1} \frac{C_2(0) - C_1(0)}{C_\infty - C_1(0)} \quad (2.9)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el valor de (2.5)

$$C_\infty - C_1(0) = \frac{V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0)}{V_1 + V_2} - C_1(0) = \frac{V_2(C_2(0) - C_1(0))}{V_1 + V_2} \quad (2.10)$$

y sustituyendo (2.10) en (2.9) se obtiene finalmente que

$$\alpha = \frac{k(V_1 + V_2)}{V_1 V_2}$$

2.2.6. Absorción de Rayos-X

Una aplicación elemental del modelo exponencial es la absorción de rayos-X que atraviesan un cuerpo parcialmente opaco. La diferencia importante con el resto de los modelos estudiados es que ahora la variable independiente no es el tiempo sino la distancia x de penetración del rayo. Supondremos que $y(x)$ representa a la intensidad de la radiación, y que la lámina es atravesada perpendicularmente por el rayo. La diferencia $y(x+h) - y(x)$ se corresponderá con la absorción, siendo h el espesor de la lámina. La hipótesis que se establece es que esta absorción es directamente proporcional a la intensidad de radiación y al espesor. Esto es,

$$y(x+h) - y(x) = \alpha y(x)h,$$

donde el parámetro de proporcionalidad α tiene que ser negativo. Pasando h al primer miembro y tomando límite cuando $h \rightarrow 0$, nos aparece el siguiente problema de valores iniciales,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \alpha y(x), \quad y(0) = y_0$$

cuya solución, como sabemos, es $y(x) = y_0 e^{\alpha x}$

EJERCICIO 3

- 1 Una población crece exponencialmente durante T meses con una constante de crecimiento de 0.03 por mes. En un momento determinado, la constante aumenta a 0.05 por mes. Después de 20 meses la población se duplica, ¿en qué momento T cambió la constante de crecimiento?
- 2 Se dice que una población crece de forma natural si su velocidad de crecimiento es directamente proporcional a la población existente en cada instante. Según un proverbio chino, la superficie cubierta por los lirios de un estanque crece de manera natural duplicándose cada día. Al final de un mes, de 30 días, la superficie de un estanque se halla totalmente cubierta por los lirios. ¿En qué momento estuvo cubierto al 75 % del estanque?

- 3 **Amplias investigaciones han suministrado datos que relacionan el riesgo R (en porcentaje) de tener un accidente automovilístico con el nivel b de alcohol en la sangre (en porcentaje). Se conocen dos puntos representativos $R(0) = 1\%$ y $R(0.14) = 20\%$. Si suponemos que la razón de cambio del riesgo respecto al nivel de alcohol en la sangre viene dada por $R'(b) = kR(b)$. Resuelve la ecuación diferencial que modeliza a la situación planteada. ¿En qué nivel de alcohol en la sangre el riesgo de sufrir un accidente es del 100 %**

2.3. Modelos exponencial modificado

2.3.1. Ley de enfriamiento de Newton

Después de una muerte violenta, una de las cosas que el forense hace es tomar la temperatura del cuerpo. Un poco tiempo después, se vuelve a tomar la temperatura del cadáver, con objeto de saber el “ritmo” de enfriamiento del cuerpo. Naturalmente, este proceso puede repetirse para obtener una mejor aproximación de la hora en que ha sucedido la muerte. La propiedad en que se basa esta técnica es conocida con el nombre de **Ley de enfriamiento de Newton**, la cual dice que el ritmo con el que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del ambiente que lo rodea. Es decir, si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo para el tiempo t , entonces

$$T'(t) = -k(T(t) - T_e), \quad T(0) = T_0, \quad (2.11)$$

siendo $k > 0$, T_e la temperatura ambiente y T_0 la temperatura inicial del cuerpo.

EJEMPLO 2.4

- Supongamos que se encuentra un cadáver a las 8h30' y que a esa hora su temperatura es de 30° C siendo la temperatura de la habitación constante de 22° C. Una hora más tarde la temperatura había descendido a 28° C. Vamos a utilizar esta información para determinar la hora aproximada en que falleció esta persona.

Es conocido que la temperatura de ser un humano vivo es de aproximadamente 37° C. De la ley de enfriamiento de *Newton* deducimos

$$T'(t) = -k(T(t) - 22), \quad T(0) = 30.$$

Esta ecuación diferencial es lineal, pero podemos simplificarla realizando el cambio de variable $z(t) = T(t) - 22$. En efecto, $z'(t) = T'(t)$, luego,

$$z'(t) = -kz(t), \quad z(0) = T(0) - 22 = 8.$$

Estamos ante el modelo exponencial

$$z(t) = z(0)e^{-kt} = 8e^{-kt} \Rightarrow T(t) = 22 + 8e^{-kt}.$$

Ahora, debemos determinar la constante k de decaimiento,

$$T(1) = 28 = 22 + 8e^{-k} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.2877.$$

Nuestro modelo es: $T(t) = 22 + 8e^{-0.2877t}$. Para determinar la hora en que ocurrió el asesinato, debemos encontrar el tiempo correspondiente a 37° C.

$$37 = 22 + 8e^{-0.2877t} \Rightarrow t = -\ln\left(\frac{15/8}{0.2877}\right) \approx -2.$$

De esta información deducimos que la muerte ocurrió aproximadamente dos horas antes de haber encontrado el cuerpo, aproximadamente a las 6 horas y treinta minutos de la mañana.

EJEMPLO 2.5

- En un asesinato, el detective encuentra a las 11h a un cadáver al que toma la temperatura, que resulta ser de 30 grados centígrados. Una vez revisado el lugar y tras saber que la temperatura del cuerpo, 40 minutos después de la primera medida, es de 16 grados centígrados, y que la temperatura ambiente se ha mantenido en 12 grados centígrados. Se pide, ¿a qué hora se produjo la muerte del sujeto? (Tómese 37 grados centígrados la temperatura corporal media de una persona viva).

Si $y(t)$ representa a la temperatura del cadáver en el momento t , y T_a es la temperatura ambiente, entonces por la ley de enfriamiento de *Newton*, sabemos que

$$y(t) = T_a + ke^{\alpha t}; \quad \alpha < 0$$

Tomemos como $t = 0$ el momento del asesinato, siendo la temperatura del cuerpo de 37 grados, $y(0) = 37$. Supongamos que han transcurrido t minutos (11h.) $y(t) = 30$, 40 minutos después su temperatura es de 16 grados, $y(t + 40) = 16$. Al ser la temperatura ambiente de 12 grados, entonces

$$y(t) = 12 + ke^{\alpha t} \Rightarrow y(0) = 37 = 12 + k \Rightarrow k = 25$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} y(t) = 30 &= 12 + 25e^{\alpha t} \Rightarrow 18 = 25e^{\alpha t} \\ y(t + 40) = 16 &= 12 + 25e^{\alpha(t+40)} \Rightarrow 4 = 25e^{\alpha t}e^{40\alpha} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$4 = 18e^{40\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{40} \ln\left(\frac{4}{18}\right) \approx -0.0376$$

Sustituyendo en $18 = 25e^{\alpha t}$ y despejando el valor de t obtenemos

$$18 = 25e^{-0.0376t} \Rightarrow t = -\frac{1}{0.0376} \ln\left(\frac{18}{25}\right) = 8.736$$

Finalmente, la muerte ocurrió 8.736 minutos antes de las 11h.

2.3.2. Contaminación de un lago

Uno de los problemas más urgentes de la sociedad actual es cómo reducir los niveles de contaminación y toxicidad del agua disponible. Existen modelos muy complejos que requieren del esfuerzo de equipos multidisciplinares, nosotros nos limitaremos a estudiar un modelo muy simple aplicado a la contaminación de un lago. A pesar de su sencillez, observaremos como aparecen elementos básicos que están presentes en los modelos más complicados.

Supongamos un nuevo pesticida que se aplica a los campos y se deposita a través de un río en un lago con un volumen V de agua. Asumamos que el río recibe una cantidad constante de pesticida y que fluye al lago con un ritmo constante f . Estamos, por tanto, suponiendo que el río tiene una concentración constante p del nuevo pesticida. Vamos a suponer también que el agua del lago está bien agitada y que entra tanta agua como sale de él. Si $c(t)$ es la concentración de pesticida en el lago en el tiempo t , entonces el ritmo de cambio en la cantidad de pesticida es igual a la cantidad que entra menos la cantidad que sale. Es decir,

$$c'(t) = \frac{f}{V}p - \frac{f}{V}c(t),$$

y si suponemos que el lago estaba inicialmente libre del pesticida, entonces $c(0) = 0$. Para resolver esta ecuación diferencial la reescribimos

$$c'(t) = -\frac{f}{V}(c(t) - p),$$

y al igual que en la sección anterior, haciendo el cambio de variable $z(t) = c(t) - p$ con $z(0) = c(0) - p = -p$, la ecuación se transforma en,

$$z'(t) = -\frac{f}{V}z(t), \quad z(0) = -p.$$

Ya sabemos que la solución de esta ecuación diferencial es

$$z(t) = -p e^{-\frac{ft}{V}} \Rightarrow c(t) = p - p e^{-\frac{ft}{V}}.$$

El segundo término de esta última expresión muestra que a largo plazo, la solución tiende hacia p , como era lógico suponer.

2.3.3. Genética de poblaciones

En genética de poblaciones los fenómenos hereditarios se estudian a nivel de población en lugar de a nivel individual. Consideremos un carácter hereditario particular de un animal, como la longitud del pelo. Supongamos que básicamente hay dos tipos de pelo para cierto animal: pelo largo y pelo corto, y que el pelo largo es el tipo dominante. Sea A el gen responsable del pelo largo y a el gen responsable del pelo

corto. Cada animal tiene un par de genes: **AA** (individuos dominantes), **aa** (individuos recesivos) o **Aa** (individuos híbridos). Si viven N animales en la población, entonces existen $2N$ genes en la población que controlan la longitud del pelo. El número total de genes **a** en la población dividido por $2N$ da la fracción de genes **a** que llamaremos q . Esta fracción se llama frecuencia genética de **a** en la población. La frecuencia genética de **A** será $1 - q$.

Un problema importante en genética de poblaciones es el estudiar la forma en que la frecuencia genética q cambia conforme los animales de la población se reproducen. Si cada unidad de tiempo representa una generación, se puede considerar q como función del tiempo. En general, se estudian un número elevado de generaciones, por lo que q puede considerarse una función derivable de t . Supondremos que la población se aparea al azar y que la distribución de los genes **a** y **A** es la misma para machos y hembras. En este caso, se puede demostrar por la teoría de la probabilidad, que la frecuencia genética es constante de una generación a la siguiente cuando no hay factores que la alteren como mutaciones o influencias externas sobre la población. Discutiremos a continuación las ecuaciones diferenciales que describen los efectos de esos factores de perturbación sobre $q(t)$.

Si en cada generación una fracción α de los genes **a** muta y se transforma en genes **A**, entonces la razón de cambio de la frecuencia genética q debida a esta mutación es

$$q' = -\alpha q, \quad \alpha > 0.$$

Sucede con frecuencia que en cada generación una fracción μ de genes **A** mutan en **a** y al mismo tiempo una fracción α de genes **a** mutan en **A**. El efecto neto de estas mutaciones en la frecuencia genética de q está descrito por la ecuación

$$q' = \mu(1 - q) - \alpha q, \quad \alpha, \mu > 0.$$

EJEMPLO 2.6

- A continuación haremos un análisis cualitativo para un $\mu = 0.00003$ y $\alpha = 0.00001$.

$$\frac{dq}{dt} = 0.00003(1 - q) - 0.00001q = 0.00003 - 0.00004q = -0.00004(q - 0.75)$$

La Figura 3.1 muestra la gráfica de $z = -0.00004(q - 0.75)$ y las curvas solución típicas. Puede apreciarse que la frecuencia genética $q = 0.75$ es un valor de equilibrio. Si el valor inicial de q es menor de 0.75, el valor de q crecerá bajo los efectos de la mutación; después de muchas generaciones será aproximadamente 0.75. Si el valor inicial de q está entre 0.75 y 1.00, entonces q decrecerá con el tiempo hasta el valor 0.75.

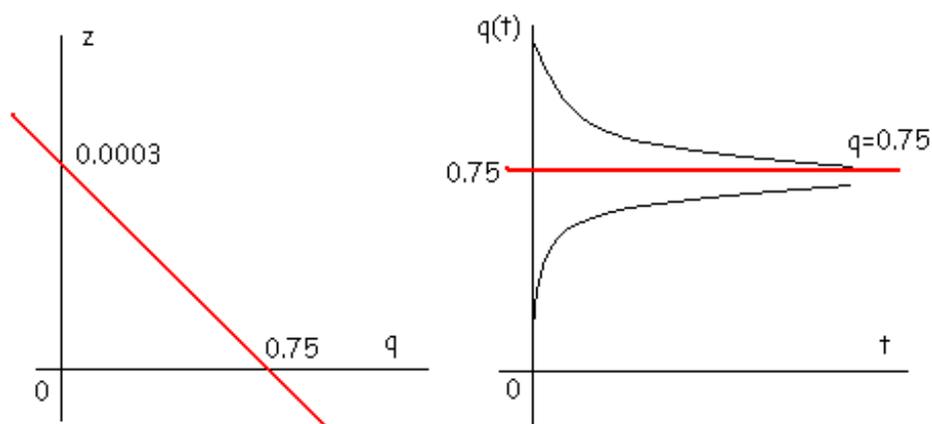


Figura 3.1. Estudio cualitativo del modelo.

En el estudio de cómo una población se adapta al medio ambiente a lo largo de un período grande, los genetistas suponen que algunos tipos hereditarios tienen ventaja sobre otros en cuanto a supervivencia y reproducción se refiere. Supongamos que la habilidad adaptativa de los híbridos Aa es ligeramente mayor que la de los individuos dominantes AA y recesivos aa .

En este caso, resulta que la razón de cambio de la frecuencia genética debida a esta presión selectiva es

$$q' = q(1 - q)(c - dq),$$

donde c y d son constantes positivas con $c < d$. Por otro lado, si la habilidad adaptativa de los individuos híbridos es ligeramente menor que la de los dominantes y la de los recesivos, se puede demostrar que

$$q' = kq(1 - q)(2q - 1),$$

donde k es una constante entre 0 y 1, llamada coeficiente de selección contra los híbridos.

Es posible considerar los efectos mezclados de la mutación y la selección natural. En efecto, supongamos que, además de las mutaciones de A en a y a en A tenemos también que la selección va contra los individuos recesivos. Entonces, la razón de cambio neta en la frecuencia genética podría ser

$$q' = \mu(1 - q) - \alpha q - kq^2(1 - q)$$

EJERCICIO 4

- 1 El crecimiento de una célula depende del flujo de nutrientes a través de su superficie. Si $y(t)$ representa al peso de la célula en el tiempo t , supongamos que (para un tiempo limitado) la tasa de crecimiento de la célula sea proporcional al área de su superficie. Es decir, proporcional a $y^{2/3}$. Plantear y resolver la ecuación diferencial que modeliza a esta situación, e interpretar el resultado obtenido.

2.4. Dinámica dependiente de la densidad

Los individuos de una misma especie tienen necesidades muy similares para sobrevivir, crear y reproducirse; pero la necesidad combinada de todos ellos por un recurso puede superar la oferta del mismo. Los individuos compiten entonces por dicho recurso y por lo menos algunos de ellos no lo consiguen.

DEFINICIÓN 2.4.1 *Competición es una interacción entre individuos, provocada por la necesidad común de un recurso limitado y conducente a la reducción de la supervivencia, el crecimiento y/o la reproducción de los individuos competidores.*

Ahora, podemos pasar a estudiar más a fondo la cuestión. Cuando la población es demasiado grande, el modelo elemental de crecimiento constante, no puede ser exacto, ya que no refleja el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible. Así que hay que agregar un término de competición a la ecuación diferencial lineal. Una elección adecuada del término competitivo es $-by(t)^2$, donde b es una constante, ya que el promedio estadístico del número de encuentros por unidad de tiempo es proporcional a $y(t)^2$. Consideremos entonces la ecuación modificada

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - by(t)^2 = y(t)(r - by(t)), \quad r, b > 0.$$

Esta ecuación se conoce como **ley logística** del crecimiento de una población y los números r y b se llaman **coeficientes vitales** de la población. La introdujo por primera vez el matemático y biólogo holandés *Verhust*, en 1837 cuando ajustó una curva logística a los datos de seis censos de Estados Unidos de 1790 a 1840 y predijo la población de Estados Unidos para 1940. Su predicción falló por menos de 1 millón de personas (alrededor de un 1%). Ahora bien, en general, la constante b es muy pequeña comparada con r de tal modo que si $y(t)$ no es demasiado grande, entonces el término $-by(t)^2$ es insignificante comparado con $ry(t)$, por lo que la población crece exponencialmente. Sin embargo, si $y(t)$ es grande entonces el término $-by(t)^2$ debe tomarse en cuenta ya que disminuye la tasa de crecimiento de la población. Es lógico pensar que cuanto más industrializado es un país, tanto más espacio disponible tiene, y cuanto más alimento posee, entonces es más pequeño el coeficiente b .

Consideremos la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de una población aislada. Si y_0 es la población en el tiempo t_0 , entonces $y(t)$, la población en el tiempo t , satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - by(t)^2, \quad y(t_0) = y_0$$

Para resolver esta ecuación diferencial la reescribimos como

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right), \quad K = \frac{r}{b},$$

que es una ecuación diferencial en variables separables

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)(1 - y(t)/K)} = \int r dt. \quad (2.12)$$

La primera de las integrales que aparece vale

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)(1 - y(t)/K)} = \int \frac{dy(t)}{y(t)} + \int \frac{1/K dy(t)}{1 - y(t)/K} = \ln |y(t)| - \ln |1 - y(t)/K|.$$

Sustituyendo en (2.12)

$$\ln \left| \frac{y(t)}{1 - y(t)/K} \right| = rt + C \quad \Rightarrow \quad \frac{Ky(t)}{K - y(t)} = e^{rt+C}.$$

Despejando el valor de $y(t)$ en la expresión anterior

$$y(t) = \frac{Ke^{rt+C}}{K + e^{rt+C}} = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}.$$

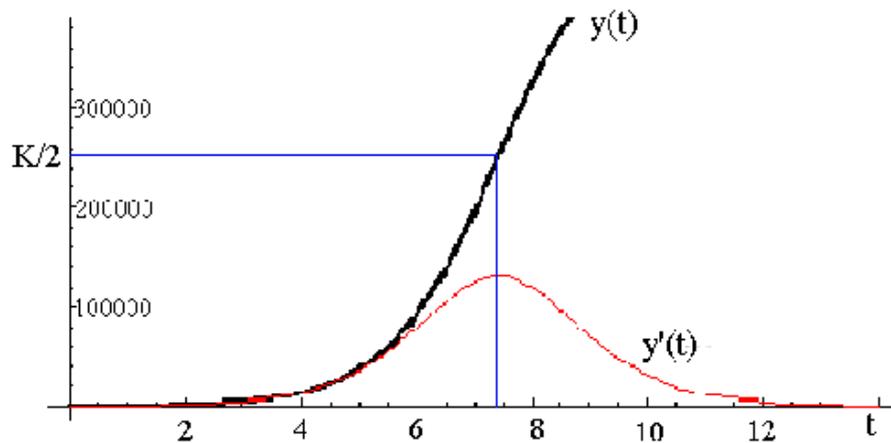


Figura 3.2. Representación gráfica de $y(t)$ y $y'(t)$.

Si examinamos este resultado para ver que tipo de poblaciones predice, podemos observar que si $t \rightarrow \infty$, entonces

$$y(t) \rightarrow K = \frac{r}{b}$$

Es decir, independientemente del valor inicial, la población siempre tiende al valor límite r/b . Además notemos que $y(t)$ es una función monótona creciente respecto del tiempo si $0 < y_0 < r/b$. Más aún, dado que

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = r \frac{dy(t)}{dt} - 2by(t) \frac{dy(t)}{dt} = (r - 2by(t))y(t)(r - by(t))$$

se ve que $dy(t)/dt$ es creciente si $y(t) < r/2b$, y $dy(t)/dt$ es decreciente si $y(t) > r/2b$. Por ello la gráfica de $y(t)$ debe tener la forma que aparece en la Figura 3.2.

Una curva así se llama **curva logística**. A partir de su forma podemos concluir que el tiempo antes de que la población alcance la mitad de su valor límite es un período de crecimiento acelerado. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero. Este es un período de crecimiento reducido.

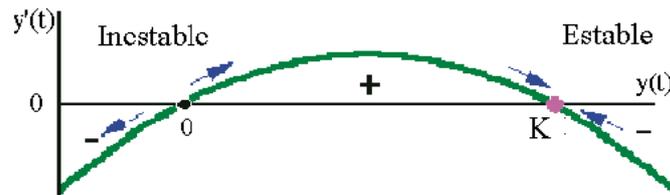


Figura 3.3. Línea fase.

La ecuación diferencial logística es autónoma y también podemos hacer su estudio cualitativo. Para ello estudiemos la función $g(y) = y(r - by)$. Sus ceros están en los puntos $y = 0$ e $y = r/b$. Para valores de $y < 0$ la función es negativa; para $0 < y < r/b$ es positiva y para $y > r/b$ la función es negativa. Por tanto, las soluciones con condición inicial entre 0 y r/b serán crecientes y tendrán asíntota horizontal en r/b . Una condición inicial por encima del valor r/b correspondería a una función decreciente con asíntota horizontal en r/b .

Resumiendo, el crecimiento de una población se describe generalmente por una ecuación logística donde la constante $K = r/b$ se llama **capacidad de carga** del medio ambiente.

Cuando la población inicial es cercana a cero, se produce un rápido crecimiento que va disminuyendo a medida que nos vamos acercando a K . La curva de la población tiene típica forma de S e $y(t)$ tiende asíntoticamente a la capacidad de carga. Si la población inicial es mayor que la capacidad de carga, la población decrece en tamaño, acercándose nuevamente asíntoticamente a la capacidad de carga.

EJEMPLO 2.7

- Supongamos que en un lago se introducen 100 peces. Después de tres meses sabemos que hay 250 peces. Un estudio ecológico predice que el lago puede mantener a 1000 peces. Vamos a encontrar una fórmula para el número $y(t)$ de peces en el lago, t meses después de la introducción de los 100 peces.

La capacidad de carga del lago viene dada por $K = 1000$. Por otro lado, para $t = 0$ hay 100 peces, en consecuencia si en la solución de la ecuación logística

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}} = \frac{1000}{1 + Ae^{-rt}},$$

tenemos en cuenta este hecho

$$y(0) = 100 = \frac{1000}{1 + A} \Rightarrow A = 9.$$

Finalmente, como $y(3) = 250$, se tiene que

$$y(3) = 250 = \frac{1000}{1 + 9e^{-3r}} \Rightarrow r = -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{75}{225} \right) \approx 0.37.$$

En consecuencia

$$y(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.37t}}.$$

Las predicciones con la ley logística se confirmaron en experimentos con el protozoo *Paramecium caudatum* llevados a cabo por el biólogo y matemático *G. F. Gause*. Se colocaron cinco ejemplares de *Paramecium* en un tubo de ensayo con 0.5 cm^3 de medio nutriente y se contó el número diario de individuos durante seis días. Se encontró que los *Paramecium* se reproducían con una tasa de 230.9% diario cuando la población era pequeña. El número de individuos aumentaba inicialmente con rapidez y posteriormente con más lentitud hasta alcanzar un nivel máximo de 375 hacia el cuarto día, saturando el tubo de ensayo. A partir de esta información se concluye que si el *Paramecium* crece de acuerdo con la ley logística $dy(t)/dt = r y(t) - b y(t)^2$, entonces $r = 2.309$ y $b = 2.309/375$. Por lo tanto, la ley logística predice que

$$y(t) = \frac{(2.309)5}{\frac{2.309^5}{375} + \left(2.309 - \frac{2.309^5}{375}\right) e^{-2.309t}} = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}}.$$

Para lograr modelos más precisos de crecimiento poblacional, deben considerarse las poblaciones como constituidas por grupos no homogéneos de individuos. Mas bien, hay que subdividir la población en diferentes grupos de edades. También se debe subdividir la población en hombres y mujeres, ya que la tasa de reproducción de ésta depende usualmente más del número de mujeres que del número de hombres.

2.4.1. Modelo epidemiológico I

La siguiente sección trata de la difusión de una enfermedad contagiosa. Empezaremos planteando varias hipótesis que simplifican el problema:

- La población es un número fijo P y cada miembro de la población es susceptible a la enfermedad.
- La duración de la enfermedad es larga, de manera que no se cura durante el período de estudio.
- Todos los individuos infectados son contagiosos y circulan libremente entre la población.
- Durante cada unidad de tiempo cada persona infectada tiene c contactos y cada contacto con una persona no infectada redonda en la transmisión de la enfermedad.

Una vez hechas las simplificaciones, consideremos un corto período de tiempo que va desde t hasta $t + h$. Cada persona infectada tiene ch contactos. ¿Cuántos de esos contactos son con personas no infectadas?. Si $f(t)$ es el número de personas infectadas al tiempo t ,

entonces $P - f(t)$ es el número de personas que no están infectadas, y $(P - f(t))/P$ es la fracción de la población que no está infectada. Entonces, de los ch contactos hechos por una persona infectada,

$$\left(\frac{P - f(t)}{P}\right) ch,$$

habrán sido con personas no infectadas. El número total de nuevas infecciones deberá ser

$$f(t + h) - f(t) = f(t) \left(\frac{P - f(t)}{P}\right) ch$$

dividiendo por h , y haciendo que h tienda a cero obtenemos

$$f'(t) = \frac{c}{P} f(t)(P - f(t)).$$

Luego, la función f verifica la ecuación diferencial que da lugar a la ecuación logística, y por tanto

$$f(t) = \frac{P}{1 + Be^{-ct}}, \quad (2.13)$$

donde c y B se pueden determinar de las características de la epidemia.

EJEMPLO 2.8

- Los servicios de salud pública registran la difusión de una epidemia de gripe de duración particularmente larga en una ciudad de 500.000 personas. Al inicio de la primera semana de registro se habían contabilizado 200 casos; durante la primera semana aparecieron 300 nuevos casos. Nos proponemos estimar el número de individuos infectados después de 6 semanas.

Sabemos que el valor de P que aparece en (2.13) es la capacidad de carga del sistema, en nuestro caso el número de individuos que a largo plazo se infectarán, $P = 500000$. Por otro lado, si $t = 0$, entonces $f(0) = 200$, sustituimos en (2.13) y deducimos que $B = 2449$. Cómo el número de infectados al final de la primera semana es de 500, podemos escribir

$$500 = \frac{500000}{1 + 2449e^{-c}} \quad \Rightarrow \quad c = -\ln\left(\frac{1998}{4998}\right) \approx 0.916891.$$

En consecuencia:

$$f(t) = \frac{500000}{1 + 2449e^{-0.916891t}}.$$

Finalmente, el número de personas infectadas al final de la sexta semana será $f(6) \approx 45475$.

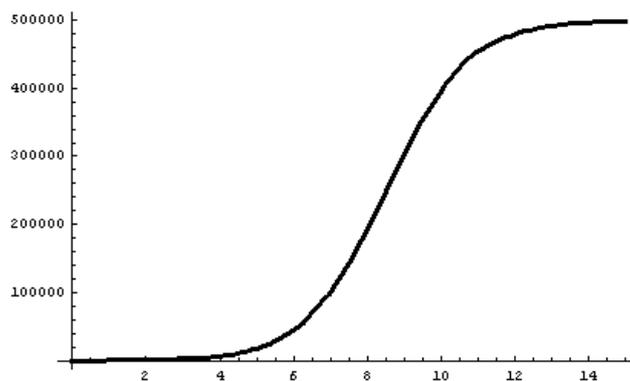


Figura 3.4. Representación gráfica de $f(t) = \frac{500000}{1+2449e^{-0.91689t}}$.

EJEMPLO 2.9

- La propagación de una enfermedad infecciosa en una población de individuos susceptibles de ser contagiados se modeliza por la ecuación diferencial

$$y'(t) = \alpha y(t)(N + 1 - y(t))$$

donde $y(t)$ representa al número de personas enfermas en el tiempo t , N el tamaño de la población y $\alpha > 0$ la tasa específica de infección. Suponiendo que se introduce un individuo enfermo, ¿cómo evoluciona la enfermedad?

Se trata del modelo logístico $y'(t) = \alpha y(t)(K - y(t))$ con una capacidad de carga $K = N + 1$, cuya solución es

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-K\alpha t}} = \frac{N + 1}{1 + Ae^{-(N+1)\alpha t}}$$

como $y(0) = 1$, entonces

$$1 = \frac{N + 1}{1 + A} \Rightarrow N = A.$$

El número de personas infectadas en el tiempo t es,

$$y(t) = \frac{N + 1}{1 + Ne^{-(N+1)\alpha t}}$$

Este modelo epidémico se utiliza en otros contextos. Por ejemplo, para estudiar la forma en que nuevos avances tecnológicos se aplican en Medicina, o nuevas semillas en la agricultura, o el uso de nuevos insecticidas. Una “persona infectada” representa al individuo que conoce el producto. Sin embargo, la transmisión de la información puede verse alterada si entran en juego los medios de comunicación y publicidad.

2.5. Modelos logístico modificado

2.5.1. Caso I

Existen poblaciones tales que si el número de individuos es elevado, entonces la tasa de crecimiento decrece, además si la población es demasiado pequeña esta tasa también decrece (por ejemplo, por la dificultad de los adultos en encontrar pareja).

Sean $y(t)$ la población en el tiempo t , M la capacidad de carga del hábitat, y N la constante necesaria para introducir el factor de escasez. Necesitamos un modelo $y'(t) = g(y)$ que tenga en cuenta los comentarios anteriores. La gráfica de $g(y)$ debería ser del tipo representada en la Figura 3.5.

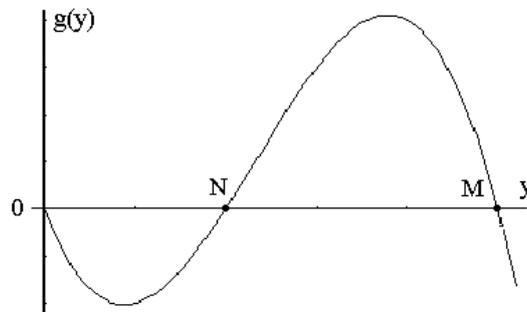


Figura 3.5. Gráfica de $g(y)$.

Observemos que $g(y)$ es negativa si $y > M$, ya que la población decrece cuando aumenta la tasa de crecimiento. También $g(y)$ es negativa cuando $y < N$, porque la población decrece cuando no hay incremento. Por el contrario, $g(y)$ es positiva en $N < y < M$ y $g(0) = 0$.

Debemos modificar el modelo logístico

$$y'(t) = ay(t) \left(1 - \frac{y(t)}{M} \right),$$

multiplicando el segundo término por la expresión $y(t)/N - 1$. En consecuencia, ahora nuestro modelo es

$$y'(t) = ay(t) \left(1 - \frac{y(t)}{M} \right) \left(\frac{y(t)}{N} - 1 \right).$$

Podemos resolver de forma exacta esta ecuación diferencial ya que es de variables separables. No obstante, en lo que realmente estamos interesados es en saber cómo se comportan las soluciones, y para ello el método más conveniente de análisis es el cualitativo.

Es evidente que tenemos tres puntos de equilibrio $y = 0$, N y M , siendo el 0 y el M sumideros y N una fuente.

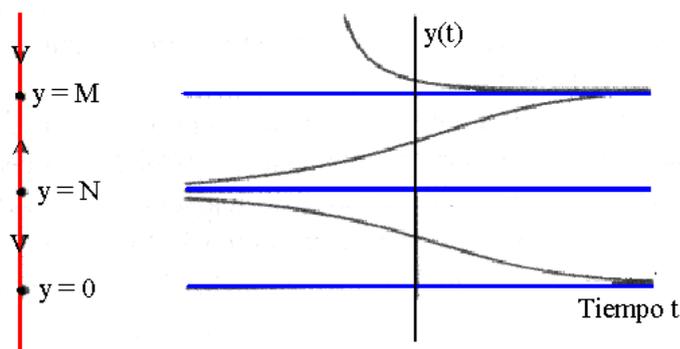


Figura 3.6. Análisis cualitativo del modelo.

La Figura 3.6 muestra la línea fase y las gráficas de soluciones típicas.

2.5.2. Caso II

Hemos comentado al inicio de la sección que el modelo logístico

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right), \quad (2.14)$$

tiene a K como capacidad de carga del hábitat. Es decir, todas las soluciones tienden al valor K cuando t aumenta. Es frecuente que este valor de K se modifique a medida que lo hacen las condiciones ambientales, por ejemplo en función de las precipitaciones. Podemos incluir este efecto oscilatorio, modificando el modelo (2.14)

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{b + c \operatorname{sen} wt} \right),$$

donde b y w son constantes positivas con $b > c$.

Observemos que esta nueva ecuación diferencial no es autónoma y es muy difícil de resolver. Sólo podemos abortar la resolución de este problema a través de técnicas numéricas o bien utilizando un programa de simulación. Hemos simulado el modelo (2.15) obteniéndose el resultado que aparece en la Figura 3.7

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{7 + \operatorname{sen} wt} \right). \quad (2.15)$$

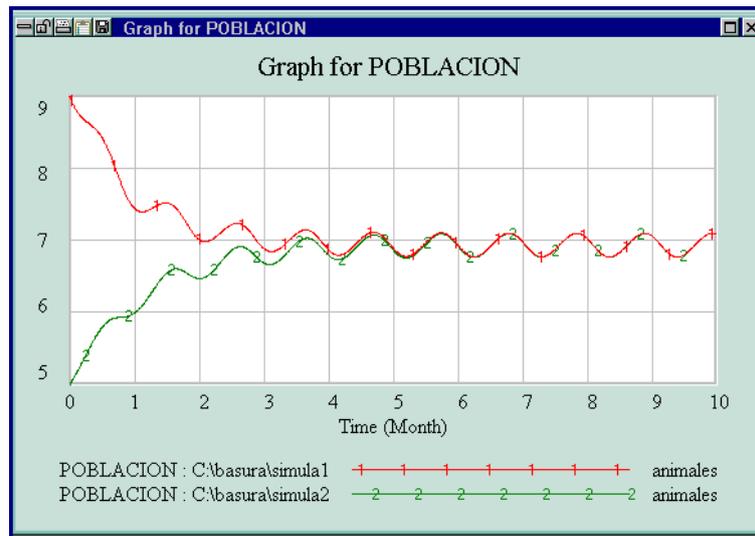


Figura 3.7. Simulación de (2.15) con Vensim®.

Lo que debemos destacar es que una vez que una curva solución entra en la región $6 < y(t) < 8$, entonces queda atrapada ahí y empieza a oscilar.

2.6. Otros modelos basados en E.D.O.

2.6.1. Modelo de disolución

El problema que ahora abordamos es el análisis de la evolución de una mezcla en un compartimiento (un fluido en el interior de un recipiente, un gas en el interior de una habitación,...) Se supone que en un determinado instante hay y_0 gramos de una sustancia disuelta en un recipiente que tiene una capacidad de V litros y que a partir de ese instante se introduce en el recipiente un fluido que contiene una concentración de c_e gramos por litro con una velocidad de entrada de éste de v_e litros por minuto. Se supone que la mezcla se hace uniforme y sale a v_s litros por minuto. El problema que nos planteamos es determinar la cantidad en gramos de la sustancia que hay en el recipiente en cada instante t .

Si $y(t)$ denota a la cantidad de sustancia en el minuto t , entonces el ritmo con el que ésta cambia viene dada por la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y'(t) = v_e c_e - \frac{v_s}{V + (v_e - v_s)} y(t)$$

EJEMPLO 2.10

- Un depósito de 300 litros de capacidad contiene 50 litros de agua pura. En el instante $t = 0$ comienza a entrar una solución que contiene 100 cm^3 de alcohol por cada litro de solución a una velocidad de 5 litros por minuto. Este suministro se detiene al

llenarse el depósito. Después de media hora se introduce en el tanque una segunda solución de agua con alcohol, con una concentración de un 20% de alcohol por cada litro de agua, a una velocidad de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo, al introducir la segunda solución se abre una llave del fondo del depósito, y la solución perfectamente mezclada, sale del tanque a una velocidad de 6 litros por minuto. Determinar el porcentaje de alcohol en el depósito cuando se llene completamente.

Dividiremos el ejercicio en dos partes:

- **Durante la primera hora** ($0 \leq t \leq 30$). Consideraremos $y(t)$ como la cantidad de alcohol en el depósito en el minuto t . En esta situación, $y'(t) = 0.5$ litros de alcohol/minuto. Es decir, $y(t) = 0.5t + C$ litros de alcohol. Como inicialmente el tanque sólo contenía agua pura $y(0) = 0$, lo que obliga a que $C = 0$. Por tanto, $y(t) = 0.5t$, y la cantidad de litros de alcohol en el depósito en el minuto 30 es de $y(30) = 0.5 * 30 = 15$.
- **Después de la primera hora** ($t > 30$). Sea $u(t)$ la cantidad de alcohol en el depósito en el minuto t . La cantidad de solución en el tanque es de 200 litros y la nueva situación se modeliza a través del siguiente problema de valores iniciales,

$$u'(t) = (5 * 0.1 + 5 * 0.2) - \frac{6}{200 + 4t}u(t); \quad u(0) = 15$$

siendo la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$u'(t) + \frac{3}{100 + 2t}u(t) = 1.5$$

cuyo factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{100 + 2t} dt} = (100 + 2t)^{\frac{3}{2}}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$u'(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} + 3(100 + 2t)^{\frac{1}{2}}u = 1.5(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}$$

o bien

$$\left(u(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}\right)' = 1.5(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow u(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} = 1.5 \int (100 + 2t)^{\frac{3}{2}} dt$$

es decir

$$u(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} = 1.5 \int (100 + 2t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1.5}{2} \frac{2}{5} (100 + 2t)^{\frac{5}{2}} + C = 0.3(100 + 2t)^{\frac{5}{2}} + C$$

despejando,

$$u(t) = 0.3(100 + 2t) + \frac{C}{(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Para calcular el valor de C tendremos en cuenta que $u(0) = 15$,

$$15 = 0.3(100) + \frac{C}{(100)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow C = -15000$$

Por último,

$$u(t) = 0.3(100 + 2t) - \frac{15000}{(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Como al depósito le faltan 100 litros por llenarse completamente y cada minuto el nivel sube $5 + 5 - 6 = 4$ litros, tardará 25 minutos en hacerlo. La solución al ejercicio será

$$u(25) = 0.3(100 + 2 * 25) - \frac{15000}{(100 + 2 * 25)^{\frac{3}{2}}} = 36.835 \quad \text{litros de alcohol}$$

EJEMPLO 2.11

- Un contenedor de 300 litros se encuentra lleno en sus dos terceras partes de capacidad y contiene 50 kilos de sal. En el tiempo $t = 0$ minutos, se abren las válvulas de manera que se agrega una solución salina con una concentración de un tercio de kilo por litro al contenedor a una velocidad de 3 litros por minuto. Si la mezcla bien agitada se extrae del contenedor a la velocidad de 2 litros por minuto, ¿cuántos kilos de sal se encuentran en el contenedor cuando éste se llena?

Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el contenedor en el minuto t . La razón de cambio en cada minuto $y'(t)$, será igual a la cantidad de sal que entra en el contenedor, menos la cantidad de sal que sale en el mismo minuto. La velocidad con la que la sal entra en el minuto t será

$$1/3 \text{ Kg/litro} \times 3 \text{ litro/minuto} = 1 \text{ Kg/minuto} .$$

Al mismo tiempo la velocidad con que sale la calculamos de la siguiente manera. Sabemos que para el minuto t , $y(t)$ será la sal existente en $200 + t$ litros de agua. Por tanto, en 2 litros tendremos $2y(t)/(t + 200)$ kilos de sal. En consecuencia:

$$y'(t) = 1 - \frac{2}{t + 200}y(t), \quad y(0) = 50 .$$

Estamos ante una ecuación diferencial lineal,

$$y'(t) + \frac{2}{t + 200}y(t) = 1 ,$$

que tiene por factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t + 200} dt} = e^{2 \ln(t+200)} = (t + 200)^2 .$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$,

$$y'(t)(t + 200)^2 + 2(t + 200)y(t) = (t + 200)^2 \quad \Rightarrow \quad ((t + 200)^2 y)' = (t + 200)^2 .$$

Integrando

$$(t + 200)^2 y = \frac{(t + 200)^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{t + 200}{3} + \frac{C}{(t + 200)^2} .$$

De todas estas soluciones, en la única que estamos interesados es en aquella que cumple la condición inicial $y(0) = 50$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$50 = \frac{200}{3} + \frac{C}{200^2} \Rightarrow C = \frac{-50}{3}200^2.$$

La solución pedida es

$$y(t) = \frac{t + 200}{3} - \frac{50(200)^2}{3(t + 200)^2}.$$

Por último, para conocer la cantidad de sal existente en el contenedor cuando éste se ha llenado es necesario saber el tiempo transcurrido. Como cada minuto aumenta en un litro la cantidad de agua e inicialmente teníamos 200 litros serán necesarios 100 minutos para llenar el contenedor. En este caso

$$y(100) \approx 92 \text{ kilos de sal.}$$

2.6.2. Modelo para gestionar la pesca en un lago

Supongamos un lago donde no existen depredadores y con alimento suficiente para que los peces no luchen por la comida. Los peces se capturan a intervalos periódicos descritos por la función

$$h(t) = a + b \operatorname{sen} 2\pi t,$$

con a y b constantes, $a > b$ y t el tiempo. Si suponemos que los peces crecen con un ritmo proporcional a su población, entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - (a + b \operatorname{sen} 2\pi t),$$

modela a la situación planteada. Donde $y(t)$ es el número de peces en el tiempo t y r la tasa neta de crecimiento. Estamos ante una ecuación diferencial lineal que tiene como factor integrante

$$\mu(t) = e^{-\int r dt} = e^{-rt}.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$ y simplificando

$$(e^{-rt}y(t))' = -e^{-rt}(a + b \operatorname{sen} 2\pi t).$$

Tenemos que resolver la integral

$$-\int e^{-rt}(a + b \operatorname{sen} 2\pi t) dt = \frac{a}{r} \int -re^{-rt} dt - b \int e^{-rt} \operatorname{sen} 2\pi t dt. \quad (2.16)$$

La segunda de ellas se resuelve aplicando de forma reiterada la integración por partes. Se obtiene

$$\int e^{-rt} \operatorname{sen} 2\pi t dt = -\frac{2\pi e^{-rt}}{4\pi^2 + r^2} \left(\cos 2\pi t + \frac{r}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t \right). \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.16)

$$e^{-rt} \left(\frac{a}{r} + \frac{b2\pi}{4\pi^2 + r^2} (\cos 2\pi t + \frac{r}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t) \right) =$$

$$e^{-rt} \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{4\pi^2 + r^2} (2\pi \cos 2\pi t + r \operatorname{sen} 2\pi t) \right)$$

Finalmente

$$y(t) = \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{4\pi^2 + r^2} (2\pi \cos 2\pi t + r \operatorname{sen} 2\pi t) \right) + Ce^{rt}.$$

2.6.3. La edad del hielo

Durante los últimos millones de años se producen de forma cíclica etapas de enfriamiento severo del planeta con un período de 100000 años. Estos episodios consisten en un largo intervalo de tiempo de clima muy frío debido a que enormes trozos de hielo que se forman en el hemisferio norte se desplazan hasta el sur. Los modelos matemáticos más elementales basados en E.D.O fueron propuesto por *Budyko* (1969) y *Sellers* (1969), y se modificaron en 1981 por *North, Calahan y Coakley*. Los modelos se basan en la idea de que la reflexión de los rayos del sol aumenta cuando se presentan los trozos de hielo. Este proceso reduce la temperatura de la tierra dando lugar a una retroalimentación que provoca un aumento del número de los trozos de hielo. En 1987 *Ghil y Childress* propusieron el siguiente modelo

$$c \frac{dT}{dt} = Q(1 - \alpha(t)) - \mu g(T)T^4 \quad (2.18)$$

siendo c una constante específica del calor de la atmósfera de la tierra.

El término $R_i = Q(1 - \alpha(t))$ corresponde a la radiación absorbida con Q que representa a la radiación solar y $\alpha(T)$ el efecto de la reflexión cuyo valor es

$$\alpha(T) = \begin{cases} \alpha_l & \text{si } T \leq T_l \\ \alpha_u & \text{si } T \geq T_u \end{cases}$$

con T_l cuando la tierra está totalmente helada, T_u cuando está libre de bloques de hielo, y α decreciente linealmente para valores de T comprendidos entre estos dos valores.

El segundo término $R_e = \mu g(T)T^4$ se corresponde con la cantidad de radiación emitida, siendo μT^4 la radiación del cuerpo negro y

$$g(T) = 1 - m \tanh \left(\frac{T}{T_0} \right)^6; \quad m = 0.5; \quad T_0 = 284K$$

Los puntos de equilibrio del modelo se encuentran resolviendo la ecuación $T'(t) = 0$, o bien la intersección de las funciones R_i y R_e , dando lugar a uno o varios puntos de equilibrios, algunos de ellos estables y otros inestables. El clima actual se corresponde con el punto de equilibrio más grande y la edad de hielo al punto de equilibrio más pequeño.

2.7. Teoría de catástrofes

Esta teoría nació entre los años 1970 y 1980, fruto de las investigaciones de *Rene Thom*, y está íntimamente relacionada con la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Una catástrofe la entenderemos como la pérdida de estabilidad de un sistema dinámico.

Consideremos un modelo concreto, por ejemplo

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t)) = \gamma Ay(t) - \phi y(t)^2 - \frac{\alpha y(t)^2}{1 + \beta y(t)^2}, \quad (2.19)$$

que representa la dinámica de una población de mariposas. Observamos que los dos primeros términos corresponden a un modelo logístico, mientras el último es un factor correspondiente al modelo² del disco de *Holling*.

Los puntos de equilibrio podemos encontrarlos resolviendo la ecuación $y'(t) = 0$. La Figura 3.8 (izquierda), muestra la representación gráfica de $g(y)$ variando el valor de $A = 30, 40, 45, 50, 55, 85$ con $\gamma = 0.0111$, $\phi = 0.009$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$.

La Figura 3.8 representa al dibujo fase de la ecuación diferencial autónoma (2.19), para diferentes valores del parámetro A (que corresponde a la edad), mientras que la Figura 3.9 muestra sus puntos de equilibrio correspondientes. Observemos cómo existe un único punto de equilibrio para valores de $A < 38$ o $A > 74$. En cambio, si $40 < A < 74$ existen dos puntos de equilibrio estable separados por uno inestable.

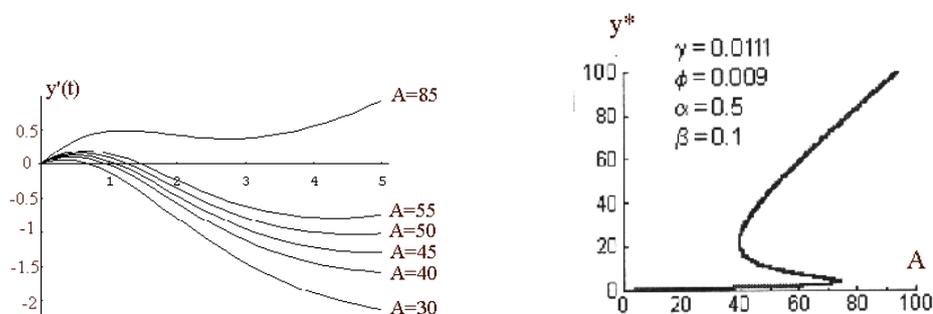


Figura 3.8. Izquierda: Líneas fases. Derecha: Evolución de los puntos de equilibrio.

Por último, comentar que este análisis es un complemento del diagrama de bifurcación que estudiaremos en los modelos discretos.

EJERCICIO 5

- 1 Una población de un determinado animal vive en una isla que puede soportar hasta un total de 100000 ejemplares. Por otra parte, si el número de individuos desciende por debajo de una cierta cantidad “ m ”, la población tendería a extinguirse. Si $y(t)$ representa a la cantidad de individuos

²Describe la mortalidad causada por los depredadores.

en el tiempo t , entonces la situación anterior puede modelizarse por la ecuación diferencial,

$$y'(t) = k(100000 - y)(y - m); \quad 0 < m < 100000$$

- Obtener de forma explícita $y(t)$ que verifica la ecuación diferencial anterior cuando $m = 5000$, y $k = 10^{-5}$.
 - Demostrar que, si en algún momento t , la población $y(t) < m$, entonces se extingue en un tiempo finito.
- 2 Con frecuencia la secreción de hormonas en la sangre es una actividad periódica. Si una hormona se segrega en un ciclo de 24 horas, entonces la razón de cambio del nivel de hormona en la sangre se puede modelar por el problema de valor inicial:

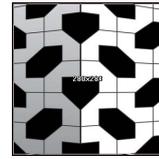
$$y'(t) = a - b \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kt, \quad y(0) = y_0$$

donde $y(t)$ es la cantidad de hormona en la sangre en el instante t , a es la razón promedio de secreción, b es la cantidad de variación diaria en la secreción, k es una constante positiva que representa la razón con la que el cuerpo elimina la hormona de la sangre y y_0 a cantidad de hormona en la sangre en el instante inicial. Hallar la cantidad de hormona en la sangre en cada instante si $a = b = 1$, $k = 2$ e inicialmente no había hormona en la sangre.

- 3 Cierta mañana comenzó a nevar muy fuerte y continuó nevando constantemente durante todo el día. Una máquina quitanieve comenzó a las 9 horas a despejar la carretera. A las 11 horas había limpiado 2 km y a las 13 horas 1 km más. ¿A qué hora comenzó a nevar?
- 4 La velocidad de combinación de una sustancia con otra se supone que es proporcional a la cantidad remanente de la primera de ellas. Si inicialmente hay 15 Kg de esta última y 5 Kg cuando han pasado 8 min., hallar cuánta sustancia habrá cuando transcurrió 5 min. y el tiempo que transcurre cuando queda 1 Kg. de sustancia.
- 5 Acabada la cosecha de trigo en cierta localidad, un propietario llena su granero con una cantidad g_0 kg. de trigo. Alrededor del granero vive una especie de roedores que se alimentará del trigo recién almacenado. Un estudio realizado sobre la cantidad de roedores $r(t)$ muestra que crecen con una velocidad $r'(t)$ constante igual a 2, siendo r_0 el número inicial de roedores. Igualmente se ha concluido que, a causa de la presencia de los roedores, el ritmo de decrecimiento de la cantidad de trigo $g(t)$ es proporcional (con constante de proporcionalidad igual a -1) al producto entre la cantidad de roedores y la cantidad de trigo. Se pide:
- Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de roedores en cada instante t .

- Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de trigo en cada instante t .
 - Si $r_0 = 2$; ¿cuánto tiempo tardarán los roedores en consumir la cuarta parte de la cantidad de trigo inicial? ,¿cuánto tardarán en comerse todo el trigo?
-





Tema 3

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE E.D.O

3.1. Preliminares

Cuando intentamos modelizar la dinámica de dos poblaciones que interactúan en un mismo hábitat, nos encontramos con un sistema de ecuaciones diferenciales. Son muchas las situaciones que pueden ser modelizadas a través de un sistema de E.D.O como el siguiente ejercicio donde se encuentran involucrados dos depósitos conectados entre sí.

EJEMPLO 3.1

- Supongamos los tanques de la Figura 4.1. El tanque A contiene 50 litros de agua en el que se ha disuelto 25 kilos de sal, y el tanque B con 50 litros de agua pura.

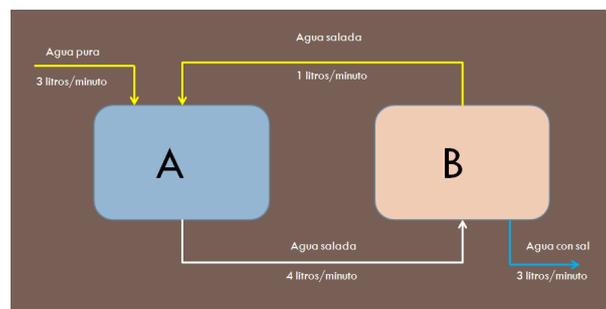


Figura 4.1.

Un líquido se bombea hacia dentro y fuera de los tanques como se indica en la Figura 4.1. Supongamos que el líquido que se intercambia entre los dos tanques y el líquido bombeado hacia fuera del tanque B se encuentra perfectamente mezclado.

Sean $x(t)$, $y(t)$ las cantidades de sal en el tanque A y B, respectivamente, en el minuto t . Realizando un estudio parecido a los modelos de disolución estudiados, sabemos que $x'(t)$ se escribe como la entrada de sal en el tanque A en el minuto t , menos la salida de sal en el tanque A en el minuto t . Es decir,

$$\begin{cases} x'(t) = (3\text{ l/min}) * (0\text{ Kg/l}) + (1\text{ l/min}) * \left(\frac{y(t)}{50}\text{ Kg/l}\right) - (4\text{ l/min}) * \left(\frac{x(t)}{50}\text{ Kg/l}\right) \\ y'(t) = (4\text{ l/min}) * \left(\frac{x(t)}{50}\text{ Kg/l}\right) - (3\text{ l/min}) * \left(\frac{y(t)}{50}\text{ Kg/l}\right) - (1\text{ l/min}) * \left(\frac{y(t)}{50}\text{ Kg/l}\right) \end{cases}$$

simplicando, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{25}x(t) + \frac{1}{50}y(t) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2}{25}x(t) - \frac{2}{25}y(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

que en unión con las condiciones iniciales $x(0) = 25$, $y(0) = 0$ modeliza a la situación planteada.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es aquel que puede expresarse como

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3.2)$$

siendo f_1, f_2, \dots, f_n , funciones reales definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Una función $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, cuyas componentes están definidas y son derivables en un intervalo, es una solución de (3.2) en dicho intervalo, cuando lo verifica idénticamente en él.

El primer problema que se nos plantea es saber si existe solución y en caso afirmativo ver si ésta es única. Puesto que gran parte de los modelos que utilizaremos serán de dinámica de poblaciones en los que están implicadas dos especies, los sistemas que nos aparecerán serán de dos ecuaciones. Por esta razón simplificaremos (3.2) convenientemente en los próximos teoremas.

TEOREMA 3.1.1 *Sea el siguiente problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(t, x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Si las funciones f y g son continuas en un abierto que contenga al punto (t_0, x_0, y_0) , entonces existe al menos una solución definida en un intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

TEOREMA 3.1.2 *Además, si existen las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial g(t, x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial g(t, x, y)}{\partial y},$$

y son continuas, entonces la solución del problema de valores iniciales (3.3) es única.

3.2. Diagonalización de matrices cuadradas

Para la resolución de sistemas del tipo (3.1), es necesario calcular los valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Por tal motivo en esta sección recordaremos los conceptos más importantes relativos a la diagonalización de matrices cuadradas.

3.2.1. Introducción

De todas las aplicaciones lineales tienen un interés especial aquellas que van del espacio vectorial \mathbb{R}^n en si mismo, que reciben el nombre de endomorfismos. En ocasiones, es conveniente poder caracterizar un endomorfismo por una matriz lo más sencilla posible, con lo cual se simplifican todos los cálculos. Es normal que al representar matricialmente el endomorfismo, se elijan las mismas bases en los espacios de salida y entrada. De esta forma, si se realiza algún cambio de base en uno de los espacios, inmediatamente se produce el mismo cambio en el otro. Lo verdaderamente interesante en el estudio de un endomorfismo, es la matriz que lo representa y al utilizar las mismas bases de referencia, lo mismo da tomar la matriz A o bien la $C^{-1}AC$. Esto nos lleva a considerar que las matrices A y $C^{-1}AC$ son **semejantes** y que $C^{-1}AC$ se alcanza a partir de A por transformaciones de A .

Entre las matrices más cómodas para el cálculo y simples para su interpretación, están las matrices **diagonales**. Toda matriz cuadrada A puede considerarse como la matriz que representa a un endomorfismo, referida a la base canónica, tanto en el espacio de salida como en el de entrada. En virtud de las ventajas de utilizar matrices diagonales, podemos preguntarnos:

- ¿Existe alguna matriz diagonal B semejante a la matriz A ?
- En caso afirmativo, ¿qué base es la que tenemos que elegir en el espacio vectorial para que el endomorfismo esté representado por la matriz B ?

Esta cuestión es también conocida como el **problema de la diagonalización**. Una aplicación inmediata será la de desarrollar métodos que nos permitan transformar un sistema de ecuaciones lineales complicado en otro más sencillo de resolver, y esto se hace eligiendo entre las matrices semejantes que representen el sistema, la que sea más sencilla, que evidentemente, si existe, será la que tenga forma de matriz diagonal. Estas técnicas son empleadas con frecuencia en múltiples campos de la matemática, como son entre otros: el análisis y descomposición de modelos biológicos lineales, análisis de datos multivariantes, análisis estructural, el análisis de la productividad de una matriz *input-output* de *Leontief*, la programación lineal, el análisis de las formas cuadráticas o el análisis de la estabilidad de los sistemas dinámicos.

3.2.2. Matrices semejantes

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo cuyas ecuaciones respecto de una cierta base B vienen dadas por la expresión $Y = AX$, donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Si cambiamos la base B por otra base B' , las ecuaciones de f respecto a B' serán:

$$Y' = C^{-1}ACX' = A'X',$$

donde C es la matriz del cambio de base de B' a B . Por otro lado, puede comprobarse que todas las matrices del tipo $A' = C^{-1}AC$ son matrices asociadas al mismo endomorfismo f (respecto de distintas bases). En este caso, diremos que las matrices A y A' son semejantes.

Nos proponemos averiguar, si entre todas las matrices asociadas a un mismo endomorfismo mediante la correspondencia $C^{-1}AC$, existe alguna que sea diagonal. En este caso, tomando a esta matriz diagonal como la asociada al endomorfismo, sus ecuaciones se simplifican.

DEFINICIÓN 3.2.1 (Polinomio característico) Llamaremos *polinomio característico* de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ al siguiente polinomio de grado n en λ

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Las raíces reales del polinomio característico serán los *autovalores* o *valores propios* de la matriz A . Llamaremos *orden de multiplicidad* de un autovalor λ a la multiplicidad de la raíz λ del polinomio característico. Algunas de sus propiedades más importantes de las matrices semejantes son las siguientes:

- (a) Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico (y, por tanto, los mismos autovalores).
- (b) Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante.
- (c) Si dos matrices A y B son semejantes, entonces también lo son sus potencias A^n y B^n .

3.2.3. Diagonalización de matrices cuadradas.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo cuya matriz asociada es $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ respecto de una cierta base B de \mathbb{R}^n . Supongamos que f sea diagonalizable, es decir, que existe otra base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de \mathbb{R}^n tal que la matriz asociada a f respecto de B' es una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

que será, por tanto semejante a A . Entonces, como sabemos, los elementos de la i -ésima columna de D , $(0, \dots, \lambda_i, \dots, 0)^T$, serán las coordenadas de $f(\vec{v}_i)$ en la base B' , con $i = 1, 2, \dots, n$. Escribiendo en forma vectorial dichas identidades, obtendremos que

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

DEFINICIÓN 3.2.2 *Llamaremos autovalor o valor propio de f a todo escalar λ tal que existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, no nulo, cumpliéndose:*

$$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

A todo vector \vec{v} que verifique la condición anterior le llamaremos autovector o vector propio de f asociado al autovalor λ .

Hemos visto que si f es diagonalizable, entonces existe una base del espacio vectorial formada por los autovectores de f . Por otro lado, si una base $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ está formada por autovectores de f , entonces existen n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que $f(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1, f(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2, \dots, f(\vec{v}_n) = \lambda_n \vec{v}_n$, y, por tanto, la matriz asociada a f respecto a esa base será la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Resumiendo, el problema de diagonalizar un endomorfismo f (también conocido como el problema de diagonalizar su matriz asociada A), es equivalente al problema de encontrar una base del espacio vectorial formada por los autovectores de f .

Veamos a continuación en qué casos existe dicha base y cómo se calcula.

Escribiendo en forma matricial la ecuación

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

o su equivalente

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_i I) \vec{v}_i = 0.$$

Por el teorema de *Rouché - Fröbenius*, el sistema anterior tendrá solución no nula si y solamente si $|A - \lambda_i I| = 0$, es decir, si $P_A(\lambda_i) = 0$. Por tanto, los autovalores de f resultan ser los autovalores de su matriz asociada A . En consecuencia, la matriz diagonal buscada, si existe, será la matriz formada por los autovalores de A .

Una vez obtenidos los autovalores a partir del polinomio característico de A , los sustituiremos en la ecuación matricial $(A - \lambda_i I)X = 0$; desarrollando esta última ecuación obtendremos un sistema lineal homogéneo que nos proporciona las ecuaciones de un subespacio vectorial, al que llamaremos subespacio propio asociado al autovalor λ_i . Obviamente, los vectores de este subespacio son los autovectores de f asociados al autovalor λ_i . Observemos que la dimensión de todo subespacio propio será, como mínimo, igual a uno.

LEMA 3.2.3 *Autovectores asociados a autovalores distintos dos a dos son linealmente independientes*

Demostración. Supongamos dos autovalores diferentes $\lambda_i \neq \lambda_j$ y sean \vec{v}_i y \vec{v}_j sus autovectores asociados. Es decir

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i, \quad f(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j.$$

Si estos dos vectores no son linealmente independientes, entonces $\vec{v}_i = k\vec{v}_j$, lo que implica que

$$f(\vec{v}_i) = f(k\vec{v}_j) \Rightarrow \lambda_i \vec{v}_i = k\lambda_j \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_i.$$

Pero al ser vectores no nulos, esta última igualdad implicaría que $\lambda_i = \lambda_j$, en contra de lo supuesto. ■

Como consecuencia del lema, vectores no nulos pertenecientes a distintos subespacios propios son linealmente independientes.

LEMA 3.2.4 *La dimensión del subespacio propio asociado a un cierto valor propio es como mucho igual al orden de multiplicidad del autovalor.*

Llamando α_i a la multiplicidad del autovalor λ_i y S_i al subespacio propio asociado con λ_i , tendremos que

$$1 \leq \dim(S_i) \leq \alpha_i.$$

Recordemos que la condición necesaria y suficiente obtenida para la existencia de una matriz diagonal semejante a A era poder encontrar una base del espacio vectorial formada enteramente por autovectores de f . Ahora bien, de los lemas anteriores se deduce que tal condición es equivalente a que la unión de bases de los subespacios propios sea base de todo el espacio vectorial \mathbb{R}^n , para lo cual es necesario y suficiente que la suma de las dimensiones de los subespacios propios sea n . Pero por el segundo lema, y puesto que suponemos que todas las raíces del polinomio característico de A son reales, esto equivale a que la multiplicidad de todo autovalor sea igual a la dimensión de su subespacio propio asociado.

TEOREMA 3.2.5 *El endomorfismo f es diagonalizable si y solo si para todo autovalor λ_i de f se tiene que $\alpha_i = \dim(S_i)$.*

Para llegar a un resultado más práctico, aplicamos la fórmula de las dimensiones al endomorfismo $(f - \lambda_i I)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} n &= \dim(\mathbb{R}^n) \\ &= \dim(\text{Kern}(f - \lambda_i I)) + \dim(\text{Img}(f - \lambda_i I)) \\ &= \dim(S_i) + \text{Rango}(A - \lambda_i I) \end{aligned}$$

luego

$$\text{Rango}(A - \lambda_i I) = n - \dim(S_i)$$

TEOREMA 3.2.6 *El endomorfismo f es diagonalizable si y solo si para cualquier autovalor λ_i de f , se tiene que*

$$\text{Rango}(A - \lambda_i I) = n - \dim(S_i) = n - \alpha_i.$$

Si D es la matriz diagonal formada por los autovalores de f y C es la matriz del cambio de bases, cuyas columnas son los vectores propios asociados a los valores propios de f , entonces:

$$D = C^{-1} A C$$

3.2.4. Cálculo de la potencia de una matriz diagonalizable

Supongamos que deseamos calcular la potencia n -ésima A^n , de una matriz A cuadrada y diagonalizable. Puesto que $D = C^{-1}AC$, se tiene que $A = CDC^{-1}$, y entonces

$$\begin{aligned}A^2 &= (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1} \\A^3 &= (CD^2C^{-1})(CDC^{-1}) = CD^3C^{-1} \\A^4 &= (CD^3C^{-1})(CDC^{-1}) = CD^4C^{-1}.\end{aligned}$$

Por inducción, puede demostrarse que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = CD^nC^{-1}.$$

Al ser D diagonal

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y, por tanto, el cálculo de CD^nC^{-1} resulta ser sumamente sencillo.

EJEMPLO 3.2

- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

para saber si es diagonalizable comenzamos resolviendo la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 3.$$

A continuación, calculamos las dimensiones de los subespacios engendrados por cada autovalor:

$$\dim(S_1) = 3 - \text{Rango}(A - 2I) = 3 - 2 = 1$$

$$\dim(S_2) = 3 - \text{Rango}(A - 3I) = 3 - 2 = 1$$

La suma de las dimensiones es 2 y por tanto la matriz A no será diagonalizable.

EJEMPLO 3.3

- Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo, cuya matriz respecto a una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el ordenador para encontrar los valores y vectores propios de f . Empezamos introduciendo la matriz

`A:={{1,-1,0},{2,4,0},{0,0,3}}`

A continuación calculamos los valores propios:

`Eigenvalues[A]`

`{2, 3, 3}`

Como no existen tres valores propios distintos, de entrada no podemos afirmar que la matriz A sea diagonalizable. Para ello es necesario conocer los vectores propios de f

`Eigenvectors[A]`

`{{-1,1,0},{-1,2,0},{0,0,1}}`.

Para ver si forman una base de \mathbb{R}^3 calculamos su determinante

`det[{{-1,1,0},{-1,2,0},{0,0,1}}`

`-1`

Como podemos ver los tres vectores son independientes y, por tanto, existe una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de f . En consecuencia, la matriz A será diagonalizable.

3.3. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

Se trata de sistemas del tipo

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (3.4)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Para encontrar la solución general de (3.4) es necesario conocer n soluciones linealmente independientes. Si A es la matriz de los coeficientes, entonces las raíces de su ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$, nos proporcionan las soluciones buscadas.

- Si **todos los valores propios** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, **son distintos dos a dos**, y el vector $(x_{1i}, \dots, x_{ni})^T$ es el vector propio asociado al valor propio λ_i , entonces

$$y_i = (y_{1i}, \dots, y_{ni})^T = (x_{1i}, \dots, x_{ni})^T e^{\lambda_i t}, \quad (3.5)$$

es una solución del sistema (3.4)

- Cuando la ecuación característica tiene **raíces múltiples**, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, **con multiplicidades** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, respectivamente ($\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n$), y **la matriz de los coeficientes** A **es diagonalizable**, entonces actuamos igual que en el primer caso
- Cuando la ecuación característica tiene **raíces múltiples**, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, **con multiplicidades** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, respectivamente ($\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n$), y **la matriz de los coeficientes** A **no es diagonalizable**, entonces para cada $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, s$, existen soluciones del sistema (3.4) de la forma

$$z_i = \begin{pmatrix} P_{i1}(t)e^{\lambda_i t} \\ P_{i2}(t)e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ P_{in}(t)e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

donde P_{i1}, \dots, P_{in} son polinomios de grado inferior a α_i .

EJEMPLO 3.4

- Vamos a obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 + 3y_2 - y_3 \end{cases}$$

La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$. Es fácil comprobar que

$$(-1, 1, 1), \quad (-11, -1, 14), \quad (1, 1, 1),$$

son tres autovectores asociados a los tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente. La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Es decir

$$\begin{aligned} y_1 &= -c_1 e^t - 11c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \\ y_2 &= c_1 e^t - c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \\ y_3 &= c_1 e^t + 14c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.5

- Para obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ y_2' = 3y_1 - 5y_2 + 3y_3 \\ y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

comprobamos que la ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2$. Puede verse que la matriz A es diagonalizable siendo

$$(1, 1, 2), \quad (1, 1, 0), \quad (0, 1, 1),$$

una base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de A .

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Es decir

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} \\ y_2 &= c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-2t} \\ y_3 &= 2c_1 e^{4t} + c_3 e^{-2t}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.6

- Para obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

Volveremos a resolver la ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

que viene dada por $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. La ecuación tiene la raíz doble $\lambda_1 = 3$ es un autovalor doble y es inmediato comprobar que no existen dos autovectores de A que sean linealmente independientes. Por tanto, la matriz A no es diagonalizable. En este caso, el sistema posee soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1t + c_2)e^{3t} \\ (c_3t + c_4)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Si sustituimos en el sistema inicial

$$\begin{cases} c_1e^{3t} + 3(c_1t + c_2)e^{3t} = 2(c_1t + c_2)e^{3t} + (c_3t + c_4)e^{3t} \\ c_3e^{3t} + 3(c_3t + c_4)e^{3t} = -(c_1t + c_2)e^{3t} + 4(c_3t + c_4)e^{3t} \end{cases}$$

que simplificando e identificando coeficientes obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} 3c_1 = 2c_1 + c_3 \\ 3c_2 + c_1 = 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 = 4c_3 - c_1 \\ c_3 + 3c_4 = -c_2 + 4c_4 \end{array} \right\} \Rightarrow c_3 = c_1, c_4 = c_1 + c_2$$

La expresión general de la solución general viene dada por

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_1t + c_2)e^{3t} \\ y_2 &= (c_1t + (c_1 + c_2))e^{3t} \end{aligned}$$

3.4. Sistemas lineales completos con coeficientes constantes

Son sistemas de la forma:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Un primer procedimiento de resolución de estos sistemas consiste en expresar el sistema anterior como una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden superior. Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.7

- Para resolver

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + t \\ \frac{dy}{dt} &= x - t \end{aligned} \right\}$$

derivamos la segunda de las ecuaciones y la sumamos con la primera

$$y'' + y = t - 1. \quad (3.7)$$

Para encontrar la solución general de (3.7) debemos comenzar localizando la solución general $y_h(t)$ de la ecuación diferencial homogénea $y'' + y = 0$.

Las raíces de su ecuación característica son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, lo cual nos permite escribir

$$y_h(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} = (c_1 + c_2) \cos t + (ic_1 - ic_2) \sin t = k_1 \cos t + k_2 \sin t.$$

Para obtener la solución particular de (3.7), derivamos dos veces en la ecuación diferencial inicial

$$y^{(4)} + y'' = 0.$$

Al ser $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, las raíces características podemos escribir la solución general

$$y = (k_1 \cos t + k_2 \sin t) + (A + Bt),$$

vemos que la solución particular responde al tipo $y_p = A + Bt$. Para determinar A y B sustituimos $y(t)$ en (3.7)

$$y'' + y = t - 1 \Rightarrow (0) + (A + Bt) = t - 1 \Rightarrow A = -1, B = 1.$$

En conclusión,

$$y(t) = -1 + t + k_1 \cos t + k_2 \sin t. \quad (3.8)$$

Para encontrar el valor de $x(t)$ procedemos de forma similar. En primer lugar eliminamos y en el sistema (3.7)

$$x'' + x = 1 + t.$$

La ecuación diferencial que obtenemos es parecida a la encontrada en el primer apartado y puede comprobarse que

$$x(t) = 1 + t + M_1 \cos t + M_2 \sin t. \quad (3.9)$$

Pero al ser (3.8) y (3.9) las soluciones, deben de verificar (3.7). Es inmediato comprobar que para que esto sea posible las constantes k_1, k_2, M_1, M_2 deben de cumplir la siguiente relación:

$$M_1 = k_2, \quad M_2 = -k_1$$

Es decir

$\begin{aligned} x(t) &= 1 + t - k_1 \sin t + k_2 \cos t \\ y(t) &= -1 + t + k_1 \cos t + k_2 \sin t \end{aligned}$

3.4.1. Método de variación de parámetros

Para resolver (3.6) en primer lugar buscamos la solución de sistema lineal homogéneo. A continuación, localizamos una solución particular del sistema (3.6) utilizando un procedimiento similar al método de variación de las constantes estudiado para las ecuaciones diferenciales. La solución la obtendremos sumando la solución particular con la solución general del correspondiente sistema homogéneo.

Si

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad y_n(t) = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

es un conjunto fundamental del sistema lineal homogéneo asociado a (3.6), entonces la función

$$\alpha_1(t)y_1(t) + \alpha_2(t)y_2(t) + \dots + \alpha_n(t)y_n(t)$$

donde $\alpha_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ son soluciones del siguiente sistema

$$\left. \begin{aligned} b_1(t) &= \alpha'_1(t)y_{11}(t) + \dots + \alpha'_n(t)y_{1n}(t) \\ b_2(t) &= \alpha'_1(t)y_{21}(t) + \dots + \alpha'_n(t)y_{2n}(t) \\ &\dots \\ b_n(t) &= \alpha'_1(t)y_{n1}(t) + \dots + \alpha'_n(t)y_{nn}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

es una solución particular de (3.6).

EJEMPLO 3.8

- Para resolver el sistema

$$\begin{cases} y'_1 &= 2y_1 + 2 \\ y'_2 &= y_1 + 3y_2 + e^t \end{cases} \quad (3.12)$$

debemos encontrar los autovalores asociados a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Y los subespacios de autovectores asociados

$$\begin{aligned} S_1 &= L(\lambda_1 = 2) = \{(t, -t) : \forall t \in \mathbb{R}^*\} = \langle (1, -1) \rangle \\ S_2 &= L(\lambda_2 = 3) = \{(0, \beta) : \forall \beta \in \mathbb{R}^*\} = \langle (0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de poder escribir la solución general del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

O bien,

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2t} \\ y_2 &= -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{aligned}$$

Un sistema fundamental de (3.12) viene dado por

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

lo cual nos permite escribir una solución particular de (3.12)

$$\alpha_1(t) \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \alpha_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

siendo α_1 y α_2 soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1'(t)e^{2t} + \alpha_2'(t) \times 0 &= 2 \\ -\alpha_1'(t)e^{2t} + \alpha_2'(t)e^{3t} &= e^t \end{aligned} \right\}.$$

Los valores de α_1 , α_2 se obtienen de forma inmediata

$$\alpha_1(t) = -e^{-2t}, \quad \alpha_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}.$$

Una solución particular de (3.12) será

$$\begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix} = -e^{-2t} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

Para finalizar escribamos la solución general del sistema (3.12) propuesto

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{2t} - 1 \\ y_2(t) &= -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{aligned}}$$

3.5. Teoría cualitativa de sistemas

En el tema de las E.D.O hemos realizado el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales autónomas. Ahora, ampliaremos dicho estudio al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Hasta mediados del siglo XIX, básicamente el estudio de las ecuaciones diferenciales iniciado por *Newton* y *Leibnitz*, tenía como único objetivo el encontrar métodos cuantitativos para poder resolver la ecuación diferencial. Los pilares básicos donde se sustentaba toda esta teoría eran los teoremas de existencia y unicidad de *Peano* y *Picard*.

A partir del momento comentado, otros matemáticos liderados por *Lyapunov* y *Poincaré* se enfrentaron al estudio de las ecuaciones diferenciales desde otro punto de vista. Ahora, se presupone la existencia de las soluciones y el objetivo no es encontrarlas, sino que lo interesante es saber cuál es su comportamiento asintótico. En 1899 *Poincaré* publicó un célebre tratado relacionado con la mecánica celeste. En él abordó los puntos más importantes de la teoría cualitativa, como son: la estabilidad y la periodicidad.

En este tema, consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases} \quad (3.13)$$

En la mayoría de las aplicaciones no es necesario encontrar explícitamente las soluciones de (3.13). Por ejemplo, supongamos que $x(t), y(t)$ representan a las poblaciones en el tiempo t de dos especies que compiten entre sí por el alimento y el espacio vital limitados en su hábitat. Supongamos también, que las tasas de crecimiento de $x(t)$ e $y(t)$ están gobernadas por el sistema diferencial anterior. En tal caso, no interesan los valores de $x(t)$ e $y(t)$ en todo tiempo t . Mas bien, son de interés las propiedades cualitativas que presentan $x(t)$ e $y(t)$. Concretamente, se desea contestar a las preguntas siguientes:

- ¿Hay valores α_1, α_2 para los cuales ambas especies coexisten en un régimen permanente? Es decir, ¿existen números α_1, α_2 tales que $x(t) = \alpha_1, y(t) = \alpha_2$ son una solución del sistema anterior? Si tales valores existen se les llama **puntos de equilibrio** del sistema (3.13).
- Supongamos que las dos especies coexisten en equilibrio. Repentinamente, se agregan algunos miembros de la primera especie al hábitat ¿Permanecerán $x(t)$ e $y(t)$ cerca de los valores de equilibrio para todo tiempo futuro?
- Supongamos que $x(t)$ e $y(t)$ tienen valores arbitrarios en $t = 0$. ¿Qué ocurre cuando t tiende a infinito? ¿Triunfará una de las dos especies, o terminará la lucha en un empate?

Más generalmente, interesa determinar las siguientes propiedades de las soluciones de (3.13)

- ¿Existen valores de equilibrio x_0 e y_0 , para los cuales el vector (x_0, y_0) es solución del sistema inicial (3.13)?
- Sea $\phi(t)$ una solución de (3.13). Supongamos que $\psi(t)$ es una segunda solución con $\psi(0)$ muy cerca de $\phi(0)$. Es decir, $\psi_j(0)$ está muy cerca de $\phi_j(0)$, siendo $j = 1, 2$ ¿Permanecerá $\psi(t)$ cercano a $\phi(t)$ para todo tiempo futuro, o divergerá $\psi(t)$ de $\phi(t)$ al tender t a infinito? Esta pregunta se conoce como problema de **estabilidad**. Es el problema más fundamental en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y ha ocupado la atención de muchos matemáticos en los últimos cien años
- ¿Qué ocurre con las soluciones de (3.13) cuando t tiende a infinito? ¿Tienden todas las soluciones a valores de equilibrio? Si no tienden a valores de equilibrio, ¿se aproximarán al menos a una solución periódica?

La primera de las preguntas se responde de la siguiente manera. Observemos que x_0 e y_0 es un valor de equilibrio sí y solo sí:

$$\begin{aligned} 0 &= f(t, x_0, y_0) \\ 0 &= g(t, x_0, y_0) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.9

- Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1 - y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = x(t)^3 + y(t).$$

Los puntos de equilibrio se calculan resolviendo el sistema

$$1 - y(t) = 0, \quad x(t)^3 + y(t) = 0.$$

Existe un único punto de equilibrio $x(t) = -1, y(t) = 1$.

EJEMPLO 3.10

- Para hallar todas las soluciones de equilibrio del sistema

$$\frac{dx(t)}{dt} = (x(t) - 1)(y(t) - 1); \quad \frac{dy(t)}{dt} = (x(t) + 1)(y(t) + 1)$$

tenemos que resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} (x(t) - 1)(y(t) - 1) &= 0 \\ (x(t) + 1)(y(t) + 1) &= 0. \end{aligned}$$

La primera ecuación se satisface si $x(t)$, o bien $y(t)$, es igual a 1, mientras que la segunda ecuación se verifica si $x(t)$, o bien $y(t)$, es igual a -1 . Por tanto, $x(t) = 1, y(t) = -1$ y $x(t) = -1, y(t) = 1$ son las soluciones de equilibrio del sistema.

DEFINICIÓN 3.5.1 Una solución $x = \phi_1(t); y = \phi_2(t)$ del sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases},$$

se dice que es estable si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\psi_j(t_0) - \phi_j(t_0)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \epsilon, \quad \forall t > t_0, \quad j = 1, 2$$

para toda solución $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^T$ del sistema de ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN 3.5.2 Si una solución es estable y además toda solución que empieza suficientemente cerca de $(\phi_1(t), \phi_2(t))^T$ tiende a $(\phi_1(t), \phi_2(t))^T$ cuando t tiende a infinito, entonces se dice que es asintóticamente estable.

3.5.1. Órbitas y plano fase

El problema de la estabilidad puede resolverse por completo para todas las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Para este tipo de sistemas, en los cuales los coeficientes en las ecuaciones diferenciales son todos constantes, vimos en las secciones 3 y 4 métodos para encontrar sus soluciones explícitas. Además, el estudio local en entornos de puntos de equilibrio de sistemas no lineales puede reducirse al del caso lineal.

El estudio cualitativo de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales se simplifica si consideramos sistemas del tipo,

$$\begin{cases} x' = f(x, y) & ; & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(x, y) & ; & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

que reciben el nombre de **autónomos**, (la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones). Físicamente, un sistema autónomo es aquel en el que los parámetros del sistema no dependen del tiempo. Los sistemas autónomos son frecuentes en la práctica; el movimiento de un péndulo no amortiguado de longitud l está regido por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Haciendo $x = \theta$ y $y = d\theta/dt$, podemos reescribir la última ecuación como un sistema autónomo no lineal de dos ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\left(\frac{g}{l}\right) \sin x \end{cases}$$

Observemos que toda solución de (3.14), $x = x(t)$, $y = y(t)$ define una curva en el espacio tridimensional t, x, y . Es decir, el conjunto de todos los puntos $(t, x(t), y(t))$ describe una curva en el espacio tridimensional (t, x, y) .

EJEMPLO 3.11

- Por ejemplo, la solución $x = \cos t$, $y = \sin t$ del sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x,$$

describe una hélice en el espacio (t, x, y) , ya que las soluciones son

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t$$

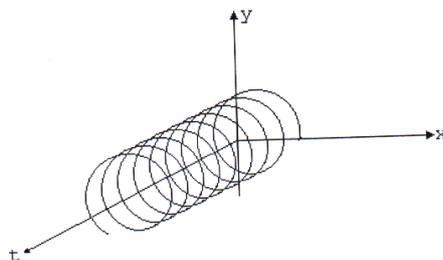


Figura 4.2. Órbita de $x' = -y$, $y' = x$.

Sin embargo, en muchas ocasiones se tiene en cuenta la curva definida por la solución en el plano Oxy . Es decir, se considera la curva $(x(t), y(t))$. Dicha curva se conoce como **órbita**, **trayectoria**, o **líneas de flujo** de la solución $x = x(t)$, $y = y(t)$. El plano Oxy se denomina **plano fase** de las soluciones del sistema. De manera que podemos considerar la órbita $(x(t), y(t))$ como la trayectoria que describe la solución en el plano Oxy .

EJEMPLO 3.12

- Hemos visto que $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales $x' = -y$; $y' = x$. Conforme t aumenta de 0 a 2π , el conjunto de puntos $(\cos t, \sin t)$ describe la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ en el plano Oxy . Por tanto, dicha curva $x^2 + y^2 = 1$ es la órbita de la solución $x = \cos t$, $y = \sin t$; $0 \leq t \leq 2\pi$. Cuando t aumenta de 0 a infinito, el conjunto de puntos $(\cos t, \sin t)$ describe la misma circunferencia un número infinito de veces.

EJEMPLO 3.13

- Puede comprobarse que $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$ con $-\infty < t < \infty$, es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

A medida que la variable t va de $-\infty$ a ∞ , el conjunto de puntos $(e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ describe una espiral en el plano Oxy .

Una de las ventajas de considerar la órbita de la solución y no la solución misma es que, con frecuencia, es posible obtener la órbita de una solución sin conocimiento previo de la solución.

Sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

si $x'(t)$ es diferente de cero en $t = t_1$, entonces se puede resolver con $t = t(x)$ en una vecindad o entorno del punto $x_1 = x(t_1)$. Así pues, para t cerca de t_1 , la órbita de la solución $x(t), y(t)$ es la curva $y = y(t(x))$. Observemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

Las órbitas de las soluciones $x = x(t), y = y(t)$ del sistema anterior, son las curvas soluciones de la ecuación escalar de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

De modo que no es necesario encontrar una solución $x(t), y(t)$ del sistema para calcular su órbita, sólo se necesita resolver la ecuación diferencial escalar de primer orden anterior.

EJEMPLO 3.14

- Las órbitas del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = y^2; \quad \frac{dy}{dt} = x^2$$

son las curvas soluciones de la ecuación escalar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$$

Esta ecuación es de variable separables y puede verse fácilmente que todas las soluciones son de la forma $y(x) = (x^3 - c)^{\frac{1}{3}}$, con c constante. Por tanto, las órbitas del sistema anterior son el conjunto de todas las curvas $y = (x^3 - c)^{\frac{1}{3}}$.

En general, no es posible resolver explícitamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

Por consiguiente, tampoco lo es, en general, encontrar las órbitas del sistema. Sin embargo, si es posible obtener una descripción precisa de las órbitas del sistema. Tal cosa se puede debido a que el sistema de ecuaciones diferenciales determina un **campo de direcciones** en el plano Oxy . Es decir, el sistema de ecuaciones diferenciales indica cómo de rápido se mueve una solución a lo largo de su órbita, y en la dirección que se mueve. Dicho con más precisión, sea $x = x(t), y = y(t)$ una solución del sistema. Conforme t aumenta, el punto $(x(t), y(t))$ se mueve a lo largo de la órbita de dicha solución. Su velocidad en la dirección x es $x'(t)$ y en la y es $y'(t)$ la magnitud de su velocidad vale

$$\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}$$

Pero $dx(t)/dt = f(x(t), y(t))$ y $dy(t)/dt = g(x(t), y(t))$. Por lo tanto, en cada punto (x, y) del plano fase del sistema se conoce

- La tangente a la órbita en (x, y) (la recta que pasa por (x, y) con números directores $f(x, y)$ y $g(x, y)$, respectivamente).
- La magnitud de la velocidad (o rapidez) $(f^2(x, y) + g^2(x, y))^{1/2}$, con la que la solución recorre su órbita

Con frecuencia, esta información sirve para obtener propiedades importantes de las órbitas sin necesidad de calcularlas.

3.5.2. Sistemas autónomos lineales

Más que la estabilidad interesa a veces el comportamiento de las curvas solución en la proximidad de un punto de equilibrio. De este comportamiento se puede dar una representación gráfica en el caso de sistemas bidimensionales. A continuación estudiaremos el comportamiento de las soluciones haciendo el estudio cualitativo de algunos casos más representativos de sistemas del tipo:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

- **Nodo o sumidero.** Supongamos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = -2x, \quad y' = -y. \quad (3.15)$$

Es inmediato comprobar que el único punto de equilibrio es $(0, 0)$. Por otro lado, la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tiene al $\lambda_1 = -2$ y al $\lambda_2 = -1$ como valores propios. Por tanto, las soluciones explícitas de (3.15) son

$$x(t) = c_1 e^{-2t}, \quad y(t) = c_2 e^{-t}. \quad (3.16)$$

Para este caso (3.15), es posible encontrar las ecuaciones de las órbitas. En efecto, si hacemos y'/x' nos aparece la ecuación diferencial

$$2xdy = ydx,$$

que es de variables separables. Su solución general es $y^2 = cx$. En consecuencia, las órbitas serán parábolas que pasan por el origen de coordenadas y simétricas respecto del eje de abscisas y el propio eje $y = 0$.

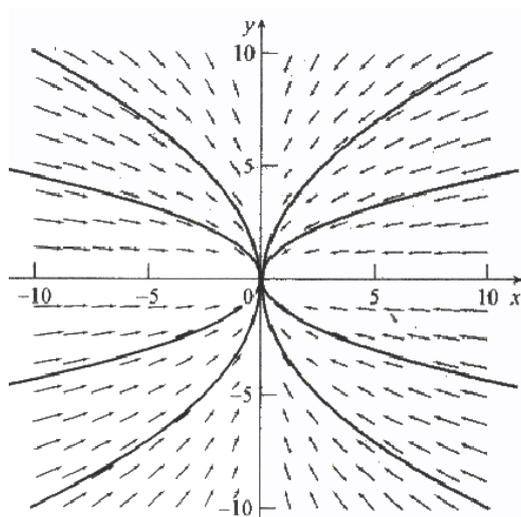


Figura 4.3. Órbitas de $x' = -2x, y' = -y$.

Observemos que si en (3.16) hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden hacia el punto de equilibrio. Por tanto, el $(0, 0)$ será un punto de equilibrio estable y se denomina **nodo estable** o **sumidero**.

- **Punto de Silla** Si repetimos el proceso anterior para el sistema

$$x' = -x, \quad y' = y, \quad (3.17)$$

nos encontramos con que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Por tanto

$$x(t) = c_1 e^{-t}, \quad y(t) = c_2 e^t. \quad (3.18)$$

Las órbitas las obtenemos de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

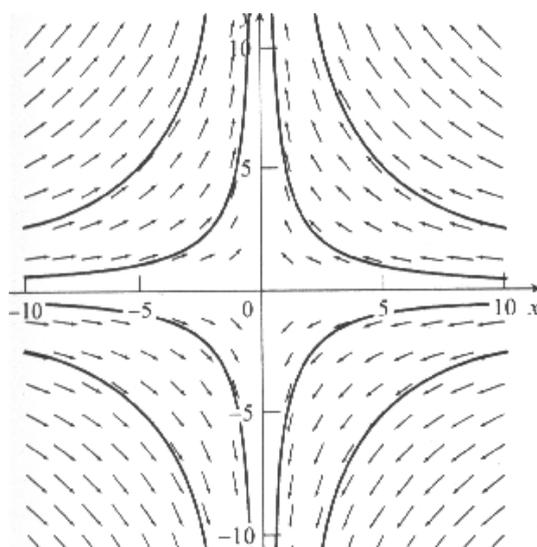


Figura 4.4. Órbitas de $x' = -x, y' = y$.

Si $c \neq 0$ las órbitas son hipérbolas, y en el caso $c = 0$ obtenemos el eje $y = 0$. Supongamos que $c > 0$, si en (3.18) hacemos tender t hacia $+\infty$, observamos que $x(t) \rightarrow 0$, mientras que $y(t) \rightarrow +\infty$. Si ahora hacemos que $t \rightarrow -\infty$, entonces $x(t) \rightarrow +\infty, y(t) \rightarrow 0$. Es decir, existen órbitas que cuando $t \rightarrow \infty$ se acercan al punto de equilibrio, mientras otras se alejan. En este caso el punto de equilibrio $(0, 0)$ se denomina **punto de silla**.

- **Fuente o nodo inestable** Supongamos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = 2x, \quad y' = y. \quad (3.19)$$

Los valores propios correspondientes a la matriz de los coeficientes son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Por tanto

$$x(t) = c_1 e^{2t}, \quad y(t) = c_2 e^t. \quad (3.20)$$

Si resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow y^2 = cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

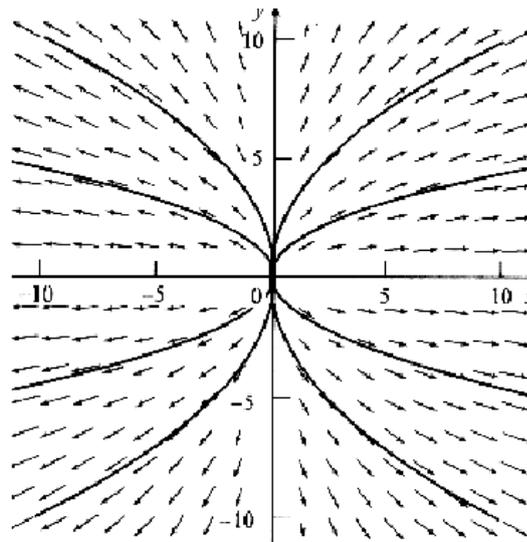


Figura 4.5. Órbitas de $x' = 2x, y' = y$.

Las órbitas coinciden con las estudiadas en el primer ejemplo correspondiente al sumidero. No obstante, si ahora en (3.20) hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces observamos que $x(t) \rightarrow \infty, y(t) \rightarrow \infty$. El punto de equilibrio $(0, 0)$ será un **nodo inestable o fuente**.

- **Foco estable o espiral** Veamos que ocurre cuando los valores propios de la matriz de los coeficientes son números complejos. Por ejemplo

$$x' = -x + y, \quad y' = -x - y. \quad (3.21)$$

Los valores propios correspondientes a la matriz de los coeficientes son $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$, siendo sus vectores propios correspondientes $\vec{v}_1 = (1, i), \vec{v}_2 = (1, -i)$.

Para encontrar las soluciones del sistema, expresamos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula de *Moivre*

$$\begin{pmatrix} e^{-t} \cos t + ie^{-t} \operatorname{sen} t \\ -e^{-t} \operatorname{sen} t + ie^{-t} \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ -e^{-t} \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t} \operatorname{sen} t \\ e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

Las partes reales e imaginarias nos dan dos soluciones independientes. En consecuencia

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \operatorname{sen} t \\ e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} (c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) \\ y(t) &= e^{-t} (c_2 \cos t - c_1 \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

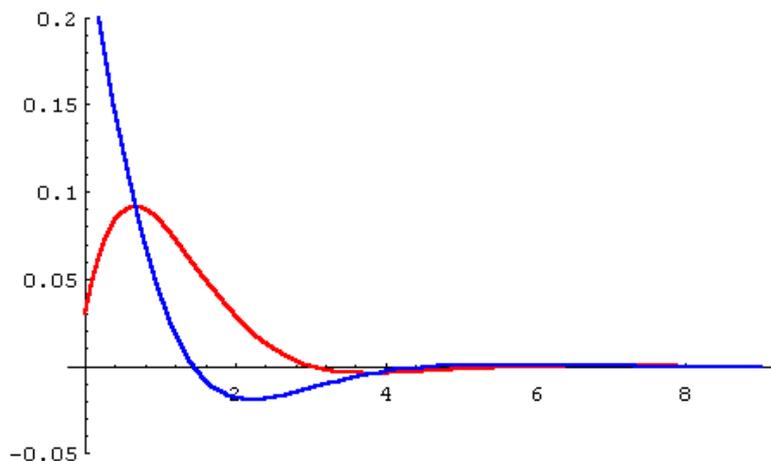


Figura 4.6. Curvas solución $x(t)$, $y(t)$.

Observemos como al tender t hacia infinito $e^{-t} \rightarrow 0$ y las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ tienden hacia cero de forma alternada, debido al efecto causado por las funciones trigonométricas. Este desplazamiento hace que cuando $t \rightarrow \infty$, las órbitas tiendan al punto de equilibrio siguiendo una espiral. Por este motivo el punto de equilibrio es estable y recibe el nombre de **foco estable o espiral**.

Podríamos pensar en obtener las ecuaciones de las órbitas siguiendo un camino similar a los casos anteriores. Para ello planteamos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x-y}{-x+y} \Rightarrow (x+y)dx + (y-x)dy = 0,$$

que es homogénea de grado uno. Para resolverla dividimos toda la ecuación por x y hacemos el cambio de variable $y = zx$. Simplificando obtenemos

$$(1+z^2)dx = (1-z)dz,$$

ecuación diferencial de variables separables que tiene por solución

$$\ln |x| = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) - \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como puede apreciarse, en esta ocasión no podemos despejar el valor de $y = \varphi(x)$, y por este motivo se tiene que hacer el estudio alternativo que hemos comentado anteriormente.

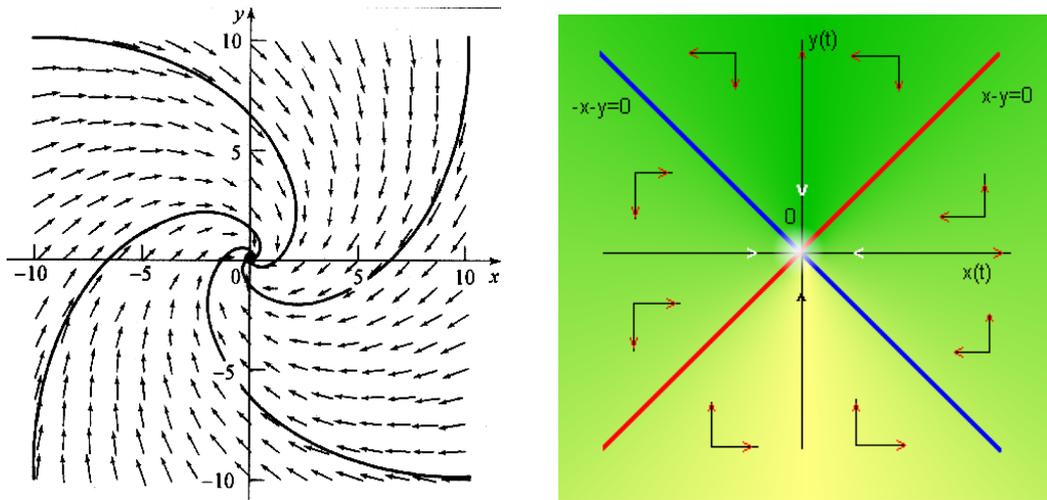


Figura 4.7. Órbitas de $x' = -x + y$, $y' = -x - y$ y su estudio cualitativo.

Todos estos ejemplos son casos particulares del siguiente teorema de clasificación de los puntos de equilibrio.

TEOREMA 3.5.3 *Supongamos el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

que tiene a λ_1, λ_2 como valores propios de la matriz de los coeficientes.

(a) *Si λ_1, λ_2 son distintas con $\lambda_1 < \lambda_2$, entonces*

- *Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, el origen es un nodo estable o sumidero*
- *Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, el origen es un nodo inestable o fuente*
- *Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, el origen es un punto de silla.*

(b) *Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces*

- *Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, el origen es un nodo estable o sumidero*
- *Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, el origen es un nodo inestable o sumidero.*

(c) *Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, entonces*

- *Si $\alpha < 0$, el origen es un foco estable o espiral*
- *Si $\alpha > 0$, el origen es un foco inestable o espiral*
- *Si $\alpha = 0$, el origen es estable y es un centro.*

EJEMPLO 3.15

- Determinar si cada una de las soluciones $\vec{x}(t)$ de la ecuación diferencial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

es estable, asintóticamente estable o inestable.

Resolviendo la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = -(1 + \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$$

Los valores propios de A son $\lambda = -1$; $\lambda = -1 \pm 2i$. Dado que los tres valores propios tienen parte real negativa, se concluye que toda solución de la ecuación diferencial anterior es asintóticamente estable.

EJEMPLO 3.16

- Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

es inestable.

Como los valores propios de la matriz A son $\lambda = 6$ y $\lambda = -4$. Dado que un valor característico de A es positivo, concluimos que toda solución $\vec{x} = \phi(t)$ del sistema anterior es inestable.

EJEMPLO 3.17

- Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

es inestable.

Resolviendo la ecuación característica $|A - \lambda I| = -\lambda^2(\lambda + 7) = 0$ obtenemos como valores propios $\lambda = 0$ y $\lambda = -7$. Cualquier vector propio \vec{v} de A asociado al valor propio $\lambda = 0$ debe satisfacer la ecuación

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior, implica que

$$v_1 = \frac{3}{2}v_2, \quad v_3 = -3v_2,$$

de modo que cualquier vector propio \vec{v} de A con valor propio $\lambda = 0$ debe ser de la forma

$$\vec{v} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, toda solución $\vec{x} = \phi(t)$ de $\vec{x}' = A\vec{x}$ es inestable, ya que $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad 2, y A tiene solamente un vector propio linealmente independiente con valor propio 0.

3.5.3. Sistemas autónomos no lineales

A continuación realizaremos una pequeña aproximación al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. La primera pregunta que podemos hacernos es: ¿por qué interesarnos en este tipo de sistemas? La razón principal es que muchos sistemas dinámicos biológicos y las ecuaciones que los describen son no lineales por la propia naturaleza de los fenómenos en cuestión. Un primer método para estudiar dichos problemas es linealizar estas ecuaciones, pero con esto sólo conseguimos una aproximación de la solución buscada. No obstante, en muchas situaciones físicas las aproximaciones lineales resultan ser adecuadas y válidas para la mayor parte de las ocasiones. Ello no altera para nada el hecho de que en otras muchas otras situaciones la linealización está fuera de lugar.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo

$$\begin{cases} x' = f(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Los puntos de equilibrio sabemos que los calculamos hallando los valores donde se anulan f y g . Sea

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} & \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(a, b)}{\partial x} & \frac{\partial g(a, b)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \\ g_x(a, b) & g_y(a, b) \end{pmatrix}$$

TEOREMA 3.5.4 La solución $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$:

- es asintóticamente estable si la parte real de las soluciones de la ecuación característica de $J(x_0, y_0)$ son negativas,
- es inestable si al menos una solución de la ecuación característica de $J(x_0, y_0)$ tienen parte real positiva.

Si las soluciones de la ecuación característica de $J(x_0, y_0)$ tiene parte real cero no podemos asegurar la estabilidad. En el caso particular en que $J(x_0, y_0)$ sea una matriz de 2×2 , si todos sus valores propios tienen parte real cero, entonces el punto de equilibrio es estable.

EJEMPLO 3.18

- Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = 1 - xy \\ y' = g(x, y) = x - y^3, \end{cases}$$

resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - xy \\ 0 &= x - y^3, \end{aligned}$$

y obtenemos $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (-1, -1)$. Para poderlos clasificar debemos encontrar la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}.$$

A continuación buscamos los valores propios de esta matriz, particularizada en cada uno de los puntos de equilibrio.

En el punto $P_1 = (1, 1)$ la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

tiene a $\lambda = -2$ como valor propio doble. Por el teorema anterior, el punto P_1 será asintóticamente estable.

De forma similar, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

tiene por valores propios $\lambda = -1 \pm \sqrt{5}$. Por tanto, el punto P_2 es asintóticamente inestable.

EJEMPLO 3.19

- **Modelo neuronal de Fitzhugh-Nagumo.** El cerebro es un sistema complejo. Para entender esta complejidad no es posible prescindir de los modelos matemáticos en el estudio de las unidades funcionales que lo componen. Un buen ejemplo de este tipo de modelos es el estudio de la sinapsis neuronal a través del modelo de *Fitzhugh-Nagumo*.

Las células nerviosas o neuronas están constituidas fundamentalmente de tres partes: el cuerpo neuronal o **soma** donde se procesa toda la información, una prolongación con pocas ramificaciones llamada **axon** como hilo conductor, y por último unas zonas muy ramificadas conocidas como **dendritas**, encargadas de ponerse en contacto con otras células nerviosas.

En un principio las neuronas están inactivas hasta el momento en el que alcanzan

un nivel crítico debido a las entradas a través de las dendritas y en ese momento reaccionan amplificando este potencial y dirigiéndolo hacia su último terminal.

El modelo de *Fitzhugh-Nagumo* representa a este proceso en condiciones ideales de laboratorio y además admitiendo que todas las dendritas receptoras almacenan el mismo potencial. Además supondremos que la neurona se activa sólo debido a que existe un potencial externo suficientemente elevado, dando lugar a una variación del potencial de membrana de las neuronas. Dicha variación está determinada por el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = V'(t) = -V(V - V_1)(V - V_2) - W + E \\ \frac{dVW}{dt} = W'(t) = \epsilon(V - CW) \end{cases} \quad (3.22)$$

Donde V es el potencial de membrana; W es la conductancia de iones dependiendo del voltaje; E es el voltaje externo aplicado; C y ϵ son constantes. Los parámetros V_1 y V_2 representan la influencia del potencial sobre la tasa de cambio de este potencial, siendo los valores considerados $V_1 = 0.2$ y $V_2 = 1.0$

Solución con Mathematica[®] El modelo con el que trabajaremos es un caso particular de (3.22) y viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales,

$$\begin{cases} V'(t) = -V(V - 0.2)(V - 1) - W + 0.23 \\ W'(t) = 0.02(V - 0.5W) \end{cases} \quad (3.23)$$

Para analizar su comportamiento para valores de t “suficientemente grandes”, y puesto que no podemos encontrar la solución exacta, debemos localizar sus puntos de equilibrio y posteriormente clasificarlos.

Si utilizamos Mathematica[®] y resolvemos de forma aproximada el sistema,

$$\left. \begin{aligned} -V(V - 0.2)(V - 1) - W + 0.23 &= 0 \\ 0.02(V - 0.5W) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

obtenemos un único punto de equilibrio con valores no complejos,

$$P = (0.110603, 0.221206)$$

El primer paso para estudiar la estabilidad del punto P , es encontrar la matriz jacobina,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f[V, W]}{\partial V} & \frac{\partial f[V, W]}{\partial W} \\ \frac{\partial g[V, W]}{\partial V} & \frac{\partial g[V, W]}{\partial W} \end{pmatrix}$$

siendo

$$f[V, W] = -V(V - 0.2)(V - 1) - W + 0.23, \quad g[V, W] = 0.02(V - 0.5W).$$

En nuestro caso,

$$J = \begin{pmatrix} -3V^2 + \frac{12V}{5} - \frac{1}{5} & -1 \\ \frac{1}{50} & -0.01 \end{pmatrix}$$

que particularizada en el punto $P = (0.110603, 0.221206)$ la matriz jacobiana vale,

$$J = \begin{pmatrix} 0.0287481 & -1 \\ \frac{1}{50} & -0.01 \end{pmatrix}$$

Si encontramos su autovalores,

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0.00937406 - 0.140088i, \quad \lambda_2 = 0.00937406 + 0.140088i$$

observamos que son dos números complejos conjugados con parte real positiva, y en consecuencia el punto de equilibrio será inestable.

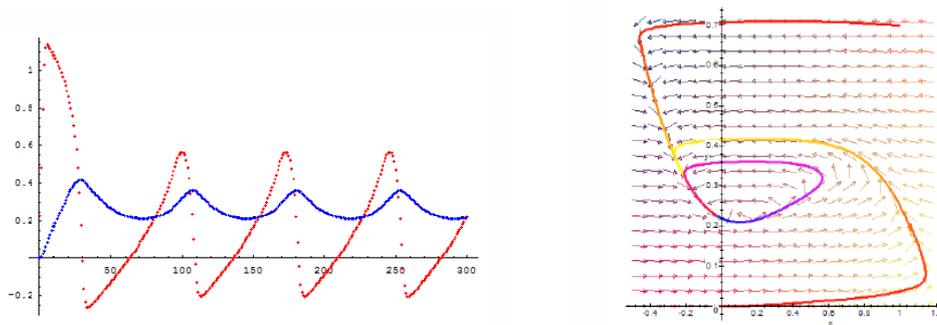


Figura 4.8. Curvas solución y el diagrama de fases.



Tema 4

MODELOS BASADOS EN SISTEMAS DE E.D.O

4.1. Modelo de un riñón artificial II

Iniciaremos los modelos continuos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales, ampliando el estudio realizado en el Tema 3 para modelizar el funcionamiento de un riñón artificial.

Supongamos que $x(t)$ sea la concentración de impurezas en la sangre a lo largo de la membrana en el tiempo t , e $y(t)$ la concentración de impurezas en el líquido de diálisis. Aplicando la ley de *Fick*, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{a}{v}(y(t) - x(t)), & x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{a}{V}(x(t) - y(t)), & y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

siendo $a \in \mathbb{R}^+$ la constante que mide la eficacia del líquido de diálisis, y las constantes v y V las tasas de flujo volumétrico de la sangre y del líquido de diálisis, respectivamente.

4.1.1. Búsqueda de las soluciones

Para poder encontrar las soluciones de (4.1) necesitamos saber los valores propios de la matriz de los coeficientes. Resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -\frac{a}{v} - \lambda & \frac{a}{v} \\ \frac{a}{V} & -\frac{a}{V} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda \left(\frac{a}{v} + \frac{a}{V} + \lambda \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{v} - \frac{a}{V}.$$

Estos valores propios tienen asociados los siguientes vectores propios

$$\vec{v}_1 = (1, 1), \quad \vec{v}_2 = \left(1, -\frac{v}{V} \right).$$

En consecuencia, la solución general adopta la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\left(\frac{a}{v} + \frac{a}{V}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{v}{V} \end{pmatrix}.$$

Es decir

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^{-\left(\frac{a}{v} + \frac{a}{V}\right)t} \\ y(t) = c_1 - \frac{v}{V} c_2 e^{-\left(\frac{a}{v} + \frac{a}{V}\right)t} \end{cases}$$

Las constantes c_1 y c_2 se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales.

$$\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 \\ y_0 = c_1 - \frac{v}{V} c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{V y_0 + v x_0}{V + v}, \quad c_2 = \frac{V}{V + v} (x_0 - y_0).$$

Si deseamos conocer el comportamiento del modelo a largo plazo, hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces

$$x(t) \rightarrow c_1 = \frac{V y_0 + v x_0}{V + v}, \quad y(t) \rightarrow c_1 = \frac{V y_0 + v x_0}{V + v}.$$

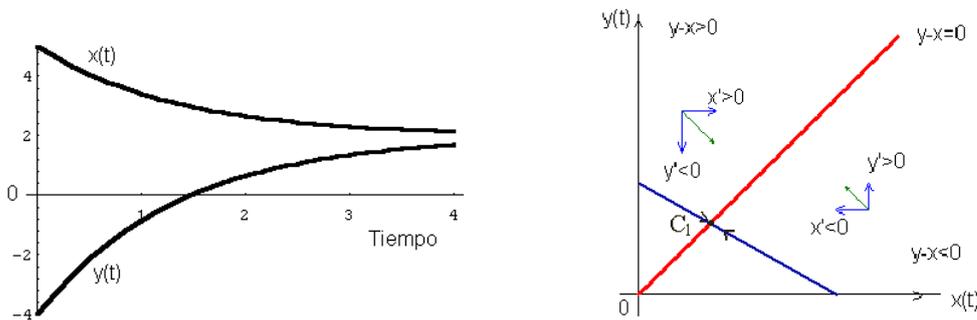


Figura 5.1. Curvas solución y el diagrama de fases.

4.1.2. Estudio cualitativo

En este momento estamos interesados en analizar el comportamiento de las soluciones de (4.1) a través de sus puntos de equilibrio. Para poderlos encontrar, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{a}{v}(y(t) - x(t)) = 0 \\ \frac{a}{V}(x(t) - y(t)) = 0. \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio son (α, α) , $\alpha \geq 0$. Es decir todos aquellos que están situados en la bisectriz del primer cuadrante y el origen. Para clasificarlos necesitamos calcular

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{v} & \frac{a}{v} \\ \frac{a}{V} & -\frac{a}{V} \end{pmatrix},$$

que como podemos apreciar, coincide con la matriz de los coeficientes. Por ello, sus valores propios serán $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -a/v - a/V$, y aplicando el Teorema 3.5.4, concluimos que estos puntos de equilibrio son asintóticamente estables.

Para encontrar las órbitas resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x-y)}{V(y-x)} \Rightarrow dy = -\frac{v}{V} dx \Rightarrow y = -\frac{v}{V}x + C.$$

Observemos como el campo de direcciones en el plano fase no depende de a , pero depende fuertemente de $-v/V$. La Figura 5.1 (derecha) representa a este campo de direcciones, y puede observarse cómo las órbitas se desplazan hacia la derecha si $y > x$, mientras que si $y < x$ lo hacen hacia la izquierda.

4.2. Un modelo elemental de dos poblaciones

En el Tema 3 estudiamos un modelo de crecimiento para una sola especie $x(t)$, que disponía de una fuente de recursos ilimitados. Por tanto, suponíamos que el ritmo de crecimiento de esta especie, en el tiempo t , era proporcional al número de individuos que constituyen la población en ese mismo tiempo t . Es decir, $x'(t) = rx(t)$, dando lugar al modelo de crecimiento exponencial $x(t) = x(0)e^{rt}$. Supongamos ahora que tenemos dos especies, que de encontrarse separadas, seguirían una ley de crecimiento exponencial

$$x'(t) = r_1 x(t), \quad y'(t) = r_2 y(t).$$

Si ambas especies se ponen en contacto, entonces sus ritmos de crecimiento decrecen en proporción al número de encuentros de la especie $x(t)$ con la $y(t)$. Tenemos entonces un modelo muy simple que describe el crecimiento de ambas especies

$$\begin{cases} x'(t) = r_1 x(t) - ax(t)y(t), & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = r_2 y(t) - bx(t)y(t), & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde a y b son constantes positivas.

4.2.1. Resolución y análisis cualitativo

Con el objetivo de simplificar los cálculos, analizaremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineal

$$\begin{cases} x' = x(5 - y) \\ y' = y(5 - x) \end{cases}$$

siendo $x \geq 0, y \geq 0$, para que el estudio tenga sentido biológico.

Estamos ante un tipo de sistemas para el que no disponemos de métodos de resolución. En este caso, lo que haremos será analizar de manera cualitativa el problema, para ver el comportamiento de sus soluciones.

Si calculamos las órbitas, debemos resolver la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(5-x)}{x(5-y)} \Rightarrow \int \left(\frac{5}{y} - 1 \right) dy = \int \left(\frac{5}{x} - 1 \right) dx,$$

cuya solución es

$$5 \ln y - y = 5 \ln x - x + c.$$

Notemos que en esta ecuación no podemos obtener una función explícita del tipo $y = \varphi(x)$. Solamente podemos deducir que si $c = 0$, entonces $y = x$ es una solución.

Nos vemos obligados a utilizar un nuevo método, que consiste en buscar los puntos de equilibrio y analizar las curvas de pendiente nula.

Es inmediato ver que los puntos de equilibrio son el $(0, 0)$ y el $(5, 5)$. Podemos clasificarlos utilizando el Teorema 3.5.4.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - y & -x \\ -y & 5 - x \end{pmatrix}.$$

En el primero de los puntos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

tiene al 5 como valor propio doble. El punto $(0, 0)$ es asintóticamente inestable. Del mismo modo

$$J(5, 5) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix},$$

posee los valores propios $\lambda = \pm 5$. En consecuencia, el $(5, 5)$ es un punto de equilibrio asintóticamente inestable.

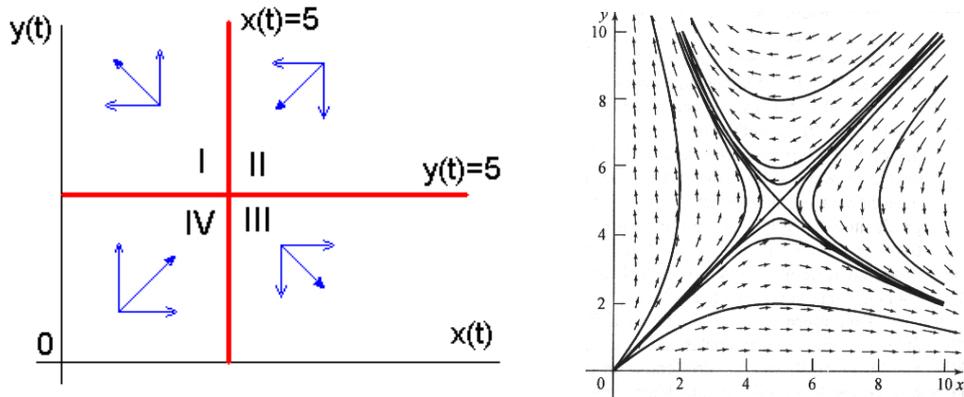


Figura 5.2. Análisis cualitativo y órbitas del modelo.

El análisis del crecimiento y decrecimiento aparece reflejado en la Tabla 5.1

REGIÓN	$x(t), y(t)$	$x'(t)$	$y'(t)$
I	$x < 5, y > 5$	NEGATIVO	POSITIVO
II	$x > 5, y > 5$	NEGATIVO	NEGATIVO
III	$x > 5, y < 5$	POSITIVO	NEGATIVO
IV	$x < 5, y < 5$	POSITIVO	POSITIVO

Tabla 5.1

Si una órbita entra en la región I, no puede escapar de ella y cuando t aumenta $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow \infty$. De manera semejante, las órbitas que están en la región III no pueden escapar y cuando t aumenta, ocurre que $x \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow 0$. En cuanto a las órbitas que se encuentran en la segunda de las regiones, tienen dos posibilidades, tienden al punto de equilibrio $(5, 5)$ o por el contrario entran en la región I o III, y se comportan como hemos comentado anteriormente. Por último, las órbitas de la cuarta región se alejan del punto de equilibrio $(0, 0)$ hasta llegar al punto $(5, 5)$ o por el contrario cruzan a las regiones I o III. En resumen, el punto $(0, 0)$ es un **nodo inestable**, mientras que el $(5, 5)$ es un **punto de silla**.

Ahora, podemos hacer algunos comentarios sobre el comportamiento a largo plazo del modelo. Si en el momento inicial la población x es mayor que la de y , entonces esta segunda población se extinguirá, y viceversa. Este tipo de comportamiento se conoce con el nombre de principio de exclusión competitiva y lo estudiaremos en el próximo apartado. Si inicialmente coincide el número de individuos de ambas poblaciones, entonces tendrán la tendencia a coexistir y tenderán al punto de equilibrio $(5, 5)$ cuando t aumente.

4.2.2. Principio de exclusión competitiva

Es bastante frecuente observar en la naturaleza que la lucha por la existencia entre dos especies similares, que compiten por un mismo alimento y un mismo espacio vital, ambos limitados, termina casi siempre con la completa extinción de una de las especies. Este fenómeno fue descubierto por *Darwin* en 1859 y se conoce como el principio de exclusión competitiva:

Debido a que las especies de un mismo género presentan usualmente, aunque no en forma invariable, mucha mayor similitud en habitat, constitución y siempre en estructura, la lucha entre ellos será por lo general más intensa si llegan a competir entre sí que si lo hacen con especies de géneros distintos.

Hay una explicación biológica muy interesante para este hecho, que está basada en la idea de nicho ecológico.

DEFINICIÓN 4.2.1 *Un nicho indica la ubicación característica de una especie dada en una comunidad, es decir, cuáles son sus hábitos, alimentación y modo de vida*

Se ha observado que como resultado de la competición, dos especies similares rara vez ocupan el mismo nicho. Mas bien, cada una de las especies adopta aquel tipo de alimentación y modo de vida con los cuales tiene ventaja sobre sus competidores. Si las dos especies tienden a ocupar el mismo nicho, entonces la lucha por la supervivencia entre ellas será muy intensa y el resultado será la extinción de la especie más débil.

El Principio de la exclusión competitiva, puede ser definido del siguiente modo:

DEFINICIÓN 4.2.2 *Si dos especies competidoras coexisten en un ambiente estable, lo hacen como resultado de la diferenciación de los nichos. Sin embargo, si no existe dicha diferenciación, o si el hábitat la hace imposible, una de las especies competidoras eliminará o excluirá a la otra. Así, la exclusión se produce cuando el nicho del competidor superior llena por completo aquellas partes del nicho del competidor inferior que se encuentran en el hábitat.*

El principio de exclusión competitiva ha sido ampliamente aceptado,

- porque el peso de la evidencia se halla a su favor,
- porque parece intuitivamente lógico,
- porque existen razones teóricas para creer en él, por ejemplo el modelo de *Lotka-Volterra*.

4.3. El modelo presa-depredador

Uno de los temas más clásicos en Biología es el estudio de un sistema reducido a dos elementos (suelen ser dos especies), que actúan recíprocamente, representado por la relación entre depredador y presa: el modelo zorros y conejos. Este modelo puede extenderse a un parásito y su “huésped”, a herbívoros y pastos, a una población explotada (por ejemplo una población de peces) y al hombre que la explota. Se trata pues, de un modelo de amplia aplicación en Biología.

El estudio matemático de la dinámica de poblaciones data de *Volterra*, *Lotka* y *Gause*. Es razonable tratar el problema del modelo presa-depredador sobre las hipótesis de que el sistema, aunque muestre fluctuaciones, se mantiene en equilibrio durante cierto tiempo. Si no fuera así, el sistema ya hubiera degenerado en tiempos pasados, reduciéndose a una sola especie o a ninguna.

Del modelo matemático que describe fluctuaciones, cuya pertinencia se ha comprobado empíricamente, se pueden formular, siguiendo a *Volterra*, en forma de unas cuantas reglas sencillas:

- Regla de los ciclos periódicos. Si existen fluctuaciones, son periódicas.
- Regla de conservación de las medias.
- Regla de las perturbaciones medias. Si se destruyen de manera uniforme y proporcional individuos de ambas especies, la media del número de individuos de la especie comida aumenta y disminuye la población media del depredador.
- Las fluctuaciones de corto periodo están sincronizadas.
- La destrucción uniforme del depredador acelera las fluctuaciones, y la de las presas las retarda.

Vimos en el Tema 3 que en los modelos estudiados, se obtenía información sobre una única función desconocida. Sin embargo, en algunas aplicaciones intervienen dos funciones desconocidas que están ligadas entre sí por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales. En el presente tema, estudiaremos una situación biológica en el cual analizaremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineal, con el objetivo de obtener información sobre el comportamiento de dos funciones desconocidas.

Sabemos que existe una competición constante por la supervivencia entre las diferentes especies animales que habitan un mismo entorno. Un tipo de animales sobrevive alimentándose de otros; un segundo, desarrollando métodos de evasión para evitar ser comido;

etc. Como simple ejemplo de este conflicto universal entre presas y depredadores, imaginemos una isla habitada por zorros y conejos. Los zorros se alimentan de conejos y los conejos de alfalfa. Supondremos que la alfalfa es tan abundante que los conejos nunca tienen escasez de alimento. Cuando los conejos son abundantes, los zorros no tienen problemas y su población aumenta. Cuando los zorros son ya demasiado numerosos y necesitan para comer demasiados conejos, comienza un período de hambre y su población disminuye. En consecuencia, los conejos están relativamente a salvo y se multiplican. Esto conlleva un nuevo aumento de la población de zorros, y con el transcurso del tiempo, el ciclo se repite una y otra vez, con crecimientos y decrecimientos alternos de las poblaciones de las dos especies.

Se han desarrollado dos tipos principales de modelos para intentar comprender la dinámica presa-depredador. Uno de ellos, basado originariamente en el trabajo de *Nicholson y Bailey* (1935), utiliza ecuaciones de diferencia para representar las interacciones de huésped-parasito con generaciones discretas. Estos modelos fueron revisados por *Hassell* (1978), *Begon y Mortimer* (1981). El segundo tipo, se basa en ecuaciones diferenciales y utiliza sobre todo modelos gráficos simples.

El modelo con ecuación diferencial más sencillo recibe el nombre de sus creadores: *Lotka-Volterra* (*Lotka*, 1925; *Volterra*, 1926). Es muy elemental, pero es un punto de partida muy útil. El biólogo italiano *Umberto D'Ancona*, recopiló información sobre los porcentajes de capturas de diferentes especies en diversos puertos del Mediterráneo durante los años de la Primera Guerra Mundial. En particular, la información incluía los porcentajes de capturas de tiburones los cuales no son adecuados como pescado comestible.

D'Ancona observó un gran aumento en el porcentaje de capturas de tiburones durante el período de la guerra. Pensó que el incremento en tal porcentaje se debía a la gran reducción en los niveles de pesca durante el mismo período. La pregunta era ¿cómo afecta la intensidad de la pesca a la población de peces? La respuesta a tal pregunta era de gran importancia para *D'Ancona* en su investigación acerca de la lucha por la existencia entre especies en competición. También era de mucho interés para la industria pesquera.

Lo que distingue a los tiburones de los peces comestibles es que los primeros son depredadores, mientras que los segundos son sus presas; los tiburones dependen de los peces comestibles para su supervivencia. Inicialmente *D'Ancona* pensó que esa era la razón del incremento de los tiburones durante la Primera Guerra Mundial. Como se había reducido fuertemente el nivel de captura en dicho período, había entonces más presas disponibles para los tiburones, los cuales se reprodujeron más rápidamente y con éxito. Sin embargo, la explicación tenía un fallo ya que también había más peces comestibles en ese período. La teoría de *D'Ancona* muestra solamente que hay más tiburones si la pesca se realiza a niveles más bajos; no explica por qué un bajo nivel de pesca es más benéfico para el depredador que para la presa. La pregunta clave es, ¿por qué una disminución de la intensidad de la pesca, provoca un aumento en la población de los peces depredadores, y por tanto, es más beneficioso para éstos que para los peces comestibles

D'Ancona trasladó el problema al matemático italiano *Vito Volterra*, que inició su análisis separando a los animales en dos poblaciones: las presas $x(t)$ y los depredadores $y(t)$. Su razonamiento fue entonces que los peces comestibles no compiten muy intensamente entre sí por su alimento, ya que éste es muy abundante y la población de peces no es muy densa.

Por ello, en ausencia de los tiburones, los peces comestibles crecerían de acuerdo con la ley exponencial del crecimiento de las poblaciones $x'(t) = ax(t)$, si suponemos que el número de muertes de presas por unidad de tiempo es proporcional al número de contactos presa-depredador $bx(t)y(t)$ para una constante positiva b . Por lo tanto

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t).$$

De la misma manera, pensó que en el tiempo t , los depredadores estarán muriendo a una razón de $cy(t)$, para alguna constante positiva c . Parece razonable suponer que están prosperando y creciendo (ya que se están alimentando) a una razón $dx(t)y(t)$ que es proporcional a su número en ese momento $y(t)$ y al suministro de alimento $x(t)$. Se tiene

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t).$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = bx(t) \left(\frac{a}{b} - y(t) \right), & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = dy(t) \left(x(t) - \frac{c}{d} \right), & y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

siendo a, c , las tasas per capita de cambio en ausencia uno de otro y b, d , las tasas de intercambios de interacción, describe la evolución de los tiburones y los peces comestibles en el caso de no haber pesca alguna. El modelo fue descubierto de manera independiente por *Lotka* y *Volterra*, y se ha demostrado que este modelo es bastante exacto cuando predice los cambios en las poblaciones de alces y lobos o de conejos y zorros, siempre que estas especies vivan en ecosistemas aislados.

A continuación estudiaremos este sistema y obtendremos algunas propiedades. Al final, incluiremos en el modelo el efecto de la pesca y se demostrará que un bajo nivel de la captura es más benéfico para los tiburones que para las especies comestibles. De hecho, llegaremos al sorprendente resultado de que un bajo nivel de pesca, en realidad, es dañino para los peces comestibles.

4.3.1. Análisis cualitativo del sistema

Observemos en primer lugar que el sistema tiene dos puntos de equilibrio

$$x(t) = 0, y(t) = 0; \quad \text{y} \quad x(t) = \frac{c}{d}, y(t) = \frac{a}{b}.$$

Para clasificarlos aplicamos el Teorema 3.5.4. De esta manera, la matriz que nos aparece al realizar las derivadas parciales respecto de x y de y es:

$$\begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix},$$

que particularizada en el punto $(0, 0)$ es

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene como valores propios $\lambda_1 = a > 0$ y $\lambda_2 = -c < 0$. Por tanto, el punto crítico $(0, 0)$ es un **punto de silla inestable**.

Para el punto $(c/d, a/b)$ se obtiene $\lambda_1 = +i\sqrt{cd}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{cd}$, y el Teorema 3.5.4 nos dice que estamos ante un **centro estable**.

Por supuesto, la primera de las soluciones no interesa. Es inmediato comprobar que el sistema tiene también la familia de soluciones

$$x(t) = x_0 e^{at}, y(t) = 0; \quad x(t) = 0, y(t) = y_0 e^{-ct}.$$

Las órbitas del sistema para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, son las curvas soluciones de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}.$$

Esta ecuación es de variables separable, ya que puede expresarse de la forma

$$\frac{a - by}{y} dy = \frac{-c + dx}{x} dx.$$

Por consiguiente, $a \ln y - by + c \ln x - dx = k_1$, para una constante k_1 . Tomando exponenciales en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$\frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = K,$$

para una constante K . Así pues, las órbitas del sistema son la familia de curvas definidas por la ecuación anterior. Puede demostrarse que se trata de curvas cerradas en cuyo centro se encuentra el punto que corresponde a la solución de equilibrio, donde las poblaciones pueden mantenerse indefinidamente.

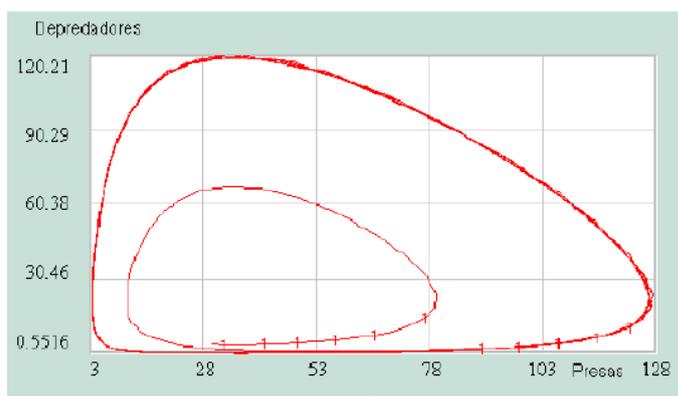


Figura 5.3. Órbitas para un modelo presa - depredador

Las trayectorias son curvas cerradas, correspondientes a soluciones que son periódicas en el tiempo. Así que tanto el eje x como el eje y son órbitas del sistema. Eso implica que toda solución $x(t), y(t)$ del sistema, que empieza en el primer cuadrante $x > 0; y > 0$ en el instante $t = t_0$ permanecerá ahí para todo tiempo futuro $t \geq t_0$.

Aparte de la solución constante $y(t) = a/b; x(t) = c/d$, deseamos saber cuándo $x(t)$ e $y(t)$

crecen y cuándo decrecen. Una forma, intuitiva aunque no rigurosa, es la siguiente.

Dado que $x(t)$ es mayor que cero, la primera de las ecuaciones diferenciales implica que $x'(t) > 0$ cuando $y(t) < a/b$ y que $x'(t) < 0$ cuando $y(t) > a/b$. De la misma manera se obtiene que $y(t)$ es creciente cuando $x(t) > c/d$ y es decreciente cuando $x(t) < c/d$.

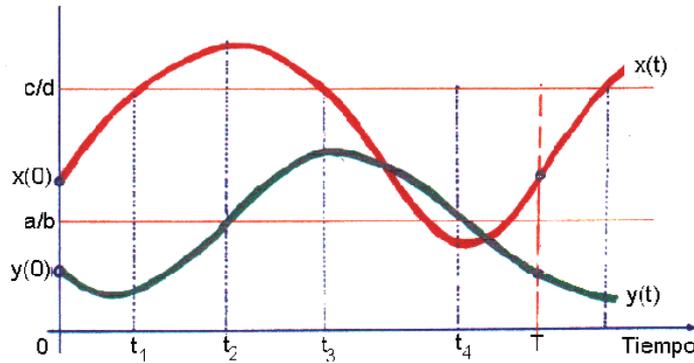


Figura 5.4 Evolución de presas y depredadores en el tiempo.

Supongamos que $c/d > a/b$, trazamos las rectas $y = c/d$ y $y = a/b$ que corresponden a las soluciones constantes. Los valores iniciales de $x(t)$ y de $y(t)$ pueden ser cualquier número positivo. Supongamos, por ejemplo que para $t = 0$ se tiene que $y(0) < a/b$ y $x(0) < c/d$. Entonces $x(t)$ es creciente e $y(t)$ es decreciente. Este comportamiento continúa hasta un tiempo t_1 en que $x(t)$ alcanza la recta $y = c/d$. Como $y(t_1) < a/b$ se tiene que $x(t)$ continúa creciendo. En consecuencia, $x(t) > c/d$ para $t > t_1$, y por lo tanto $y(t)$ es creciente para $t > t_1$. Sigue pasando el tiempo, hasta un instante t_2 en que $y(t_2) = a/b$ y a partir de este momento $y(t)$ es creciente, pero $x(t)$ decrece hasta que $x(t_3) = c/d$. Continuando con el análisis se llega a que existe un tiempo t_5 tal que $x(t_5) = c/d = x(t_1)$. También se puede demostrar que $y(t_5) = y(t_1)$. En realidad, existe un tiempo T entre t_4 y t_5 donde $x(t)$ e $y(t)$ toman sus valores iniciales. Las funciones $y(t)$ y $x(t)$ serán periódicas de período T .

TEOREMA 4.3.1 *El valor promedio de $x(t)$ es a/b y el de $y(t)$ es c/d . Esto es, no importa cómo de grandes sean las poblaciones iniciales de las dos especies ni importa cómo sean las variaciones, el promedio en las poblaciones es siempre el mismo. Esta propiedad se puede considerar como **ley de conservación de la naturaleza***

Demostración. Como ocurre que $(\ln x(t))' = x'(t)/x(t) = a - by(t)$ se tiene que

$$y(t) = \frac{1}{b}(a - (\ln x(t))').$$

El valor promedio de $y(t)$ sobre el intervalo $[0, T]$ es

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{b} \int_0^T (a - (\ln x(t))') dt = \frac{a}{b}. \quad \blacksquare$$

4.3.2. El problema de la pesca.

A continuación vamos a incluir los efectos de la pesca en el modelo inicial (4.2). La pesca reduce la población de los peces comestibles en una cantidad $\epsilon x(t)$, y la de los tiburones en

$\epsilon y(t)$, donde la constante ϵ representa a la intensidad de la pesca, que depende del número de barcos pesqueros y el número de redes en el agua. Ahora, el modelo adopta la forma

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) - \epsilon x(t) &= (a - \epsilon)x(t) - bx(t)y(t) \\y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t) - \epsilon y(t) &= -(c + \epsilon)y(t) + dx(t)y(t)\end{aligned}$$

Este sistema es del mismo tipo (para $a - \epsilon > 0$) que el (4.2). Los valores medios serán para este nuevo modelo, $(c + \epsilon)/d$, para los peces comestibles y $(a - \epsilon)/b$, para las presas.

Por consiguiente, **un nivel moderado de pesca ($\epsilon < a$), en realidad incrementa en promedio la cantidad de peces comestibles y disminuye la de los tiburones. O dicho de otra forma, un nivel bajo de pesca favorece por tanto a los tiburones.** Este resultado se conoce como **principio de Volterra**. Con él se da una explicación a los datos de capturas de peces recogidos por *D'Ancona* y resuelve el problema planteado.

El principio de *Volterra* tiene aplicaciones interesantes para los tratamientos con insecticidas que destruyen tanto al insecto depredador como a su presa. Implica que la aplicación de insecticidas en realidad incrementará la población de aquellos insectos que son mantenidos bajo control por otros insectos depredadores.

Los insectos considerados usualmente como plagas son herbívoros (por ejemplo pulgones, orugas, gorgojos, escarabajos). Ellos tienen sus depredadores (por ejemplo las avispas). Un insecticida es una substancia que mata a todos los insectos. Después de usar insecticida la plaga aumenta y el número de depredadores disminuye. De esta manera la situación empeora (principio de *Volterra*). Cuando usamos DDT se acumula en altos niveles y causa más daño a los depredadores que a las presas (plagas). El tiempo de cambio de generaciones, es más rápido para las presas que para los depredadores. Las presas se adaptan más rápido a los insecticidas, y las siguientes generaciones son más resistentes que las anteriores. Finalmente tenemos un resultado adverso. Por esto, antes de usar insecticidas debemos saber cuáles son sus depredadores y como reaccionan a los medios químicos.

Una confirmación sorprendente de tal principio se encuentra en el caso del pulgón de los cítricos, el cual al ser introducido en 1868 accidentalmente en Estados Unidos proveniente de Australia, amenazaba con destruir la industria citrícola de aquel país. Posteriormente se introdujo la mariquita, su depredador natural en Australia. La mariquita redujo el número de pulgones a un nivel bajo. Cuando se descubrió que el DDT mataba a los pulgones fue aplicado por los fruticultores con la esperanza de reducir aún más su nivel. Sin embargo, y de acuerdo con el principio de *Volterra*, el resultado fue un incremento en el número de tales insectos.

El modelo de *Lotka-Volterra* no es perfecto. Es un paso en la dirección correcta, pero no representa de forma exacta al comportamiento de la naturaleza. Los puntos débiles del modelo son los siguientes:

- Las oscilaciones son inestables con respecto a las perturbaciones aleatorias. Debido a esto la trayectoria puede alejarse del punto $(c/d, a/b)$ y finalmente pasar muy cerca del cero. Prácticamente esto significa la extinción de las especies.
- El modelo no es estructuralmente estable. Cambiando un poco las funciones de la derecha del sistema, podemos obtener imágenes topológicamente distintas. Por ejemplo, que todas las trayectorias se van al punto $(c/d, a/b)$, que existan trayectorias cerradas y las demás se acercan a ellas, etc.

- Finalmente, ningún experimento ha confirmado el modelo. Se han llevado a cabo muchos experimentos con dos especies que tienen la relación presa-depredador en un ambiente cerrado. Siempre la presa se extingue y después el depredador.

De todos modos, el modelo de *Lotka-Volterra* resulta útil por cuanto señala la tendencia en las interacciones presa-depredador a generar fluctuaciones de la población de presas seguidas por fluctuaciones de la población de depredadores (es decir, oscilaciones acopladas); y el mecanismo básico reside en el retraso en el tiempo inherente en la secuencia que va desde muchas presas a muchos depredadores, a pocas presas, a pocos depredadores, a muchas presas, etc.

Muchos ecólogos y biólogos se negaron a aceptar como exacto el modelo de *Volterra*. Hacían notar que en la mayoría de los sistemas depredador presa que se observaban, no ocurría el comportamiento oscilatorio predicho por el modelo de *Volterra*. Mas bien, conforme el tiempo transcurre, la mayoría de estos sistemas tienden a estados de equilibrio. La respuesta a tales argumentos es que el sistema de ecuaciones diferenciales inicial no debe ser interpretado como un modelo general de las interacciones presa-depredador. Esto se debe a que tanto los peces comestibles como los tiburones no compiten intensamente entre sí por los recursos disponibles. En la próxima sección analizaremos un modelo más completo donde tendremos en cuenta que tanto las presas como los depredadores compiten entre sí por los recursos disponibles.

Por último comentaremos que hay algunas interacciones presa-depredador en la naturaleza que no pueden ser modeladas por ningún sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Tales casos ocurren cuando la presa dispone de un refugio que no es accesible a los depredadores. En tales circunstancias es imposible afirmar nada acerca del número futuro de presas y depredadores, ya que no puede predecirse cuantas presas abandonarán el refugio. Dicho de otro modo, tal proceso es **aleatorio**, más que **determinista**, y por lo tanto no puede ser modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.3.3. Modelo presa-depredador modificado

En secciones anteriores hemos tenido la oportunidad de estudiar modelos del tipo presa-depredador. Una modificación de los mismos son los llamados modelos del tipo *Gause*, cuya dinámica viene determinada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales autónomo,

$$\begin{cases} x'(t) = x f(x) - a g(x) y \\ y'(t) = b g(x) y - c y \end{cases}$$

donde $x(t)$, $y(t)$ representan a la cantidad de presas y depredadores, respectivamente, en el tiempo $t > 0$. En el sistema anterior, $x f(x)$ se identifica con el crecimiento natural de las presas, mientras que $g(x)$ es la función de consumo de los depredadores¹.

Otra modificación viene dada por los modelos tipo *Leslie* o logísticos,

$$\begin{cases} x'(t) = x f(x) - a g(x) y \\ y'(t) = \beta y \left(1 - \frac{y}{K_1} \right) \end{cases}$$

¹Basado en [?]

donde, como puede observarse, los depredadores evolucionan según un modelo logístico con una capacidad de carga que depende de las presas disponibles ($K_1 = K(x)$). En concreto, en 1926 *Leslie* propuso la siguiente modificación al modelo de *Lotka-Volterra*

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y) = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy \\ y'(t) = G(x, y) = \beta y \left(1 - \frac{y}{nx}\right) \end{cases} \quad (4.3)$$

donde la interacción presa-depredador $g(x) = xy$ es lineal (función de *Holling* del tipo I). Los parámetros son todos positivos y tienen el siguiente significado biológico.

- α : es la tasa de crecimiento “per capita” de las presas
- K : es la capacidad de carga del medio
- a : es la tasa de consumo de los depredadores
- β : es la tasa de crecimiento “per capita” de los depredadores
- n : es la calidad de la cantidad de alimento que favorece el nacimiento de depredadores.

Los puntos de equilibrio del modelo (4.3) se obtienen al resolver el sistema no lineal,

$$\begin{cases} \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy = 0 \\ \beta y \left(1 - \frac{y}{nx}\right) = 0 \end{cases}$$

donde $(0, 0)$ no es factible puesto que el sistema no está definido en $x = 0$. El resto de los puntos son:

$$P_1(K, 0), \quad P_2\left(\frac{K\alpha}{\alpha + Kna}, n\frac{K\alpha}{\alpha + Kna}\right)$$

Para clasificar estos puntos, tenemos que encontrar el jacobiano de las funciones $F(x, y)$, $G(x, y)$,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{2\alpha x}{K} - ay & -ax \\ -\frac{\beta y^2}{nx^2} & \beta - \frac{2\beta y}{nx} \end{pmatrix}$$

y sustituir en los puntos de equilibrio,

$$J(K, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & -aK \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -\alpha < 0$ y $\lambda_2 = -\beta > 0$. Es decir, el punto P_1 es un punto de silla para cualquier conjunto de parámetros. La clasificación del segundo punto de equilibrio a través de este procedimiento no es posible debido a la dificultad de encontrar los valores propios de la matriz jacobiana. Se hace necesario utilizar otros procedimientos mucho más sofisticados (funciones de *Liapunov*) que quedan fuera del objetivo del curso.

4.4. Especies en competencia

En esta sección continuaremos con el razonamiento geométrico, utilizado en la sección anterior, para estudiar de forma cualitativa el comportamiento de un sistema de dos ecuaciones autónomas.

Consideremos el problema biológico de dos especies competidoras. Supongamos que tenemos dos especies semejantes que compiten por un suministro limitado de alimento. Por ejemplo, dos especies de peces en un estanque que no se devoran entre sí, pero que compiten por el alimento disponible. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las poblaciones de las dos especies en el instante t . El estudio del crecimiento logístico sugiere que, en ausencia de la especie y , el desarrollo de la especie x está gobernado por una ecuación de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = x(t)(a - bx(t)),$$

y que, en ausencia de la especie x , el desarrollo de la especie y está regido por una ecuación de la forma

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t)(c - dy(t)).$$

Sin embargo, cuando las dos especies están presentes, cada una cambiará el abastecimiento de alimento disponible para la otra. De hecho, reducen mutuamente las tasas de crecimiento y las poblaciones de saturación. La expresión más sencilla para la reducción de la rapidez de desarrollo de la especie x , debido a la presencia de la especie y , es reemplazar el factor de la rapidez de desarrollo $a - bx(t)$ de la ecuación anterior por $a - bx(t) - my(t)$ donde m es la medida del grado en que la especie y interfiere con la especie x . De modo semejante, en la segunda ecuación reemplazamos $c - dy(t)$ por $c - dy(t) - nx(t)$. Así, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = x(a - bx - my), & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(c - dy(t) - nx(t)), & y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Los valores reales de las constantes a, c, b, d, m, n dependen del problema biológico que estudiemos.

Para determinar los puntos de equilibrio, resolvemos

$$\begin{cases} 0 = x(t)(a - bx(t) - my(t)) \\ 0 = y(t)(c - dy(t) - nx(t)) \end{cases}.$$

Se ve fácilmente que las soluciones correspondientes a $x(t) = 0$ o bien, $y(t) = 0$ son $x(t) = 0, y(t) = 0$; $x(t) = 0, y(t) = c/d$; $x(t) = a/b, y(t) = 0$. Además, existe una solución constante correspondiente a la intersección de las rectas $a - bx - my = 0$ y $c - dy - nx = 0$ si estas rectas se cortan. No hay otras soluciones constantes del sistema anterior.

Geoméricamente, estas soluciones pueden representarse como puntos en el plano OXY al que le hemos dado el nombre de plano fase. Recordemos que su significado era el siguiente: En el plano, resulta muy útil imaginar una solución del sistema como un punto (x, y) que se mueve como una función del tiempo. En el instante $t = 0$ las poblaciones iniciales de las

dos especies proporcionan un punto inicial (x_0, y_0) en el plano; entonces seguimos el movimiento del punto (x, y) que representa las poblaciones de las dos especies en el instante t , a medida que traza una curva en el plano. A estas curvas las hemos llamado órbitas o caminos del sistema. Como sabemos, podemos obtener información considerable acerca del comportamiento de las soluciones del sistema, sin resolver realmente el problema.

En la Figura 5.5, observamos que de la primera de las ecuaciones del sistema (4.4), $x(t)$ crece o decrece a medida que $a - bx - my > 0$ ó $a - bx - my < 0$. De modo semejante, de la segunda de las ecuaciones, $y(t)$ crece o decrece a medida que $c - dy - nx > 0$ ó $c - dy - nx < 0$.

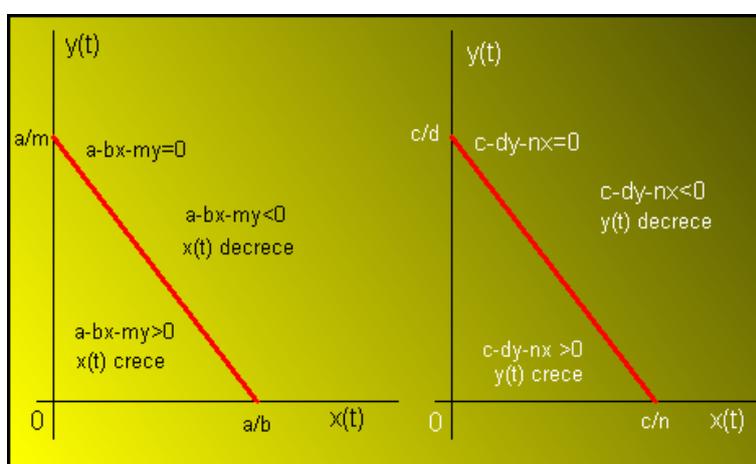


Figura 5.5

Con el fin de ver lo que le está ocurriendo a las dos poblaciones simultáneamente, debemos sobreponer los diagramas. Existen cuatro posibilidades, como se muestra en la Figura 5.6 y Figura 5.7, donde hemos destacado los puntos críticos.

A continuación vamos a estudiar con algo más de detalle los dos casos más interesantes.

Supondremos que cada una de las poblaciones iniciales x_0 e y_0 son diferentes de cero.

4.4.1. Primer caso

Supongamos el caso correspondiente a la Figura 5.6 izquierda. Si las poblaciones iniciales están en la primera región, entonces tanto x como y crecerán, si el punto se mueve hacia la segunda región, entonces la especie y seguirá creciendo, pero la especie x empezará a decrecer.

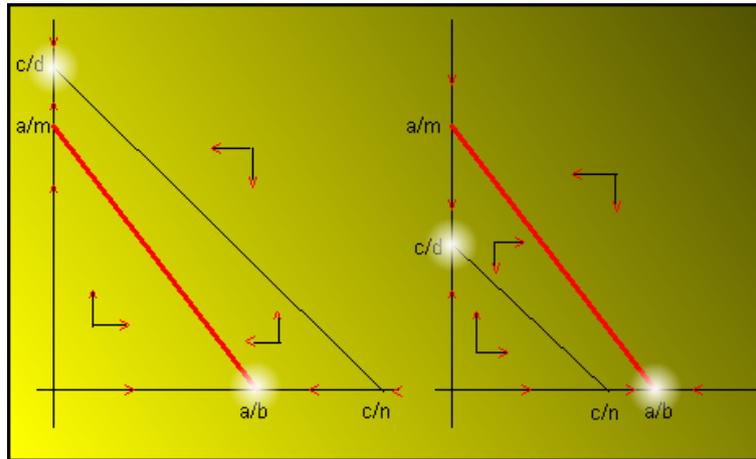


Figura 5.6. Primer y segundo caso.

De modo semejante, si el punto inicial está en la tercera región, entonces tanto x como y decrecerán; si el punto se mueve hacia la región segunda, entonces x seguirá decreciendo mientras que y ahora empieza a crecer. Esto sugiere que, para poblaciones que al principio están razonablemente próximas a $(0, c/d)$ el punto (x, y) que representa a las poblaciones en el instante t se aproxima al punto crítico $(0, c/d)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Esto se muestra en la Figura 5.8 (izquierda), para varios estados iniciales diferentes. Esta situación corresponde a la extinción de la población x , con la población y alcanzando un estado de equilibrio de tamaño c/d .

Podríamos preguntarnos si el punto $(0, a/b)$ es también un estado límite posible, puesto que, superficialmente, las poblaciones que empiezan cerca de este punto, parece que se aproximan a él cuando $t \rightarrow \infty$. La respuesta es negativa. En la primera región, el punto (x, y) se aleja del eje y mientras se mueve hacia arriba y, en la segunda región, aún cuando se mueve hacia el eje y , el punto (x, y) todavía se mueve hacia arriba.

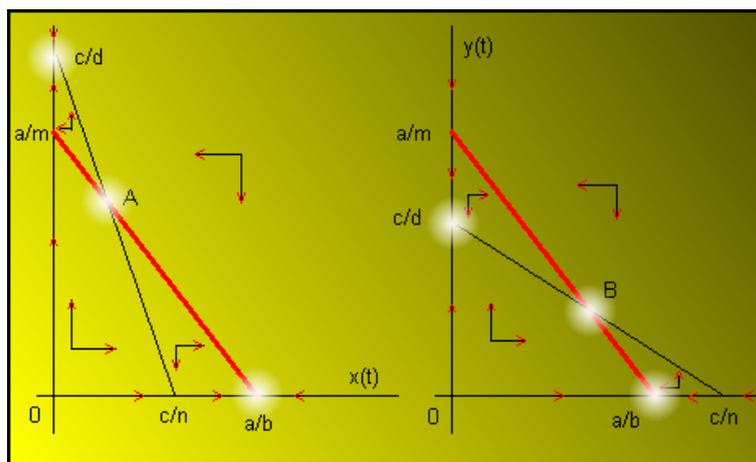


Figura 5.7. Tercer y cuarto caso.

Es más, notemos que $(0, a/b)$ no es un punto crítico; es decir $x = 0, y = a/b$ no es solución de las ecuaciones del sistema inicial. Los otros puntos críticos son el $(0, 0)$ y el $(a/b, 0)$. Sin

embargo, una inspección de la Figura 5.6 (izquierda), se observa que una solución (x, y) que parte de valores diferentes de cero (x_0, y_0) no puede tender hacia cualquiera de estos puntos cuando $t \rightarrow \infty$.

4.4.2. Segundo Caso

Consideremos el correspondiente a la Figura 5.7 (derecha). Un estudio de esta figura sugiere que el punto de las poblaciones (x, y) se moverá hacia la intersección de las dos rectas divisorias, a medida que t crece. Esto se muestra esquemáticamente en la Figura 5.8 (derecha), para varios estados iniciales diferentes. En este caso, ambas especies pueden coexistir con las poblaciones de equilibrio dadas por las coordenadas del punto crítico B.

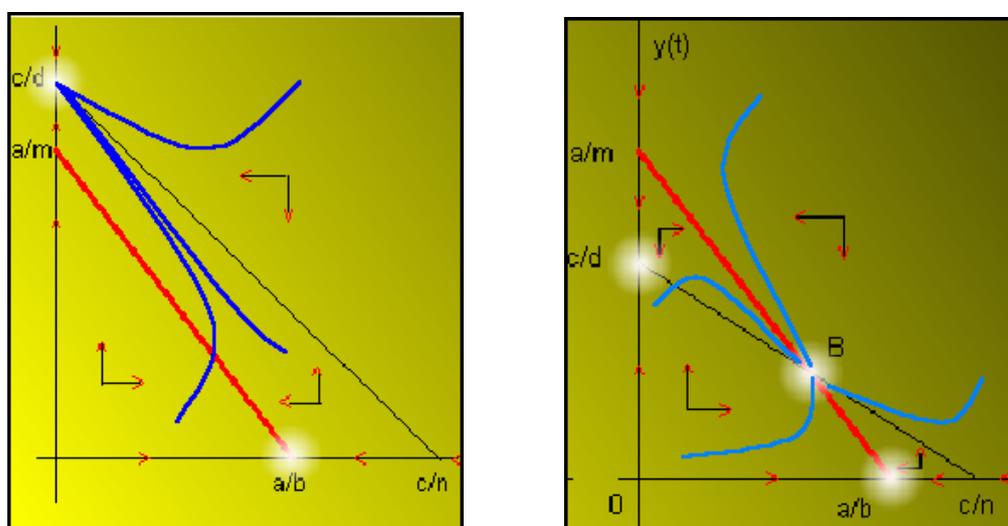


Figura 5.8

Veamos que también podemos llegar al mismo resultado aplicando el Teorema 3.5.4. En efecto, en primer lugar calculamos la matriz correspondiente a las primeras derivadas

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2bx - my & -mx \\ -ny & c - 2dy - nx \end{pmatrix}.$$

Supongamos que queremos clasificar el punto de equilibrio $(0, c/d)$. Calculamos

$$J(0, c/d) = \begin{pmatrix} \frac{ad - mc}{d} & 0 \\ -\frac{nc}{d} & -c \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{ad - mc}{d}, \quad \lambda_2 = -c.$$

Según el Teorema 3.5.4

- Si $ad - mc > 0$, es decir $a/m > c/d$, entonces $(0, c/d)$ es un punto de equilibrio inestable

- Si $ad - mc < 0$, es decir $a/m < c/d$, entonces $(0, c/d)$ es un punto de equilibrio estable.

Para el resto de los puntos se procede de forma similar.

EJEMPLO 4.1

- Al estudiar el modelo de especies en competencia siguiente:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left(5 - \frac{5}{8}x(t) - y(t)\right) \\ y'(t) = y(t)\left(5 - \frac{5}{8}y(t) - x(t)\right) \end{cases},$$

empezamos encontrando los puntos de equilibrio,

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, 8), \quad P_3 = (8, 0), \quad P_4 = (40/13, 40/13).$$

En la Figura 5.9 (izquierda) se ha representado las cuatro rectas de pendiente nula $x = 0$, $y = 5 - 5x/8$, $y = 0$, $y = 8(5 - x)/5$ así como el estudio del crecimiento de cada una de las especies.

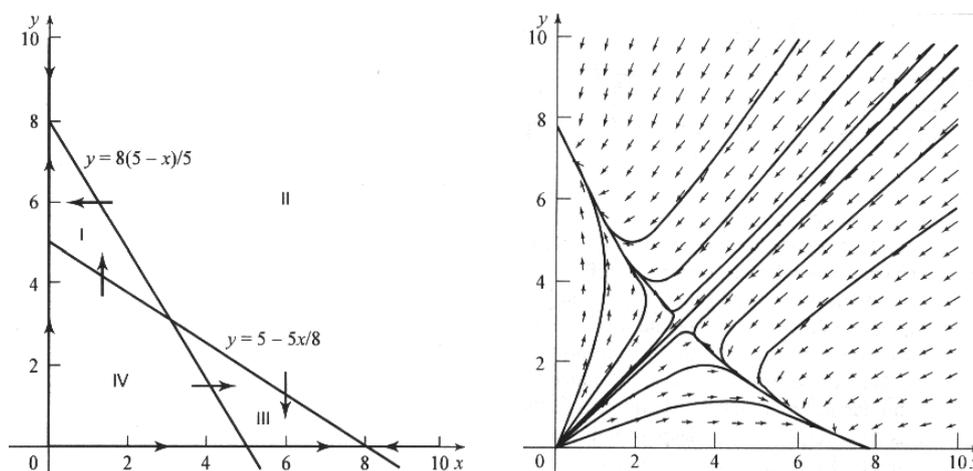


Figura 5.9. Curvas de pendiente nula y órbitas del modelo.

Si una órbita entra en la región I, no puede escapar y parece que es atraída por el punto $(0, 8)$ cuando t aumenta. Lo mismo sucede en la región III con el punto $(8, 0)$. Las órbitas en la región II son desplazadas hacia el punto de equilibrio $(40/13, 40/13)$ o cruzan una curva de pendiente nula en las regiones I o III. Una vez que entran a esas regiones, ya conocemos hacia donde se desplazan. Las órbitas de la IV región se alejan del punto de equilibrio $(0, 0)$ o se dirigen hacia el punto de equilibrio $(40/13, 40/13)$ o bien cruzan una curva de pendiente nula en las regiones I o III. De esta manera, el punto de equilibrio $(0, 0)$ es un **nodo inestable**, los puntos $(0, 8)$ y $(8, 0)$ son **nodos estables** y el $(40/13, 40/13)$ es un **punto de silla**.

En conclusión, si inicialmente la población $x(t)$ es superior a la población $y(t)$, entonces esta población se extinguirá, y la población $x(t)$ se estabiliza en 8. Por otro lado, si en el momento inicial $y(t) > x(t)$, entonces se extinguirá la primera de las poblaciones, mientras que la segunda $y(t) \rightarrow 8$.

Podemos contrastar este resultado si aplicamos el Teorema 3.5.4

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 5x/4 - y & -x \\ -y & 5 - 5y/4 - x \end{pmatrix}.$$

Para el primero de los puntos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

sus valores propios correspondientes son $\lambda = 5$. En consecuencia, el punto $(0, 0)$ es asintóticamente inestable.

Del mismo modo, para el punto $(0, 8)$ tenemos

$$J(0, 8) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -8 & -5 \end{pmatrix},$$

que tiene por valores propios $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = -3$. Entonces el punto $(0, 8)$ es asintóticamente estable.

Finalmente, para $(40/13, 40/13)$ la matriz que debemos estudiar es

$$\begin{pmatrix} -25/13 & -40/13 \\ -40/13 & -25/13 \end{pmatrix}.$$

Ahora, los valores propios son $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = -15/13$, y el punto de equilibrio $(40/13, 40/13)$ será inestable.

4.5. Modelo epidemiológico II

Supongamos que un pequeño grupo de personas, que tiene una enfermedad infecciosa, se introduce en una población más grande. El problema que planteamos es el de saber si, cuando aumenta el tiempo, desaparecerá la enfermedad o por el contrario se presentará una epidemia.

Supondremos también que la enfermedad otorga inmunidad permanente a cualquier individuo que se haya recuperado de ella, y además que su período de incubación es muy breve. Por lo tanto, un individuo que contrae una enfermedad se convierte rápidamente en agente de contagio.

Dividiremos a la población en tres clases de individuos:

- (a) **La clase infectiva** I , formada por todos aquellos individuos que están en condiciones de transmitir la enfermedad a otros.
- (b) **La clase susceptible** S , formada por los individuos que no son agentes de transmitir la infección pero que están en condiciones de padecerla y volverse infecciosos.

- (c) **La clase retirada** R , que la constituye los individuos que adquirieron la enfermedad y murieron, los que se han recuperado y son inmunes permanentemente, y los que fueron aislados hasta su recuperación y adquisición de inmunidad permanente.



Hieronimus Bosch (El Bosco), 1450-1516

Representaremos por $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ al número de individuos en las clases S , I y R respectivamente, en el tiempo t . Para construir nuestro modelo, tendremos en cuenta las siguientes hipótesis:

- **Regla 1:** En el intervalo de tiempo considerado, la población permanece en un nivel fijo N . Ello significa, que no hacemos caso de los nacimientos, muertes por causas ajenas a la enfermedad considerada, inmigración y emigración.
- **Regla 2:** La rapidez de variación de la población susceptible es proporcional al producto del número de miembros de $S(t)$ y de $I(t)$.
- **Regla 3:** Los individuos que se retiran de la clase infectiva $I(t)$, lo hacen según una tasa proporcional al tamaño de $I(t)$.

De estas hipótesis es inmediato deducir que $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ cumplen el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -aSI & , \quad S(t_0) = S_0 \\ \frac{dI}{dt} = aSI - bI & , \quad I(t_0) = I_0 \\ \frac{dR}{dt} = bI & , \quad R(t_0) = R_0, \end{cases}$$

donde la constante de proporcionalidad $a > 0$, se conoce como **tasa de infección** y la constante de proporcionalidad $b > 0$ se denomina **tasa de retiro**.

Una vez que se conocen los valores de $S(t)$ e $I(t)$, es posible resolver $R(t)$ ya que $d(S + I + R)/dt = 0$. De modo que $S(t) + I(t) + R(t) = \text{constante} = N$. Así que $R(t) = N - S(t) - I(t)$.

De esta manera consideramos únicamente el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -aSI, & S(t_0) = S_0 \\ \frac{dI}{dt} = aSI - bI, & I(t_0) = I_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

para las dos funciones desconocidas $S(t)$ e $I(t)$.

Las órbitas de (4.5) son las curvas soluciones de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dI}{dS} = \frac{aSI - bI}{-aSI} = -1 + \frac{b}{aS}.$$

Integrando esta ecuación diferencial obtenemos

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + c \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|,$$

siendo $c = b/a$.

Para analizar el comportamiento de las curvas anteriores, estudiamos el signo de $I'(S) = -1 + c/S$. Esta cantidad es negativa para $S > c$, y positiva para $S < c$. Por tanto, $I(S)$ es una función de S que es creciente para valores de $S < c$ y decreciente para $S > c$.

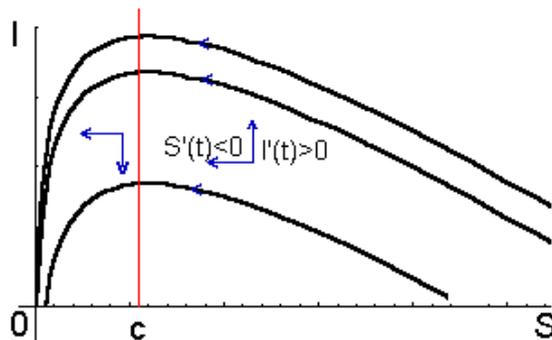


Figura 5.10. Órbitas en el plano fase (S, I) .

Observemos además que $I(0) = -\infty$ e $I(S_0) = I_0 > 0$. Por tanto, existe un único punto S_∞ , con $0 < S_\infty < S_0$, tal que $I(S_\infty) = 0$ e $I(S) > 0$ para $S_\infty < S \leq S_0$. El punto $(S_\infty, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema (4.5), ya que tanto dS/dt como dI/dt se anulan cuando $I = 0$. Así pues, las órbitas de (4.5) para $t_0 \leq t < \infty$ tienen la forma que se indica en la Figura 5.10. Veamos ahora lo que ocurre con la enfermedad en una determinada población. Conforme t aumenta de t_0 a ∞ , el punto $(S(t), I(t))$ se mueve a lo largo de la curva

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + c \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|, \quad (4.6)$$

y lo hace en la dirección en la que S es creciente, ya que $S(t)$ decrece monótonamente en el tiempo. Por tanto, Si S_0 es menor que c , entonces $I(t)$ decrece monótonamente en el tiempo. Si S_0 es mayor que c , entonces $I(t)$ decrece monótonamente a cero y $S(t)$ decrece

monótonamente a S_∞ .

En resumen, si se incluye un pequeño grupo de infecciosos I_0 en un grupo susceptible S_0 , con $S_0 < c$, entonces la enfermedad desaparecerá rápidamente. Por otro lado, si S_0 es mayor que c , entonces $I(t)$ crece mientras $S(t)$ decrece hasta el valor de c , momento en que $I(t)$ alcanza su valor máximo cuando $S = c$. Por otro lado, $I(t)$ empieza a decrecer solamente cuando el número de susceptibles se encuentra por debajo del valor de umbral c . De estos resultados se pueden sacar las siguientes conclusiones.

- (a) Se presentará una epidemia sólo si el número de susceptibles en la población excede el valor de umbral $c = b/a$.

- (b) La propagación de la enfermedad no se detiene por falta de una población susceptible; finaliza solamente por falta de infecciosos. En particular, siempre escapan de contraer la enfermedad algunos individuos.

La primera de las conclusiones corresponde a una observación general de que las epidemias tienden a desarrollarse más rápidamente si la densidad de los susceptibles es alta, debido, por ejemplo, a la sobrepoblación, y si la tasa de retiro es baja, debido por ejemplo a la ignorancia, aislamiento inadecuado o tratamiento médico insuficiente. Por otro lado, si las condiciones sociales permiten una densidad más baja de los susceptibles, entonces los brotes tienden a ser de alcance limitado. Lo mismo ocurre si las tasas de retiro son altas debido a un buen control y buena vigilancia de la salud pública.

Si el número S_0 de susceptibles es inicialmente mayor que el valor de umbral c , aunque cercano a él, entonces es posible estimar el número de individuos que contraerán finalmente la enfermedad. En concreto, si $S_0 - c$ es pequeño comparado con c , entonces el número de individuos que por fin contraerán la enfermedad es aproximadamente $2(S_0 - c)$. Este es el **Teorema del Umbral en Epidemiología**, el cual fue demostrado por primera vez en 1927 por los biólogos matemáticos *Kermack* y *McKendrick*.

EJEMPLO 4.2

- La Tabla 5.2 muestra los datos correspondientes a una plaga en Eyam, un pueblo de Inglaterra de 261 habitantes, desde el comienzo de la epidemia (18-6-1666) hasta llegar a su finalización (20-10-1666), en intervalos de tiempo de 15 días.

Tiempo	$R(t)$	$I(t)$	$S(t)$
0.0	0.0	7.0	254.0
0.5	11.5	14.5	235.0
1.0	38.0	22.0	201.0
1.5	78.5	29.0	153.5
2.0	120.0	20.0	121.0
2.5	145.0	8.0	108.0
3.0	156.0	8.0	108.0
3.5	167.5	4.0	89.5
4.0	178.0	0.0	83.0

En primer lugar ajustaremos la nube de puntos $(S(t), I(t))$ a la solución de nuestro modelo (4.6)

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + c \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|.$$

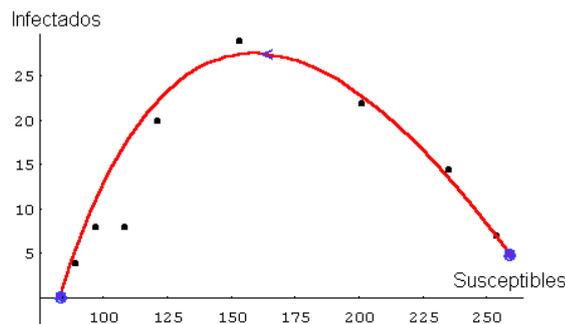
Necesitamos tener una aproximación de c , sabiendo que $N = 261$, $S(0) = 254$, para ello conocemos que cuando $I \rightarrow 0$, entonces $S \rightarrow 83$. Por tanto

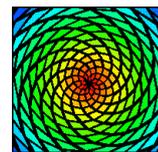
$$0 = 261 - 83 + c \ln \left(\frac{83}{254} \right) \Rightarrow c \approx 159.$$

En la Figura 5.11 hemos representado la nube de puntos y la curva

$$I(S) = 261 - S + 159 \ln \left| \frac{S}{254} \right|,$$

que nos ofrece información sobre el número de personas infectadas en función del número de personas susceptibles de padecer la enfermedad.





Tema 5

CÁLCULO NUMÉRICO

5.1. Resolución numérica de E.D.O

5.1.1. Introducción

Al ir esta materia dirigida, no a alumnos de Matemáticas, sino a aquellos que están estudiando Ciencias Biológicas, el enfoque con el que presentaremos los conceptos de este tema, será el mismo que ha dirigido todo el proceso de construcción del presente Proyecto, es decir eminentemente práctico. Por ello, mostraremos un conjunto de métodos y al mismo tiempo comentaremos las ventajas e inconvenientes que presentan unos sobre otros.

En los temas anteriores hemos tenido ocasión de comprobar como algunas de las ecuaciones diferenciales que aparecían no podían ser resueltas de forma exacta. En estos casos, el camino que seguíamos era el de realizar su estudio cualitativo. De esta forma, aunque desconocíamos las soluciones, sabíamos en cambio como se comportaban a “largo plazo”.

Existen, por otro lado, situaciones donde es preciso conocer, aunque sólo sea de forma aproximada, el valor de la solución en un determinado punto. Por este motivo, el objetivo que perseguimos en el presente capítulo, es el de ofrecer técnicas de aproximación numérica que den respuestas a este tipo de situaciones.

A lo largo del tema, consideraremos el siguiente problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (5.1)$$

siendo $f(t, y)$ una función que cumple las condiciones de los Teoremas 1.3.2 y 1.3.3, sobre existencia y unicidad de soluciones en el intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Entre los métodos numéricos más frecuentes para resolver (5.1) se encuentran los llamados **métodos de discretización**, que consisten en encontrar los valores aproximados de (5.1) en puntos t_k del intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

La notación que utilizaremos será la siguiente: $y(t_k)$ representará al valor exacto de la

solución en el punto t_k , e y_k será el valor aproximado de la solución que obtenemos cuando aplicamos un método numérico. La diferencia $|y(t_k) - y_k|$ se conoce con el nombre de **error de truncatura**.

El esquema general que siguen los métodos que presentaremos, es el siguiente:

- (a) Se inicia realizando una partición del intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$ en N partes iguales.

$$t_j = t_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{\alpha}{N}.$$

- (b) Conocemos los valores y_0, y_1, \dots, y_{k-1}

- (c) El resto de los valores y_k, y_{k+1}, \dots se calculan de forma progresiva, en función de los k anteriores.

A todo método que sigue el esquema anterior se le conoce con el nombre de **método de k -pasos**.

Por último, es interesante hacer notar el hecho de que en la práctica la implantación de estos métodos se lleva a cabo con el uso del ordenador. Por ello, es imprescindible el complemento de estos aspectos teóricos con la Práctica que se ha confeccionado con el mismo título.

5.1.2. El método de Euler

Comentemos en primer lugar, que el método de *Euler* es muy interesante como punto de partida en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ya que es muy simple y permite comprender el resto de los métodos, pero a efectos prácticos se aplica en contadas ocasiones, pues converge muy lentamente hacia la solución.

El valor de y_k lo encontraremos del valor anterior y_{k-1} . Por tanto, estamos ante un método de un sólo paso. Consiste en dividir el intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$ en N partes iguales,

$$t_1 = t_0 + h, \quad t_2 = t_0 + 2h, \quad \dots, \quad t_N = t_0 + Nh = t_0 + \alpha, \quad h = \frac{\alpha}{N}.$$

Si aplicamos la definición de derivada

$$y'(t_k) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h},$$

deducimos que para h “suficientemente pequeño”

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)) \simeq \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h}.$$

Por tanto,

$$y(t_{k+1}) \simeq y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.2)$$

La igualdad (5.2) nos sugiere el cálculo de los y_k mediante la ley de recurrencia,

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.3)$$

partiendo de $y(0) = y_0$. La ley (5.3) se conoce como el método de *Euler*.

Interpretación geométrica

La condición inicial de (5.1) representa al punto $P_0 = (t_0, y_0)$ por donde pasa la curva solución. Para este punto se cumple,

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{P_0} = f(t_0, y_0),$$

lo cual nos permite trazar una recta que pasa por el punto P_0 y tiene de pendiente $f(t_0, y_0)$. Esta recta, aproxima a la solución en los alrededores de t_0 . Entonces, tomamos la recta y encontramos el valor de y correspondiente a t_1 . Ahora tendremos el punto (t_1, y_1) , y repetimos el proceso. La Figura 6.1 muestra el proceso seguido.

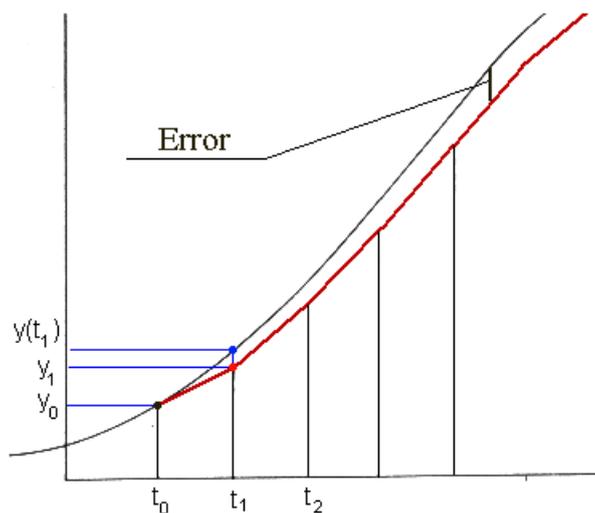


Figura 6.1. Interpretación gráfica del método de *Euler*.

EJEMPLO 5.1

- Apliquemos el método de *Euler* al modelo de crecimiento exponencial:

$$y'(t) = 0.2y(t), \quad y(0) = 50$$

para conocer un valor aproximado de $y(1)$, con un paso $h = 0.1$.

La fórmula (5.3) nos proporciona la expresión

$$y_{k+1} = y_k + h 0.2 y_k = y_k + 0.02y_k, \quad k = 0, 1, \dots, 9,$$

que da lugar a los valores que aparecen en la Tabla 13.1.

t	<i>Euler</i>	Exacto	t	<i>Euler</i>	Exacto
0	50.000	50.000	0.6	56.308	56.375
0.1	51.000	51.010	0.7	57.434	57.514
0.2	52.020	52.041	0.8	58.583	58.676
0.3	53.060	53.092	0.9	59.755	59.861
0.4	54.122	54.164	1.0	60.950	61.070
0.5	55.204	55.259	–	–	–

Tabla 6.1

EJEMPLO 5.2

- Supongamos una sociedad que en el tiempo t , en años, tiene $x(t)$ individuos, y que todos los no conformistas que se aparean con otros no conformistas tienen descendientes que también son no conformistas, mientras que una proporción fija r de todos los otros descendientes, son también no conformistas. Si las tasas de natalidad y mortalidad para todos los individuos se suponen constantes y se representan por b y d respectivamente, y si los conformistas y los no conformistas se aparean al azar, el problema se puede expresar mediante las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx(t)}{dt} = (b - d)x(t), \quad \frac{dx_n(t)}{dt} = (b - d)x_n(t) + rb(x(t) - x_n(t)),$$

donde $x_n(t)$ representa el número de no conformistas en la población en el tiempo t .

Si introducimos la variable $y(t) = x_n(t)/x(t)$ para representar la proporción de no conformistas en la sociedad en el tiempo t , entonces tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{x'_n(t)x(t) - x_n(t)x'(t)}{x^2(t)} = rb(1 - y(t)).$$

Para hacer un estudio más completo de la situación anterior, supondremos los valores

$$y(0) = 0.01, \quad b = 0.2, \quad d = 0.015, \quad r = 0.1.$$

Deseamos aplicar el método de *Euler* para aproximar la solución $y(t)$ de $t = 0$ a $t = 50$, cuando el tamaño del paso es $h = 1$ año.

Nuestro problema de valor inicial es

$$y'(t) = f(t, y) = 0.1 \times 0.2(1 - y) = 0.02(1 - y), \quad y(0) = 0.01.$$

El método de *Euler* nos proporciona las aproximaciones,

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, 49, \quad (5.4)$$

partiendo de $y(0) = 0.01$. Como el número de cálculo es muy elevado, implantamos la fórmula (5.4) en el programa **Mathematica**[®].

```
f[t_, y_] := 0.02 * (1 - y);
a = 0.;
b = 50.;
dato = {0.01};
n = 50;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
For[i = 2, i <= n + 1, i ++, AppendTo[dato, dato[[i - 1]] + hf[nodo[[i - 1]],
dato[[i - 1]]]];
Print[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}]]
```

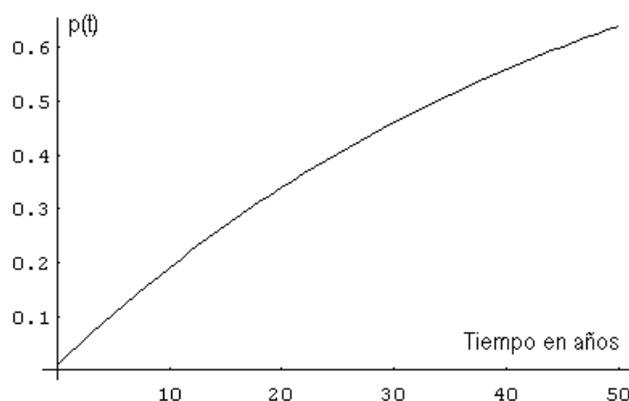


Figura 6.2. Valor aproximado de $y(t)$.

El resultado obtenido es:

```
{0, 0.01000}, {1, 0.02980}, {2, 0.04920}, {3, 0.06821}, {4, 0.08685}, {5, 0.10518},
{6, 0.12301}, {7, 0.14055}, {8, 0.15774}, {9, 0.17459}, {10, 0.19109}, {11, 0.20727},
.....,
{47, 0.61694}, {48, 0.62460}, {49, 0.63211}, {50, 0.63947}.
```

El cuál también puede ser representado gráficamente (Figura 6.2.)

```
ListPlot[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}], PlotJoined → True]
```

Ahora podemos resolver la ecuación diferencial $y'(t) = 0.02(1 - y(t))$ y comparar el valor exacto y el valor aproximado.

Se trata de una ecuación de variables separables,

$$\int \frac{dy(t)}{1 - y(t)} = \int 0.02 dt \quad \Rightarrow \quad -\ln(1 - y(t)) = 0.02t + k.$$

Simplificamos esta expresión y obtenemos

$$y(t) = 1 - e^{-0.02t+k},$$

cuando $t = 0$, entonces

$$0.01 = 1 - e^k \quad \Rightarrow \quad k = 0.99 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - 0.99e^{-0.02t}.$$

El valor exacto será $y(50) = 0.635799$, y el error cometido es:

$$|y(50) - y_{50}| = |0.635799 - 0.63947| = 0.003671,$$

o en forma de porcentaje:

$$\frac{|0.635799 - 0.63947|}{0.635799} \times 100 = 0.58\%.$$

5.1.3. Métodos de Taylor de orden superior

El método de *Euler* lo hemos deducido de la definición de derivada, pero también puede obtenerse a partir del desarrollo de *Taylor* de orden $n = 1$ de la función $y(t)$ en el punto t_k . Podemos encontrar un método que mejore la solución del problema (5.1), si el desarrollo de *Taylor* se extiende hasta el orden n .

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2}y''(t_k) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_k) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi_k), \quad \xi_k \in (t_k, t_k + h).$$

Si la función $f(t, y)$ es “suficientemente regular”, entonces podemos calcular las derivadas sucesivas de $y(t)$. En efecto,

$$y'(t) = f(t, y(t)) = f^{(0)}(t, y)$$

$$y''(t) = \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} = f^{(1)}(t, y)$$

$$y'''(t) = \frac{dy''}{dt} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + f \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} = f^{(2)}(t, y)$$

.....

$$y^{(n)}(t) = \frac{dy^{(n-1)}}{dt} = \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial t} + \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial t} + f \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial y} = f^{(n-1)}(t, y)$$

El método de *Taylor* de orden n consiste en calcular y_k aplicando la fórmula siguiente:

$$y_{k+1} = y_k + hf^{(0)}(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2!} f^{(1)}(t_k, y_k) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_k, y_k) \quad (5.5)$$

Notemos que el método de *Euler* es un caso particular del método de *Taylor*, para $n = 1$.

EJEMPLO 5.3

- Aplicar el método de *Taylor* de orden 2 para calcular el valor aproximado de $y(1)$ del problema de valores iniciales

$$y' = t + y, \quad y(0) = 1,$$

con un paso $h = 0.1$. En la Tabla 13.2, pueden verse los resultados de aplicar la fórmula (5.5) de orden dos.

t_k	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_k	1.00000	1.11000	1.24205	1.39847	1.58180	1.79489
$y(t_k)$	1.00000	1.11034	1.24281	1.39972	1.58365	1.79744
t_k	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	–
y_k	2.04086	2.32315	2.64558	3.01236	3.42816	–
$y(t_k)$	2.04424	2.32751	2.65108	3.01921	3.43656	–

Tabla 6.2

Es lógico pensar que podemos obtener una mayor precisión si nos quedamos con más términos de la serie de *Taylor*. Ahora bien, esto lleva asociada la dificultad de tener que calcular derivadas más elevadas de $f(t, y)$, dificultad nada despreciable, ya que los cálculos pueden hacerse muy lentos. En ocasiones, no se conoce la expresión explícita de $f(t, y)$, sino que se dispone de una colección de datos experimentales, por lo que los cálculos con derivadas altas tienen grandes posibilidades de ser inexactos. Por esta razón, los métodos multitérminos de *Taylor*, en la práctica, se usan muy raras veces.

EJEMPLO 5.4

- En la Sección 10.4 construimos un modelo elemental para analizar el impacto de un nuevo pesticida en el medioambiente. Ahora, nos proponemos mejorarlo en el sentido siguiente.

Supongamos que inicialmente las aguas del lago ya están contaminadas con el pesticida, siendo su concentración inicial $c(0) = c_0$. Además, el volumen del lago es constante V , lo cual significa que la cantidad de agua que entra y sale del lago es la misma. Su ritmo de entrada, es decir, el número de $\text{m}^3/\text{día}$, es $f(t)$, siendo ésta una función senoidal, con un máximo de $150 \text{ m}^3/\text{día}$ y un valor mínimo de $50 \text{ m}^3/\text{día}$. Por ejemplo,

$$f(t) = 100 + 50 \cos(0.00172t).$$

Llamemos $y(t)$ a la concentración de pesticida en el río. Si en un momento dado, los agricultores dejan de utilizar el producto, es lógico suponer que su concentración disminuirá siguiendo un modelo exponencial. Por ejemplo

$$y(t) = 5e^{-0.002t}.$$

Para poder construir el modelo, necesitamos la siguiente hipótesis adicional:

- El ritmo de cambio de la cantidad de contaminante en el lago es igual a la cantidad de contaminante que entra procedente del río menos la cantidad que abandona el lago.

La cantidad de pesticida que entra por unidad de tiempo será la siguiente función que depende del tiempo: $y(t)f(t)$. Al mismo tiempo, si el agua se mezcla convenientemente, la cantidad de contaminante que sale por unidad de tiempo es: $c(t)f(t)$.

Llamemos $a(t)$ a la cantidad de contaminante en el lago en el tiempo t , entonces

$$\frac{da(t)}{dt} = a'(t) = f(t)y(t) - f(t)c(t).$$

Por otro lado, $c(t) = a(t)/V$. Es decir,

$$c'(t) = \frac{1}{V}a'(t) = \frac{1}{V}(f(t)y(t) - f(t)c(t)), \quad c(0) = c_0. \quad (5.6)$$

A continuación vamos a estudiar numéricamente el modelo anterior, para los valores $V = 10000 \text{ m}^3$ y $c_0 = 5$.

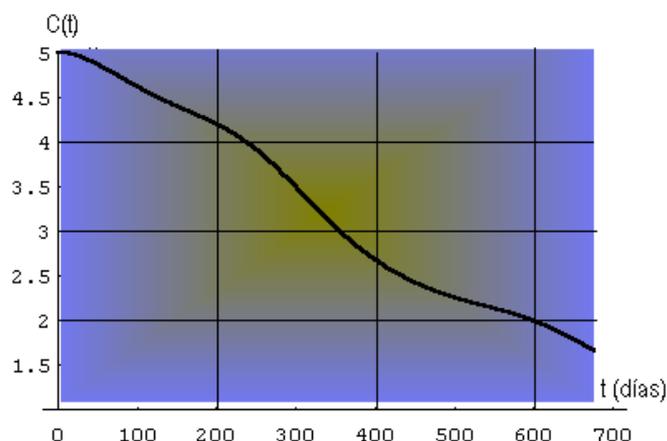


Figura 6.3.

La ecuación diferencial (5.6) es complicada de resolver, aunque se trata de una ecuación lineal de primer orden. No obstante, utilizaremos el método de *Taylor* de segundo orden, a través del programa *Mathematica*®.

```

y'[t] = (0.01 + 0.005 * Cos[0.0172 * t]) * (5 * Exp[-0.002 * t] - y[t])
a = 0.;
b = 700;
n = 700;
dato = {5.};
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
dy1 = y'[t];
dy2 = D[y'[t], t];
s1[u_, v_] := dy1 /. {y[t] -> v, t -> u}
s2[u_, v_] := dy2 /. {y[t] -> v, t -> u}
For[i = 2, i <= n + 1, i ++, aux = dato[[i - 1]] + hs1[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]] +
(h2/2)s2[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]]; AppendTo[dato, aux]];
For[i = 2, i <= n + 1, i ++, aux = dato[[i - 1]] + hs1[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]] +
(h2/2)s2[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]]; AppendTo[dato, aux]];
ListPlot[Table[nodo[[i]], dato[[i]], i, n + 1], PlotJoined -> True];

```

Conclusión: Las Figuras 6.3 y 6.5 nos muestran un comportamiento de la solución más complicado que el obtenido anteriormente, lo cuál era lógico esperar ya que este nuevo modelo es más realista y por lo tanto más elaborado. Los métodos numéricos y los de simulación nos permiten modificar los parámetros del modelo para de esta manera disponer de distintas estrategias a la hora de analizar el impacto de productos tóxicos en el medioambiente.

En la Figura 6.4 podemos ver el diagrama causal correspondiente al modelo simulado con *Vensim*®.

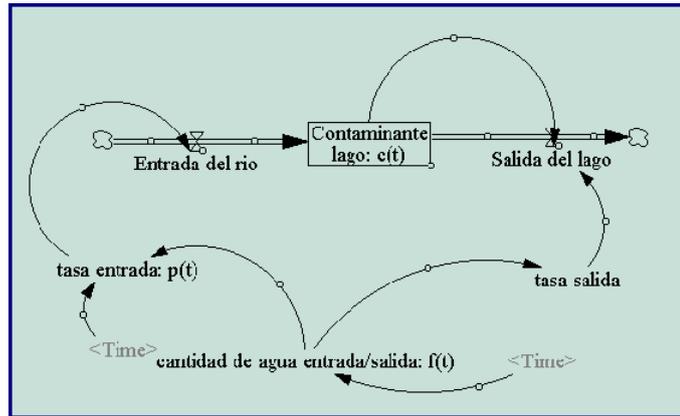


Figura 6.4: Diagrama causal.

Una vez ejecutado el programa se obtiene la gráfica solución de la Figura 6.5, que como no podía ser de otra forma, coincide con la encontrada utilizando el método de *Taylor*.

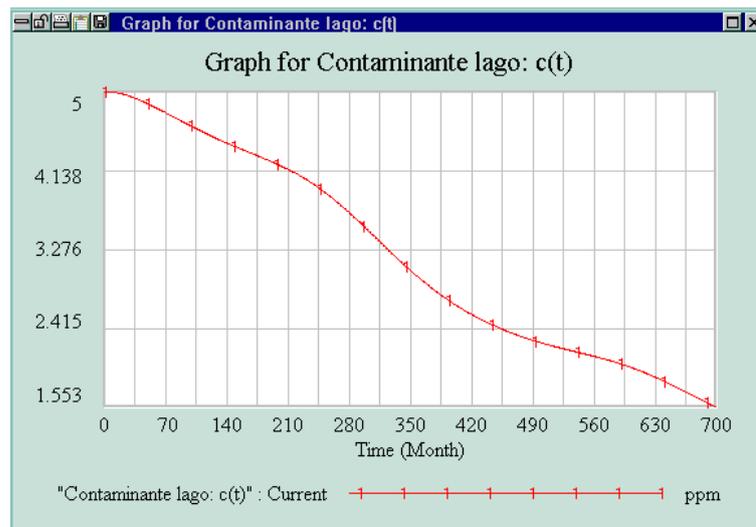


Figura 6.5

5.1.4. Método de Euler mejorado

Con el objetivo de evitar los inconvenientes comentados en el método de *Taylor*, fundamentalmente el tener que calcular las derivadas de $f(t, y)$ de orden superior, presentamos este nuevo método conocido con el nombre de *Euler* mejorado, que está basado en las fórmulas de integración numérica.

Si integramos la ecuación diferencial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

desde t_0 hasta $t_1 = t_0 + h$, obtenemos

$$y(t_1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt \quad \Rightarrow \quad y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt.$$

Podemos pensar que el error cometido disminuirá si la integral anterior por el promedio de sus dos valores en los extremos del intervalo (método del trapecio). En este caso,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt = \frac{h}{2} (f(t_0, y_0) + f(t_1, y(t_1))).$$

El problema es encontrar el valor de $y(t_1)$. Ahora bien, podemos reemplazar $y(t_1)$ por el valor aproximado aportado por el método de *Euler*, que representaremos por $z_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$. Finalmente tenemos

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (f(t_0, y_0) + f(t_1, z_1)).$$

En general

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, z_{k+1})), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (5.7)$$

donde

$$z_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Este método se conoce con el nombre de método de *Euler* mejorado, **predice** primero y **corrige** después una estimación de y_k .

EJEMPLO 5.5

- Utilizando el método de *Euler* mejorado, vamos a resolver el siguiente problema de valor inicial,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = t - y, \quad y(0) = 2,$$

para conocer un valor aproximado de $y(1)$, con un paso $h = 0.2$.

Para encontrar y_1 necesitamos calcular

$$z_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 2 + 0.2f(0, 2) = 2 + 0.2(0 - 2) = 1.6,$$

ahora,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{2} (f(t_0, y_0) + f(t_1, z_1)) \\ &= y_0 + \frac{1}{2} (f(0, 2) + f(0.2, 1.6)) \\ &= 2 + \frac{1}{2} ((0 - 2) + (0.2 - 1.6)) = 1.66. \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso obtenemos

$$z_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1.66 + 0.2f(0.2, 1.66) = 1.66 + 0.2(0.2 - 1.66) = 1.368,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(f(t_1, y_1) + f(t_2, z_2))$$

$$= y_1 + \frac{1}{2}(f(0.2, 1.66) + f(0.4, 1.368))$$

$$= 1.66 + \frac{1}{2}((0.2 - 1.66) + (0.4 - 1.368)) = 1.4172.$$

Procediendo de forma similar se llega a que $y(1) \approx y_5 = 1.11222$. Si utilizamos el programa Mathematica®.

```
f[t_, y_] := t - y;
a = 0.;
b = 1.;
dato = {2.};
n = 5;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
For[i = 2, i <= n + 1, i ++, z = dato[[i - 1]] + h * f[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]];
AppendTo[dato, dato[[i - 1]] + (h/2)(f[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]] + f[nodo[[i]], z])];
Print[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}]]
```

Una vez ejecutado el algoritmo, la respuesta es:

$\{\{0., 2.\}, \{0.2, 1.66\}, \{0.4, 1.4172\}, \{0.6, 1.2541\}, \{0.8, 1.15637\}, \{1., 1.11222\}\}$.

La representación gráfica de dichos valores aparece en la Figura 6.6.

```
ListPlot[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}], PlotPoint -> True];
```

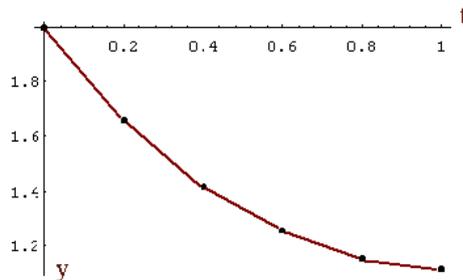


Figura 6.6

5.1.5. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El método anterior de *Euler* mejorado, es un caso particular de otro método más general conocido con el nombre de *Runge-Kutta*. Consiste en obtener una aproximación diferente de la integral definida,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y) dt = \frac{1}{6} \left(f(t_k, y_k) + 4f(t_{k+\frac{1}{2}}, y(t_{k+\frac{1}{2}})) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) \right), \quad (5.8)$$

donde $t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + h/2$, (regla de *Simpson*).

Demostrar de forma rigurosa este método se encuentra fuera de los objetivos del presente Proyecto, por esta razón haremos un desarrollo intuitivo del mismo. En primer lugar, necesitamos estimar los valores $y_{k+1/2}$ e y_{k+1} . Aplicando el método de *Euler*

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} m_1,$$

con $m_1 = f(t_k, y_k)$. Para corregir esta estimación de $y_{k+1/2}$, lo hacemos de la siguiente manera:

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} m_2,$$

siendo $m_2 = f(t_k + h/2, y_k + m_1 h/2)$.

Para predecir y_{k+1} hacemos uso de la última estimación de $y_{k+1/2}$ y el método de *Euler*

$$y_{k+1} = y_{k+1/2} + \frac{h}{2} m_3,$$

donde $m_3 = f(t_k + h/2, y_k + m_2 h/2)$. Por último hacemos

$$m_4 = f(t_k + h, y_k + h m_3).$$

El método de *Runge-Kutta* se obtiene sustituyendo cada una de estas estimaciones en (5.8),

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4),$$

donde

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_k, y_k) \\ m_2 &= f(t_k + h/2, y_k + m_1 h/2) \\ m_3 &= f(t_k + h/2, y_k + m_2 h/2) \\ m_4 &= f(t_k + h, y_k + m_3 h). \end{aligned}$$

Este método es capaz de conseguir precisiones altas sin tener que tomar el paso h tan pequeño como para hacer excesiva la tarea de cálculo.

EJEMPLO 5.6

- A continuación vamos a utilizar el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden, para resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = t - y, \quad y(0) = 2,$$

para conocer un valor aproximado de $y(1)$, con un paso $h = 0.2$.

Empezamos calculando las siguientes constantes:

$$m_1 = f(t_0, y_0) = f(0, 2) = -2$$

$$m_2 = f(t_0 + h/2, y_0 + m_1 h/2) = f(0.1, 2 + (-2)(0.2)/2) = -1.7$$

$$m_3 = f(t_0 + h/2, y_0 + m_2 h/2) = f(0.1, 2 + (-1.7)(0.2)/2) = -1.73$$

$$m_4 = f(t_0 + h, y_0 + m_3 h) = f(0.2, 2 + 0.2(-1.73)) = -1.454$$

con lo cual

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) = 2 + \frac{0.2}{6}(-2 - 3.4 - 3.46 - 1.454) = 1.6562.$$

Al ser muy numerosas el número de operaciones que debemos hacer, proseguiremos utilizando el programa **Mathematica**®.

```
f[t_, y_] := t - y;
a = 0.;
b = 1.;
dato = {2.};
n = 5;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
For[i = 2, i <= n + 1, i ++,
m1 = f[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]];
m2 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, dato[[i - 1]] + (h/2)m1];
m3 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, dato[[i - 1]] + (h/2)m2];
m4 = f[nodo[[i - 1]] + h, dato[[i - 1]] + hm3];
AppendTo[dato, dato[[i - 1]] + (h/6)(m1 + 2m2 + 2m3 + m4)];
Print[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}], PlotJoined -> True]
```

Una vez ejecutado, la respuesta que obtenemos es la siguiente:

{ {0., 2.}, {0.2, 1.6562}, {0.4, 1.41097}, {0.6, 1.24645}, {0.8, 1.148}, {1., 1.10366} }

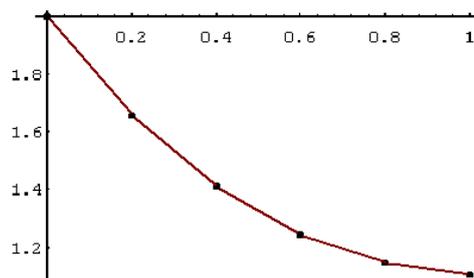


Figura 6.7

5.2. Resolución numérica de sistemas de E.D.O

5.2.1. Introducción

En los temas anteriores hemos tenido ocasión de estudiar las ecuaciones diferenciales desde tres puntos de vista, analítico, cualitativo y numérico. De ellos el método más extendido en las ciencias y en las ingenierías es el numérico, debido fundamentalmente a la existencia de potentes programas informáticos que simplifican las operaciones. Sin embargo, no debemos perder de vista el hecho de que lo importante es la interpretación que se haga de estos resultados, y que en ellos siempre están presentes los errores que se cometen al realizar las aproximaciones de las soluciones.

En el tema anterior hemos estudiado métodos numéricos referidos a problemas de valores iniciales de primer orden. Muchos problemas importantes de la vida cotidiana se modelan utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales, por ejemplo los modelos de competencia, o bien, usando ecuaciones diferenciales de segundo orden o de orden superior. Dichas ecuaciones pueden reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, haciendo $x = y'$, la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right),$$

podemos trasformarla en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = x, \quad x' = f(t, x, y).$$

Generalmente se suelen reducir todas las ecuaciones diferenciales de orden dos a sistemas de dos ecuaciones de primer orden, no obstante, estos resultados pueden generalizarse al caso de más de dos ecuaciones.

Es natural, por tanto, extender los métodos encontrados en la sección anterior a estas nuevas situaciones. Nuestro objetivo será el de formular métodos para aproximar las soluciones de sistemas de ecuaciones del tipo:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases} \quad (5.9)$$

con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

Para no tener problemas con las soluciones, supondremos que las funciones f y g son “suficientemente regulares” para que exista una única solución al problema de valores iniciales planteado.

Al igual que en el tema anterior, deseamos encontrar las soluciones aproximadas de $x(t)$ e $y(t)$ en los puntos

$$t = t_0, \quad t = t_1 = t_0 + h, \dots, t_N = t_0 + Nh.$$

5.2.2. Generalización de los métodos

Los métodos numéricos estudiados para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales pueden extenderse sin dificultad para resolver el problema (5.9). A continuación introduciremos el método de *Euler* y realizaremos diversos ejemplos para mostrar como se implantan el resto de ellos.

La idea que está detrás del método de *Euler* es el concepto de derivada

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Si tomamos como valor de h una cantidad “suficientemente pequeña”, entonces nos aparece el sistema dinámico discreto

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x(t), y(t)).$$

Ahora, podemos definir $x(t_k + h) = x_{k+1}$, $x(t_k) = x_k$, con lo cual

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k, y_k).$$

Actuando del mismo modo con $g(t, x, y)$, obtenemos

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + hf(t_k, x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + hg(t_k, x_k, y_k). \end{aligned} \tag{5.10}$$

De esta manera, conociendo los valores iniciales x_0, y_0 , el tamaño de paso h , y las funciones f y g , podemos calcular la sucesión de valores x_k e y_k para $k = 0, 1, 2, \dots$. En consecuencia, disponemos de un método para encontrar aproximaciones numéricas de las soluciones del sistema (5.9). Esta técnica se conoce con el nombre de método de *Euler* para sistemas de dos ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 5.7

- Utilizar el método de *Euler* con un paso $h = 0.5$ para aproximar la solución en el $t = 2$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 0.5x - 0.5y \end{cases},$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1, y(0) = 2$.

Sustituyendo las ecuaciones f y g dadas en el ejemplo en (5.10), obtenemos

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + hy_k \\ y_{k+1} = y_k + h(0.5x_k - 0.5y_k), \end{cases}$$

con $x_0 = 1, y_0 = 2$. En la primera iteración encontramos una aproximación de las soluciones en $t = 0.5$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + hy_0 = 1 + 0.5(2) = 2 \\ y_1 = y_0 + h(0.5x_0 - 0.5y_0) = 2 + 0.5(0.5(1) - 0.5(2)) = 1.75. \end{cases}$$

Repetimos el proceso para encontrar los valores correspondientes en $t = 1$.

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + hy_1 = 2 + 0.5(1.75) = 2.875 \\ y_2 = y_1 + h(0.5x_1 - 0.5y_1) = 1.75 + 0.5(0.5(2) - 0.5(1.75)) = 1.8125. \end{cases}$$

Los valores correspondientes a $t = 1, 5$ son:

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + hy_2 = 2.875 + 0.5(1.8125) = 3.78125 \\ y_3 = y_2 + h(0.5x_2 - 0.5y_2) = 1.8125 + 0.5(0.5(2.875) - 0.5(1.8125)) = 2.078125. \end{cases}$$

Finalmente, las aproximaciones correspondientes a $t = 2$ serán

$$\begin{cases} x_4 = x_3 + hy_3 = 3.78125 + 0.5(2.078125) = \mathbf{4.8203} \\ y_4 = y_3 + h(0.5x_3 - 0.5y_3) = 2.0781 + 0.5(0.5(3.7813) - 0.5(2.0781)) = \mathbf{2.5039}. \end{cases}$$

En este caso podemos encontrar la solución exacta resolviendo el sistema. Es fácil comprobar que

$$x(t) = 2e^{0.5t} - e^{-t}, \quad y(t) = e^{-t} + e^{0.5t}.$$

EJEMPLO 5.8

- Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = xy + t, & x(0) = 1 \\ y'(t) = ty + x, & y(0) = -1 \end{cases}$$

Estimar la solución para $t = 0.1$, utilizando el método de *Taylor* de orden dos y un valor de $h = 0.1$.

Las ecuaciones que debemos utilizar son:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + x'_k h + x''_k \frac{h^2}{2} \\ y_{k+1} = y_k + y'_k h + y''_k \frac{h^2}{2}. \end{cases}$$

Empezamos calculando x'' e y'' .

$$\begin{cases} x''(t) = xy' + x'y + 1 = xty + x^2 + xy^2 + ty + 1 & , \quad x'_0 = -1, y'_0 = 1 \\ y''(t) = y + ty' + x' = y + t^2y + tx + xy + t & , \quad x''_0 = 3, y''_0 = -2. \end{cases}$$

y aplicamos el método para los valores $x_0 = 1, y_0 = -1, t_0 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x'_0 h + x''_0 \frac{h^2}{2} = 1 + (-1)0.1 + 3\frac{0.1^2}{2} = 0.915 \\ y_1 = y_0 + y'_0 h + y''_0 \frac{h^2}{2} = -1 + 1(0.1) + (-2)\frac{0.1^2}{2} = -0.91 \end{cases}$$

La solución pedida es

$$\mathbf{x(0.1) = 0.915, \quad y(0.1) = -0.91.}$$

EJEMPLO 5.9

- Resolver por el método de *Euler* modificado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x, y) = xy + t, & x(0) = 0 \\ y'(t) = g(t, x, y) = x - t, & y(0) = 1 \end{cases}$$

a fin de encontrar una solución aproximada para $t = 0.4$, y $h = 0.2$.

Empezando el proceso calculando

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_0 + hf(t_0, x_0, y_0) = x_0 + h(x_0 y_0 + t_0) = 0 + 0.2(0) = 0 \\ y_1^* &= y_0 + hg(t_0, x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - t_0) = 1 + 0.2(0) = 1 \end{aligned}$$

lo cual nos permite encontrar

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{2}(x_0 y_0 + t_0 + x_1^* + t_1) = 0 + \frac{0.2}{2}(0 + (0)(0)(1) + 0.2) = 0.02$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(x_0 - t_0 + x_1^* - t_1) = 1 + \frac{0.2}{2}(0 - 0 + 0 - 0.2) = 0.98$$

Para el primer paso:

$$x_1 = 0.02, \quad y_1 = 0.98, \quad t_1 = 0.2.$$

Repetiendo el proceso

$$x_2^* = x_1 + h(x_1 y_1 + t_1) = 0.02 + 0.2((0.02)(0.98) + 0.2) = 0.06$$

$$y_2^* = y_1 + h(x_1 - t_1) = 0.98 + 0.2(0.02 - 0.2) = 0.94$$

$$x_2 = x_1 + \frac{h}{2}(x_1 y_1 + t_1 + x_2^* y_2^* + t_2) =$$

$$0.02 + \frac{0.2}{2}((0.02)(0.98) + 0.2 + (0.06)(0.94) + 0.4) = 0.09$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(x_1 - t_1 + x_2^* - t_2) = 0.02 + \frac{0.2}{2}(0.02 - 0.2 + 0.06 - 0.4) = 0.93$$

En consecuencia, la aproximación pedida es

$$\mathbf{x}(0.4) \approx \mathbf{x}_2 = \mathbf{0.09}, \quad \mathbf{y}(0.4) \approx \mathbf{y}_2 = \mathbf{0.93}.$$

EJEMPLO 5.10

- Utilizar el método de *Euler* para encontrar un valor aproximado de $y(1)$ con $h = 0.5$ siendo $y(t)$ la solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + yy' - y^2 = t + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Si hacemos el cambio $y' = x$, convertimos la ecuación diferencial anterior en el sistema

$$\begin{aligned} y'(t) &= x & , & \quad y(0) = 0 \\ x'(t) &= t + 1 + y^2 - yx & , & \quad x(0) = 1 \end{aligned}$$

Las fórmulas que debemos aplicar son:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hy'_k \\ x_{k+1} = x_k + hx'_k \end{cases}$$

Iniciamos la iteración con los valores $t_0 = 0, y_0 = 0, x_0 = 1$.

$$y_1 = y_0 + hy'_0 = y_0 + hx_0 = 0 + (0.5)(1) = 0.5$$

$$x_1 = x_0 + hx'_0 = x_0 + h(t_0 + 1 + y_0^2 - y_0 x_0) = 1 + (0.5)(1) = 1.5$$

Tiempo en cuenta los valores anteriores, podemos generar la segunda iteración

$$y_2 = y_1 + hy'_1 = y_1 + hx_1 = 0.5 + (0.5)(1.5) = 1.25$$

$$x_2 = x_1 + hx'_1 = x_1 + h(t_1 + 1 + y_1^2 - y_1 x_1) = 1.5 + (0.5)(1) = 2$$

Las aproximaciones son

$$t_2 = 1, \quad y_2 = 1.25, \quad x_2 = 2,$$

y la solución buscada es: $\mathbf{y}(1) = \mathbf{y}_2 = \mathbf{1.25}$.

5.2.3. Resolución numérica de las ecuaciones de Lotka-Volterra

En el Tema 5 estudiamos las ecuaciones de *Lotka-Volterra* que describen el comportamiento de dos especies, una de ellas depredadora de la otra. El modelo viene dado por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) = ax - bxy, & x(t_0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) = -cy + dxy, & y(t_0) &= y_0\end{aligned}\tag{5.11}$$

donde $x(t)$ representa al número de presas, e $y(t)$ al número de depredadores en el tiempo t . El comportamiento específico del sistema anterior dependerá de la relación entre los coeficientes a, b, c, d .

Utilizaremos el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden para encontrar una aproximación de las soluciones de (5.11), el cual, como sabemos, consiste en encontrar:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}l_1 &= f(t_k, x_k, y_k) & m_1 &= g(t_k, x_k, y_k) \\ l_2 &= f(t_k + h/2, x_k + l_1h/2, y_k + l_1h/2) & m_2 &= g(t_k + h/2, x_k + m_1h/2, y_k + m_1h/2) \\ l_3 &= f(t_k + h/2, y_k + l_2h/2, y_k + l_2h/2) & m_3 &= g(t_k + h/2, y_k + m_2h/2, y_k + m_2h/2) \\ l_4 &= f(t_k + h, x_k + l_3h, y_k + l_3h) & m_4 &= g(t_k + h, x_k + m_3h, y_k + m_3h)\end{aligned}$$

Como puede comprenderse la ejecución del método es muy laboriosa, por este motivo lo implementamos en el programa `Mathematica®`, para el caso

$$\begin{aligned}x'(t) &= 1.2x - 0.08xy, & x(0) &= 10 \\ y'(t) &= -0.5y + 0.2xy, & y(0) &= 15\end{aligned}$$

con un paso $h = 25/200 = 0.125$. Nuestro objetivo será el de encontrar un valor aproximado de $x(25)$ e $y(25)$.

```

f[t_, x_, y_] := 1.2x - 0.08 * x * y;
g[t_, x_, y_] := -0.5 * y + 0.2 * x * y;
a = 0.;
b = 25;
dato1 = {10}; dato2 = {15};
n = 200;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];

For[i = 2, i <= n + 1, i ++,
k1 = f[nodo[[i - 1]], dato1[[i - 1]], dato2[[i - 1]]];
L1 = g[nodo[[i - 1]], dato1[[i - 1]], dato2[[i - 1]]];
k2 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, dato1[[i - 1]] + (h/2)k1, dato2[[i - 1]] + (h/2)L1];
L2 = g[nodo[[i - 1]] + h/2, dato1[[i - 1]] + (h/2)k1, dato2[[i - 1]] + (h/2)L1];
k3 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, dato1[[i - 1]] + (h/2)k2, dato2[[i - 1]] + (h/2)L2];
L3 = g[nodo[[i - 1]] + h/2, dato1[[i - 1]] + (h/2)k2, dato2[[i - 1]] + (h/2)L2];
k4 = f[nodo[[i - 1]] + h, dato1[[i - 1]] + hk3, dato2[[i - 1]] + hL3];
L4 = g[nodo[[i - 1]] + h, dato1[[i - 1]] + hk3, dato2[[i - 1]] + hL3];
AppendTo[dato1, dato1[[i - 1]] + (h/6)(k1 + 2k2 + 2k3 + k4)];
AppendTo[dato2, dato2[[i - 1]] + (h/6)(L1 + 2L2 + 2L3 + L4)];];

presas = ListPlot[Table[{nodo[[i]], dato1[[i]]}, {i, n + 1}],
PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];

depredadores = ListPlot[Table[{nodo[[i]], dato2[[i]]}, {i, n + 1}],
PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1]];

Show[presas, depredadores]

```

La solución que se obtiene es $x_{25} = 0.404998$, $y_{25} = 6.57511$. La representación gráfica de las soluciones puede verse en la Figura 6.8

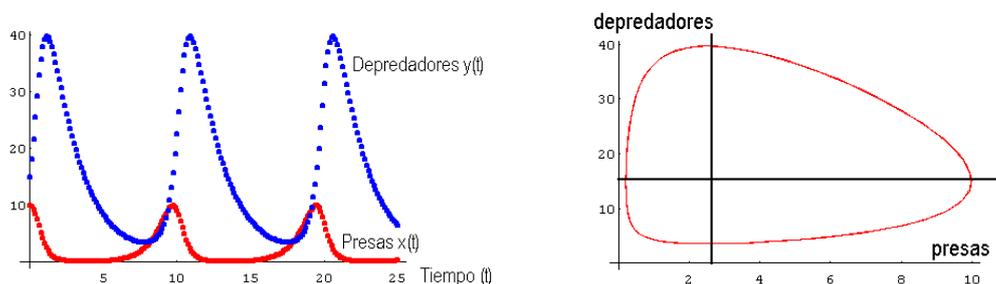


Figura 6.8. Izquierda: Evolución de presas y depredadores. Derecha: Solución en el plano fase.

5.3. Cálculo aproximado de valores propios

Como tenemos ocasión de ver a lo largo del presente proyecto, el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz cuadrada está presente en un número elevado de diferentes

aplicaciones. Parece lógico pensar que, para su cálculo, una buena manera de actuar sería encontrar el polinomio característico $p(\lambda) = |A - \lambda I|$, y posteriormente estimar las raíces de este polinomio. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones sólo se necesita conocer un determinado valor propio, llamado dominante, y existen procedimientos numéricos para hallar este valor. Nosotros utilizaremos el método conocido con el nombre de las potencias, el cual se encuentra íntimamente ligado al estudio de la estabilidad de las clases de edades del modelo matricial de *Leslie*.

DEFINICIÓN 5.3.1 Diremos que λ_1 es el valor propio dominante de una matriz A , si es mayor en valor absoluto que el resto de los valores propios de A . Un vector propio asociado a este valor propio dominante recibe el nombre de vector propio dominante de la matriz A .

Supongamos que los valores propios de la matriz A de orden cinco son:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -5, \quad \lambda_4 = 3.5, \quad \lambda_5 = -2.3,$$

entonces el valor propio dominante es el $\lambda_3 = -5$. Observemos que si, por ejemplo, $\lambda_1 = 5$, entonces no existe un valor propio que sea dominante.

5.3.1. Método de las potencias

A continuación describiremos un procedimiento para estimar el valor propio dominante y su vector propio dominante asociado, conocido con los nombres de método de las potencias o de las iteraciones. Está basado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.11

- Sea la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix},$$

y tomemos como vector inicial uno cualquiera $\vec{x}(0) = (2, 1)^T$. Ahora, calculemos

$$\vec{x}(1) = A\vec{x}(0) = \gamma_1(1, 1.25)^T$$

$$\vec{x}(2) = A\vec{x}(1) = A^2\vec{x}(0) = \gamma_2(1, 1.7)^T$$

$$\vec{x}(3) = A\vec{x}(2) = A^3\vec{x}(0) = \gamma_3(1, 1.89)^T$$

$$\vec{x}(4) = A\vec{x}(3) = A^4\vec{x}(0) = \gamma_4(1, 1.96341)^T$$

...

$$\vec{x}(10) = A^{10}\vec{x}(0) = \gamma_{10}(1, 1.99995)^T.$$

Como puede observarse, los diferentes valores de $\vec{x}(k)$ tiende a un múltiplo del vector $(1, 2)^T$ cuando k es suficientemente grande. Éste será el vector propio dominante.

Pasemos a formalizar el razonamiento anterior. Supongamos que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

y además, la matriz A es diagonalizable. Entonces debe de existir una base de \mathbb{R}^n formada por vectores propios $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, donde \vec{u}_i es el vector propio asociado al valor propio λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Por definición de base, el vector inicial $\vec{x}(0)$ puede escribirse:

$$\vec{x}(0) = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n,$$

donde algún coeficiente c_i tiene que ser no nulo, supongamos que $c_1 \neq 0$. Si calculamos $\vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{x}(k) &= A^k(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n) \\ &= c_1A^k\vec{u}_1 + c_2A^k\vec{u}_2 + \cdots + c_nA^k\vec{u}_n \\ &= c_1\lambda_1^k\vec{u}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{u}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\vec{u}_n \\ &= \lambda_1^k \left(c_1\vec{u}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \vec{u}_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \vec{u}_n \right). \end{aligned}$$

Al ser λ_1 el valor propio dominante, entonces $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$, $i = 2, 3, \dots, n$, y en consecuencia $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k$ tiende a cero para valores de k suficientemente grandes. Es decir,

$$\boxed{\vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0) \approx \lambda_1^k c_1 \vec{u}_1},$$

el vector resultante es proporcional al vector propio dominante buscado. Una vez conocida una estimación del vector propio dominante \vec{u}_1 , es posible encontrar su valor propio dominante asociado. La fórmula se conoce con el nombre de **cociente de Rayleigh**, y consiste en lo siguiente:

Si $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ representa al producto escalar ordinario de los vectores \vec{a} y \vec{b} , es fácil comprobar que

$$\frac{\langle \vec{u}_1, A\vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{\langle \vec{u}_1, \lambda_1 \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{\lambda_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \lambda_1.$$

Si aplicamos este resultado al Ejemplo 3.3

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \vec{u}_1, A\vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{\langle (1, 2)^T, A(1, 2)^T \rangle}{\langle (1, 2)^T, (1, 2)^T \rangle} = \frac{\langle (1, 2)^T, (12, 15)^T \rangle}{\langle (1, 2)^T, (1, 2)^T \rangle} = \frac{42}{5} = 8.4.$$

Naturalmente, esta aproximación puede ser mejorada tomando en lugar del $\vec{x}(1)$ el $\vec{x}(10)$, pero recordemos que todo lo dicho es válido si λ_1 es dominante.

La expresión $\vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0) \approx \lambda_1^k c_1 \vec{u}_1$, también nos permite encontrar un valor aproximado de λ_1 . En efecto,

$$\vec{x}(k) \approx \lambda_1^k c_1 \vec{u}_1 = \lambda_1 \lambda_1^{k-1} c_1 \vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{x}(k-1),$$

lo que obliga a la siguiente relación entre sus componentes:

$$\vec{x}_j(k) \approx \lambda_1 \vec{x}_j(k-1), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \approx \frac{\vec{x}_j(k)}{\vec{x}_j(k-1)}.$$

5.3.2. El método de las potencias con cambio de escala

En el Ejemplo 3.3 vimos que con cada iteración aumentaba el valor de las componentes del vector, y una manera de evitar este problema era aplicar cierta escala γ_i . Básicamente este proceso se conoce con el nombre de método de las potencias con cambio de escala. Aplicando este procedimiento siempre obtenemos un vector cuya componente mayor en valor absoluto es uno.

EJEMPLO 5.12

- Aplicaremos el método de las potencias con cambio de escala, para encontrar el valor propio y el vector propio dominante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Empezamos tomando como vector inicial uno que nos permita simplificar las operaciones, por ejemplo $\vec{x}(0) = (1, 1)^T$.

$$\vec{x}(1) = A\vec{x}(0) = (-9, 3)^T = -9(1, -1/3)^T$$

$$\vec{x}(2) = A(1, -1/3)^T = -7/3(1, -1/7)^T.$$

Una posible estimación del vector propio dominante puede ser $\vec{u}_1 \approx (1, -1/7)^T = (1, -0.14286)^T$. Por otro lado, por definición de vector y valor propio

$$A\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.14286 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -0.14286\lambda_1 \end{pmatrix},$$

y podemos estimar el valor de $\lambda_1 \approx -3.28$.

Una de las preguntas que está presente en todo el estudio que estamos desarrollando es la siguiente: ¿cuántos pasos debemos usar en el método de las potencias para obtener una buena estimación? No existe una respuesta rotunda a esta pregunta, pero el análisis del error relativo puede aportar una solución parcial al problema.

DEFINICIÓN 5.3.2 Si \tilde{a} es una estimación de la cantidad a , entonces el error relativo se define como:

$$\left| \frac{a - \tilde{a}}{a} \right|.$$

El error en porcentaje en la estimación se define como

$$\left| \frac{a - \tilde{a}}{a} \right| \times 100\%.$$

Supongamos que inicialmente el error relativo que estamos dispuestos a tolerar en el valor propio dominante es ϵ . Si $\tilde{\lambda}_1(i)$ es la estimación de λ_1 en la i -ésima iteración, entonces el método se terminaría cuando se cumpla:

$$\left| \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(i)}{\lambda_1} \right| < \epsilon.$$

No obstante, aplicar la fórmula anterior tiene el gran inconveniente de que el valor exacto λ_1 no es conocido. En este caso, suele sustituirse la expresión anterior por esta otra:

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}_1(i) - \tilde{\lambda}_1(i-1)}{\tilde{\lambda}_1(i)} \right| < \epsilon,$$

donde la cantidad que aparece a la izquierda se la conoce con el nombre de error relativo estimado, y si se multiplica por 100%, se llama error en porcentaje estimado.

5.3.3. Deflación

A través del método de las potencias podemos estimar el valor propio dominante y un vector propio asociado. Existen diferentes técnicas para conocer el resto de los valores propios. De todas ellas nosotros utilizaremos la conocida con el nombre de deflación. El método está basado en el siguiente teorema cuya demostración puede verse en cualquier texto de métodos numéricos del álgebra lineal.

TEOREMA 5.3.3 Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, los valores propios de la matriz A . Supongamos que λ_1 es el valor propio dominante, \vec{u}_1 su vector propio asociado, y \vec{v} un vector tal que $\langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle = 1$. Sea B la matriz definida como

$$B = A - \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{v}^T.$$

Entonces los valores propios de la matriz B son $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Se conoce con el nombre de deflación al proceso de encontrar el resto de los valores propios a partir del valor propio dominante. Para ello se aplica el método de las potencias con escala a la nueva matriz B .

EJEMPLO 5.13

- Aplicaremos el método de las potencias con cambio de escala y la deflación para encontrar todos los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos como vector inicial $\vec{x}(0) = (1, 1, 1)^T$, entonces $\vec{x}(1) = A\vec{x}(0) = (4, 0, 2)^T$ que dividiendo por 4 nos queda $\vec{x}'(1) = (1, 0, 0.5)^T$. De forma similar $\vec{x}(2) = A\vec{x}'(1) = (4.5, -2, 2.5)^T$, o bien

$$\vec{x}'(2) = (1, -0.44444, 0.555556)^T.$$

Los valores siguientes se encuentran representados en la tabla siguiente. También aparecen los cocientes entre la primera de las componentes de una iteración y la anterior γ_k .

Iteración	$\vec{x}(k)$	$\vec{x}'(k)$	γ_k
0	$(1, 1, 1)^T$	$(1, 1, 1)^T$	-
1	$(4, 0, 2)^T$	$(1, 0, 0.5)^T$	4
2	$(4.5, -2, 2.5)^T$	$(1, -0.44444, .555556)^T$	4.5
3	$(5, -3.4444, 3.5556)^T$	$(1, -0.68888, 0.71112)^T$	5
4	$(5.4, -4.4889, 4.5111)^T$	$(1, -0.83128, 0.83539)^T$	5.4
5	$(5.6667, -5.1646, 5.1687)^T$	$(1, -0.91139, 0.91212)^T$	5.6667
6	$(5.8235, -5.5584, 5.5591)^T$	$(1, -0.95448, 0.95460)^T$	5.8
7	$(5.9091, -5.7726, 5.7728)^T$	$(1, -0.97690, 0.97693)^T$	5.9091
8	$(5.9538, -5.8846, 5.8846)^T$	$(1, -0.98838, 0.98838)^T$	5.9538
9	$(5.9768, -5.9419, 5.9419)^T$	$(1, -0.99416, 0.99416)^T$	5.9768
10	$(5.9883, -5.9708, 5.9708)^T$	$(1, -0.99708, 0.99708)^T$	5.9883

Se observa que el valor propio dominante es $\lambda_1 \approx 6$ y su vector propio asociado $\vec{u}_1 \approx (1, -1, 1)^T$.

Para encontrar el resto de los valores y vectores propios aplicamos el método de deflación, y para ello necesitamos un vector \vec{v} tal que $\langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle = 1$. Podemos tomar $\vec{v} = (1/3, -1/3, 1/3)^T$ y calcular

$$B = A - \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{v}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al ser la primera de las columnas la diferencia entre la segunda y la tercera, el determinante de la matriz B es cero y eso obliga a que uno de sus valores propios

sea cero, hecho que conocíamos por el Teorema 5.3.3. Ahora, aplicamos de nuevo el método de las potencias a la matriz B con objeto de encontrar su vector propio dominante, que coincidirá con otro de los valores propios de la matriz A .

Iteración	$\vec{x}(k)$	$\vec{x}'(k)$	γ_k
0	$(1, 1, 1)^T$	$(1, 1, 1)^T$	-
1	$(2, 2, 0)^T$	$(1, 1, 0)^T$	2
2	$(3, 2, -1)^T$	$(1, 0.66667, -0.333333)^T$	3
3	$(3, 1.6667, -1.3333)^T$	$(1, 0.555557, -0.44443)^T$	3
4	$(3, 1.5556, -1.4444)^T$	$(1, 0.51853, -0.48147)^T$	3
5	$(3, 1.5062, -1.4938)^T$	$(1, 0.50207, -0.49793)^T$	3
6	$(3, 1.5062, -1.4938)^T$	$(1, 0.5027, -0.49793)^T$	3

Puede apreciarse que $\vec{u}_2 \approx (1, 1/2, -1/2)^T$ y $\lambda_2 \approx 3$.

Para finalizar aplicamos de nuevo la deflación para calcular el último de los valores y vectores propios de A . Puede tomarse $\vec{v} = (1, 0, 0)^T$, ya que $\langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = 1$, y entonces

$$C = B - \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{v}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos convenientes se llega a que $\lambda_3 \approx 1$ y $\vec{u}_3 \approx (0, -2, 1)^T$.
