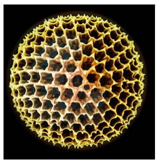

Tema 2

MODELOS BASADOS EN E.D.O.

2.1. Introducción

En este tema construiremos algunos modelos biológicos elementales basados en las ecuaciones diferenciales. En la mayor parte de ellos será posible resolver la ecuación diferencial y de esta forma podremos encontrar la solución explícita del problema planteado. No obstante, en algunos de ellos, también realizaremos el estudio cualitativo correspondiente para analizar el comportamiento de las soluciones a "largo plazo".

2.2. Modelos exponencial

Si $y(t)$ representa a una cantidad desconocida que depende del tiempo, entonces para poder encontrar esta función será necesario establecer algún tipo de hipótesis sobre la forma que dicha función cambia con el tiempo. De entre todas ellas, una de la más elemental, es suponer que la tasa de cambio de $y(t)$, en cada momento, es directamente proporcional a la cantidad presente. Es decir,

$$y'(t) = \alpha y(t)\,,$$

donde α es la constante de proporcionalidad.

Resolviendo esta ecuación diferencial de variables separables,

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)} = \int \alpha dt \quad \Rightarrow \quad \ln|y(t)| = \alpha t + \ln c\,.$$

O bien,

$$\ln y(t) - \ln c = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{y(t)}{c}\right) = \alpha t\,.$$

Despejando

$$y(t) = c\, e^{\alpha t}\,.$$

Si suponemos que $y(0) = y_0$, entonces

$$y(0) = c\, e^0 = c = y_0\,,$$

y la solución viene dada por

$$\boxed{y(t) = y_0\, e^{\alpha t}\,.} \tag{2.1}$$

Observemos que si $\alpha > 0$, entonces la función $y(t)$ crece sin límite, mientras que si $\alpha < 0$ la función $y(t)$ disminuirá cuando t aumente.

2.2.1. Dinámica independiente de la densidad

El análisis de las relaciones entre las estructuras y el movimiento de una población, se basa en la noción de población estable. *Leonard Euler* (1760) fue el primero en definir este concepto y en darle un contenido analítico, pero en realidad fue *Alfred J. Lotka*, en una serie de publicaciones que se iniciaron en 1907 y terminaron en 1937, quien primero trató lo que podemos considerar como el fundamento de la dinámica de poblaciones.

La tasa de natalidad de una población humana se da usualmente en términos de número de nacimientos por mil, en un año. La referencia a mil es simplemente para evitar cifras decimales; en lugar de una tasa de natalidad de 17 por mil se podría hablar igualmente de una tasa de 0.017 por individuo. Del mismo modo, el período de un año también es únicamente una convención; la tasa de natalidad podría igualmente darse en términos de una semana, un segundo, o cualquier otra unidad de tiempo. Análogas observaciones se aplican a la tasa de mortalidad y a la tasa de crecimiento, o tasa de natalidad menos tasa de mortalidad. La tasa de crecimiento es pues la variación neta de población por unidad de tiempo dividida por la población total al comienzo del período.

Supongamos que la población $y(t)$, en el instante t, cambia a $y + \Delta y$ en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$. Entonces, la tasa media de crecimiento es

$$\frac{\Delta y}{y(t)\Delta t}\,. \tag{2.2}$$

En la práctica, $y(t)$ se conoce únicamente en aquellos instantes $t_0, t_1, \cdots$ en que se hace recuento de la población, y su valor es un entero no negativo. Suponemos que $y(t)$ se extiende (por interpolación, por ejemplo) a una función con valores reales no negativa, de una variable real, con derivada continua. Si tomamos límite en (2.2),

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Delta y(t)}{y(t)\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

Esta función de t es la tasa de crecimiento de la población en el instante t. **La hipótesis más simple es la de una tasa de crecimiento constante** r. Éste es el caso si el número de nacimientos y de muertes en un pequeño período de tiempo Δt tienen una razón fija respecto a la población total. Esas razones serán funciones lineales de Δt pero independientes del tamaño de la población. Así pues, la variación neta será $r\, y\Delta t$, siendo r una constante. Por tanto

$$r = \frac{y'(t)}{y(t)}\,.$$

Esta es una ecuación lineal y como es sabido se conoce con el nombre de Ley de Malthus para el crecimiento de una población. Si la población de una especie dada es y_0 en el tiempo t_0, entonces $y(t)$ satisface el problema del valor inicial. Integrando se tiene la conocida fórmula para el crecimiento ilimitado,

$$\boxed{y(t) = y(t_0)e^{r\,(t-t_0)}\,.}$$

De aquí que toda especie que satisface la ley de crecimiento de *Malthus* crece exponencialmente con el tiempo.

Ahora bien, sólo se ha propuesto un modelo sencillo para el crecimiento de una población, tan sencillo que fue posible resolverlo completamente en pocas líneas. Por lo tanto, es importante ver si este modelo, con su sencillez, tiene alguna relación con la realidad. Sea $y(t)$ la población humana de la Tierra en el tiempo t. Se estima que la población del planeta aumentó con una tasa promedio de 2 % anual durante el período $1960-1970$. Al empezar la mitad de la década, el 1 de enero de 1965, cuando el Departamento de Comercio del gobierno de Estados Unidos, estimaba la población de la Tierra en 3340 en millones de personas, entonces $t_0 = 1965; y_0 = 3.34\times 10^9$ y $r = 0.02$, de modo que $y(t) = (3.34).10^9.e^{0.02(t-1965)}$. Una manera de comprobar la precisión de esta fórmula es calcular el tiempo requerido para que se duplique la población del planeta y compararlo con el valor observado de 35 años. La fórmula predice que la población de la Tierra se duplica cada T años, donde $e^{0.02T} = 2$. Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación se obtiene $0.02T = \ln 2$, de modo que $T = 50\ln 2 \simeq 34.6$ años.

Esto constituye una excelente coincidencia con el valor observado. Por otro lado, sin embargo, mirando hacia el futuro, la ecuación predice que la población de la Tierra será de 200 billones en el año 2515, de 1800 billones en 2625, y de 3600 billones en 2660. Estas son cifras astronómicas cuyo significado es difícil de imaginar. La superficie total del planeta es de aproximadamente 167.4 billones de metros cuadrados. El 80 % de la superficie está cubierta por agua. Suponiendo que se está dispuesto a vivir en botes al igual que en tierra firme, puede verse fácilmente que para el año 2515 habrá solamente 0.837 metros cuadrados por persona; en el año 2625 cada persona dispondrá de solamente 0.09 metros cuadrados en el cual estar de pie y para el año 2660 las personas estarán unas en los hombros de otras. Parece por lo tanto, que el modelo no es razonable y debería ser descartado.

Sin embargo, consideremos el caso del *Microtus Arvallis Pall*, un pequeño roedor que se reproduce muy rápidamente. Tomemos como unidad de tiempo el mes y que la población crece con una tasa del 40 % mensual.

Si hay dos roedores presentes en el momento inicial $t = 0$, entonces $y(t)$, el número de roedores en el tiempo t, verifica $y(t) = 2e^{0.4t}$.

Meses	0	2	6	10
y(t) observada	2	5	20	109
y(t) calculada	2	4.5	22	109.1

Tabla 3.1

En la Tabla 10.1 se comparan las poblaciones observadas con las poblaciones calculadas utilizando el modelo de crecimiento exponencial. Como podemos apreciar, existe una gran coincidencia.

En el caso del *Microtus Arvallis Pall*, la población observada es muy precisa, ya que el período de gestación es de tres semanas y el tiempo que se requiere para medir la población es mucho menor.

Los modelos lineales para el crecimiento de poblaciones son satisfactorios siempre que la población no sea demasiado grande. Cuando la población es demasiado grande, estos modelos no pueden ser exactos ya que no reflejan el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible.

2.2.2. Desintegración radiactiva

El físico *Rutherford* y sus colaboradores probaron que los átomos de ciertos elementos radiactivos son inestables y que, en un intervalo de tiempo dado, una fracción fija de los átomos se desintegra espontáneamente para formar un nuevo elemento. Ya que la radiactividad es una propiedad del átomo, *Rutherford* demostró que la descomposición de una sustancia es directamente proporcional al número de átomos presentes en la misma.

Si $y(t)$ es la cantidad de material radiactivo existente en el tiempo t, entonces

$$y'(t) = -ry(t)\,, \quad r > 0\,,$$

donde r es una constante que depende del elemento radiactivo considerado, y se conoce como **constante de decaimiento**. Este modelo es un caso particular de un modelo de crecimiento exponencial.

2.2.3. Trazadores radiactivos

Los elementos radiactivos juegan un papel muy importante en Biología. Por ejemplo, el H_3 se suele usar para marcar ciertos pares de ADN, los cuales se añaden a cadenas mutantes de *E. coli*, que son incapaces de fabricar una base particular de ADN. Para tratar el cultivo con un antibiótico apropiado, se usa una señal radiactiva para determinar cuanto ADN se ha replicado bajo las condiciones particulares del experimento. El yodo radiactivo se usa con frecuencia para detectar problemas en el tiroides de los humanos.

2.2.4. Fechado con C_{14}

Alrededor del año 1950, el químico *Willard Libby* ideó un método en el cual se usa carbono radiactivo para determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. El cociente de la cantidad de C_{14} y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atmósfera es constante y, en consecuencia, la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C_{14} cesa. Así, comparando la proporción de C_{14} que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método utiliza la vida media[1] del C_{14} radiactivo que es de aproximadamente 5600 años.

EJEMPLO 2.1

- Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene 1/1000 de la cantidad original de C_{14}. Para determinar la edad del fósil utilizamos la fórmula $y(t) = y(0)e^{rt}$.

  Cuando $t = 5600$ años, $y(t) = y(0)/2$, de lo cual es posible determinar el valor de r,

  $$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{5600r} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{\ln 2}{5600} = -0.00012378\,.$$

  Por lo tanto

  $$y(t) = y_0 e^{-0.00012378t}\,.$$

  Si $y(t) = y_0/1000$, se tiene que

  $$\frac{y_0}{1000} = y_0 e^{-0.00012378t} \quad \Rightarrow \quad t \approx \frac{\ln 1000}{0.00012378} \approx 55800 \;\; \text{años}\,.$$

La edad encontrada en el ejemplo anterior está, en realidad, al borde del límite dentro del cual este método es exacto. La técnica usual del carbono 14 se limita a aproximadamente 9 semividas del isótopo, es decir alrededor de 50.000 años. Una razón es que el análisis químico necesario para obtener una medida exacta del C_{14} restante se hace un tanto problemático alrededor de $y_0/1000$. Además, este análisis

[1] Tiempo que ha de trascurrir para que cierta cantidad de material radiactivo quede reducido a la mitad.

exige la destrucción de una muestra un tanto grande. Si se logra hacer esta medición de modo indirecto, basándose en la radiactividad efectivamente presente en la muestra, entonces es muy difícil distinguir entre la radiación que proviene del fósil y la radiación ambiental normal. Sin embargo, recientemente, el uso de un acelerador de partículas ha hecho posible que los científicos separen directamente el C_{14} del C_{12} estable. Calculando el valor preciso de la razón entre C_{14} y C_{12}, la exactitud de este método puede extenderse a un período de 70.000 a 100.000 años. Otras técnicas isotópicas, tales como el uso de potasio 40 y argón 40, permiten obtener edades de varios millones de años. A veces también es posible emplear métodos no isotópicos, que se basan en el empleo de aminoácidos.

EJEMPLO 2.2

- **Desintegración radiactiva en cascada.**

  Supongamnos que una sustancia radiactiva $x(t)$ se desintegra dando lugar a una nueva sustancia radiactiva $y(t)$. La primera sustancia se desintegra totalmente, con una constante k_1 de desintegración. Sea k_2 la constante de desintegración de $y(t)$, con $k_2 \neq k_1$. La variación de la sustancia $y(t)$ en el instante t viene dada por la ecuación diferencial ordinaria,

$$y'(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = -\frac{d\,x(t)}{dt} - k_2\,y(t) \tag{2.3}$$

  Al ser $x(t) = x_0\,e^{-k_1\,t}$, entonces $x'(t) = -k_1 x_0\,e^{-k_1\,t}$. Sustituyendo este valor en la ecuación diferencial anterior (2.3) obtenemos la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y'(t) = k_1 x - 0e^{-k_1\,t} - k_2\,y(t)\,.$$

  Su factor integrante es la función $\mu(t) = e^{k_2\,t}$. Al multiplicar la ecuación por el factor integrante, podemos escribir,

$$\left(y(t)\,e^{k_2\,t}\right)' = k_1\,e^{k_2\,t}x_0\,e^{-k_1\,t} = k_1 x_0 e^{(k_2-k_1)t} + C$$

  Integrando los dos miembros de la ecuación,

$$ye^{k_2 t} = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}e^{(k_2-k_1)t} + C$$

  despejando

$$y(t) = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}e^{-k_1 t} + Ce^{-k_2 t}$$

  Al ser $y(0) = y_0$, entonces

$$C = y_0 - \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}e^{-k_1 t} + y_0 e^{-k_2 t} - \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}e^{-k_2 t}$$

  finalmente,

$$y(t) = y_0 e^{-k_2 t} + \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)\frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}$$

Las soluciones graficadas con `Mathematica`® puede verse en la figura siguiente para los parámetros:

$$k_1 = 0.000018\,; \quad k_2 = 0.000039\,; \quad x_0 = 3.7\,; \quad y_0 = 0$$

siendo,

$$x(t) = 3.7e^{-0.000018\,t}\,; \quad y(t) = 3.171428\left(e^{-0.000018t} - e^{-0.000039\,t}\right)$$

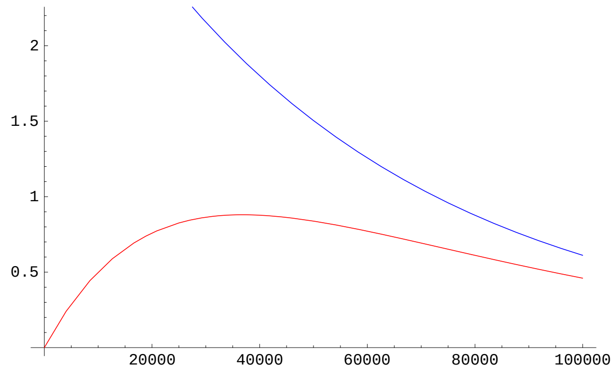

Figura En rojo $y(t)$, en azul $x(t)$.

En la próxima figura se ha incorporado el campo de vectores, realizado con `Maple`® y la solución con valor inicial $y_0 = 6$, manteniendo los mismos parámetros del modelo.

```
with(DEtools);
DEplot(diff(y(t),t)=000018*3.7*exp(-0.000018*t)-0.0000*y,[y(t)],
t=0..10000,[[y(0)=6],stepsize=.2,arrows=LARGE);
```

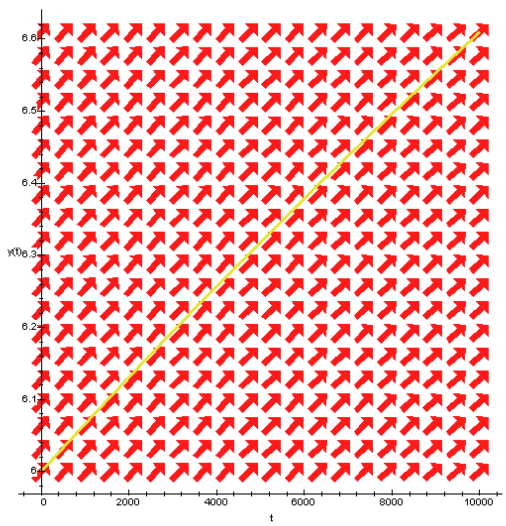

Figura En rojo $y(t)$, en azul $x(t)$.

2.2.5. Modelo de un riñón artificial I

El funcionamiento de una máquina de diálisis es el siguiente: la sangre del paciente circula a lo largo de una membrana a una velocidad fija, mientras que al mismo tiempo un líquido purificador se encuentra circulando en la dirección opuesta al otro lado de la membrana a una velocidad diferente. Este líquido purificador atrae las impurezas en la sangre, y la tasa de cambio de las impurezas a través de la membrana sigue la **ley de Fick**, la cual afirma que la cantidad de material de desecho que pasa por una membrana es proporcional a la diferencia de concentración a un lado y otro de la misma.

La sangre, que tiene una concentración de desechos $u(t)$ (creatina, urea, ...), al circular por la membrana que la separa del dializador, elimina una parte de las impurezas que pasan al dializador cuya concentración es $v(t)$. La ecuación diferencial que modeliza a esta situación es

$$\frac{d(u(t)-v(t))}{dt} = -k(u(t)-v(t))\,, \quad k>0\,,$$

cuya integración permite calcular la cantidad de material de desecho removido de la sangre por unidad de tiempo.

EJEMPLO 2.3

- Supongamos dos compartimientos que se encuentran separados por una barrera (membrana) a través de la cual se disuelve una sustancia. La tasa de disolución de un compartimiento a otro viene dada por la ley de Fick: proporcional a la diferencia entre las concentraciones de los dos compartimientos. Sea $C_1(t)$ la concentración (en el minuto t) más baja que se encuentra en el primero de los compartimientos y $C_2(t)$ la concentración del segundo. Supongamos también que V_1 y V_2 son los volúmenes de cada uno de los compartimientos. Sea un intervalo pequeño de tiempo Δt, entonces la cantidad de sustancia que atraviesa la membrana será

  $$\Delta Q = \Delta t\, k(C_1 - C_2)$$

  donde la constante de proporcionalidad k dependerá del tipo de membrana y de la sustancia. De la expresión anterior se deduce

  $$\left.\begin{array}{l} \Delta C_1 = \dfrac{\Delta Q}{V_1} = \dfrac{\Delta t\, k(C_2-C_1)}{V_1} \\[2ex] \Delta C_2 = \dfrac{\Delta Q}{V_2} = \dfrac{\Delta t\, k(C_1-C_2)}{V_2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{dC_1}{dt} = \dfrac{k}{V_1}(C_2-C_1) \\[2ex] \dfrac{dC_2}{dt} = \dfrac{k}{V_2}(C_1-C_2) \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

  Si las concentraciones iniciales en los dos compartimientos son $C_1(0)$ y $C_2(0)$, entonces la cantidad inicial total de sustancia será $Q_T = V_1\, C_1(0) + V_2\, C_2(0)$. Después de cierto tiempo se habrá alcanzado la condición de equilibrio y en ambos compartimientos existirá la misma concentración (C_∞). Ahora la sustancia se encontrará distribuida en el volumen $V_1 + V_2$, y por tanto

$$\boxed{C_\infty = \frac{V_1\, C_1(0) + V_2\, C_2(0)}{V_1 + V_2}} \tag{2.5}$$

esta expresión nos indica que si son conocidas las concentraciones iniciales y los volúmenes, entonces es posible conocer la concentración en ambos compartimientos "a largo plazo".

Es evidente que la diferencia más grande entre ambas concentraciones se encuentra en el momento inicial $t = 0$, y que esta diferencia va disminuyendo de forma progresiva hasta alcanzar el punto de equilibrio.

La función $C_1(t)$ será creciente, mientras que $C_2(t)$ será decreciente y podemos establecer la hipótesis (por ejemplo) de que tienden al valor de equilibrio de forma exponencial. Es decir, que responden a expresiones del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{C_1(t) = C_1(0) + (1 - e^{-\alpha\, t})(C_\infty - C_1(0))} \\ \\ \boxed{C_2(t) = C_2(0) + (1 - e^{-\beta\, t})(C_\infty - C_2(0))} \end{array}\right.$$

donde las constantes α y β se obtendrán al sustituir en las ecuaciones diferenciales (2.4). Observemos que, ambas funciones, cuando $t = 0$ toman el valor inicial y además tienden a C_∞ si $t \to \infty$.

Restando estas funciones

$$C_2(t) - C_1(t) = C_\infty(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) + C_2(0)e^{-\beta t} - C_1(0)e^{-\alpha t} \tag{2.6}$$

apreciamos al sustituir en cualquiera de las ecuaciones diferenciales (2.4), que las dos funciones exponenciales tienen que coincidir para que se cumpla la igual, lo cual obliga a que $\alpha = \beta$. De esta forma, la expresión (2.6) se reduce a

$$C_2(t) - C_1(t) = e^{-\alpha t}(C_2(0) - C_1(0)) \tag{2.7}$$

Los valores de las derivadas de estas funciones son,

$$\frac{dC_1}{dt} = \alpha e^{-\alpha\, t}(C_\infty - C_1(0))\,; \qquad \frac{dC_2}{dt} = \alpha e^{-\alpha\, t}(C_\infty - C_2(0)) \tag{2.8}$$

sustituyendo (2.8) en (2.4)

$$\frac{V_1}{k}\frac{dC_1}{dt} = -\frac{V_2}{k}\frac{dC_2}{dt} = C_2 - C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{k}\left(\alpha e^{-\alpha\, t}(C_\infty - C_1(0))\right) = e^{-\alpha t}(C_2(0) - C_1(0))$$

simplificando y despejando

$$\alpha = \frac{k}{V_1}\,\frac{C_2(0) - C_1(0)}{C_\infty - C_1(0)} \tag{2.9}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el valor de (2.5)

$$C_\infty - C_1(0) = \frac{V_1\, C_1(0) + V_2\, C_2(0)}{V_1 + V_2} - C_1(0) = \frac{V_2(C_2(0) - C_1(0))}{V_1 + V_2} \tag{2.10}$$

y sustituyendo (2.10) en (2.9) se obtiene finalmente que

$$\boxed{\alpha = \frac{k(V_1 + V_2)}{V_1\, V_2}}$$

2.2.6. Absorción de Rayos-X

Una aplicación elemental del modelo exponencial es la absorción de rayos-X que atraviesan un cuerpo parcialmente opaco. La diferencia importante con el resto de los modelos estudiados es que ahora la variable independiente no es el tiempo sino la distancia x de penetración del rayo. Supondremos que $y(x)$ representa a la intensidad de la radiación, y que la lámina es atravesada perpendicularmente por el rayo. La diferencia $y(x+h) - y(x)$ se corresponderá con la absorción, siendo h el espesor de la lámina. La hipótesis que se establece es que esta absorción es directamente proporcional a la intensidad de radiación y al espesor. Esto es,

$$y(x+h) - y(x) = \alpha y(x) h\,,$$

donde el parámetro de proporcionalidad α tiene que ser negativo. Pasando h al primer miembro y tomando límite cuando $h \to 0$, nos aparece el siguiente problema de valores iniciales,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \alpha y(x)\,, \quad y(0) = y_0$$

cuya solución, como sabemos, es $y(x) = y_0 e^{\alpha x}$

EJERCICIO 3

1 **Una población crece exponencialmente durante T meses con una constante de crecimiento de 0.03 por mes. En un momento determinado, la constante aumenta a 0.05 por mes. Después de 20 meses la población se duplica, ¿en qué momento T cambió la constante de crecimiento?**

2 **Se dice que una población crece de forma natural si su velocidad de crecimiento es directamente proporcional a la población existente en cada instante. Según un proverbio chino, la superficie cubierta por los lirios de un estanque crece de manera natural duplicándose cada día. Al final de un mes, de 30 días, la superficie de un estanque se halla totalmente cubierta por los lirios. ¿En qué momento estuvo cubierto al 75 % del estanque?**

3 **Amplias investigaciones han suministrado datos que relacionan el riesgo R (en porcentaje) de tener un accidente automovilístico con el nivel b de alcohol en la sangre (en porcentaje). Se conocen dos puntos representativos $R(0) = 1\,\%$ y $R(0.14) = 20\,\%$. Si suponemos que la razón de cambio del riesgo respecto al nivel de alcohol en la sangre viene dada por $R'(b) = kR(b)$. Resuelve la ecuación diferencial que modeliza a la situación planteada. ¿En qué nivel de alcohol en la sangre el riesgo de sufrir un accidente es del $100\,\%$**

2.3. Modelos exponencial modificado

2.3.1. Ley de enfriamiento de Newton

Después de una muerte violenta, una de las cosas que el forense hace es tomar la temperatura del cuerpo. Un poco tiempo después, se vuelve a tomar la temperatura del cadáver, con objeto de saber el "ritmo"de enfriamiento del cuerpo. Naturalmente, este proceso puede repetirse para obtener una mejor aproximación de la hora en que ha sucedido la muerte. La propiedad en que se basa esta técnica es conocida con el nombre de **Ley de enfriamiento de Newton**, la cual dice que el ritmo con el que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del ambiente que lo rodea. Es decir, si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo para el tiempo t, entonces

$$T'(t) = -k(T(t) - T_e)\,, \quad T(0) = T_0\,, \tag{2.11}$$

siendo $k > 0$, T_e la temperatura ambiente y T_0 la temperatura inicial del cuerpo.

EJEMPLO 2.4

- Supongamos que se encuentra un cadáver a las 8h30' y que a esa hora su temperatura es de 30^0 C siendo la temperatura de la habitación constante de 22^0 C. Una hora más tarde la temperatura había descendido a 28^0 C. Vamos a utilizar esta información para determinar la hora aproximada en que falleció esta persona.

  Es conocido que la temperatura de ser un humano vivo es de aproximadamente 37^0 C. De la ley de enfriamiento de *Newton* deducimos

  $$T'(t) = -k(T(t) - 22)\,, \quad T(0) = 30\,.$$

  Esta ecuación diferencial es lineal, pero podemos simplificarla realizando el cambio de variable $z(t) = T(t) - 22$. En efecto, $z'(t) = T'(t)$, luego,

  $$z'(t) = -kz(t)\,, \quad z(0) = T(0) - 22 = 8\,.$$

Estamos ante el modelo exponencial

$$z(t) = z(0)e^{-kt} = 8e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad T(t) = 22 + 8e^{-kt}\,.$$

Ahora, debemos determinar la constante k de decaimiento,

$$T(1) = 28 = 22 + 8e^{-k} \quad \Rightarrow \quad k = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.2877\,.$$

Nuestro modelo es: $T(t) = 22 + 8e^{-0.2877t}$. Para determinar la hora en que ocurrió el asesinato, debemos encontrar el tiempo correspondiente a 37^0 C.

$$37 = 22 + 8e^{-0.2877t} \quad \Rightarrow \quad t = -\ln\left(\frac{15/8}{0.2877}\right) \approx -2\,.$$

De esta información deducimos que la muerte ocurrió aproximadamente dos horas antes de haber encontrado el cuerpo, aproximadamente a las 6 horas y treinta minutos de la mañana.

EJEMPLO 2.5

- En un asesinato, el detective encuentra a las 11h a un cadáver al que toma la temperatura, que resulta ser de 30 grados centígrados. Una vez revisado el lugar y tras saber que la temperatura del cuerpo, 40 minutos después de la primera medida, es de 16 grados centígrados, y que la temperatura ambiente se ha mantenido en 12 grados centígrados. Se pide, ¿a qué hora se produjo la muerte del sujeto? (Tómese 37 grados centígrados la temperatura corporal media de una persona viva).

Si $y(t)$ representa a la temperatura del cadaver en el momento t, y T_a es la temperatura ambiente, entonces por la ley de enfriamiento de *Newton*, sabemos que

$$y(t) = T_a + ke^{\alpha\, t}\,; \quad \alpha < 0$$

Tomemos como $t = 0$ el momento del asesinato, siendo la temperatura del cuerpo de 37 grados, $y(0) = 37$. Supongamos que han transcurrido t minutos (11h.) $y(t) = 30$, 40 minutos después su temperatura es de 16 grados, $y(t + 40) = 16$. Al ser la temperatura ambiente de 12 grados, entonces

$$y(t) = 12 + ke^{\alpha\, t} \quad \Rightarrow \quad y(0) = 37 = 12 + k \quad \Rightarrow \quad k = 25$$

En consecuencia,

$$\begin{array}{l} y(t) = 30 = 12 + 25e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad 18 = 25e^{\alpha t} \\ y(t+40) = 16 = 12 + 25e^{\alpha(t+40)} \quad \Rightarrow \quad 4 = 25e^{\alpha t}e^{40\alpha} \end{array}$$

por lo tanto,

$$4 = 18e^{40\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{40}\ln\left(\frac{4}{18}\right) \approx -0.0376$$

Sustituyendo en $18 = 25e^{\alpha t}$ y despejando el valor de t obtenemos

$$18 = 25e^{-0.0376t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0.0376}\ln\left(\frac{18}{25}\right) = 8.736$$

Finalmente, la muerte ocurrió 8.736 minutos antes de las 11h.

2.3.2. Contaminación de un lago

Uno de los problemas mas urgentes de la sociedad actual es cómo reducir los niveles de contaminación y toxicidad del agua disponible. Existen modelos muy complejos que requieren del esfuerzo de equipos multidisciplinares, nosotros nos limitaremos a estudiar un modelo muy simple aplicado a la contaminación de un lago. A pesar de su sencillez, observaremos como aparecen elementos básicos que están presentes en los modelos más complicados.

Supongamos un nuevo pesticida que se aplica a los campos y se deposita a través de un río en un lago con un volumen V de agua. Asumamos que el río recibe una cantidad constante de pesticida y que fluye al lago con un ritmo constante f. Estamos, por tanto, suponiendo que el río tiene una concentración constante p del nuevo pesticida. Vamos a suponer también que el agua del lago está bien agitada y que entra tanta agua cómo sale de él. Si $c(t)$ es la concentración de pesticida en el lago en el tiempo t, entonces el ritmo de cambio en la cantidad de pesticida es igual a la cantidad que entra menos la cantidad que sale. Es decir,

$$c'(t) = \frac{f}{V}p - \frac{f}{V}c(t)\,,$$

y si suponemos que el lago estaba inicialmente libre del pesticida, entonces $c(0) = 0$. Para resolver esta ecuación diferencial la reescribimos

$$c'(t) = -\frac{f}{V}\left(c(t) - p\right)\,,$$

y al igual que en la sección anterior, haciendo el cambio de variable $z(t) = c(t) - p$ con $z(0) = c(0) - p = -p$, la ecuación se transforma en,

$$z'(t) = -\frac{f}{V}z(t)\,, \quad z(0) = -p\,.$$

Ya sabemos que la solución de esta ecuación diferencial es

$$z(t) = -p\,e^{-\frac{ft}{V}} \quad \Rightarrow \quad c(t) = p - p\,e^{-\frac{ft}{V}}\,.$$

El segundo término de esta última expresión muestra que a largo plazo , la solución tiende hacia p, como era lógico suponer.

2.3.3. Genética de poblaciones

En genética de poblaciones los fenómenos hereditarios se estudian a nivel de población en lugar de a nivel individual. Consideremos un carácter hereditario particular de un animal, como la longitud del pelo. Supongamos que básicamente hay dos tipos de pelo para cierto animal: pelo largo y pelo corto, y que el pelo largo es el tipo dominante. Sea `A` el gen responsable del pelo largo y `a` el gen responsable del pelo corto. Cada animal tiene un par de genes: `AA` (individuos dominantes), `aa` (individuos recesivos) o `Aa` (individuos híbridos). Si viven N animales en la población, entonces existen $2N$ genes en la población que controlan la longitud del pelo. El número total de genes `a` en la población dividido por $2N$ da la fracción de genes `a` que llamaremos q. Esta fracción se llama frecuencia genética de `a` en la población. La frecuencia genética de `A` será $1 - q$.

Un problema importante en genética de poblaciones es el estudiar la forma en que la frecuencia genética q cambia conforme los animales de la población se reproducen. Si cada unidad de tiempo representa una generación, se puede considerar q como función del tiempo. En general, se estudian un número elevado de generaciones, por lo que q puede considerarse una función derivable de t. Supondremos que la población se aparea al azar y que la distribución de los genes `a` y `A` es la misma para machos y hembras. En este caso, se puede demostrar por la teoría de la probabilidad, que la frecuencia genética es constante de una generación a la siguiente cuando no hay factores que la alteren como mutaciones o influencias externas sobre la población. Discutiremos a continuación las ecuaciones diferenciales que describen los efectos de esos factores de perturbación sobre $q(t)$.

Si en cada generación una fracción α de los genes `a` muta y se transforma en genes `A`, entonces la razón de cambio de la frecuencia genética q debida a esta mutación es

$$q' = -\alpha q\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Sucede con frecuencia que en cada generación una fracción μ de genes `A` mutan en `a` y al mismo tiempo una fracción α de genes `a` mutan en `A`. El efecto neto de estas mutaciones en la frecuencia genética de q está descrito por la ecuación

$$q' = \mu(1-q) - \alpha q\,, \quad \alpha,\, \mu > 0\,.$$

EJEMPLO 2.6

- A continuación haremos un análisis cualitativo para un $\mu = 0.00003$ y $\alpha = 0.00001$.

  $$\frac{dq}{dt} = 0.00003(1-q) - 0.00001q = 0.00003 - 0.0000q = -0.00004(q - 0.75)$$

  La Figura 3.1 muestra la gráfica de $z = -0.00004(q - 0.75)$ y las curvas solución típicas. Puede apreciarse que la frecuencia genética $q = 0.75$ es un valor de equilibrio. Si el valor inicial de q es menor de 0.75, el valor de q crecerá bajo los efectos de la mutación; después de muchas generaciones será aproximadamente 0.75. Si el valor inicial de q está entre 0.75 y 1.00, entonces q decrecerá con el tiempo hasta el valor 0.75.

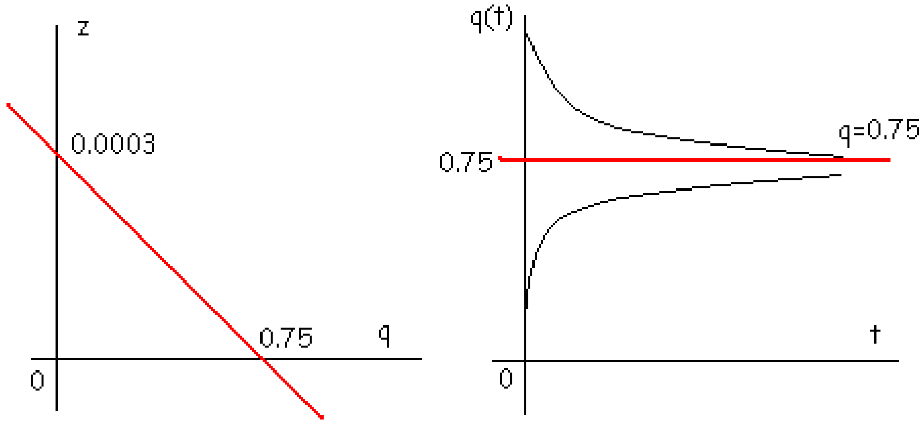

Figura 3.1. Estudio cualitativo del modelo.

En el estudio de cómo una población se adapta al medio ambiente a lo largo de un período grande, los genetistas suponen que algunos tipos hereditarios tienen ventaja sobre otros en cuanto a supervivencia y reproducción se refiere. Supongamos que la habilidad adaptativa de los híbridos `Aa` es ligeramente mayor que la de los individuos dominantes `AA` y recesivos `aa`.

En este caso, resulta que la razón de cambio de la frecuencia genética debida a esta presión selectiva es

$$q' = q(1-q)(c-dq)\,,$$

donde c y d son constantes positivas con $c < d$. Por otro lado, si la habilidad adaptativa de los individuos híbridos es ligeramente menor que la de los dominantes y la de los recesivos, se puede demostrar que

$$q' = kq(1-q)(2q-1)\,,$$

donde k es una constante entre 0 y 1, llamada coeficiente de selección contra los híbridos.

Es posible considerar los efectos mezclados de la mutación y la selección natural. En efecto, supongamos que, además de las mutaciones de `A` en `a` y `a` en `A` tenemos también que la selección va contra los individuos recesivos. Entonces, la razón de cambio neta en la frecuencia genética podría ser

$$q' = \mu(1-q) - \alpha q - kq^2(1-q)$$

EJERCICIO 4

1 **El crecimiento de una célula depende del flujo de nutrientes a través de su superficie. Si $y(t)$ representa al peso de la célula en el tiempo t, supongamos que (para un tiempo limitado) la tasa de crecimiento de la célula sea proporcional al área de su superficie. Es decir, proporcional a $y^{2/3}$. Plantear y resolver la ecuación diferencial que modeliza a esta situación, e interpretar el resultado obtenido.**

2.4. Dinámica dependiente de la densidad

Los individuos de una misma especie tienen necesidades muy similares para sobrevivir, crear y reproducirse; pero la necesidad combinada de todos ellos por un recurso puede superar la oferta del mismo. Los individuos compiten entonces por dicho recurso y por lo menos algunos de ellos no lo consiguen.

DEFINICIÓN 2.4.1 *Competición es una interacción entre individuos, provocada por la necesidad común de un recurso limitado y conducente a la reducción de la supervivencia, el crecimiento y/o la reproducción de los individuos competidores.*

Ahora, podemos pasar a estudiar más a fondo la cuestión. Cuando la población es demasiado grande, el modelo elemental de crecimiento constante, no puede ser exacto, ya que no refleja el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible. Así que hay que agregar un término de competición a la ecuación diferencial lineal. Una elección adecuada del término competitivo es $-by(t)^2$, donde b es una constante, ya que el promedio estadístico del número de encuentros por unidad de tiempo es proporcional a $y(t)^2$. Consideremos entonces la ecuación modificada

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - by(t)^2 = y(t)(r - by(t)) \,, \quad r\,, b > 0\,.$$

Esta ecuación se conoce como **ley logística** del crecimiento de una población y los números r y b se llaman **coeficientes vitales** de la población. La introdujo por primera vez el matemático y biólogo holandés *Verhust*, en 1837 cuando ajustó una curva logística a los datos de seis censos de Estados Unidos de 1790 a 1840 y predijo la población de Estados Unidos para 1940. Su predicción falló por menos de 1 millón de personas (alrededor de un 1 %). Ahora bien, en general, la constante b es muy pequeña comparada con r de tal modo que si $y(t)$ no es demasiado grande, entonces el término $-by(t)^2$ es insignificante comparado con $ry(t)$, por lo que la población crece exponencialmente. Sin embargo, si $y(t)$ es grande entonces el término $-by(t)^2$ debe tomarse en cuenta ya que disminuye la tasa de crecimiento de la población. Es lógico pensar que cuanto más industrializado es un país, tanto más espacio disponible tiene, y cuanto más alimento posee, entonces es más pequeño el coeficiente b.

Consideremos la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de una población aislada. Si y_0 es la población en el tiempo t_0, entonces $y(t)$, la población en el tiempo t, satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - by(t)^2 \,, \quad y(t_0) = y_0$$

Para resolver esta ecuación diferencial la reescribimos como

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right), \quad K = \frac{r}{b},$$

que es una ecuación diferencial en variables separables

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)(1 - y(t)/K)} = \int r dt \,. \tag{2.12}$$

La primera de las integrales que aparece vale

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)(1 - y(t)/K)} = \int \frac{dy(t)}{y(t)} + \int \frac{1/K\, dy(t)}{1 - y(t)/K} = \ln|y(t)| - \ln|1 - y(t)/K|\,.$$

Sustituyendo en (2.12)

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1 - y(t)/K}\right| = rt + C \quad \Rightarrow \quad \frac{Ky(t)}{K - y(t)} = e^{rt+C}\,.$$

Despejando el valor de $y(t)$ en la expresión anterior

$$y(t) = \frac{Ke^{rt+C}}{K + e^{rt+C}} = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}\,.$$

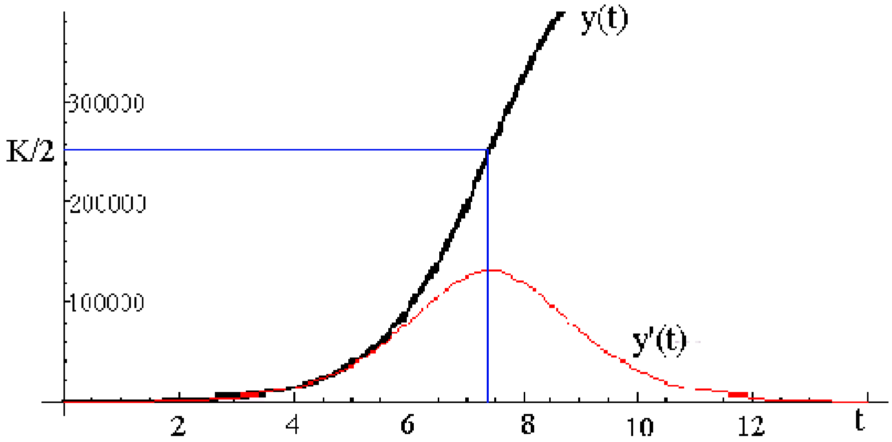

Figura 3.2. Representación gráfica de $y(t)$ y $y'(t)$.

Si examinamos este resultado para ver que tipo de poblaciones predice, podemos observar que si $t \to \infty$, entonces

$$y(t) \to K = \frac{r}{b}$$

Es decir, independientemente del valor inicial, la población siempre tiende al valor límite r/b. Además notemos que $y(t)$ es una función monótona creciente respecto del tiempo si $0 < y_0 < r/b$. Más aún, dado que

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = r\frac{dy(t)}{dt} - 2by(t)\frac{dy(t)}{dt} = (r - 2by(t))y(t)(r - by(t))$$

se ve que $dy(t)/dt$ es creciente si $y(t) < r/2b$, y $dy(t)/dt$ es decreciente si $y(t) > r/2b$. Por ello la gráfica de $y(t)$ debe tener la forma que aparece en la Figura 3.2.

Una curva así se llama **curva logística**. A partir de su forma podemos concluir que el tiempo antes de que la población alcance la mitad de su valor límite es un período de crecimiento acelerado. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero. Este es un período de crecimiento reducido.

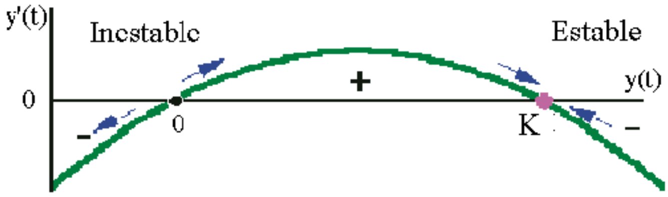

Figura 3.3. Línea fase.

La ecuación diferencial logística es autónoma y también podemos hacer su estudio cualitativo. Para ello estudiemos la función $g(y) = y(r - by)$. Sus ceros están en los puntos $y = 0$ e $y = r/b$. Para valores de $y < 0$ la función es negativa; para $0 < y < r/b$ es positiva y para $y > r/b$ la función es negativa. Por tanto, las soluciones con condición inicial entre 0 y r/b serán crecientes y tendrán asíntota horizontal en r/b. Una condición inicial por encima del valor r/b correspondería a una función decreciente con asíntota horizontal en r/b.

Resumiendo, el crecimiento de una población se describe generalmente por una ecuación logística donde la constante $K = r/b$ se llama **capacidad de carga** del medio ambiente.

Cuando la población inicial es cercana a cero, se produce un rápido crecimiento que va disminuyendo a medida que nos vamos acercando a K. La curva de la población tiene típica forma de S e $y(t)$ tiende asintóticamente a la capacidad de carga. Si la población inicial es mayor que la capacidad de carga, la población decrece en tamaño, acercándose nuevamente asintóticamente a la capacidad de carga.

EJEMPLO 2.7

- Supongamos que en un lago se introducen 100 peces. Después de tres meses sabemos que hay 250 peces. Un estudio ecológico predice que el lago puede mantener a 1000 peces. Vamos a encontrar una fórmula para el número $y(t)$ de peces en el lago, t meses después de la introducción de los 100 peces.

  La capacidad de carga del lago viene dada por $K = 1000$. Por otro lado, para $t = 0$ hay 100 peces, en consecuencia si en la solución de la ecuación logística

  $$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}} = \frac{1000}{1 + Ae^{-rt}},$$

  tenemos en cuenta este hecho

  $$y(0) = 100 = \frac{1000}{1 + A} \quad \Rightarrow \quad A = 9.$$

Finalmente, como $y(3) = 250$, se tiene que

$$y(3) = 250 = \frac{1000}{1 + 9e^{-3r}} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{75}{225}\right) \approx 0.37\,.$$

En consecuencia

$$y(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.37t}}\,.$$

Las predicciones con la ley logística se confirmaron en experimentos con el protozoo *Paramecium caudatum* llevados a cabo por el biólogo y matemático *G. F. Gause*. Se colocaron cinco ejemplares de *Paramecium* en un tubo de ensayo con 0.5 cm^3 de medio nutriente y se contó el número diario de individuos durante seis días. Se encontró que los *Paramecium* se reproducían con una tasa de 230.9 % diario cuando la población era pequeña. El número de individuos aumentaba inicialmente con rapidez y posteriormente con más lentitud hasta alcanzar un nivel máximo de 375 hacia el cuarto día, saturando el tubo de ensayo. A partir de esta información se concluye que si el *Paramecium* crece de acuerdo con la ley logística $dy(t)/dt = r\,y(t) - by(t)^2$, entonces $r = 2.309$ y $b = 2.309/375$. Por lo tanto, la ley logística predice que

$$y(t) = \frac{(2.309)5}{\frac{2.309^5}{375} + \left(2.309 - \frac{2.309^5}{375}\right)e^{-2.309t}} = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}}\,.$$

Para lograr modelos más precisos de crecimiento poblacional, deben considerarse las poblaciones como constituidas por grupos no homogéneos de individuos. Mas bien, hay que subdividir la población en diferentes grupos de edades. También se debe subdividir la población en hombres y mujeres, ya que la tasa de reproducción de ésta depende usualmente más del número de mujeres que del número de hombres.

2.4.1. Modelo epidemiológico I

La siguiente sección trata de la difusión de una enfermedad contagiosa. Empezaremos planteando varias hipótesis que simplifican el problema:

- La población es un número fijo P y cada miembro de la población es susceptible a la enfermedad.
- La duración de la enfermedad es larga, de manera que no se cura durante el período de estudio.
- Todos los individuos infectados son contagiosos y circulan libremente entre la población.
- Durante cada unidad de tiempo cada persona infectada tiene c contactos y cada contacto con una persona no infectada redunda en la transmisión de la enfermedad.

Una vez hechas las simplificaciones, consideremos un corto período de tiempo que va desde t hasta $t + h$. Cada persona infectada tiene ch contactos. ¿Cuántos de esos contactos son con personas no infectadas?. Si $f(t)$ es el número de personas infectadas al tiempo t, entonces $P - f(t)$ es el número de personas que no están infectadas, y $(P - f(t))/P$ es la fracción de la población que no está infectada. Entonces, de los ch contactos hechos por una persona infectada,

$$\left(\frac{P - f(t)}{P}\right) ch\,,$$

habrán sido con personas no infectadas. El número total de nuevas infecciones deberá ser

$$f(t+h) - f(t) = f(t)\left(\frac{P - f(t)}{P}\right) ch$$

dividiendo por h, y haciendo que h tienda a cero obtenemos

$$f'(t) = \frac{c}{P} f(t)(P - f(t))\,.$$

Luego, la función f verifica la ecuación diferencial que da lugar a la ecuación logística, y por tanto

$$f(t) = \frac{P}{1 + Be^{-ct}}\,, \tag{2.13}$$

donde c y B se pueden determinar de las características de la epidemia.

EJEMPLO 2.8

- Los servicios de salud pública registran la difusión de una epidemia de gripe de duración particularmente larga en una ciudad de 500.000 personas. Al inicio de la primera semana de registro se habían contabilizado 200 casos; durante la primera semana aparecieron 300 nuevos casos. Nos proponemos estimar el número de individuos infectados después de 6 semanas.

  Sabemos que el valor de P que aparece en (2.13) es la capacidad de carga del sistema, en nuestro caso el número de individuos que a largo plazo se infectarán, $P = 500000$. Por otro lado, si $t = 0$, entonces $f(0) = 200$, sustituimos en (2.13) y deducimos que $B = 2449$. Cómo el número de infectados al final de la primera semana es de 500, podemos escribir

  $$500 = \frac{500000}{1 + 2449e^{-c}} \quad \Rightarrow \quad c = -\ln\left(\frac{1998}{4998}\right) \approx 0.916891\,.$$

  En consecuencia:

  $$f(t) = \frac{500000}{1 + 2449e^{-0.916891t}}\,.$$

  Finalmente, el número de personas infectadas al final de la sexta semana será $f(6) \approx 45475$.

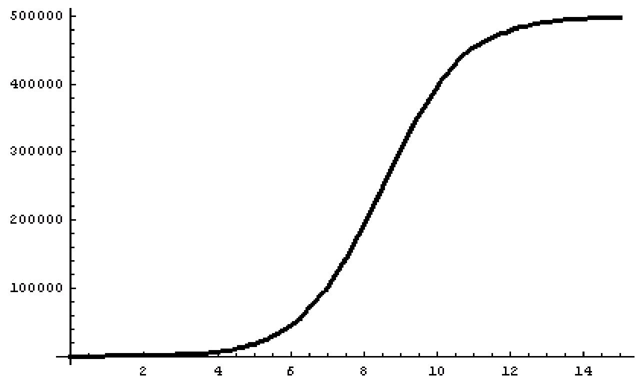

Figura 3.4. Representación gráfica de $f(t) = \frac{500000}{1+2449e^{-0.91689t}}$.

EJEMPLO 2.9

- La propagación de una enfermedad infecciosa en una población de individuos susceptibles de ser contagiados se modeliza por la ecuación diferencial

$$y'(t) = \alpha y(t)(N + 1 - y(t))$$

donde $y(t)$ representa al número de personas enfermos en el tiempo t, N el tamaño de la población y $\alpha > 0$ la tasa específica de infección. Suponiendo que se introduce un individuo enfermo, ¿cómo evoluciona la enfermedad?

Se trata del modelo logístico $y'(t) = \alpha y(t)(K - y(t))$ con una capacidad de carga $K = N + 1$, cuya solución es

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-K\alpha t}} = \frac{N+1}{1 + Ae^{-(N+1)\alpha t}}$$

como $y(0) = 1$, entonces

$$1 = \frac{N+1}{1+A} \quad \Rightarrow \quad N = A\,.$$

El número de personas infectadas en el tiempo t es,

$$y(t) = \frac{N+1}{1 + Ne^{-(N+1)\alpha t}}$$

Este modelo epidémico se utiliza en otros contextos. Por ejemplo, para estudiar la forma en que nuevos avances tecnológicos se aplican en Medicina, o nuevas semillas en la agricultura, o el uso de nuevos insecticidas. Una “persona infectadarepresenta al individuo que conoce el producto. Sin embargo, la transmisión de la información puede verse alterada si entran en juego los medios de comunicación y publicidad.

2.5. Modelos logístico modificado

2.5.1. Caso I

Existen poblaciones tales que si el número de individuos es elevado, entonces la tasa de crecimiento decrece, además si la población es demasiado pequeña esta tasa también decrece (por ejemplo, por la dificultad de los adultos en encontrar pareja).

Sean $y(t)$ la población en el tiempo t, M la capacidad de carga del hábitat, y N la constante necesaria para introducir el factor de escasez. Necesitamos un modelo $y'(t) = g(y)$ que tenga en cuenta los comentarios anteriores. La gráfica de $g(y)$ debería ser del tipo representada en la Figura 3.5.

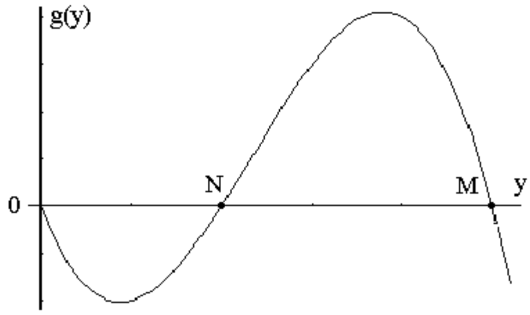

Figura 3.5. Gráfica de $g(y)$.

Observemos que $g(y)$ es negativa si $y > M$, ya que la población decrece cuando aumenta la tasa de crecimiento. También $g(y)$ es negativa cuando $y < N$, porque la población decrece cuando no hay incremento. Por el contrario, $g(y)$ es positiva en $N < y < M$ y $g(0) = 0$.

Debemos modificar el modelo logístico

$$y'(t) = ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right),$$

multiplicando el segundo término por la expresión $y(t)/N - 1$. En consecuencia, ahora nuestro modelo es

$$y'(t) = ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right)\left(\frac{y(t)}{N} - 1\right).$$

Podemos resolver de forma exacta esta ecuación diferencial ya que es de variables separables. No obstante, en lo que realmente estamos interesados es en saber cómo se comportan las soluciones, y para ello el método mas conveniente de análisis es el cualitativo.

Es evidente que tenemos tres puntos de equilibrio $y = 0$, N y M, siendo el 0 y el M sumideros y N una fuente.

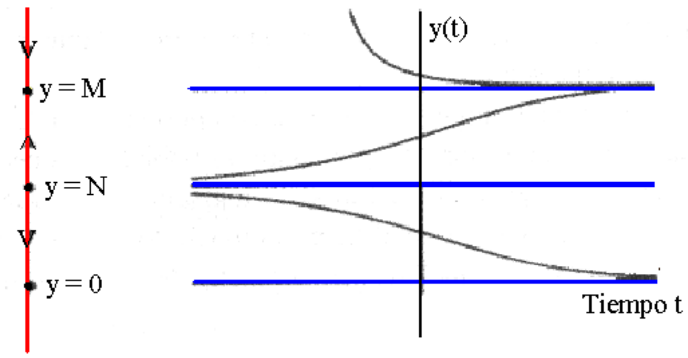

Figura 3.6. Análisis cualitativo del modelo.

La Figura 3.6 muestra la línea fase y las gráficas de soluciones típicas.

2.5.2. Caso II

Hemos comentado al inicio de la sección que el modelo logístico

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right), \tag{2.14}$$

tiene a K como capacidad de carga del hábitat. Es decir, todas las soluciones tienden al valor K cuando t aumenta. Es frecuente que este valor de K se modifique a medida que lo hacen las condiciones ambientales, por ejemplo en función de las precipitaciones. Podemos incluir este efecto oscilatorio, modificando el modelo (2.14)

$$\frac{dy(t)}{dt} = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{b + c\,\text{sen}\ wt}\right),$$

donde b y w son constantes positivas con $b > c$.

Observemos que esta nueva ecuación diferencial no es autónoma y es muy difícil de resolver. Sólo podemos abortar la resolución de este problema a través de técnicas numéricas o bien utilizando un programa de simulación. Hemos simulado el modelo (2.15) obteniéndose el resultado que aparece en la Figura 3.7

$$\frac{dy(t)}{dt} = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{7 + \text{sen}\ wt}\right). \tag{2.15}$$

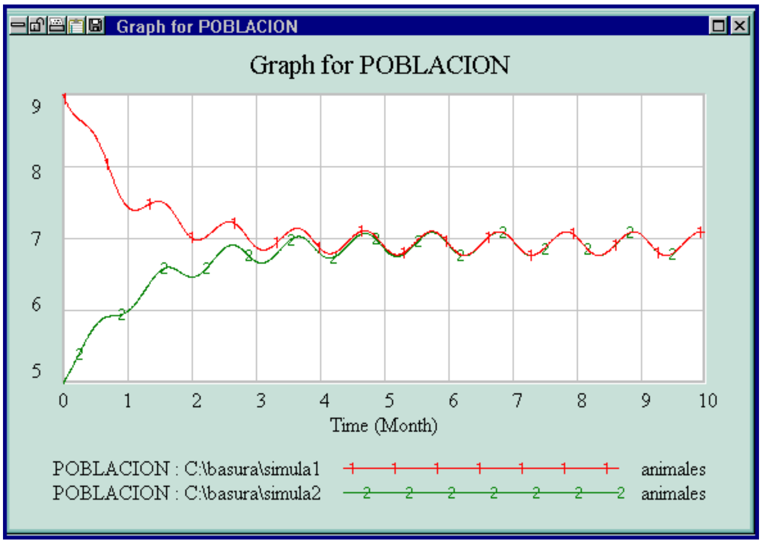

Figura 3.7. Simulación de `(2.15)` con `Vensim`$_{®}$.

Lo que debemos destacar es que una vez que una curva solución entra en la región $6 < y(t) < 8$, entonces queda atrapada ahí y empieza a oscilar.

2.6. Otros modelos basados en E.D.O.

2.6.1. Modelo de disolución

El problema que ahora abordamos es el análisis de la evolución de una mezcla en un compartimiento (un fluido en el interior de un recipiente, un gas en el interior de una habitación,...) Se supone que en un determinado instante hay y_0 gramos de una sustancia disuelta en un recipiente que tiene una capacidad de V litros y que a partir de ese instante se introduce en el recipiente un fluido que contiene una concentración de c_e gramos por litro con una velocidad de entrada de éste de v_e litros por minuto. Se supone que la mezcla se hace uniforme y sale a v_s litros por minuto. El problema que nos planteamos es determinar la cantidad en gramos de la sustancia que hay en el recipiente en cada instante t.

Si $y(t)$ denota a la cantidad de sustancia en el minuto t, entonces el ritmo con el que ésta cambia viene dada por la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y'(t) = v_e\, c_e - \frac{v_s}{V + (v_e - v_s)}y(t)$$

EJEMPLO 2.10

- Un depósito de 300 litros de capacidad contiene 50 litros de agua pura. En el instante $t = 0$ comienza a entrar una solución que contiene 100 cm^3 de alcohol por cada litro de solución a una velocidad de 5 litros por minuto. Este suministro se detiene al llenarse el depósito. Después de media hora se introduce en el tanque una segunda solución de agua con alcohol, con una concentración de un 20 % de alcohol por cada litro de agua, a una velocidad de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo, al introducir la segunda solución se abre una llave del fondo del depósito, y la solución perfectamente mezclada, sale del tanque a una velocidad de 6 litros por minuto. Determinar el porcentaje de alcohol en el depósito cuando se llene completamente.

Dividiremos el ejercicio en dos partes:

- **Durante la primera hora** ($0 \leq t \leq 30$). Consideraremos $y(t)$ como la cantidad de alcohol en el depósito en el minuto t. En esta situación, $y'(t) = 0.5$ litros de alcohol/minuto. Es decir, $y(t) = 0.5t + C$ litros de alcohol. Como inicialmente el tanque sólo contenía agua pura $y(0) = 0$, lo que obliga a que $C = 0$. Por tanto, $y(t) = 0.5t$, y la cantidad de litros de alcohol en el depósito en el minuto 30 es de $y(30) = 0.5 * 30 = 15$.
- **Después de la primera hora** ($t > 30$). Sea $u(t)$ la cantidad de alcohol en el depósito en el minuto t. La cantidad de solución en el tanque es de 200 litros y la nueva situación se modeliza a través del siguiente problema de valores iniciales,

$$u'(t) = (5 * 0.1 + 5 * 0.2) - \frac{6}{200 + 4t}u(t) \; ; \qquad u(0) = 15$$

siendo la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$u'(t) + \frac{3}{100 + 2t}u(t) \; = 1.5$$

cuyo factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\displaystyle\int \frac{3}{100 + 2t}dt} = (100 + 2t)^{\frac{3}{2}}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$u'(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} + 3(100 + 2t)^{\frac{1}{2}}u \; = 1.5(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}$$

o bien

$$\left(u(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}\right)' = 1.5(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad u(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} = 1.5\int(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}dt$$

es decir

$$u(100+2t)^{\frac{3}{2}} = 1.5\int(100+2t)^{\frac{3}{2}}dt = \frac{1.5}{2}\,\frac{2}{5}(100+2t)^{\frac{5}{2}} + C = 0.3(100+2t)^{\frac{5}{2}} + C$$

despejando,

$$u(t) = 0.3(100 + 2t) + \frac{C}{(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Para calcular el valor de C tendremos en cuenta que $u(0) = 15$,

$$15 = 0.3(100) + \frac{C}{(100)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad C = -15000$$

Por último,

$$u(t) = 0.3(100+2t) - \frac{15000}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Como al depósito le faltan 100 litros por llenarse completamente y cada minuto el nivel sube $5+5-6=4$ litros, tardará 25 minutos en hacerlo. La solución al ejercicio será

$$u(25) = 0.3(100+2*25) - \frac{15000}{(100+2*25)^{\frac{3}{2}}} = 36.835 \quad \text{litros de alcohol}$$

EJEMPLO 2.11

- Un contenedor de 300 litros se encuentra lleno en sus dos terceras partes de capacidad y contiene 50 kilos de sal. En el tiempo $t=0$ minutos, se abren las válvulas de manera que se agrega una solución salina con una concentración de un tercio de kilo por litro al contenedor a una velocidad de 3 litros por minuto. Si la mezcla bien agitada se extrae del contenedor a la velocidad de 2 litros por minuto, ¿cuántos kilos de sal se encuentran en el contenedor cuando éste se llena?.

Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el contenedor en el minuto t. La razón de cambio en cada minuto $y'(t)$, será igual a la cantidad de sal que entra en el contenedor, menos la cantidad de sal que sale en el mismo minuto. La velocidad con la que la sal entra en el minuto t será

$$1/3 \text{ Kg/litro } \times 3\text{litro/minuto } = 1 \text{ Kg/minuto } .$$

Al mismo tiempo la velocidad con que sale la calculamos de la siguiente manera. Sabemos que para el minuto t, $y(t)$ será la sal existente en $200+t$ litros de agua. Por tanto, en 2 litros tendremos $2y(t)/(t+200)$ kilos de sal. En consecuencia:

$$y'(t) = 1 - \frac{2}{t+200}y(t)\,, \quad y(0)=50\,.$$

Estamos ante una ecuación diferencial lineal,

$$y'(t) + \frac{2}{t+200}y(t) = 1\,,$$

que tiene por factor integrante

$$\mu(t) = e^{\displaystyle\int \frac{2}{t+200}dt} = e^{2\ln(t+200)} = (t+200)^2\,.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$,

$$y'(t)(t+200)^2 + 2(t+200)y(t) = (t+200)^2 \quad \Rightarrow \quad \left((t+200)^2\,y\right)' = (t+200)^2\,.$$

Integrando

$$(t+200)^2 y = \frac{(t+200)^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{t+200}{3} + \frac{C}{(t+200)^2}\,.$$

De todas estas soluciones, en la única que estamos interesados es en aquella que cumple la condición inicial $y(0) = 50$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$50 = \frac{200}{3} + \frac{C}{200^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-50}{3} 200^2 \,.$$

La solución pedida es

$$y(t) = \frac{t + 200}{3} - \frac{50(200)^2}{3(t+200)^2} \,.$$

Por último, para conocer la cantidad de sal existente en el contenedor cuando éste se ha llenado es necesario saber el tiempo transcurrido. Como cada minuto aumenta en un litro la cantidad de agua e inicialmente teníamos 200 litros serán necesarios 100 minutos para llenar el contenedor. En este caso

$$y(100) \approx 92 \text{ kilos de sal}\,.$$

2.6.2. Modelo para gestionar la pesca en un lago

Supongamos un lago donde no existen depredadores y con alimento suficiente para que los peces no luchen por la comida. Los peces se capturan a intervalos periódicos descritos por la función

$$h(t) = a + b \operatorname{sen} 2\pi t \,,$$

con a y b constantes, $a > b$ y t el tiempo. Si suponemos que los peces crecen con un ritmo proporcional a su población, entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - (a + b \operatorname{sen} 2\pi t) \,,$$

modela a la situación planteada. Donde $y(t)$ es el número de peces en el tiempo t y r la tasa neta de crecimiento. Estamos ante una ecuación diferencial lineal que tiene como factor integrante

$$\mu(t) = e^{-\int r dt} = e^{-rt} \,.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$ y simplificando

$$\left(e^{-rt} y(t)\right)' = -e^{-rt} \left(a + b \operatorname{sen} 2\pi t\right) \,.$$

Tenemos que resolver la integral

$$-\int e^{-rt} \left(a + b \operatorname{sen} 2\pi t\right) dt = \frac{a}{r} \int -re^{-rt} dt - b \int e^{-rt} \operatorname{sen} 2\pi t dt \,. \tag{2.16}$$

La segunda de ellas se resuelve aplicando de forma reiterada la integración por partes. Se obtiene

$$\int e^{-rt} \operatorname{sen} 2\pi t dt = -\frac{2\pi e^{-rt}}{4\pi^2 + r^2} \left(\cos 2\pi t + \frac{r}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t\right) \,. \tag{2.17}$$

Sustituyendo (2.17) en (2.16)

$$e^{-rt}\left(\frac{a}{r}+\frac{b2\pi}{4\pi^2+r^2}(\cos 2\pi t+\frac{r}{2\pi}\operatorname{sen}2\pi t)\right)=$$

$$e^{-rt}\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{4\pi^2+r^2}(2\pi\cos 2\pi t+r\operatorname{sen}2\pi t)\right)$$

Finalmente

$$y(t)=\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{4\pi^2+r^2}(2\pi\cos 2\pi t+r\operatorname{sen}2\pi t)\right)+Ce^{rt}\,.$$

2.6.3. La edad del hielo

Durante los últimos millones de años se producen de forma cíclica etapas de enfriamiento severo del planeta con un período de 100000 años. Estos episodios consisten en un largo intervalo de tiempo de clima muy frío debido a que enormes trozos de hielo que se forman en el hemisferio norte se desplazan hasta el sur. Los modelos matemáticos más elementales basados en E.D.O fueron propuesto por *Budyko* (1969) y *Sellers* (1969), y se modificaron en 1981 por *North, Calahan* y *Coakley.* Los modelos se basan en la idea de que la reflexión de los rayos del sol aumenta cuando se presentan los trozos de hielo. Este proceso reduce la temperatura de la tierra dando lugar a una retroalimentación que provoca un aumento del número de los trozos de hielo. En 1987 *Ghil* y *Childress* propusieron el siguiente modelo

$$c\frac{dT}{dt}=Q(1-\alpha(t))-\mu g(T)T^4 \tag{2.18}$$

siendo c una constante específica del calor de la atmósfera de la tierra.

El término $R_i=Q(1-\alpha(t))$ corresponde a la radiación absorbida con Q que representa a la radiación solar y $\alpha(T)$ el efecto de la reflexión cuyo valor es

$$\alpha(T)=\begin{cases}\alpha_l & \text{si } T\leq T_l\\ \alpha_u & \text{si } T\geq T_u\end{cases}$$

con T_l cuando la tierra está totalmente helada, T_u cuando está libre de bloques de hielo, y α decreciente linealmente para valores de T comprendidos entre estos dos valores.

El segundo término $R_e=\mu g(T)T^4$ se corresponde con la cantidad de radiación emitida, siendo μT^4 la radiación del cuerpo negro y

$$g(T)=1-m\tanh\left(\frac{T}{T_0}\right)^6\;;\quad m=0.5\,;\quad T_0=284K$$

Los puntos de equilibrio del modelo se encuentran resolviendo la ecuación $T'(t)=0$, o bien la intersección de las funciones R_i y R_e, dando lugar a uno o varios puntos de equilibrios, algunos de ellos estables y otros inestables. El clima actual se corresponde con el punto de equilibrio más grande y la edad de hielo al punto de equilibrio más pequeño.

2.7. Teoría de catástrofes

Esta teoría nació entre los años 1970 y 1980, fruto de las investigaciones de *Rene Thom*, y está íntimamente relacionada con la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Una catástrofe la entenderemos como la pérdida de estabilidad de un sistema dinámico.

Consideremos un modelo concreto, por ejemplo

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t)) = \gamma A y(t) - \phi y(t)^2 - \frac{\alpha y(t)^2}{1+\beta y(t)^2}\,, \tag{2.19}$$

que representa la dinámica de una población de mariposas. Observamos que los dos primeros términos corresponden a un modelo logístico, mientras el último es un factor correspondiente al modelo[2] del disco de *Holling*.

Los puntos de equilibrio podemos encontrarlos resolviendo la ecuación $y'(t) = 0$. La Figura 3.8 (izquierda), muestra la representación gráfica de $g(y)$ variando el valor de $A = 30,\, 40,\, 45,\, 50,\, 55,\, 85$ con $\gamma = 0.0111$, $\phi = 0.009$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$.

La Figura 3.8 representa al dibujo fase de la ecuación diferencial autónoma (2.19), para diferentes valores del parámetro A (que corresponde a la edad), mientras que la Figura 3.9 muestra sus puntos de equilibrio correspondientes. Observemos cómo existe un único punto de equilibrio para valores de $A < 38$ o $A > 74$. En cambio, si $40 < A < 74$ existen dos puntos de equilibrio estable separados por uno inestable.

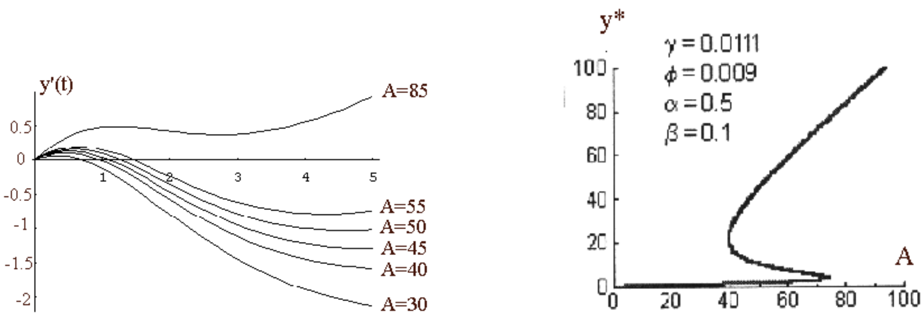

Figura 3.8. Izquierda: Líneas fases. Derecha: Evolución de los puntos de equilibrio.

Por último, comentar que este análisis es un complemento del diagrama de bifurcación que estudiaremos en los modelos discretos.

EJERCICIO 5

1 **Una población de un determinado animal vive en una isla que puede soportar hasta un total de 100000 ejemplares. Por otra parte, si el número de individuos desciende por debajo de una cierta cantidad "m", la población tendería a extinguirse. Si $y(t)$ representa a la cantidad de individuos**

[2] Describe la mortalidad causada por los depredadores.

en el tiempo t, entonces la situación anterior puede modelizarse por la ecuación diferencial,

$$y'(t) = k(100000 - y)(y - m)\,; \qquad 0 < m < 100000$$

- **Obtener de forma explícita $y(t)$ que verifica la ecuación diferencial anterior cuando $m = 5000$, y $k = 10^{-5}$.**
- **Demostrar que, si en algún momento t, la población $y(t) < m$, entonces se extingue en un tiempo finito.**

2 **Con frecuencia la secreción de hormonas en la sangre es una actividad períodica. Si una hormona se segrega en un ciclo de 24 horas, entonces la razón de cambio del nivel de hormona en la sangre se puede modelar por el problema de valor inicial:**

$$y'(t) = a - b\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kt\,, \qquad y(0) = y_0$$

donde $y(t)$ es la cantidad de hormona en la sangre en el instante t, a es la razón promedio de secreción, b es la cantidad de variación diaria en la secreción, k es una constante positiva que representa la razón con la que el cuerpo elimina la hormona de la sangre y y_0 a cantidad de hormona en la sangre en el instante inicial. Hallar la cantidad de hormona en la sangre en cada instante si$a = b = 1\,, k = 2$ e inicialmente no había hormona en la sangre.

3 **Cierta mañana comenzó a nevar muy fuerte y continuó nevando constantemente durante todo el día. Una máquina quitanieve comenzó a las 9 horas a despejar la carretera. A las 11 horas había limpiado 2 km y a las 13 horas 1 km más. ¿A qué hora comenzó a nevar?**

4 **La velocidad de combinación de una sustancia con otra se supone que es proporcional a la cantidad remanente de la primera de ellas. Si inicialmente hay 15 Kg de esta última y 5 Kg cuando han pasado 8 min., hallar cuánta sustancia habrá cuando transcurrió 5 min. y el tiempo que transcurre cuando queda 1 Kg. de sustancia.**

5 **Acabada la cosecha de trigo en cierta localidad, un propietario llena su granero con una cantidad g_0 kg. de trigo. Alrededor del granero vive una especie de roedores que se alimentará del trigo recién almacenado. Un estudio realizado sobre la cantidad de roedores $r(t)$ muestra que crecen con una velocidad $r'(t)$ constante igual a 2, siendo r_0 el número inicial de roedores. Igualmente se ha concluido que, a causa de la presencia de los roedores, el ritmo de decrecimiento de la cantidad de trigo $g(t)$ es proporcional (con constante de proporcionalidad igual a -1) al producto entre la cantidad de roedores y la cantidad de trigo. Se pide:**

- **Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de roedores en cada instante t.**

- **Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de trigo en cada instante t.**
- **Si $r_0 = 2$; ¿cuánto tiempo tardarán los roedores en consumir la cuarta parte de la cantidad de trigo inicial? ,¿cuánto tardarán en comerse todo el trigo?**