Tema 3

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE E.D.O

3.1. Preliminares

Cuando intentamos modelizar la dinámica de dos poblaciones que interaccionan en un mismo hábitat, nos encontramos con un sistema de ecuaciones diferenciales. Son muchas las situaciones que pueden ser modelizadas a través de un sistema de E.D.O como el siguiente ejercicio donde se encuentran involucrados dos depósitos conectados entre si.

EJEMPLO 3.1

- Supongamos los tanques de la Figura 4.1. El tanque A contiene 50 litros de agua en el que se ha disuelto 25 kilos de sal, y el tanque B con 50 litros de agua pura.

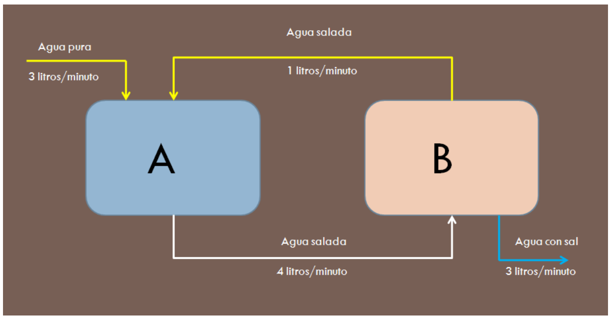

Figura 4.1.

Un líquido se bombea hacia dentro y fuera de los tanques como se indica en la Figura 4.1. Supongamos que el líquido que se intercambia entre los dos tanques y el líquido bombeado hacia fuera del tanque B se encuentra perfectamente mezclado.

Sean $x(t)$, $y(t)$ las cantidades de sal en el tanque A y B, respectivamente, en el minuto t. Realizando un estudio parecido a los modelos de disolución estudiados, sabemos que $x'(t)$ se escribe como la entrada de sal en el tanque A en el minuto t, menos la salida de sal en el tanque A en el minuto t. Es decir,

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = (3\,l/min) * (0Kg/l) + (1\,l/min) * \left(\frac{y(t)}{50}\,Kg/l\right) - (4\,l/min) * \left(\frac{x(t)}{50}\,Kg/l\right) \\ \\ y'(t) = (4\,l/min) * \left(\frac{x(t)}{50}\,Kg/l\right) - (3\,l/min) * \left(\frac{yt)}{50}\,Kg/l\right) - (1\,l/min) * \left(\frac{y(t)}{50}\,Kg/l\right) \end{array}\right.$$

simplificando, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} & = & -\dfrac{2}{25}x(t) + \dfrac{1}{50}y(t) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} & = & \dfrac{2}{25}x(t) - \dfrac{2}{25}y(t) \end{array}\right. \tag{3.1}$$

que en unión con las condiciones iniciales $x(0) = 25$, $y(0) = 0$ modeliza a la situación planteada.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es aquel que puede expresarse como

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{array}\right. \tag{3.2}$$

siendo $f_1, f_2, \cdots, f_n$, funciones reales definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Una función $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, cuyas componentes están definidas y son derivables en un intervalo, es una solución de (3.2) en dicho intervalo, cuando lo verifica idénticamente en él.

El primer problema que se nos plantea es saber si existe solución y en caso afirmativo ver si ésta es única. Puesto que gran parte de los modelos que utilizaremos serán de dinámica de poblaciones en los que están implicadas dos especies, los sistemas que nos aparecerán serán de dos ecuaciones. Por esta razón simplificaremos (3.2) convenientemente en los próximos teoremas.

TEOREMA 3.1.1 *Sea el siguiente problema de valores iniciales:*

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = f(t, x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(t, x, y), & y(t_0) = y_0 \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Si las funciones f y g son continuas en un abierto que contenga al punto (t_0, x_0, y_0), entonces existe al menos una solución definida en un intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

TEOREMA 3.1.2 *Además, si existen las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f(t,x,y)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f(t,x,y)}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial g(t,x,y)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial g(t,x,y)}{\partial y}\,,$$

y son continuas, entonces la solución del problema de valores iniciales (3.3) *es única.*

3.2. Diagonalización de matrices cuadradas

Para la resolución de sistemas del tipo (3.1), es necesario calcular los valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Por tal motivo en esta sección recordaremos los conceptos más importantes relativos a la diagonalización de matrices cuadradas.

3.2.1. Introducción

De todas las aplicaciones lineales tienen un interés especial aquellas que van del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ en si mismo, que reciben el nombre de endomorfismos. En ocasiones, es conveniente poder caracterizar un endomorfismo por una matriz lo más sencilla posible, con lo cual se simplifican todos los cáculos. Es normal que al representar matricialmente el endomorfismo, se elijan las mismas bases en los espacios de salida y entrada. De esta forma, si se realiza algún cambio de base en uno de los espacios, inmediatamente se produce el mismo cambio en el otro. Lo verdaderamente interesante en el estudio de un endomorfismo, es la matriz que lo representa y al utilizar las mismas bases de referencia, lo mismo da tomar la matriz A o bien la $C^{-1}AC$. Esto nos lleva a considerar que las matrices A y $C^{-1}AC$ son **semejantes** y que $C^{-1}AC$ se alcanza a partir de A por transformaciones de A.

Entre las matrices más cómodas para el cálculo y simples para su interpretación, están las matrices **diagonales**. Toda matriz cuadrada A puede considerarse como la matriz que representa a un endomorfismo, referida a la base canónica, tanto en el espacio de salida como en el de entrada. En virtud de las ventajas de utilizar matrices diagonales, podemos preguntarnos:

- ¿Existe alguna matriz diagonal B semejante a la matriz A?
- En caso afirmativo, ¿qué base es la que tenemos que elegir en el espacio vectorial para que el endomorfismo esté representado por la matriz B?

Esta cuestión es también conocida como el **problema de la diagonalización**. Una aplicación inmediata será la de desarrollar métodos que nos permitan transformar un sistema de ecuaciones lineales complicado en otro más sencillo de resolver, y esto se hace eligiendo entre las matrices semejantes que representen el sistema, la que sea más sencilla, que evidentemente, si existe, será la que tenga forma de matriz diagonal. Estas técnicas son empleadas con frecuencia en múltiples campos de la matemática, como son entre otros: el análisis y descomposición de modelos biológicos lineales, análisis de datos multivariantes, análisis estructural, el análisis de la productividad de una matriz *input- output* de *Leontief*, la programación lineal, el análisis de las formas cuadráticas o el análisis de la estabilidad de los sistemas dinámicos.

3.2.2. Matrices semejantes

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo cuyas ecuaciones respecto de una cierta base B vienen dadas por la expresión $Y = AX$, donde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si cambiamos la base B por otra base B', las ecuaciones de f respecto a B' serán:

$$Y' = C^{-1}ACX' = A'X' \,,$$

donde C es la matriz del cambio de base de B' a B. Por otro lado, puede comprobarse que todas las matrices del tipo $A' = C^{-1}AC$ son matrices asociadas al mismo endomorfismo f (respecto de distintas bases). En este caso, diremos que las matrices A y A' son semejantes.

Nos proponemos averiguar, si entre todas las matrices asociadas a un mismo endomorfismo mediante la correspondencia $C^{-1}AC$, existe alguna que sea diagonal. En este caso, tomando a esta matriz diagonal como la asociada al endomorfismo, sus ecuaciones se simplifican.

DEFINICIÓN 3.2.1 (Polinomio característico) *Llamaremos polinomio característico de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ al siguiente polinomio de grado n en λ*

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} .$$

Las raíces reales del polinomio característico serán los *autovalores o valores propios* de la matriz A. Llamaremos *orden de multiplicidad* de un autovalor λ a la multiplicidad de la raíz λ del polinomio característico. Algunas de sus propiedades más importantes de las matrices semejantes son las siguientes:

(a) Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico (y, por tanto, los mismos autovalores).

(b) Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante.

(c) Si dos matrices A y B son semejantes, entonces también lo son sus potencias A^n y B^n.

3.2.3. Diagonalización de matrices cuadradas.

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo cuya matriz asociada es $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ respecto de una cierta base B de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que f sea diagonalizable, es decir, que existe otra base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que la matriz asociada a f respecto de B' es una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

que será, por tanto semejante a A. Entonces, como sabemos, los elementos de la i-ésima columna de D, $(0,\cdots,\lambda_i,\cdots,0)^T$, serán las coordenadas de $f(\vec{v}_i)$ en la base B', con $i=1,2,\cdots,n$. Escribiendo en forma vectorial dichas identidades, obtendremos que

$$f(\vec{v}_i)=\lambda_i\vec{v}_i\,,\qquad i=1,2,\cdots,n\,.$$

DEFINICIÓN 3.2.2 *Llamaremos autovalor o valor propio de f a todo escalar λ tal que existe $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, no nulo, cumpliéndose:*

$$f(\vec{v})=\lambda\vec{v}\,.$$

A todo vector $\vec{v}$ que verifique la condición anterior le llamaremos autovector o vector propio de f asociado al autovalor λ.

Hemos visto que si f es diagonalizable, entonces existe una base del espacio vectorial formada por los autovectores de f. Por otro lado, si una base $B=\{\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\}$ está formada por autovectores de f, entonces existen n escalares $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ tales que $f(\vec{v}_1)=\lambda_1\vec{v}_1, f(\vec{v}_2)=\lambda_2\vec{v}_2,\cdots,f(\vec{v}_n)=\lambda_n\vec{v}_n$, y, por tanto, la matriz asociada a f respecto a esa base será la matriz diagonal

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Resumiendo, el problema de diagonalizar un endomorfismo f (también conocido como el problema de diagonalizar su matriz asociada A), es equivalente al problema de encontrar una base del espacio vectorial formada por los autovectores de f.

Veamos a continuación en qué casos existe dicha base y cómo se calcula.

Escribiendo en forma matricial la ecuación

$$f(\vec{v}_i)=\lambda_i\vec{v}_i\,,\qquad i=1,2,\cdots,n\,,$$

o su equivalente

$$A\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i\quad\Rightarrow\quad(A-\lambda_iI)\,\vec{v}_i=0\,.$$

Por el teorema de *Rouché - Fröbenius*, el sistema anterior tendrá solución no nula si y solamente si $|A-\lambda_iI|=0$, es decir, si $P_A(\lambda_i)=0$. Por tanto, los autovalores de f resultan ser los autovalores de su matriz asociada A. En consecuencia, la matriz diagonal buscada, si existe, será la matriz formada por los autovalores de A.

Una vez obtenidos los autovalores a partir del polinomio característico de A, los sustituiremos en la ecuación matricial $(A-\lambda_iI)X=0$; desarrollando esta última ecuación obtendremos un sistema lineal homogéneo que nos proporciona las ecuaciones de un subespacio vectorial, al que llamaremos subespacio propio asociado al autovalor λ_i. Obviamente, los vectores de este subespacio son los autovectores de f asociados al autovalor λ_i. Observemos que la dimensión de todo subespacio propio será, como mínimo, igual a uno.

LEMA 3.2.3 *Autovectores asociados a autovalores distintos dos a dos son linealmente independientes*

Demostración. Supongamos dos autovalores diferentes $\lambda_i \neq \lambda_j$ y sean $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_j$ sus autovectores asociados. Es decir

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i \,, \quad f(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j \,.$$

Si estos dos vectores no son linealmente independientes, entonces $\vec{v}_i = k\vec{v}_j$, lo que implica que

$$f(\vec{v}_i) = f(k\vec{v}_j) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i \vec{v}_i = k\lambda_j \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_i \,.$$

Pero al ser vectores no nulos, esta última igualdad implicaría que $\lambda_i = \lambda_j$, en contra de lo supuesto. ■

Como consecuencia del lema, vectores no nulos pertenecientes a distintos subespacios propios son linealmente independientes.

LEMA 3.2.4 *La dimensión del subespacio propio asociado a un cierto valor propio es como mucho igual al orden de multiplicidad del autovalor.*

Llamando α_i a la multiplicidad del autovalor λ_i y S_i al subespacio propio asociado con λ_i, tendremos que

$$1 \leq \dim(S_i) \leq \alpha_i.$$

Recordemos que la condición necesaria y suficiente obtenida para la existencia de una matriz diagonal semejante a A era poder encontrar una base del espacio vectorial formada enteramente por autovectores de f. Ahora bien, de los lemas anteriores se deduce que tal condición es equivalente a que la unión de bases de los subespacios propios sea base de todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, para lo cual es necesario y suficiente que la suma de las dimensiones de los subespacios propios sea n. Pero por el segundo lema, y puesto que suponemos que todas las raíces del polinomio característico de A son reales, esto equivale a que la multiplicidad de todo autovalor sea igual a la dimensión de su subespacio propio asociado.

TEOREMA 3.2.5 *El endomorfismo f es diagonalizable si y solo si para todo autovalor λ_i de f se tiene que $\alpha_i = \dim(S_i)$.*

Para llegar a un resultado más práctico, aplicamos la fórmula de las dimensiones al endomorfismo $(f - \lambda_i I)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} n &= \dim(\mathbb{R}^n) \\ &= \dim(\mathrm{Kern}(f - \lambda_i I)) + \dim(\mathrm{Img}(f - \lambda_i I)) \\ &= \dim(S_i) + \mathrm{Rango}(A - \lambda_i I) \end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{Rango}(A - \lambda_i I) = n - \dim(S_i)$$

TEOREMA 3.2.6 *El endomorfismo f es diagonalizable si y solo si para cualquier autovalor λ_i de f, se tiene que*

$$\mathrm{Rango}(A - \lambda_i\, I) = n - \dim(S_i) = n - \alpha_i.$$

Si D es la matriz diagonal formada por los autovalores de f y C es la matriz del cambio de bases, cuyas columnas son los vectores propios asociados a los valores propios de f, entonces:

$$D = C^{-1}\, A\, C$$

3.2.4. Cálculo de la potencia de una matriz diagonalizable

Supongamos que deseamos calcular la potencia n-ésima A^n, de una matriz A cuadrada y diagonalizable. Puesto que $D = C^{-1}A\,C$, se tiene que $A = C\,D\,C^{-1}$, y entonces

$$\begin{array}{l} A^2 = (CDC^{-1})\,(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1} \\ A^3 = (CD^2C^{-1})(CDC^{-1}) = CD^3C^{-1} \\ A^4 = (CD^3C^{-1})(CDC^{-1}) = CD^4C^{-1}\,. \end{array}$$

Por inducción, puede demostrarse que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad A^n = CD^nC^{-1}\,.$$

Al ser D diagonal

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p^n \end{pmatrix}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

y, por tanto, el cálculo de CD^nC^{-1} resulta ser sumamente sencillo.

EJEMPLO 3.2

- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

para saber si es diagonalizable comenzamos resolviendo la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 3\,.$$

A continuación, calculamos las dimensiones de los subespacios engendrados por cada autovalor:

$$\begin{array}{l} \dim(S_1) = 3 - \text{Rango}(A - 2I) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(S_2) = 3 - \text{Rango}(A - 3I) = 3 - 2 = 1 \end{array}$$

La suma de las dimensiones es 2 y por tanto la matriz A no será diagonalizable.

EJEMPLO 3.3

- Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo, cuya matriz respecto a una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el ordenador para encontrar los valores y vectores propios de f. Empezamos introduciendo la matriz
`A:={{1,-1,0},{2,4,0},{0,0,3}}`
A continuación calculamos los valores propios:
`Eigenvalues[A]`
{2, 3, 3}
Como no existen tres valores propios distintos, de entrada no podemos afirmar que la matriz A sea diagonalizable. Para ello es necesario conocer los vectores propios de f
`Eigenvectors[A]`
{{-1,1,0},{-1,2,0},{0,0,1}} .
Para ver si forman una base de $\mathbb{R}^3$ calculamos su determinante
`det[{{-1,1,0},{-1,2,0},{0,0,1}}]`
-1
Como podemos ver los tres vectores son independientes y, por tanto, existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f. En consecuencia, la matriz A será diagonalizable.

3.3. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

Se trata de sistemas del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{array}\right. \tag{3.4}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

Para encontrar la solución general de (3.4) es necesario conocer n soluciones linealmente independientes. Si A es la matriz de los coeficientes, entonces las raíces de su ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$, nos proporcionan las soluciones buscadas.

- Si **todos los valores propios** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$**, son distintos dos a dos**, y el vector $(x_{1i}, \cdots, x_{ni})^T$ es el vector propio asociado al valor propio λ_i, entonces

$$y_i = (y_{1i}, \cdots, y_{ni})^T = (x_{1i}, \cdots, x_{ni})^T e^{\lambda_i t}, \tag{3.5}$$

  es una solución del sistema (3.4)

- Cuando la ecuación característica tiene **raíces múltiples,** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$**, con multiplicidades** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, respectivamente $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n)$, y **la matriz de los coeficientes** A **es diagonalizable**, entonces actuamos igual que en el primer caso

- Cuando la ecuación característica tiene **raíces múltiples,** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$**, con multiplicidades** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, respectivamente $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n)$, y **la matriz de los coeficientes** A **no es diagonalizable**, entonces para cada λ_i, $i = 1, 2, \cdots, s$, existen soluciones del sistema (3.4) de la forma

$$z_i = \begin{pmatrix} P_{i1}(t)e^{\lambda_i t} \\ P_{i2}(t)e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ P_{in}(t)e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

  donde $P_{i1}, \cdots, P_{in}$ son polinomios de grado inferior a α_i.

EJEMPLO 3.4

- Vamos a obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & 2y_1 & - & 2y_2 & + & 3y_3 \\ y_2' & = & y_1 & + & y_2 & + & y_3 \\ y_3' & = & y_1 & + & 3y_2 & - & y_3 \end{array}\right.$$

La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$. Es fácil comprobar que

$$(-1, 1, 1), \quad (-11, -1, 14), \quad (1, 1, 1),$$

son tres autovectores asociados a los tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente. La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Es decir

$$\begin{array}{rcrrr} y_1 & = & -c_1 e^t & -11 c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{3t} \\ y_2 & = & c_1 e^t & -c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{3t} \\ y_3 & = & c_1 e^t & +14 c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{3t}. \end{array}$$

EJEMPLO 3.5

- Para obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & y_1 & - & 3y_2 & + & 3y_3 \\ y_2' & = & 3y_1 & - & 5y_2 & + & 3y_3 \\ y_3' & = & 6y_1 & - & 6y_2 & + & 4y_3 \end{array} \right.$$

comprobamos que la ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2$. Puede verse que la matriz A es diagonalizable siendo

$$(1, 1, 2), \quad (1, 1, 0), \quad (0, 1, 1),$$

una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Es decir

$$\begin{array}{rcrrr} y_1 & = & c_1 e^{4t} & +c_2 e^{-2t} & \\ y_2 & = & c_1 e^{4t} & +c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{-2t} \\ y_3 & = & 2c_1 e^{4t} & & +c_3 e^{-2t}. \end{array}$$

EJEMPLO 3.6

- Para obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 2y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & -y_1 & + & 4y_2 \end{array}\right.$$

Volveremos a resolver la ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

que viene dada por $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. La ecuación tiene la raíz doble $\lambda_1 = 3$ es un autovalor doble y es inmediato comprobar que no existen dos autovectores de A que sean linealmente independientes. Por tanto, la matriz A no es diagonalizable. En este caso, el sistema posee soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 t + c_2)e^{3t} \\ (c_3 t + c_4)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Si sustituimos en el sistema inicial

$$\left\{\begin{array}{r} c_1 e^{3t} + 3(c_1 t + c_2)e^{3t} = 2(c_1 t + c_2)e^{3t} + (c_3 t + c_4)e^{3t} \\ c_3 e^{3t} + 3(c_3 t + c_4)e^{3t} = -(c_1 t + c_2)e^{3t} + 4(c_3 t + c_4)e^{3t} \end{array}\right.$$

que simplificando e identificando coeficientes obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} 3c_1 & = & 2c_1 + c_3 \\ 3c_2 + c_1 & = & 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 & = & 4c_3 - c_1 \\ c_3 + 3c_4 & = & -c_2 + 4c_4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_3 = c_1,\ c_4 = c_1 + c_2$$

La expresión general de la solución general viene dada por

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & (c_1 t + c_2)e^{3t} \\ y_2 & = & (c_1 t + (c_1 + c_2))e^{3t} \end{array}$$

3.4. Sistemas lineales completos con coeficientes constantes

Son sistemas de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(t) \end{array}\right. \tag{3.6}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

Un primer procedimiento de resolución de estos sistemas consiste en expresar el sistema anterior como una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden superior. Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.7

- Para resolver
$$\left.\begin{array}{rcr} \dfrac{dx}{dt} & = & -y+t \\ \dfrac{dy}{dt} & = & x-t \end{array}\right\}$$
derivamos la segunda de las ecuaciones y la sumamos con la primera
$$y''+y=t-1\,. \tag{3.7}$$
Para encontrar la solución general de (3.7) debemos comenzar localizando la solución general $y_h(t)$ de la ecuación diferencial homogénea $y''+y=0$.

  Las raíces de su ecuación característica son $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$, lo cual nos permite escribir
$$y_h(t)=c_1e^{it}+c_2e^{-it}=(c_1+c_2)\text{cos}t+(ic_1-ic_2)\text{sen}t=k_1\text{cos}t+k_2\text{sen}t\,.$$
Para obtener la solución particular de (3.7), derivamos dos veces en la ecuación diferencial inicial
$$y^{4)}+y''=0\,.$$
Al ser $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=i$, $\lambda_4=-i$, las raíces características podemos escribir la solución general
$$y=(k_1\text{cos}t+k_2\text{sen}t)+(A+Bt)\,,$$
vemos que la solución particular responde al tipo $y_p=A+Bt$. Para determinar A y B sustituimos $y(t)$ en (3.7)
$$y''+y=t-1\ \Rightarrow\ (0)+(A+Bt)=t-1\ \Rightarrow\ A=-1,\,B=1\,.$$
En conclusión,
$$y(t)=-1+t+k_1\text{cos}t+k_2\text{sen}t\,. \tag{3.8}$$
Para encontrar el valor de $x(t)$ procedemos de forma similar. En primer lugar eliminamos y en el sistema (3.7)
$$x''+x=1+t\,.$$
La ecuación diferencial que obtenemos es parecida a la encontrada en el primer apartado y puede comprobarse que
$$x(t)=1+t+M_1\text{cos}t+M_2\text{sen}t\,. \tag{3.9}$$
Pero al ser (3.8) y (3.9) las soluciones, deben de verificar (3.7). Es inmediato comprobar que para que esto sea posible las constantes k_1,k_2,M_1,M_2 deben de cumplir la siguiente relación:
$$M_1=k_2 \quad , \quad M_2=-k_1$$
Es decir
$$\boxed{\begin{array}{rcr} x(t) & = & 1+t-k_1\text{sen}t+k_2\text{cos}t \\ y(t) & = & -1+t+k_1\text{cos}t+k_2\text{sen}t \end{array}}$$

3.4.1. Método de variación de parámetros

Para resolver (3.6) en primer lugar buscamos la solución de sistema lineal homogéneo. A continuación, localizamos una solución particular del sistema (3.6) utilizando un procedimiento similar al método de variación de las constantes estudiado para las ecuaciones diferenciales. La solución la obtendremos sumando la solución particular con la solución general del correspondiente sistema homogéneo.

Si

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \quad \cdots, y_n(t) = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

es un conjunto fundamental del sistema lineal homogéneo asociado a (3.6), entonces la función

$$\alpha_1(t)y_1(t) + \alpha_2(t)y_2(t) + \cdots + \alpha_n(t)y_n(t)$$

donde $\alpha_i(t), i = 1, 2, \cdots, n$ son soluciones del siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{l} b_1(t) = \alpha_1'(t)y_{11}(t) + \cdots + \alpha_n'(t)y_{1n}(t) \\ \\ b_2(t) = \alpha_1'(t)y_{21}(t) + \cdots + \alpha_n'(t)y_{2n}(t) \\ \\ \cdots \\ \\ b_n(t) = \alpha_1'(t)y_{n1}(t) + \cdots + \alpha_n'(t)y_{nn}(t) \end{array}\right\} \tag{3.11}$$

es una solución particular de (3.6).

EJEMPLO 3.8

- Para resolver el sistema
$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & 2y_1 + 2 \\ y_2' & = & y_1 + 3y_2 + e^t \end{array} \right. \tag{3.12}$$
  debemos encontrar los autovalores asociados a la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
  Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Y los subespacios de autovectores asociados
$$\begin{array}{l} S_1 = L(\lambda_1 = 2) = \{(t, -t) : \forall t \in \mathbb{R}^*\} =< (1, -1) > \\ S_2 = L(\lambda_2 = 3) = \{(0, \beta) : \forall \beta \in \mathbb{R}^*\} =< (0, 1) > \end{array}$$
  Estamos en condiciones de poder escribir la solución general del sistema homogéneo
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

O bien,

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & c_1e^{2t} \\ y_2 & = & -c_1e^{2t}+c_2e^{3t} \end{array}$$

Un sistema fundamental de (3.12) viene dado por

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix} ,$$

lo cual nos permite escribir una solución particular de (3.12)

$$\alpha_1(t)\begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \alpha_2(t)\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix} ,$$

siendo α_1 y α_2 soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \alpha_1'(t)e^{2t} & + & \alpha_2'(t)\times 0 & = & 2 \\ -\alpha_1'(t)e^{2t} & + & \alpha_2'(t)e^{3t} & = & e^t \end{array}\right\} .$$

Los valores de α_1, α_2 se obtienen de forma inmediata

$$\alpha_1(t) = -e^{-2t} \quad , \quad \alpha_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} .$$

Una solución particular de (3.12) será

$$\begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix} = -e^{-2t}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} .$$

Para finalizar escribamos la solución general del sistema (3.12) propuesto

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} .$$

Es decir,

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = \quad c_1e^{2t} - 1 \\ y_2(t) = -c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{array}}$$

3.5. Teoría cualitativa de sistemas

En el tema de las E.D.O hemos realizado el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales autónomas. Ahora, ampliaremos dicho estudio al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Hasta mediados del siglo XIX, básicamente el estudio de las ecuaciones diferenciales iniciado por *Newton* y *Leibnitz*, tenía como único objetivo el encontrar métodos cuantitativos para poder resolver la ecuación diferencial. Los pilares básicos donde se sustentaba toda esta teoría eran los teoremas de existencia y unicidad de *Peano* y *Picard*.

A partir del momento comentado, otros matemáticos liderados por *Lyapunov* y *Poincaré* se enfrentaron al estudio de las ecuaciones diferenciales desde otro punto de vista. Ahora, se presupone la existencia de las soluciones y el objetivo no es encontrarlas, sino que lo interesante es saber cuál es su comportamiento asintótico. En 1899 *Poincaré* publicó un célebre tratado relacionado con la mecánica celeste. En él abordó los puntos más importantes de la teoría cualitativa, como son: la estabilidad y la periodicidad.

En este tema, consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(t,x,y) \\ y' = g(t,x,y) \end{array} \right. \tag{3.13}$$

En la mayoría de las aplicaciones no es necesario encontrar explícitamente las soluciones de (3.13). Por ejemplo, supongamos que $x(t), y(t)$ representan a las poblaciones en el tiempo t de dos especies que compiten entre sí por el alimento y el espacio vital limitados en su hábitat. Supongamos también, que las tasas de crecimiento de $x(t)$ e $y(t)$ están gobernadas por el sistema diferencial anterior. En tal caso, no interesan los valores de $x(t)$ e $y(t)$ en todo tiempo t. Mas bien, son de interés las propiedades cualitativas que presentan $x(t)$ e $y(t)$. Concretamente, se desea contestar a las preguntas siguientes:

- ¿Hay valores α_1, α_2 para los cuales ambas especies coexisten en un regimen permanente? Es decir, ¿existen números α_1, α_2 tales que $x(t) = \alpha_1$, $y(t) = \alpha_2$ son una solución del sistema anterior? Si tales valores existen se les llama **puntos de equilibrio** del sistema (3.13).

- Supongamos que las dos especies coexisten en equilibrio. Repentinamente, se agregan algunos miembros de la primera especie al hábitat ¿Permanecerán $x(t)$ e $y(t)$ cerca de los valores de equilibrio para todo tiempo futuro?

- Supongamos que $x(t)$ e $y(t)$ tienen valores arbitrarios en $t = 0$. ¿Qué ocurre cuando t tiende a infinito? ¿Triunfará una de las dos especies, o terminará la lucha en un empate?

Más generalmente, interesa determinar las siguientes propiedades de las soluciones de (3.13)

- ¿Existen valores de equilibrio x_0 e y_0, para los cuales el vector (x_0, y_0) es solución del sistema inicial (3.13)?

- Sea $\phi(t)$ una solución de (3.13). Supongamos que $\psi(t)$ es una segunda solución con $\psi(0)$ muy cerca de $\phi(0)$. Es decir, $\psi_j(0)$ está muy cerca de $\phi_j(0)$, siendo $j = 1, 2$ ¿Permanecerá $\psi(t)$ cercano a $\phi(t)$ para todo tiempo futuro, o divergerá $\psi(t)$ de $\phi(t)$ al tender t a infinito? Esta pregunta se conoce como problema de **estabilidad**. Es el problema más fundamental en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y ha ocupado la atención de muchos matemáticos en los últimos cien años

- ¿Qué ocurre con las soluciones de (3.13) cuando t tiende a infinito? ¿Tienden todas las soluciones a valores de equilibrio? Si no tienden a valores de equilibrio, ¿se aproximarán al menos a una solución periódica?

La primera de las preguntas se responde de la siguiente manera. Observemos que x_0 e y_0 es un valor de equilibrio sí y solo sí:

$$\begin{aligned} 0 &= f(t, x_0, y_0) \\ 0 &= g(t, x_0, y_0) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.9

- Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

  $$\frac{dx(t)}{dt} = 1 - y(t)\,, \quad \frac{dx(t)}{dt} = x(t)^3 + y(t)\,.$$

  Los puntos de equilibrio se calculan resolviendo el sistema

  $$1 - y(t) = 0\,, \quad x(t)^3 + y(t) = 0\,.$$

  Existe un único punto de equilibrio $x(t) = -1\,, y(t) = 1$.

EJEMPLO 3.10

- Para hallar todas las soluciones de equilibrio del sistema

  $$\frac{dx(t)}{dt} = (x(t) - 1)(y(t) - 1)\,; \quad \frac{dy(t)}{dt} = (x(t) + 1)(y(t) + 1)$$

  tenemos que resolver el sistema homogéneo:

  $$\begin{aligned} (x(t) - 1)(y(t) - 1) &= 0 \\ (x(t) + 1)(y(t) + 1) &= 0\,. \end{aligned}$$

  La primera ecuación se satisface si $x(t)$, o bien $y(t)$, es igual a 1, mientras que la segunda ecuación se verifica si $x(t)$, o bien $y(t)$, es igual a -1. Por tanto, $x(t) = 1\,, y(t) = -1$ y $x(t) = -1\,, y(t) = 1$ son las soluciones de equilibrio del sistema.

DEFINICIÓN 3.5.1 *Una solución $x = \phi_1(t)$; $y = \phi_2(t)$ del sistema diferencial*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{array} \right. ,$$

se dice que es estable si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\psi_j(t_0) - \phi_j(t_0)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \epsilon\,, \quad \forall t > t_0\,, \quad j = 1, 2$$

para toda solución $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^T$ del sistema de ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN 3.5.2 *Si una solución es estable y además toda solución que empieza suficientemente cerca de $(\phi_1(t), \phi_2(t))^T$ tiende a $(\phi_1(t), \phi_2(t))^T$ cuando t tiende a infinito , entonces se dice que es asintóticamente estable.*

3.5.1. Órbitas y plano fase

El problema de la estabilidad puede resolverse por completo para todas las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Para este tipo de sistemas, en los cuales los coeficientes en las ecuaciones diferenciales son todos constantes, vimos en las secciones 3 y 4 métodos para encontrar sus soluciones explícitas. Además, el estudio local en entornos de puntos de equilibrio de sistemas no lineales puede reducirse al del caso lineal.

El estudio cualitativo de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales se simplifica si consideramos sistemas del tipo,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' = f(x,y) & ; & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(x,y) & ; & y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \tag{3.14}$$

que reciben el nombre de **autónomos**, (la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones). Físicamente, un sistema autónomo es aquel en el que los parámetros del sistema no dependen del tiempo. Los sistemas autónomos son frecuentes en la práctica; el movimiento de un péndulo no amortiguado de longitud l está regido por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0\,.$$

Haciendo $x = \theta$ y $y = d\theta/dt$, podemos reescribir la última ecuación como un sistema autónomo no lineal de dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -\left(\dfrac{g}{l}\right)\operatorname{sen} x \end{array} \right.$$

Observemos que toda solución de (3.14), $x = x(t), y = y(t)$ define una curva en el espacio tridimensional t, x, y. Es decir, el conjunto de todos los puntos $(t, x(t), y(t))$ describe una curva en el espacio tridimensional (t, x, y).

EJEMPLO 3.11

- Por ejemplo, la solución $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$ del sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y\,, \quad \frac{dy}{dt} = x\,,$$

describe una hélice en el espacio (t, x, y), ya que las soluciones son

$$x(t) = \cos t\,, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t$$

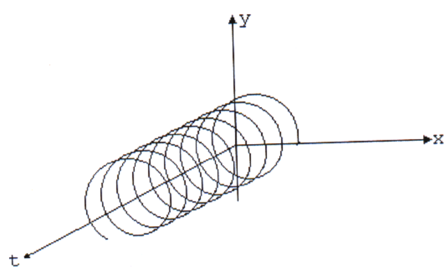

Figura 4.2. Órbita de $x' = -y$, $y' = x$.

Sin embargo, en muchas ocasiones se tiene en cuenta la curva definida por la solución en el plano Oxy. Es decir, se considera la curva $(x(t), y(t))$. Dicha curva se conoce como **órbita , trayectoria, o líneas de flujo** de la solución $x = x(t), y = y(t)$. El plano Oxy se denomina **plano fase** de las soluciones del sistema. De manera que podemos considerar la órbita $(x(t), y(t))$ como la trayectoria que describe la solución en el plano Oxy.

EJEMPLO 3.12

- Hemos visto que $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales $x' = -y$; $y' = x$. Conforme t aumenta de 0 a 2π, el conjunto de puntos $(cost, sent)$ describe la circunferencia unitaria $x^2+y^2 = 1$ en el plano Oxy. Por tanto, dicha curva $x^2 + y^2 = 1$ es la órbita de la solución $x = cost$, $y = sent$; $0 \leq t \leq 2\pi$. Cuando t aumenta de 0 a infinito, el conjunto de puntos $(cost, sent)$ describe la misma circunferencia un número infinito de veces.

EJEMPLO 3.13

- Puede comprobarse que $x = e^{-t}cost,\ y = e^{-t}sent$ con $-\infty < t < \infty$, es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcr} \dfrac{dx}{dt} & = & -x-y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} & = & x-y \end{array}\right.$$

  A medida que la variable t va de $-\infty$ a ∞, el conjunto de puntos $(e^{-t}cost, e^{-t}sent)$ describe una espiral en el plano Oxy.

Una de las ventajas de considerar la órbita de la solución y no la solución misma es que, con frecuencia, es posible obtener la órbita de una solución sin conocimiento previo de la solución.

Sea $x = x(t), y = y(t)$ una solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{array}\right.$$

si $x'(t)$ es diferente de cero en $t = t_1$, entonces se puede resolver con $t = t(x)$ en una vecindad o entorno del punto $x_1 = x(t_1)$. Así pues, para t cerca de t_1, la órbita de la solución $x(t), y(t)$ es la curva $y = y(t(x))$. Observemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

Las órbitas de las soluciones $x = x(t), y = y(t)$ del sistema anterior, son las curvas soluciones de la ecuación escalar de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

De modo que no es necesario encontrar una solución $x(t), y(t)$ del sistema para calcular su órbita, sólo se necesita resolver la ecuación diferencial escalar de primer orden anterior.

EJEMPLO 3.14

- Las órbitas del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = y^2; \qquad \frac{dy}{dt} = x^2$$

son las curvas soluciones de la ecuación escalar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$$

Esta ecuación es de variable separables y puede verse fácilmente que todas las soluciones son de la forma $y(x) = (x^3 - c)^{\frac{1}{3}}$, con c constante. Por tanto, las órbitas del sistema anterior son el conjunto de todas las curvas $y = (x^3 - c)^{\frac{1}{3}}$.

En general, no es posible resolver explícitamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

Por consiguiente, tampoco lo es, en general, encontrar las órbitas del sistema. Sin embargo, si es posible obtener una descripción precisa de las órbitas del sistema. Tal cosa se puede debido a que el sistema de ecuaciones diferenciales determina un **campo de direcciones** en el plano Oxy. Es decir, el sistema de ecuaciones diferenciales indica cómo de rápido se mueve una solución a lo largo de su órbita, y en la dirección que se mueve. Dicho con más precisión, sea $x = x(t),\ y = y(t)$ una solución del sistema. Conforme t aumenta, el punto $(x(t), y(t))$ se mueve a lo largo de la órbita de dicha solución. Su velocidad en la dirección x es $x'(t)$ y en la y es $y'(t)$ la magnitud de su velocidad vale

$$\sqrt{(\frac{dx(t)}{dt})^2 + (\frac{dy(t)}{dt})^2}$$

Pero $dx(t)/dt = f(x(t), y(t))$ y $dy(t)/dt = g(x(t), y(t))$. Por lo tanto, en cada punto (x, y) del plano fase del sistema se conoce

- La tangente a la órbita en (x, y) (la recta que pasa por (x, y) con números directores $f(x, y)$ y $g(x, y)$, respectivamente).

- La magnitud de la velocidad (o rapidez) $(f^2(x, y)+g^2(x, y))^{1/2}$, con la que la solución recorre su órbita

Con frecuencia, esta información sirve para obtener propiedades importantes de las órbitas sin necesidad de calcularlas.

3.5.2. Sistemas autónomos lineales

Más que la estabilidad interesa a veces el comportamiento de las curvas solución en la proximidad de un punto de equilibrio. De este comportamiento se puede dar una representación gráfica en el caso de sistemas bidimensionales. A continuación estudiaremos el comportamiento de las soluciones haciendo el estudio cualitativo de algunos casos más representativos de sistemas del tipo:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ \\ y'(t) = cx(t) + dy(t)\,. \end{array} \right.}$$

- **Nodo o sumidero.** Supongamos el sistema de ecuaciones diferenciales

  $$x' = -2x\,, \quad y' = -y\,. \tag{3.15}$$

  Es inmediato comprobar que el único punto de equilibrio es $(0, 0)$. Por otro lado, la matriz de los coeficientes

  $$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

  tiene al $\lambda_1 = -2$ y al $\lambda_2 = -1$ como valores propios. Por tanto, las soluciones explícitas de (3.15) son

  $$x(t) = c_1 e^{-2t}\,, \quad y(t) = c_2 e^{-t}\,. \tag{3.16}$$

  Para este caso (3.15), es posible encontrar las ecuaciones de las órbitas. En efecto, si hacemos y'/x' nos aparece la ecuación diferencial

  $$2xdy = ydx\,,$$

  que es de variables separables. Su solución general es $y^2 = c\,x$. En consecuencia, las órbitas serán parábolas que pasan por el origen de coordenadas y simétricas respecto del eje de abscisas y el propio eje $y = 0$.

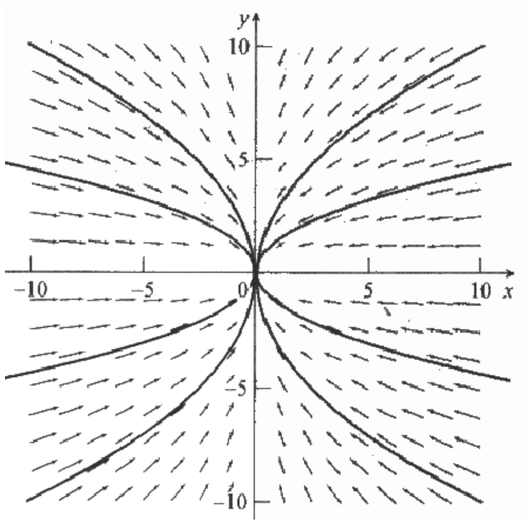

Figura 4.3. Órbitas de $x' = -2x\,, y' = -y$.

Observemos que si en (3.16) hacemos que $t \to \infty$, entonces tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden hacia el punto de equilibrio. Por tanto, el $(0,0)$ será un punto de equilibrio estable y se denomina **nodo estable** o **sumidero**.

- **Punto de Silla** Si repetimos el proceso anterior para el sistema

$$x' = -x\,, \quad y' = y\,, \tag{3.17}$$

nos encontramos con que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$. Por tanto

$$x(t) = c_1 e^{-t}\,, \quad y(t) = c_2 e^{t}\,. \tag{3.18}$$

Las órbitas las obtenemos de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{x}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

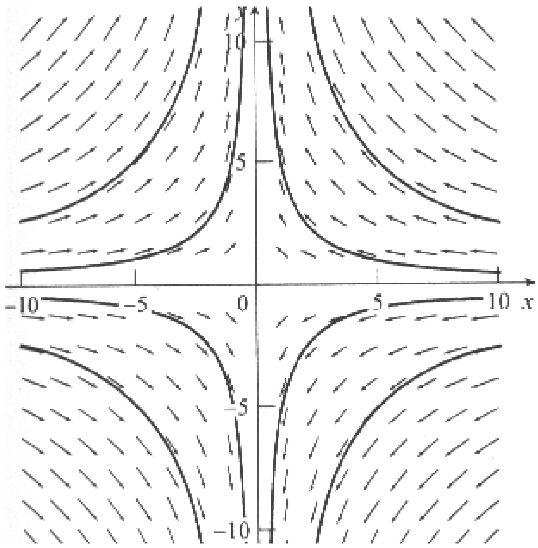

Figura 4.4. Órbitas de $x' = -x\,, y' = y$.

Si $c \neq 0$ las órbitas son hipérbolas, y en el caso $c = 0$ obtenemos el eje $y = 0$. Supongamos que $c > 0$, si en (3.18) hacemos tender t hacia $+\infty$, observamos que $x(t) \to 0$, mientras que $y(t) \to +\infty$. Si ahora hacemos que $t \to -\infty$, entonces $x(t) \to +\infty\,, y(t) \to 0$. Es decir, existen órbitas que cuando $t \to \infty$ se acercan al punto de equilibrio, mientras otras se alejan. En este caso el punto de equilibrio $(0,0)$ se denomina **punto de silla**.

- **Fuente o nodo inestable** Supongamos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = 2x\,, \quad y' = y\,. \tag{3.19}$$

Los valores propios correspondientes a la matriz de los coeficientes son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Por tanto

$$x(t) = c_1 e^{2t}\,, \quad y(t) = c_2 e^{t}\,. \tag{3.20}$$

Si resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = c\,x\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

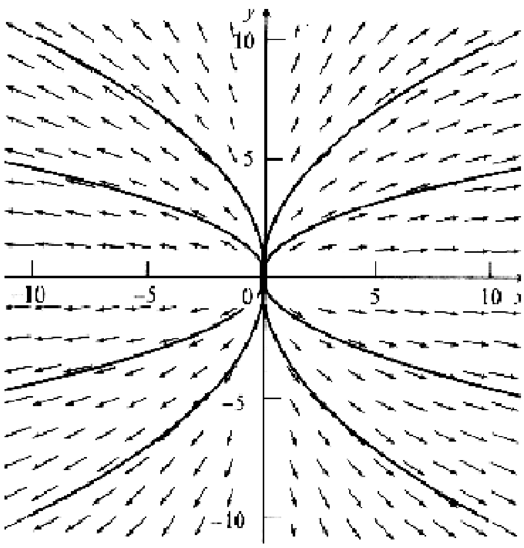

Figura 4.5. Órbitas de $x' = 2x\,, y' = y$.

Las órbitas coinciden con las estudiadas en el primer ejemplo correspondiente al sumidero. No obstante, si ahora en (3.20) hacemos que $t \to \infty$, entonces observamos que $x(t) \to \infty\,, y(t) \to \infty$. El punto de equilibrio $(0,0)$ será un **nodo inestable o fuente**.

- **Foco estable o espiral** Veamos que ocurre cuando los valores propios de la matriz de los coeficientes son números complejos. Por ejemplo

$$x' = -x + y\,, \quad y' = -x - y\,. \tag{3.21}$$

Los valores propios correspondientes a la matriz de los coeficientes son $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$, siendo sus vectores propios correspondientes $\vec{v}_1 = (1, i)\,, \vec{v}_2 = (1 - i)$.

Para encontrar las soluciones del sistema, expresamos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula de *Moivre*

$$\begin{pmatrix} e^{-t}\cos t + ie^{-t}\operatorname{sen} t \\ -e^{-t}\operatorname{sen} t + ie^{-t}\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ -e^{-t}\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t}\operatorname{sen} t \\ e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

Las partes reales e imaginarias nos dan dos soluciones independientes. En consecuencia

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t}\operatorname{sen} t \\ e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}\left(c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t\right) \\ y(t) &= e^{-t}\left(c_2\cos t - c_1\operatorname{sen} t\right) \end{aligned}$$

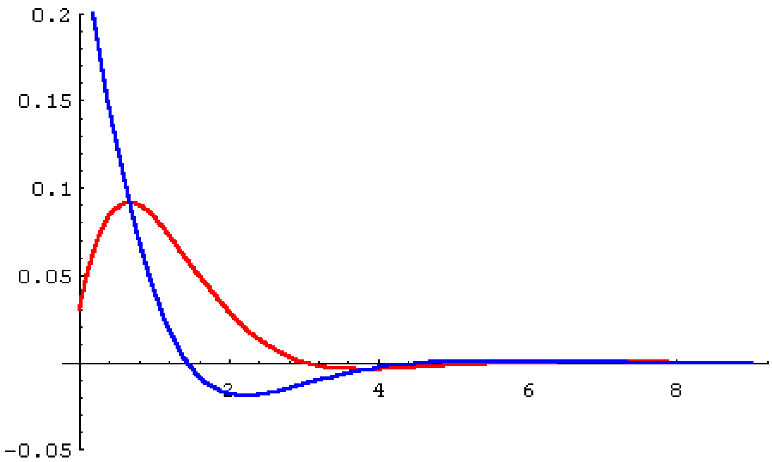

Figura 4.6. Curvas solución $x(t)\,,y(t)$.

Observemos como al tender t hacia infinito $e^{-t} \to 0$ y las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ tienden hacia cero de forma alternada, debido al efecto causado por las funciones trigonométricas. Este desplazamiento hace que cuando $t \to \infty$, las órbitas tiendan al punto de equilibrio siguiendo una espiral. Por este motivo el punto de equilibrio es estable y recibe el nombre de **foco estable o espiral.**

Podríamos pensar en obtener las ecuaciones de las órbitas siguiendo un camino similar a los casos anteriores. Para ello planteamos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x-y}{-x+y} \quad \Rightarrow \quad (x+y)dx + (y-x)dy = 0\,,$$

que es homogénea de grado uno. Para resolverla dividimos toda la ecuación por x y hacemos el cambio de variable $y = zx$. Simplificando obtenemos

$$(1+z^2)dx = (1-z)dz\,,$$

ecuación diferencial de variables separables que tiene por solución

$$\ln|x| = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2 + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Como puede apreciarse, en esta ocasión no podemos despejar el valor de $y = \varphi(x)$, y por este motivo se tiene que hacer el estudio alternativo que hemos comentado anteriormente.

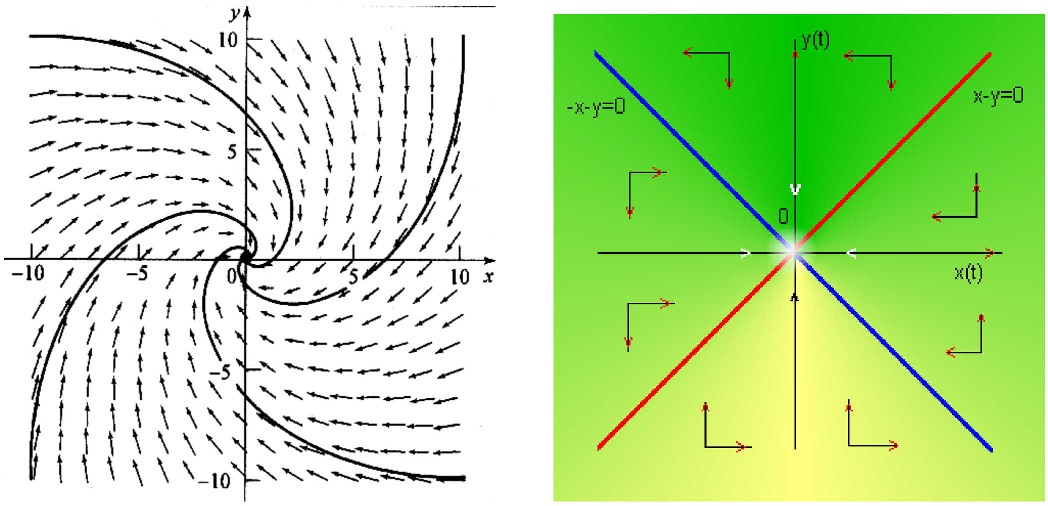

Figura 4.7. Órbitas de $x' = -x + y\,,\ y' = -x - y$ y su estudio cualitativo.

Todos estos ejemplos son casos particulares del siguiente teorema de clasificación de los puntos de equilibrio.

TEOREMA 3.5.3 *Supongamos el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array} \right.$$

que tiene a $\lambda_1\,,\lambda_2$ como valores propios de la matriz de los coeficientes.

(a) *Si $\lambda_1\,,\lambda_2$ son distintas con $\lambda_1 < \lambda_2$, entonces*

- *Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, el origen es un nodo estable o sumidero*
- *Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, el origen es un nodo inestable o fuente*
- *Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, el origen es un punto de silla.*

(b) *Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces*

- *Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, el origen es un nodo estable o sumidero*
- *Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, el origen es un nodo inestable o sumidero.*

(c) *Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, entonces*

- *Si $\alpha < 0$, el origen es un foco estable o espiral*
- *Si $\alpha > 0$, el origen es un foco inestable o espiral*
- *Si $\alpha = 0$, el origen es estable y es un centro.*

EJEMPLO 3.15

- Determinar si cada una de las soluciones $\vec{x}(t)$ de la ecuación diferencial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

es estable, asintóticamente estable o inestable.

Resolviendo la ecuación caracter+stica

$$|A - \lambda I| = -(1 + \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$$

Los valores propios de A son $\lambda = -1$; $\lambda = -1 \pm 2i$. Dado que los tres valores propios tienen parte real negativa, se concluye que toda solución de la ecuación diferencial anterior es asintóticamente estable.

EJEMPLO 3.16

- Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

es inestable.

Como los valores propios de la matriz A son $\lambda = 6$ y $\lambda = -4$. Dado que un valor característico de A es positivo, concluimos que toda solución $\vec{x} = \phi(t)$ del sistema anterior es inestable.

EJEMPLO 3.17

- Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

es inestable.

Resolviendo la ecuación característica $|A - \lambda I| = -\lambda^2(\lambda + 7) = 0$ obtenemos como valores propios $\lambda = 0$ y $\lambda = -7$. Cualquier vector propio $\vec{v}$ de A asociado al valor propio $\lambda = 0$ debe satisfacer la ecuación

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior, implica que

$$v_1 = \frac{3}{2}v_2\,, \qquad v_3 = -3v_2\,,$$

de modo que cualquier vector propio $\vec{v}$ de A con valor propio $\lambda = 0$ debe ser de la forma

$$\vec{v} = c\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, toda solución $\vec{x} = \phi(t)$ de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ es inestable, ya que $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad 2, y A tiene solamente un vector propio linealmente independiente con valor propio 0.

3.5.3. Sistemas autónomos no lineales

A continuación realizaremos una pequeña aproximación al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. La primera pregunta que podemos hacernos es: ¿por qué interesarnos en este tipo de sistemas? La razón principal es que muchos sistemas dinámicos biológicos y las ecuaciones que los describen son no lineales por la propia naturaleza de los fenómenos en cuestión. Un primer método para estudiar dichos problemas es linealizar estas ecuaciones, pero con esto sólo conseguimos una aproximación de la solución buscada. No obstante, en muchas situaciones físicas las aproximaciones lineales resultan ser adecuadas y válidas para la mayor parte de las ocasiones. Ello no altera para nada el hecho de que en otras muchas otras situaciones la linealización está fuera de lugar.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = f(x,y)\,, & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(x,y)\,, & y(t_0) = y_0 \end{array}\right. .$$

Los puntos de equilibrio sabemos que los calculamos hallando los valores donde se anulan f y g. Sea

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(a,b)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(a,b)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \\ g_x(a,b) & g_y(a,b) \end{pmatrix}$$

TEOREMA 3.5.4 *La solución $x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0$:*

- *es asintóticamente estable si la parte real de las soluciones de la ecuación característica de $J(x_0, y_0)$ son negativas,*
- *es inestable si al menos una solución de la ecuación característica de $J(x_0, y_0)$ tienen parte real positiva.*

Si las soluciones de la ecuación característica de $J(x_0, y_0)$ tiene parte real cero no podemos asegurar la estabilidad. En el caso particular en que $J(x_0, y_0)$ sea una matriz de 2×2, si todos sus valores propios tienen parte real cero, entonces el punto de equilibrio es estable.

EJEMPLO 3.18

- Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x,y) = 1 - xy \\ y' = g(x,y) = x - y^3 \,, \end{array} \right.$$

resolvemos el sistema

$$\begin{array}{l} 0 = 1 - xy \\ 0 = x - y^3 \,, \end{array}$$

y obtenemos $P_1 = (1,1)$ y $P_2 = (-1,-1)$. Para poderlos clasificar debemos encontrar la matriz

$$\left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{array} \right) .$$

A continuación buscamos los valores propios de esta matriz, particularizada en cada uno de los puntos de equilibrio.

En el punto $P_1 = (1,1)$ la matriz

$$\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{array} \right) ,$$

tiene a $\lambda = -2$ como valor propio doble. Por el teorema anterior, el punto P_1 será asintóticamente estable.

De forma similar, la matriz

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{array} \right) ,$$

tiene por valores propios $\lambda = -1 \pm \sqrt{5}$. Por tanto, el punto P_2 es asintóticamente inestable.

EJEMPLO 3.19

- **Modelo neuronal de Fitzhugh-Nagumo.** El cerebro es un sistema complejo. Para entender esta complejidad no es posible prescindir de los modelos matemáticos en el estudio de las unidades funcionales que lo componen. Un buen ejemplo de este tipo de modelos es el estudio de la sinapsis neuronal a través del modelo de *Fitzhugh-Nagumo*.

  Las células nerviosas o neuronas están constituidas fundamentalmente de tres partes: el cuerpo neuronal o **soma** donde se procesa toda la información, una prolongación con pocas ramificaciones llamada **axon** como hilo conductor, y por último unas zonas muy ramificadas conocidas como **dendritas**, encargadas de ponerse en contacto con otras células nerviosas.

  En un principio las neuronas están inactivas hasta el momento en el que alcanzan un nivel crítico debido a las entradas a través de las dendritas y en ese momento reaccionan amplificando este potencial y dirigiéndolo hacia su último terminal.

El modelo de *Fitzhugh-Nagumo* representa a este proceso en condiciones ideales de laboratorio y además admitiendo que todas las dendritas receptoras almacenan el mismo potencial. Además supondremos que la neurona se activa sólo debido a que existe un potencial externo suficientemente elevado, dando lugar a una variación del potencial de membrana de las neuronas. Dicha variación está determinada por el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dV}{dt} = V'(t) = -V(V-V_1)(V-V_2) - W + E \\ \\ \dfrac{dVW}{dt} = W'(t) = \epsilon(V - CW) \end{array}\right. \tag{3.22}$$

Donde V es el potencial de membrana; W es la conductancia de iones dependiendo del voltaje; E es el voltaje externo aplicado; C y ϵ son constantes. Los parámetros V_1 y V_2 representan la influencia del potencial sobre la tasa de cambio de este potencial, siendo los valores considerados $V_1 = 0.2$ y $V_2 = 1.0$

Solución con `Mathematica`® El modelo con el que trabajaremos es un caso particular de (3.22) y viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales,

$$\left\{\begin{array}{l} V'(t) = -V(V-0.2)(V-1) - W + 0.23 \\ W'(t) = 0.02(V - 0.5W) \end{array}\right. \tag{3.23}$$

Para analizar su comportamiento para valores de t “suficientemente grandes”, y puesto que no podemos encontrar la solución exacta, debemos localizar sus puntos de equilibrio y posteriormente clasificarlos.

Si utilizamos `Mathematica`® y resolvemos de forma aproximada el sistema,

$$\left.\begin{array}{r} -V(V-0.2)(V-1) - W + 0.23 = 0 \\ 0.02(V - 0.5W) = 0 \end{array}\right\}$$

obtenemos un único punto de equilibrio con valores no complejos,

$$P = (0.110603\ ,\ 0.221206)$$

El primer paso para estudiar la estabilidad del punto P, es encontrar la matriz jacobina,

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f[V,W]}{\partial V} & \dfrac{\partial f[V,W]}{\partial W} \\ \\ \dfrac{\partial g[V,W]}{\partial V} & \dfrac{\partial g[V,W]}{\partial W} \end{pmatrix}$$

siendo

$$f[V,W] = -V(V-0.2)(V-1) - W + 0.23,\ ,\quad g[V,W] = 0.02(V - 0.5W)\,.$$

En nuestro caso,

$$J = \begin{pmatrix} -3V^2 + \frac{12V}{5} - \frac{1}{5} & -1 \\ \\ \frac{1}{50} & -0.01 \end{pmatrix}$$

que particularizada en el punto $P = (0.110603\ ,\ 0.221206)$ la matriz jacobiana vale,

$$J = \begin{pmatrix} 0.0287481 & -1 \\ \\ \frac{1}{50} & -0.01 \end{pmatrix}$$

Si encontramos su autovalores,

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0.00937406 - 0.140088i\,, \quad \lambda_2 = 0.00937406 + 0.140088i$$

observamos que son dos números complejos conjugados con parte real positiva, y en consecuencia el punto de equilibrio será inestable.

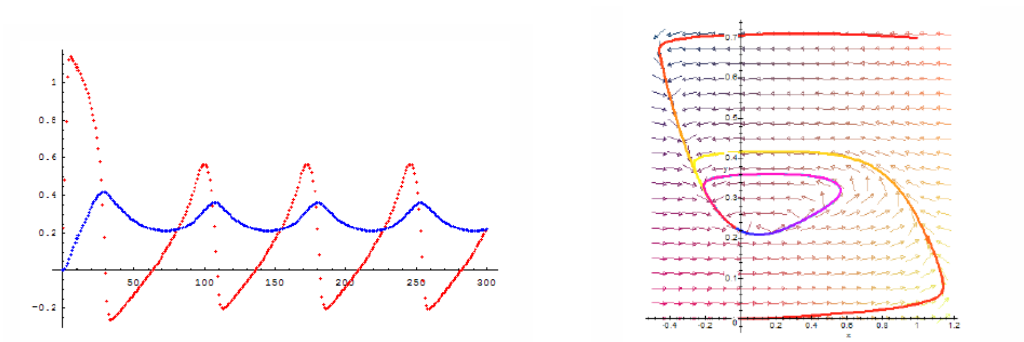

Figura 4.8. Curvas solución y el diagrama de fases.