UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MODELOS MATEMÁTICOS DISCRETOS EN LA EMPRESA GRADO EN ESTADÍSTICA Y EMPRESA EJERCICIOS DE MODELOS DISCRETOS

Juan Navas Ureña

Jaén, 19 de octubre de 2017

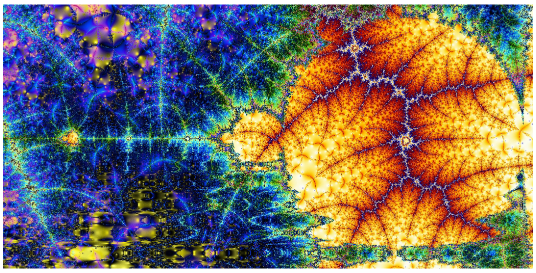
Índice general

Presentación

La colección de Ejercicios Resueltos y Propuestos que presentamos se enmarca dentro de los Modelos Matemáticos en la Empresa y está dedicado al caso discreto.

Empezaremos con disversos ejercicios relacionados con los modelos discretos matriciales haciendo especial hincapié en el modelo de *Leslie* y las tablas de vida. Posteriormente se realiza una introducción a los modelos discretos no matriciales. Se inicia con distintos ejercicios que muestran las diversas técnicas de resolución de ecuaciones en diferencias. Continuaremos con el estudio de los puntos de equilibrio y el análisis de la estabilidad del modelo.

Un concepto interesante de los modelos discretos es el estudio de la teoría del caos. En ellos analizamos el comportamiento de sistemas dinámicos discretos mediante aplicaciones iteradas. Se construyen eligiendo un número cualquiera como dato de entrada de una función, utilizando el resultado como nuevo dato de entrada de la misma función y repitiendo el proceso sucesivamente. Como sabemos por teoría, una aplicación iterada particularmente interesante y popular es la aplicación logística. Esta aplicación muestra muchas de las propiedades que veremos también en los sistemas continuos.



Capítulo 1

INTRODUCCIÓN AL MATHEMATICA.

En esta primera práctica tendremos un primer contacto con el ordenador y el Aula de Informática. En concreto, recordaremos las funciones más usuales del sistema operativo Window y las instrucciones básicas del programa Mathematica.

1.1. Representación gráfica de funciones

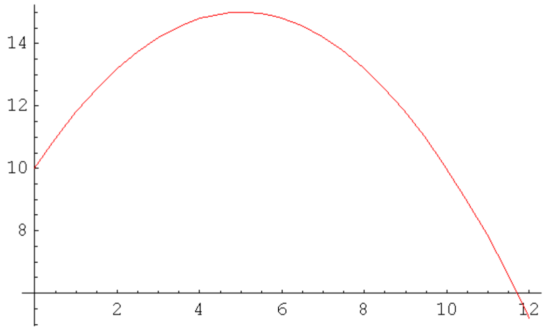
EJERCICIO 1 El consumo de luz (en miles de pesetas) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido, nos viene dado por la expresión:

$$f(t) = -0.2t^2 + 2t + 10\ ; \quad 0 \leq t \leq 12$$

- Representar gráficamente la función.
- ¿En qué período de tiempo aumenta el consumo? ¿En cuál disminuye?
- ¿En qué instante se produce el consumo máximo? ¿Y el mínimo?

```
In[1]:= f[t_] := -0.2 t^2 + 2 t + 10

In[2]:= Plot[f[t], {t, 0, 12}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]]
```



```
Out[2]= - Graphics -
```

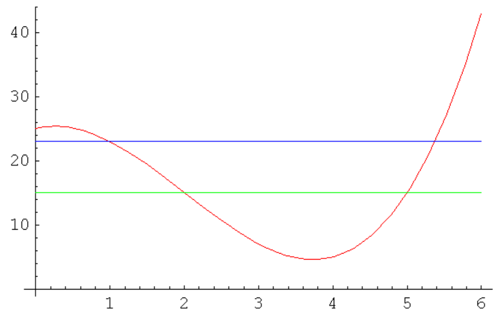
EJERCICIO 2 Durante los primeros seis meses del año, se prevé que las cotizaciones en bolsa de una empresa varíen según la función, $C : [0,6] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $C(t) = t^3 - 6t^2 + 3t + 25$. Donde t indica el mes y $C(t)$ el valor en euros de una acción en ese mes. Un grupo de inversores tiene previsto adquirir acciones de esa empresa pero solamente cuando el valor por acción esté entre 15 y 23 euros.

(a) Determinar durante qué meses podrá este grupo realizar la inversión deseada.

(b) Utilizar la representación de la función para calcular de forma aproximada los períodos obtenidos en el apartado anterior.

```
In[5]:= c[t_] := t^3 - 6 t^2 + 3 t + 25

In[7]:= Plot[{c[t], 15, 23}, {t, 0, 6},
         PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



```
In[8]:= NSolve[c[t] == 15, t]

Out[8]= {{t → -1.}, {t → 2.}, {t → 5.}}

In[9]:= NSolve[c[t] == 23, t]

Out[9]= {{t → -0.372281}, {t → 1.}, {t → 5.37228}}
```

La inversión debe realizarse para valores de t en el conjunto $[1,2] \cup [5, 5.37]$

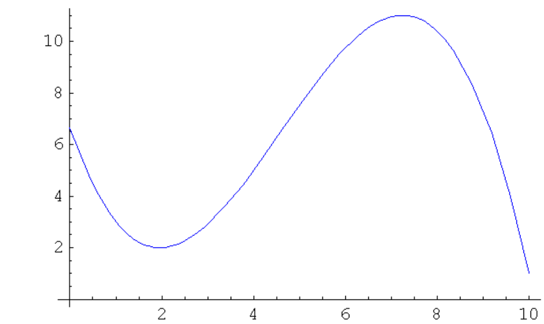
EJERCICIO 3 La población de cierta región a lo largo de los diez primeros meses del año viene dada (en miles de individuos) por la función,

$$P\ :\ [0,10] \longrightarrow \mathbb{R}\ :\qquad P(t) = -\frac{53}{432}t^3 + \frac{731}{432}t^2 - \frac{1127}{216}t + \frac{359}{54}$$

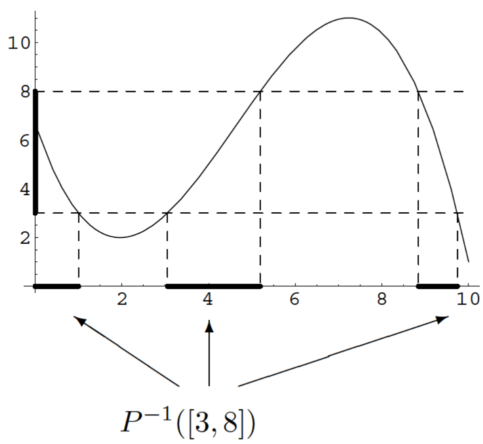
La gráfica de la función es:

```
In[1]:= P[t_] := -53/432 t^3 + 731/432 t^2 - 1127/216 t + 359/54

In[13]:= Plot[P[t], {t, 0, 10}, PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1]]
```



Si deseamos determinar durante qué meses la población estuvo entre 3000 y 8000 habitantes, podemos encontrar estos valores de una manera gráfica,



o con el `Mathematica`,

```
In[15]:= NSolve[P[t] == 3, t]

Out[15]=
        {{t → 1.}, {t → 3.05319}, {t → 9.73926}}

In[16]:= NSolve[P[t] == 8, t]

Out[16]=
        {{t → -0.240077}, {t → 5.19122}, {t → 8.84131}}
```

La solución es, $P^{-1}([3,8]) = [0,1] \cup [3.05, 5.19] \cup [8.8, 9.7]$

1.2. Ajuste por mínimos cuadrados

El método de ajuste de datos por mínimos cuadrados tiene su origen en un problema de astronomía. En concreto, se deseaba determinar la órbita de un asteroide. En 1801 el astrónomo *Giuseppe Piazzi* descubrió el asteroide Ceres y pudo hacer un seguimiento de su órbita durante 40 días. A partir de ese momento, y tomando como base los datos de *Piazzi*, muchos científicos de la época intentaron descubrir la órbita de este asteroide, pero los cálculos basados en la resolución de las ecuaciones de *Kepler* eran muy complicados. A finales del 1801 *Carl Friedrich Gauss* aplicó el método de los mínimos cuadrados para determinar la órbita y permitió al astrónomo alemán *Zach* poder localizar el asteroide. Finalmente, *Gauss* publicó su método en 1809 con el nombre "*Theoria Motus Corporum Coelestium in sctionibus conicis solem ambientium*". Al igual que ocurrió con el el cálculo diferencial, el francés *Adrien-Marie Legendre* desarrolló el mismo método de forma independiente en 1805.

Al realizar un determinado experimento, o al observar la evolución de algunos de los índices económicos, solemos encontrarnos con una tabla o colección de datos, sobre los que estamos interesados en construir un modelo matemático que pueda describirlos. Con este objetivo las tareas que deben hacerse son:

- Ajustar a un tipo de modelo los datos seleccionados.
- Elegir, entre una familia de modelos, el más apropiado.
- Hacer predicciones a partir del modelo obtenido.

El método de los mínimos cuadrados interviene en la segunda de las fases, tratando de determinar los parámetros que aparecen en el modelo seleccionado. Este método consiste en elegir una función $y = f(x)$ que haga mínimo al error,

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - f(x)|^2 \,,$$

donde $\{(x_i, y_i)\,;1 \leq i \leq m\}$ representa a la colección de los datos.

1.3. Descripción del método

Suele ser bastante frecuente que en una primera etapa del crecimiento una población crezca según el modelo exponencial,

$$y(t) = A\,e^{r\,t}\,, \quad A,\, r \in \mathbb{R}^+\,. \tag{1.1}$$

donde $y(t)$ es el número de individuos de la población en el tiempo t.

Si en (1.1) tomamos logaritmos neperianos,

$$\ln(y(t)) = \ln(A)\; + r\,t\,, \quad A,\, r \in \mathbb{R}^+\,, \tag{1.2}$$

donde esta expresión, como puede apreciarse, es del tipo lineal, y por lo tanto, podemos realizar un ajuste lineal de los datos: $\ln(y(t))$ utilizando el método de los mínimos cuadrados.

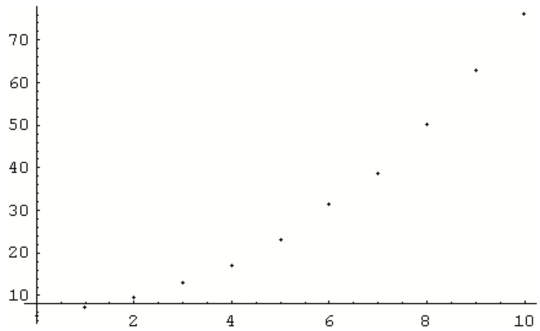
EJERCICIO 4 En la tabla siguiente aparecen los datos de la población de Estados Unidos para cada década en el período 1800-1900:

AÑO	t	$y(t)$ (en millones)	$\ln(y(t)$
1800	0	5.3	1.666771
1810	1	7.2	1.97408
1820	2	9.6	2.26176
1830	3	12.9	2.55723
1840	4	17.1	2.83908
1850	5	23.2	3.14415
1860	6	31.4	3.44681
1870	7	38.6	3.65325
1880	8	50.2	3.91602
1890	9	62.9	4.14155
1900	10	76.2	4.33336

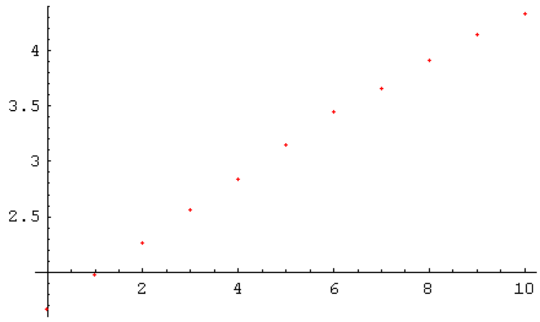
Podemos utilizar `Mathematica`® para la representación gráfica de estos datos.

```
A=ListPlot[{{0,5.3},{1,7.2},{2,9.6},{3,12.9},{4,17.1}, {5,23.2},{6,31.4},
{7,38.6},{8,50.2},{9,62.9},{10,76.2}}]
```

```
B=ListPlot[{{0,Log[5.3]},{1,Log[7.2]},{2,Log[9.6]},{3,Log[12.9]},
{4,Log[17.1]}, {5,Log[23.2]}, {6,Log[31.4]},{7,Log[38.6]}, {8,Log[50.2]},
{9,Log[62.9]},{10,Log[76.2]}}, PlotStyle → RGBColor[0,0,1]]
```



Representación gráfica $(t, y(t))$



Representación gráfica $(t, \ln(y(t)))$

- Empezaremos encontrando la recta $y = at + b$ de ajuste de mínimos cuadrados para estos datos. Como es conocido, debemos buscar los parámetros a y b tales que hagan mínimo la expresión,

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=0}^{i=10} (\ln(y(t_i)) - at_i - b)^2 \ ,$$

lo que obliga a resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 & \Rightarrow & -2\displaystyle\sum_{i=0}^{i=10} (\ln(y(t_i)) - at_i - b)\ t_i = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 & \Rightarrow & -2\displaystyle\sum_{i=0}^{i=10} (\ln(y(t_i)) - at_i - b) = 0\,. \end{array} \right.$$

Ahora bien, en lugar de resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas anterior, es preferible hacer uso de algunos de los múltiples programas diseñados para tal fin, por ejemplo `Mathematica`®.

```
Fit[{{0,Log[5.3]},{1,Log[7.2]},{2,Log[9.6]},{3,Log[12.9]},
{4,Log[17.1]}, {5,Log[23.2]},{6,Log[31.4]},
{7,Log[38.6]},{8,Log[50.2]},{9,Log[62.9]}, {10,Log[76.2]}},
{1,t},t]
```

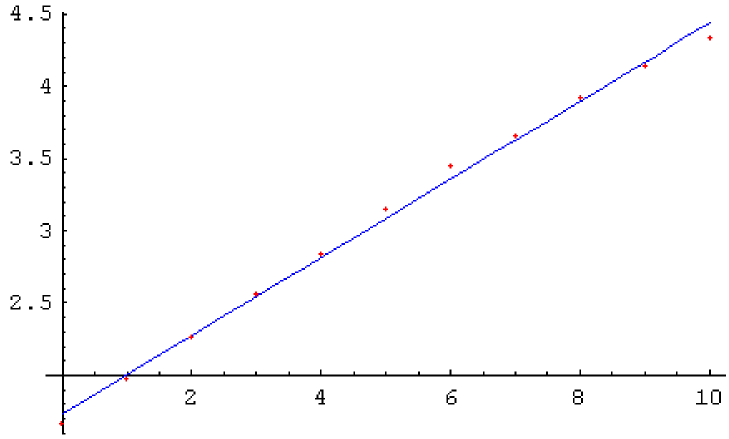
La respuesta que obtenemos es:

$$1.73224 + 0.270552t$$

Ahora representamos la recta anterior

```
ajuste=Plot[1.73224+0.270552t,{t,0,10}]
```

y finalmente superponemos los datos reales $(\ln(y(t))$ y la recta obtenida en el ajuste.



Datos y recta de ajuste.

Para terminar encontramos los parámetros A y r de (1.1),

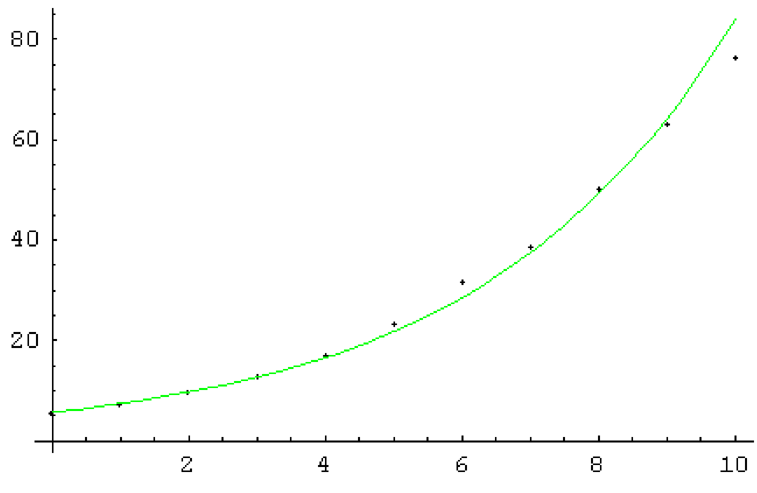
$$\ln(y(t)) = \ln(A) + r\,t = 1.73224 + 0.270552\,t\,,$$

o bien,

$$A = e^{1.73224} \approx 5.65\,, \quad r \approx 0.27\,,$$

es decir

$$y(t) = Ae^{rt} = 5.65e^{0.27\,t}\,.$$



Datos $y(t)$ y función $5.65\,e^{0.27\,t}$.

De esta manera, podemos tener una estimación de la población para el año 1910,

$$y(11) = 5.65\,e^{0.27*11} = 110.13\,\text{millones}\,.$$

- Un **segundo método** consiste en hacer uso de los datos

$$y(0) = 5.3\,, \quad y(5) = 23.3\,,$$

a fin de determinar los parámetros A y r del modelo (1.1). De esta manera

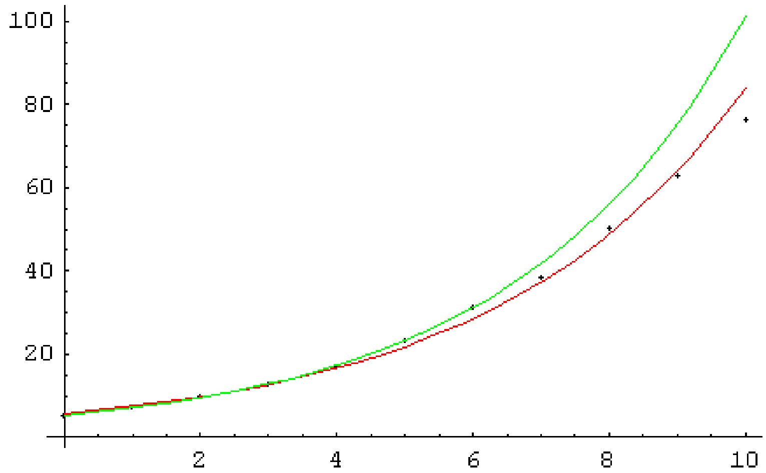
$$y(0) = 5.3 \quad \Rightarrow \quad 5.3 = Ae^{0} \quad \Rightarrow \quad A = 5.3\,,$$

además

$$y(5) = 23.2 \quad \Rightarrow \quad 23.2 = 5.3\,e^{5\,r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{23.2}{5.3}\right) \approx 0.295289\,.$$

En consecuencia,

$$y(t) = 5.3\,e^{0.295\,t}\,.$$



Puntos $= y(t)$; Rojo $= 5.65\,e^{0.27\,t}$; Verde $=5.3\,e^{0.295\,t}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 5

1.- **En la tabla siguiente se encuentran los datos de población para Estados Unidos de 1910 a 1980. Realizar un análisis similar al ejemplo resuelto para estimar la población en el año 1990.**

AÑO	$y(t)$ (en millones)
1910	92.2
1920	106.0
1930	123.2
1940	132.2
1950	151.3
1960	179.3
1970	203.3
1980	226.5

2.- **Recientemente hay un gran debate sobre la importancia de preservar parte del terreno para mantener la biodiversidad. Muchos de los argumentos utilizados están basados en estudios realizados en islas del Caribe. En este ejercicio se utilizará la ley potencial, en la cual se supone que el número de animales N en el área A de la isla viene dado por**

$$N = kA^a\,, \qquad k\,, a \in \mathbb{R}^+\,. \tag{1.3}$$

Supongamos los siguientes datos:

	Área =A (Km^2)	Número = N
Redunda	1	3
Montserrat	33	10
Jamaica	4.41	38
Cuba	46.74	97

Hacer uso de la metodología utilizada en el Ejemplo 1.1 para completar la tabla:

	Área =A (Km^2)	Número = N
Saba	5	
Puerto Rico		40
Santa Cruz	80	
Española		88

3.- **En 1601 el astrónomo *J.Kepler* formuló su tercera ley del movimiento planetario** $T = cd^{3/2}$ **donde** d **es la distancia de un planeta al sol medida en millones de kilómetros,** T **es el periodo orbital en días y** c **es una constante. Los datos observados para los cuatro planetas Mercurio, Venus, Tierra y Marte son:**

d_i	**58**	**108**	**155**	**228**
T_i	**88**	**225**	**365**	**687**

Ajustar el valor del parámetro c **para estos datos, por el método de los mínimos cuadrados.**

4.- **Aplicar el método de los mínimos cuadrados para ajustar los datos que aparecen en la tabla,**

x_i	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**
y_i	**0.06**	**0.12**	**0.36**	**0.65**	**0.95**

al modelo cuadrático $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Capítulo 2

MODELOS BASADOS EN SISTEMAS DE ECUACIONES

2.1. Introducción

Para resolver un problema que involucra sistemas de ecuaciones lineales se debe tener en cuenta lo siguiente:

1.- Entender el problema.

2.- Determinar los datos conocidos.

3.- Nombrar adecuadamente las incógnitas de acuerdo a lo que se pida.

4.- Establecer las relaciones existentes entre los datos conocidos y las incógnitas.

5.- Determinar el sistema de ecuaciones lineales asociado a las relaciones en (d).

6.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante en (e).

7.- Verificar que las respuestas obtenidas si están de acuerdo al problema.

8.- Interpretar el resultado si es posible.

EJERCICIO 6 Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por la siguiente tabla:

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1 la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encontrar el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas.

- Sea x_i el número de unidades que se deben producir del producto i que se fabrican durante las 8 horas con $i = 1, 2, 3$ y 4. Entonces:
  - $1x_1$: es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 1.
  - $2x_2$: es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 2.
  - $1x_3$: es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 3.
  - $2x_4$: es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 4.

  Como la máquina 1 debe ser usada 8 horas diarias, entonces tenemos que

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 8\,.$$

  Procediendo de forma similar para las máquinas 2 y 3 obtenemos el sistemas de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 8 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8 \end{cases}$$

  El sistema puede ser analizado y resuelto con `Mathematica`®,

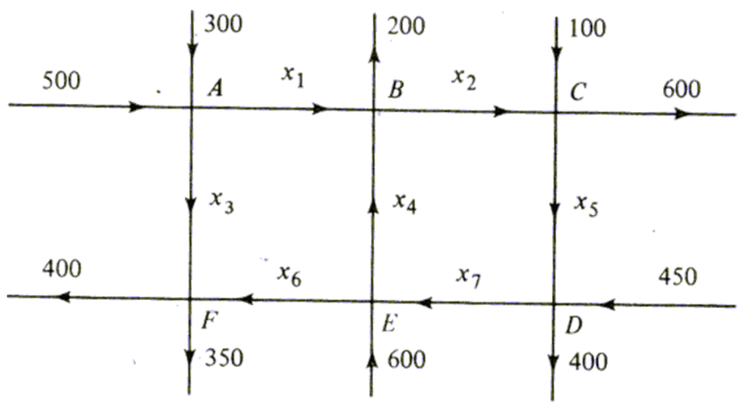
```
Untitled-1 *
In[1]:= Reduce[{x1 + 2 x2 + x3 + 2 x4 == 8, 2 x1 + 0 x2 + x3 + x4 == 8,
          x1 + 2 x2 + 3 x3 + 0 x4 == 8}, {x1, x2, x3, x4}]

Out[1]= x1 == 4 - x3 && x2 == 2 - x3 && x4 == x3
```

El sistema tiene infinitas soluciones. Cada variable x_i es no negativa por representar la cantidad de unidades fabricadas del producto i cada día, por lo tanto $x_i \geq 0$. Si asumimos que se produce un número completo de unidades, entonces x_i debe ser además un número entero para que todos los x_i sean no negativos. En consecuencia, x_4 debe ser un entero menor o igual que 2, siendo las posible soluciones las que aparecen en la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4
Producto 1	4	2	0	0
Producto 2	3	1	1	1
Producto 3	2	0	2	2

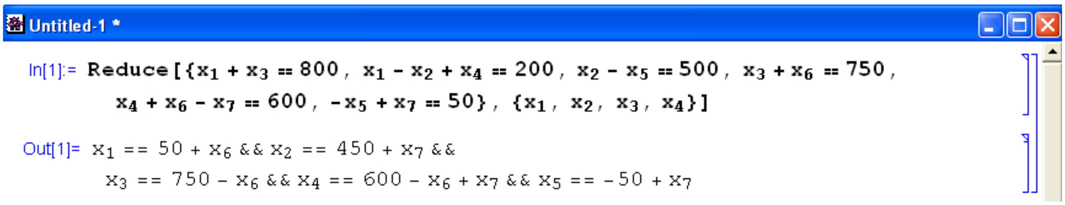
EJERCICIO 7 Supongamos que tenemos una red de calles en una sola dirección en una ciudad. Se quiere analizar el flujo de tráfico en cada una de las calles. La dirección del tráfico en cada una de las calles está dado en la figura. En varios sitios se han colocado contadores, y el número promedio de coches que pasan por cada uno de ellos en el período de 1 hora, aparece también en la figura. Las variables $x_i, i = 1, 2 \cdots, 7$ representan el número de coches por hora que pasan de la intersección A a la intersección B, de la intersección B a la intersección C, etc.



- En primer lugar determinaremos los posible valores para las variables x_i. **Asumimos que el número de coches que llegan a una intersección debe ser igual a los que salen**. Por lo tanto, teniendo en cuenta este hecho deducimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 800 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 200 \\ x_2 - x_5 = 500 \\ x_3 + x_6 = 750 \\ x_4 + x_6 - x_7 = 600 \\ -x_5 + x_7 = 50 \end{cases}$$

El sistema tiene 6 ecuaciones lineales y 7 incógnitas que puedes ser analizado y resuelto con `Mathematica`®,



Es evidente que las variables x_i, que representan al número de coches por hora en una intersección, tiene que ser mayores o iguales a cero (valores negativos representarían coches en dirección contraria). Aplicando esta restricción tenemos,

$$x_6 \leq 750\,, \quad x_7 \geq 50$$

Si suponemos que la calle que une los puntos D y E tiene que ser reparada, entonces es necesario que el tráfico que circule por esta calle sea mínimo, esto es $x_7 = 50$. Pero si $x_5 = 0$, entonces $x_7 = 50$. Es decir, si se cierra la calle que une los puntos C y D conseguiremos que el flujo entre D y E sea el mínimo. Los flujos x_1, x_3, x_4 y x_6 no están determinados de forma única.

EJERCICIO 8 Un inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones son de tres compañías: BBVA, Banesto y Vodafone, y que hace dos días su valor bajó 350 euros pero que ayer aumentó 600 euros. El corredor recuerda que hace dos días las acciones de BBVA bajó 1 euro por acción y las de Banesto 1.50 euros, pero que el precio de las acciones de Vodafone subió 0.50 euros. También recuerda que ayer el precio de las acciones de BBVA subió 1.50 euros por acción, las de Banesto bajó otros 0.5 euros por acción y las de Vodafone subi 1.0 euro por acción. Demostrar que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee el inversionista en cada compañía, pero que si sabemos que tiene 200 acciones de Vodafone, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en BBVA y en Banesto.

- Llamemos x_1 al número de acciones del BBVA, x_2 al número de acciones en Banesto y x_3 el número de acciones de Vodafone. Por el enunciado deducimos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 - 1.5x_2 + 0.5x_3 & = & -350 \\ 1.5x_1 - 0.5x_2 + x_3 & = & 600 \end{array} \right.$$

Al ser mayor el número de incógnitas que el de ecuaciones, el corredor de bolsa no tiene información suficiente para determinar el número de acciones de cada una de las compañías.

Si añadimos la condición $x_3 = 200$ entonces el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 - 1.5x_2 + 0.5x_3 & = & -350 \\ 1.5x_1 - 0.5x_2 + x_3 & = & 600 \\ x_3 & = & 200 \end{array} \right.$$

es compatible determinado, que puede ser resulto con `Mathematica`®, obteniéndose: $x_1 = 300$, $x_2 = 100$ y $x_3 = 200$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

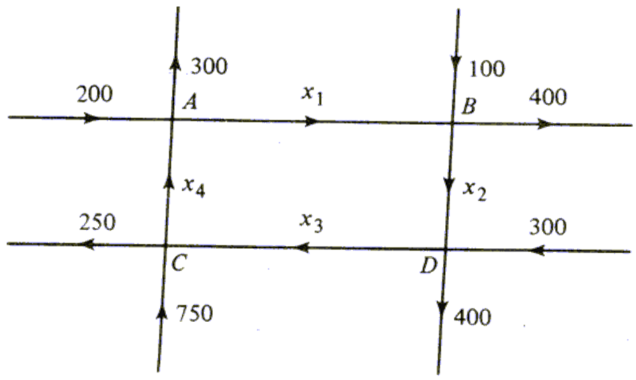
EJERCICIO 9

1.- **Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó 30 euros diarios en Inglaterra, 20 euros diarios en Francia y 20 euros diarios en Grecia por concepto de hospedaje. En comida gastó 20 euros diarios en Inglaterra, 30 euros diarios en Francia y 20 euros diarios en Grecia. Sus gastos adicionales fueron de 10 euros diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de 340 euros en hospedaje, 320 euros en comida y 140 euros en gastos adicionales. Calcular el número de días que pasó el viajero en cada país o comprobar que los registros deben estar incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con otra.**

2.- **Una encuesta dirigida a 250 personas se realizó para conocer sus preferencias entre G.A.D.E. y F.I.C.O. Entre las que contestaron, el 55 % prefirió G.A.D.E. Si los que prefirieron F.I.C.O. fueron 90, +cu+ntos no contestaron a la encuesta?**

3.- **Para el control de cierta enfermedad de una planta, se usan tres productos químicos en las siguientes proporciones: 10 unidades del producto A, 12 unidades del producto B, y 8 unidades del producto C. Las marcas X, Y y Z son atomizadores comerciales que se venden en el mercado. Un litro de la marca X contiene los productos A, B y C, en la cantidad de 1, 2 y 1 unidades respectivamente. Un litro de la marca Y contiene los productos en la cantidad de 2, 1 y 3 unidades respectivamente; y un litro de la marca Z los contiene en la cantidad 3, 2 y 1 unidades respectivamente. ¿Qué cantidad de cada marca debe emplearse para fumigar la planta con las cantidades exactas de los productos requeridos para el control de la enfermedad?**

4.- **El siguiente diagrama reproduce una red de calles de una sola dirección con el flujo de tráfico en las direcciones indicadas. El número de coches está dado como promedio de coches por hora. Suponiendo que el flujo que llega a una intersección es igual al flujo que sale de ella, construir un modelo matemático del flujo de tráfico. Si la calle que va de C a A estuviera en reparación, ¿cuál sería el mínimo tráfico que se podría permitir?. ¿Cómo podría obtenerse este mínimo?**



5.- **Una refinería produce gasolina con y sin azufre. Cada tonelada de gasolina sin azufre requiere 5 minutos en la planta A y 4 en la planta B. Por su parte, cada tonelada de gasolina con azufre requiere 4 minutos en la planta A y 2 en la planta B. Si la planta A tiene 3 horas disponibles y la B 2 horas, ¿cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo?**

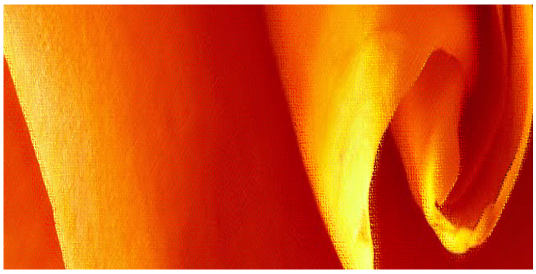
6.- **Un médico está preparando una dieta que consta de los alimentos A, B y C. Cada gramo del alimento A contiene 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada gramo del alimento B contiene 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada gramo del alimento C contiene 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidades de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántos gramos de cada comida se necesitan?**

7.- **Una compañía representa a tres refiner+as de petróleo. Llamémoslas Refinería 1, Refinería 2 y Refinería 3. Cada refinería produce tres productos basados en el crudo: alquitrán, gasóleo y gasolina. Supongamos que, de un barril de petróleo, se sabe que:**

- **La primera refinería produce 4 litros de alquitrán, 2 de gasóleo, y 1 de gasolina.**
- **La segunda refinería produce 2 litros de alquitrán, 5 de gasóleo y 2.5 de gasolina.**
- **La tercera refinería produce 2 litros de alquitrán, 2 de gasóleo y 5 de gasolina.**

Supongamos que hay una demanda de estos productos de la siguiente manera: 600 litros de alquitrán, 800 litros de gasóleo, y 1000 litros de gasolina. ¿Cuántos barriles de crudo necesitará cada refinería para satisfacer la demanda?

Solución: ***La Refinería 1 necesitaría 31.25 barriles de crudo. La Refinería 2 necesitará 87.5 barriles de crudo y la Refinería 3 necesitará 150 barriles de crudo.***



Capítulo 3

EL MODELO ECONÓMICO DE LEONTIEF

3.1. Modelo de Leontief de Entrada-Salida

El economista Wassily W. Leontief nació en San Petersburgo en 1906. Estudió en las Universidades de Moscú y Leningrado doctorándose en 1928 en Berlín y trabajó en la escuela de Kiel hasta su supresión por Hitler. En 1929 emigró a los Estados Unidos, se incorporó a la Oficina Nacional de Investigación Económica de New York, y fue profesor en la Universidad de Harvard. Obtuvo el Premio Nobel de Economía en 1973 por el desarrollo del método Entrada-Salida (input-output) y su aplicación a importantes problemas económicos. Los primeros pasos teóricos del modelo los desarrolló en Kiev, y en 1941 publicó su celebre libro *"The Structure of the American Economy"*, donde por primera vez se presentó esta metodología de estudio.

El método es utilizado para analizar las relaciones existentes entre diferentes sectores de producción y consumo que forman parte de la economía de una nación aunque en la actualidad puede ser usado en contextos más limitados, como por ejemplo, grandes empresas.

El modelo supone que la economía a estudiar está formada por diferentes sectores de producción y de servicios. Existe una demanda interna que se tiene que atender y también una demanda externa que también hay que satisfacer.

Supongamos la tabla siguiente que representa a las necesidades de demanda interna:

producción/demanda	Agricultura	Manufactura	Servicios
Agricultura	0.4	0.03	0.02
Manufactura	0.06	0.37	0.1
Servicios	0.12	0.15	0.19

La primera columna se interpreta de la siguiente manera: el sector de la Agricultura necesita 0.4 del propio sector, 0.06 del sector de Manufactura y 0.12 del sector Servicios.

Generalizando, supongamos que una economía tiene n industrias $(I_1, I_2, \cdots, I_n)$ donde cada una de ellas tiene unas necesidades de entrada (electricidad, materias primas, etc.) y unas salidas (los productos acabados). Sea d_{ij} la cantidad de entrada que la industria I_j necesita de la industria I_i para producir una unidad. Con estos coeficientes confeccionamos la matriz de **entrada-salida**,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

donde las filas corresponden a los I_i provedores y las columnas a los usuarios I_j.

Si, por ejemplo, $d_{23} = 0.23$ está dado en euros, entonces debe utilizarse 0.23 euros del producto de la industria 2 para producir un valor de un euro del producto de la industria 3.

Es evidente que la cantidad total gastada por la industria I_j para producir un valor de un euro de salida está dada por la suma de los elementos de la columna j de la matriz D. En este caso, para que el modelo sea coherente tiene que ocurrir:

- **Los valores d_{ij} deben ser tales que** $0 \leq d_{ij} \leq 1$
- **La suma de los elementos de cualquier columna debe ser menor o igual que uno.**
- **Se cumple la condición de equilibrio: los gastos debidos al consumo deben ser iguales a los ingresos obtenidos de las ventas.**

Resumiendo, el objetico del modelo de Leontief es encontrar el equilibrio entre la oferta y la demanda en una economía. Para cada uno de los sectores industriales existe una ecuación que relaciona oferta y demanda, de tal manera que en cualquiera de estos modelos es usual encontrarse con sistemas de miles de ecuaciones lineales con miles de incógnitas.

EJERCICIO 10 Supongamos una economía que consta de dos industrias I_1 e I_2, siendo las interacciones entre ellas las dadas por la tabla siguiente:

	Entrad. I_1	Entrad. I_2	Demand. finales	Producc. total
Producción de I_1	60	64	76	200
Producción de I_2	100	48	12	160
Entradas totales	200	160		

También se supone que todo lo que se produce se consume. Es decir, la producción de cada industria debe ser igual a la suma de todas las entradas (en las mismas unidades)

- Observemos que de las 200 unidades producidas por I_1, 60 las utiliza la misma industria, 64 la I_2, y quedan 76 unidades diponibles para la demanda final (bienes no utilizadas por la propia industria).

- Supongamos que se ha realizado una investigación de mercado y se ha detectado que dentro de 5 años la demanda final para la industria I_1 decrecerá de 76 a 70 unidades, mientras que la I_2 pasará de 12 a 60 unidades. ¿Qué tanto debería cada industria ajustar su nivel de producción a fin de satisfacer estas estimaciones?

  De la tabla, deducimos que la industria I_1 necesita el uso de $(60/200)x_1$ unidades de su propio producto y $(100/200)x_1$ unidades del producto de I_2, para producir x_1 unidades. De manera semejante la industria I_2 debería usar $(64/160)x_2$ unidades del producto de I_1 y $(48/160)x_2$ unidades de su propio producto. De la tabla, observamos que: La industria I_1 requiere la utilizacin de $(60/200)x_1$ unidades de su propio producto y $(100/200)x_1$ unidades del producto de I_2, para producir x_1 unidades. En forma análoga, I_2 debería usar $(64/160)x_2$ unidades del producto de I_1 y $(48/160)x_2$ unidades de su propio producto. Al ser la producción total igual a las unidades consumidas por la industra I_1 mas las consumidas por la I_2 y además la demanda final, se obtiene:

$$x_1 = \frac{60}{200}x_1 + \frac{64}{160}x_2 + 700$$

  Razonando de forma similar para la producción total de I_2,

$$x_2 = \frac{100}{200}x_1 + \frac{48}{160}x_2 + 60$$

  Este sistema de ecuaciones lineales puede ser expresado matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60/200 & 64/160 \\ 100/200 & 48/160 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \end{pmatrix}$$

  o de forma simbólica:

$$X = AX + D$$

ecuación conocida como de insumo-producto, siendo, X **la matriz de Producción,** A **la matriz Insumo-Producto y** D **la matriz de Demanda**.

Notemos:

1.- El elemento a_{ij} corresponde a la proporción de los insumos de la industria j que son producidos por la industria i.

2.- Cada elemento de la matriz A se encuentran entre cero y uno.

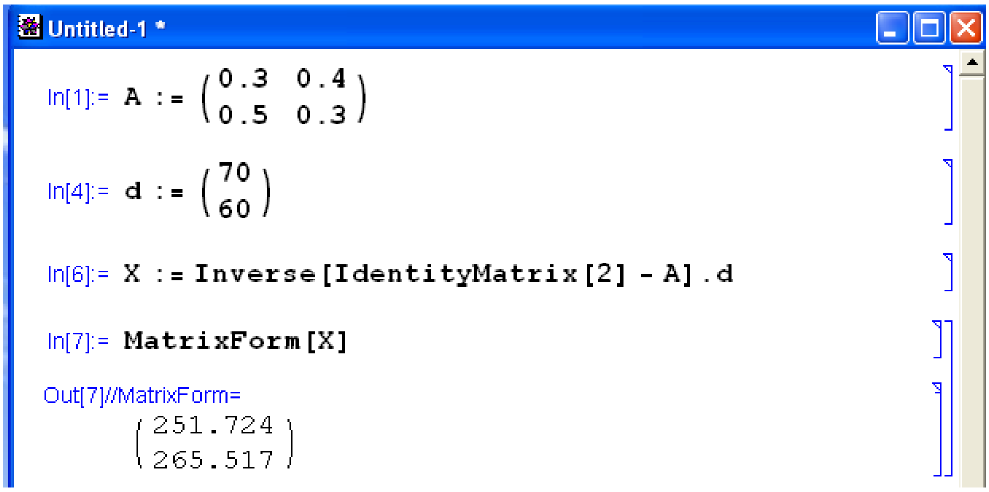
3.- La suma de los elementos de cualquier columna nunca es mayor que uno.

- Para hallar la matriz de producción X actuamos de la siguiente manera,

$$X = AX + D \quad \Rightarrow \quad X - AX = D \quad \Rightarrow \quad (I - A)X = D$$

si existe la matriz inversa $(I - A)^{-1}$ entonces:

$$X = (I - A)^{-1}D \tag{3.1}$$



Conclusión: La industria I_1 debe producir 251.7 unidades y la industria I_2 265 unidades de su producto con el fin de cumplir con las demandas finales de la proyección a 5 años.

EJERCICIO 11 Supongamos la tabla siguiente que representa a las necesidades de demanda interna:

producción/demanda	Agricultura	Manufactura	Servicios
Agricultura	0.4	0.03	0.02
Manufactura	0.06	0.37	0.1
Servicios	0.12	0.15	0.19

Supongamos que la matriz de demanda es $D = \begin{pmatrix} 80 \\ 140 \\ 200 \end{pmatrix}$. Determinar la producción total, que cumple la demanda interna y externa.

- Debemos aplicar la fórmula (3.1), $X = (I - A)^{-1}D$, siendo la matriz A de Insumo-Producto,

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.03 & 0.02 \\ 0.06 & 0.37 & 0.10 \\ 0.12 & 0.15 & 0.19 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 158.36 \\ 288.52 \\ 323.76 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 12 Una economía simple tiene tres industrias que son dependientes entre si, pero que no dependen de industrias externas (modelo cerrado de Leontief). Estas industrias son: agricultura, construcción y transporte. La fracción de cada producto que consume cada industria viene dado por:

	Agricultura	Construcción	Transporte
Agricultura	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{16}$
Construcción	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$
Transporte	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{8}{16}$

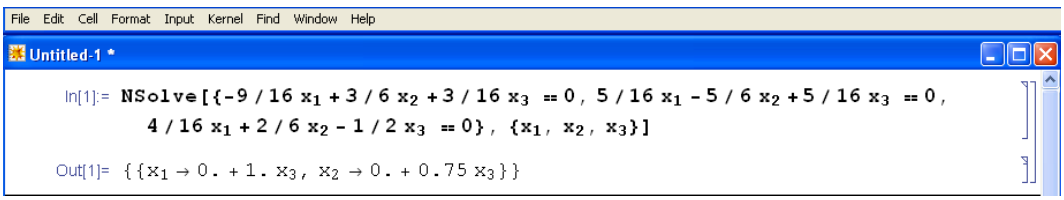
donde las filas representan al consumo y las columnas a la producción. Si x_1, x_2, x_3 representan a los ingresos de la industria de la agricultura, construcción y transporte, respectivamente. Determinar los ingresos de cada sector de la economía.

- Observemos que el elemento a_{ij} denota la fracción de bienes producidos por las personas que trabajan en la industria j y que es consumida por las personas que trabaja en la industria i. Por ejemplo, $d_{31} = 4/16$, significa que la industria del transporte consume $4/16$ del total de la producción agrícola.

Del enunciado deducimos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{16}x_1 + \frac{3}{6}x_2 + \frac{3}{16}x_3 = x_1 \\ \\ \frac{5}{16}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{5}{16}x_3 = x_2 \\ \\ \frac{4}{16}x_1 + \frac{2}{6}x_2 + \frac{8}{16}x_3 = x_3 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{9}{16}x_1 + \frac{3}{6}x_2 + \frac{3}{16}x_3 = 0 \\ \\ \frac{5}{16}x_1 - \frac{5}{6}x_2 + \frac{5}{16}x_3 = 0 \\ \\ \frac{4}{16}x_1 + \frac{2}{6}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{array} \right.$$

que puede ser resuelto con `Mathematica`®,



La solución general es,

$$\{(\alpha, 0.73\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Existen infinitas soluciones siendo una solución particular $(4, 3, 4)$, los ingreso de la industria de la agricultura, construcción y transporte están en la proporción 4:3:4.

EJERCICIO 13 Consideremos un modelo de Leontief con sólo tres sectores industriales: energía, construcción y transporte, interconectados de la manera que se expresa en la tabla siguiente:

	Energía	Construcción	Transporte	Demanda consumidor
Energía	0.4	0.2	0.1	100
Construcción	0.2	0.4	0.1	50
Transporte	0.15	0.2	0.2	100

¿Cuántas unidades, en euros, de cada factor (energía, construcción y transporte) se debe producir y ofertar) para asegurar que la demanda del consumidor está satisfecha?

- Estamos ante un modelo de Leontief cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} x_1 = 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 100 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 + 50 \\ x_3 = 0.15x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 100 \end{cases}$$

siendo x_1, x_2, x_3 las demandas total de la energía, construcción y transporte, respectivamente.

El lado izquierdo de cada una de las ecuaciones representa a la oferta existente de cada uno de los factores (energía construcción y transporte) expresada en euros. El lado derecho de las ecuaciones corresponden a las demandas, que son de dos tipos: las demandas (internas) de cada uno de los tres sectores y por otro lado la demanda en euros, de los consumidores (externa).

Si el sistema es compatible, entonces diremos que el **sistema se encuentra en equilibrio**, puesto que la oferta de cada uno de los factores coincide con su demanda.

La restricción que impone el modelo de Leontief, es que la suma de las unidades que son necesarias emplear de cada uno de los tres sectores (suma de los elementos de las columnas), debe ser inferior a uno. Observemos que $0.4+0.2+0.15 < 1$, por otro lado $0.2 + 0.4 + 0.2 < 1$ y $0.1 + 0.1 + 0.2 < 1$.

Usamos `Mathematica`® para resolver el sistema,

```
In[5]:= NSolve[{0.4 x1 + 0.2 x2 + 0.1 x3 + 100 == x1, 0.2 x1 + 0.4 x2 + 0.1 x3 + 50 == x2,
          0.15 x1 + 0.2 x2 + 0.2 x3 + 100 == x3}, {x1, x2, x3}]

Out[5]= {{x1 → 276.316, x2 → 213.816, x3 → 230.263}}
```

Como hemos comprobado el modelo de Leontief estudiado está en equilibrio siendo la solución: $x_1 = 276.31$, $x_2 = 213.81$, $x_3 = 230.26$.

Por último recordar que el modelo también puede ser resuelto de manera matricial tal y como se ha realizado en ejercicios anteriores $X = (I - A)^{-1}D$, o por iteración (repetición del proceso) de la manera siguiente.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

El método consiste en calcular $X(i+1) = AX(i) * D$ con $i = 1, 2, 3, \cdots$

```
In[11]:= X := (1
               2
               3)

         A := (0.4   0.2  0.1
               0.2   0.4  0.1
               0.15  0.2  0.2)

         d := (100
               50
               100)

In[23]:= For[i = 1; t = X, i < 15, i++, t = A.t + d; Print[t]]

         {{101.1}, {51.3}, {101.15}}
         {{160.815}, {100.855}, {145.655}}
         {{199.063}, {137.07}, {173.424}}
         {{224.382}, {161.983}, {191.958}}
         {{241.345}, {178.865}, {204.446}}
         {{252.756}, {190.26}, {212.864}}
         {{260.441}, {197.941}, {218.538}}
         {{265.618}, {203.118}, {222.362}}
         {{269.107}, {206.607}, {224.939}}
         {{271.458}, {208.958}, {226.675}}
         {{273.042}, {210.542}, {227.845}}
         {{274.11}, {211.61}, {228.634}}
         {{274.829}, {212.329}, {229.165}}
         {{275.314}, {212.814}, {229.523}}
```

Tomando cualquier valor inicial para el vector X, observamos que después de 15 iteraciones el vector X tiende al resultado anteriormente encontrado.

Resumiendo, independientemente del método utilizado (resolución del sistema directamente, matricialmente, y por iteración) el modelo de Leontief está en equilibrio. Es decir, la oferta de cada uno de los tres sectores coincide con la demanda de ellos realizada por el consumidor. Las cantidades totales ofertadas en euros, necesarias para satisfacer la demanda del consumidor son: 276.31 euros de energía, 213.81 euros de construcción y 230.26 euros de transporte.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 14

1.- **Supongamos una economía que consta de dos industrias I_1 e I_2, siendo las interacciones entre ellas las dadas por la tabla siguiente:**

	Entrad. I_1	Entr. I_2	Demand. final	Producc. total
Producc. I_1	60	75	65	200
Producc. I_2	80	30	40	150
Entradas T.	200	150		

1.a.- **Encontrar la matriz insumo-producto A.**

1.b.- **Determinar la matriz de producción, si las demandas finales cambian a 104 en I_1 y a 172 en I_2. Encontrar las unidades que debe producir I_1 e I_2 a fin de cumplir las nuevas demandas finales.**

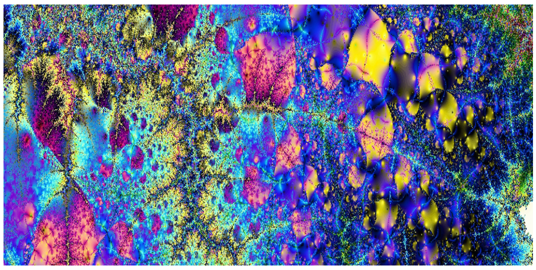
2.- **Un pueblo tienes tres industrias primarias: una mina de cobre, un ferrocarril, y una planta de energía eléctrica. Para producir una unidad (1 euro) de cobre, la mina gasta 0.20 euros de cobre, 0.1 euros de transporte y 0.2 de energía eléctrica. Para producir un euro de transporte, el ferrocarril requiere 0.1 euros de cobre, 0.1 de transporte y 0.4 de energía eléctrica. La planta eléctrica destina 0.2 de cobre, 0.2 de transporte, y 0.3 de energía eléctrica. Suponer que durante un año hay uja demanda externa de 1.2 millones de euros de cobre, 0.8 millones de euros de transporte y 1.5 millones de euros dd energía. ¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer la demanda total?**

3.- **En una compañia que produce, gasolina, aceite y gas, se sabe que para producir una unidad de gasolina utiliza 1 unidad de aceite y una de gas. Para producir una unidad de aceite, requiere de 1/5 unidades de aceite y 2/5 de gas. Finalmente para producir una unidad de gas requiere 1/5 de gasolina, 2/5 de aceite y 1/5 de gas. Si tiene una demanda del mercado de 100 unidades de cada producto. ¿Cuánto debe producir la empresa de cada producto para cumplir con su mercado?**

4.- **Una economía tiene dos sectores productivos A y B. El 40 % de la producción de A es consumida por A, mientras que las compras de**

insumos al sector B representa el 30 % de la producción de A. El 40 % de la producción de B es consumo proveniente del sector A y un 20 % de la producción de B es autoconsumida por B. La demanda final de los consumidores es de 1.000 euros de A y 2500 euros de B.

- **Hallar la matriz de Leontief en este problema.**
- **Hallar el vector de producción que satisface la demanda agregada total.**



Capítulo 4

EL MODELO ECONÓMICO DE KEYNES

4.1. Descripción del modelo

El modelo Keynesiano más sencillo se puede resumir en dos ecuaciones, una que nos da el equilibrio en el mercado de bienes,

$$y = \alpha_1 + \alpha_2(1-t_0)y + \alpha_3 r + G_0\,;\ 0 < t_0 < 1\,;\ 0 < \alpha_2(1-t_0) < 1\,;\ \alpha_1 > 0\,;\ \alpha_3 < 0 \quad (4.1)$$

y otra que corresponde a la curva de equilibrio en el mercado monetario,

$$M_0 = \beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 r\,; \quad \beta_1 > 0\,; \quad \beta_2 > 0\,; \quad \beta_3 < 0 \quad (4.2)$$

siendo y la renta, t_0 la propersión marginal a imponer, r el tipo de interés, G_0 el gasto público y M_0 la cantidad de dinero.

Las variables endógenas (dentro del sistema) son y y r, las variables exógenas (fuera del sistema) son G_0 y M_0, y los parámetros son α_i, β_i con $i = 1, 2, 3$ y t_0.

Supongamos un caso particular:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 10 + 0.8(1-0.2)y - 2r + G_0 \\ M_0 = 15 + 1.5y - r \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, que puede escribirse matricialmente como,

$$\begin{pmatrix} 0.36 & 2 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + G_0 \\ M_0 - 15 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

sistema que tiene más incógnitas que ecuaciones y por lo tanto, no posee solución única. Podemos reducir el sistema a uno cuadrado si tenemos en cuenta la distinción entre las variables exógenas (que controla el gobierno G_0 y M_0) y las variables endógenas (objeto de la política económica Y y r).

Supongamos que el gobierno fija los valores $M_0 = 20$ y $G_0 = 5$. Resolviendo el sistema,

$$\begin{pmatrix} 0.36 & 2 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

podemos encontrar los valores de equilibrio de la renta y, y del tipo de interés r.

```
A = {{0.36, 2}, {1.5, -1}};
b = {15, 5};
LinearSolve[A, b]
```

$\{7.44048\,, 6.16071\}$

La economía del país estará en equilibrio con una renta de 7.44 unidades monetarias y un tipo de interés del 6.16 %, desde elpunto de vista económico.

Si se escribe el sistema como $A\,X = B$, entonces $X = A^{-1}\,B$, siendo la matriz A^{-1} conocida como **matriz de multiplicadores del sistema**.

```
A = {{0.36, 2}, {1.5, -1}};

Inverse[A] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0.297619 & 0.595238 \\ 0.446429 & -0.107143 \end{pmatrix}$$

Observemos que si expresamos el sistema (4.4) como

$$\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 & 2 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_0 + 10 \\ M_0 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.297619 & 0.595238 \\ 0.446429 & -0.107143 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_0 + 10 \\ M_0 - 15 \end{pmatrix}$$

la matriz inversa A^{-1} hace de efecto multiplicador entre el vector de (inputs) entradas (que contiene a las variables exógenas), dando como (outputs) salidas a las variables endógenas.

Si se aumenta una unidad monetaria M_0, la correspondiente entrada de la matriz de multiplicadores, en nuestro caso, 0.595238 nos indica que la nueva renta de equilibrio será la anterior mas 0.595238 unidades monetarias.

4.2. Equilibrio a largo plazo y absorción de choques exógenos

4.2.1. Introducción

Las economías de Europa (E), Estados Unidos (A) y China (C) están muy preocupadas por las repercusiones que una nueva subida en los precios del petróleo pueden tener sobre sus economías.

Cada una de estas naciones han definido una renta que consideran "normal "(en ausencia de efectos exógenos extraños) y están interesadas en estudiar los efectos que sobre $y_t = Y_t - Y$ puede tener esta subida del precio del petróleo, siendo Y_t la renta del período t, Y la renta normal e y_t la desviación o distorsión de aquélla respecto de ésta, en dicho período.

El problema se complica debido a la gran interrelación que existe entre estas economías. Estas ideas han sido traducidas por los analistas en las siguientes relaciones (t está dado en trimestres) de la desviación o distorsión:

$$\left\{\begin{array}{l} y_{E,t+1} = 0.4y_{E,t} + 0.2y_{A,t} + 0.2y_{C,t} \\ y_{A,t+1} = 0.1y_{E,t} + 0.3y_{A,t} + 0.2y_{C,t} \\ y_{C,t+1} = 0.2y_{E,t} + 0.2y_{A,t} + 0.3y_{C,t} \end{array}\right.$$

Actualmente se sufre una distorsión cuantificada por los expertos en 2 u.m. para Europa, 2.5 u.m. para Estados Unidos y 0.9 u.m. para China (las unidades monetarias están expresadas en billones de euros).

4.2.2. Calcular la distorsión que habrá dentro de dos años

Empezamos escribiendo el sistema de manera matricial,

$$\begin{pmatrix} y_{E,t+1} \\ y_{A,t+1} \\ y_{C,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{E,t} \\ y_{A,t} \\ y_{C,t} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y(\vec{t+1}) = A.Y(\vec{t}) \ ; \ t = 0, 1, 2, \cdots$$

En consecuencia, $Y(\vec{1}) = A.Y(\vec{0})$, del mismo modo

$$Y(\vec{2}) = A.Y(\vec{1}) = A.AY(\vec{0}) = A^2Y(\vec{0})$$

y en general $Y(\vec{t}) = A^tY(\vec{0})$ con $t = 0, 1, 2, \cdots$
Del enunciado deducimos que,

$$Y(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, dentro de dos años (t=8 trimestres) se tendrá $Y(\vec{8}) = A^8 Y(\vec{0})$, que podemos hacerlo con `Mathematica`®

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {2, 2.5, 0.9};
MatrixPower[A, 8].b//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0.124519 \\ 0.0830136 \\ 0.103766 \end{pmatrix}$$

4.2.3. Estudiar si ante cualquier distorsión el sistema se comporta bien y tiende a volver al equilibrio a largo plazo.

Tenemos que comprobar si las distorsiones tienden a cero a largo plazo. Empezaremos viendo lo que ocurre entre los 10 y 12 años (40 y 48 trimestres).

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {2, 2.5, 0.9};
Table[MatrixPower[A, t].b, {t, 40, 48}]//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1.37523 * 10^{-6} & 9.1682 * 10^{-7} & 1.14603 * 10^{-6} \\ 9.62661 * 10^{-7} & 6.41774 * 10^{-7} & 8.02218 * 10^{-7} \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ 7.92793 * 10^{-8} & 5.28529 * 10^{-8} & 6.60661 * 10^{-8} \end{pmatrix}$$

podemos comprobar que las distorsiones, a largo plazo, tienden a cero.

A esta misma conclusión llegaríamos si partimos de una valor inicial cualquiera.

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {m, n, z};
At = MatrixPower[A, t];
Limit[At.b, t → Infinity]//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A continuación realizaremos el mismo ejercicio de otra manera. Calcularemos la matriz potencia A^t y calcularemos su límite cuando t tienda a infinito.

Empezamos comprobando que la matriz A es diagonalizable,

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
Eigenvalues[A]
```

$\{0.7\,,\ 0.2\,,\ 0.1\}$

lo cual es cierto ya que todos sus valores propios son diferentes. Por otro lado, es conocido que $A^t = P.D^t.P^{-1}$ siendo P la matriz de paso y D la matriz diagonal; como

$$D^t = \begin{pmatrix} 0.7^t & 0 & 0 \\ 0 & 0.2^t & 0 \\ 0 & 0 & 0.1^t \end{pmatrix}$$

ocurre que si t tiende a infinito la matriz D^t tiende a la matriz nula, y en consecuencia la matriz A^t también será nula, para valores de t suficientemente grandes.

Conclusión: las distorsiones, a largo plazo, desaparecerán por muy grandes que sean al principio.

4.2.4. Criterios para adoptar nuevas medidas económicas

Dentro de 2 años habrá elecciones europeas, y para ello la Presidencia Comunitaria actual quiere llegar a esa fecha con un distorsión que no supere el valor de 0.1 u.m.

EJERCICIO 15 ¿Se podrá conseguir con el ritmo actual o se deberán adoptar medidas económicas nuevas? En caso afirmativo ¿cuándo? Responder a la misma cuestión, pero con un objetivo más ambicioso de -0.1 u.m. ¿Qué sucede ahora?

- Empezamos calculando la distorsión para Europa en el trimestre t cualquiera.

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {2 , 2.5 , 0.9};
R = MatrixPower[At].b;
R[[1]]
```

$$2.5(-1.08885 * 10^{-17} 0.1^t - 0.4\, 0.2^t + 0.4\, 0.7^t)+$$
$$0.9(2.177771 * 10^{-17}\, 0.1^t - .4\, 0.2^t + 0.4\, 0.7^t)+$$
$$2(-1.08885 * 10^{-17}\, 0.1^t + 0.6\, 0.2^t + 0.4\, 0.7^t)$$

y debemos resolver la ecuación $R[[1]] = 0$ pero el `Mathematica`® no ofrece una buena respuesta. En lugar de ello representamos gráficamente $R[[1]]$ de la siguiente manera:

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {2 , 2.5 , 0.9};
R = MatrixPower[At].b;
f[t] := R[[1]];
f[8]
Plot[f[t], {t, 0, 10}]
```

0.124519

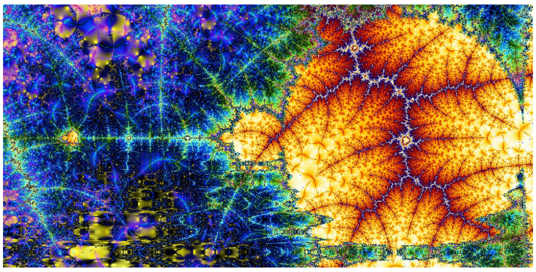
y comprobamos como nunca se podrá alcanzar el nivel de distorsión deseado antes de 2 años. Se alcanzará, aproximadamente, en $t = 9$ que corresponde a los 27 meses.

Como

```
Limit[f[t], t → Infinity]
```

0.

entonces no se podrá alcanzar el objetivo de obtener un nivel de distorsión negativo aunque se tomen medidas correctoras, ya que, la distorsión a largo plazo tiende a cero.



Capítulo 5

MODELOS MATRICIALES

5.1. Cadenas de Markov

A los dos resultados que podemos obtener al realizar el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire los designaremos por $E_1 = salir\ cara$ y $E_2 = salir\ cruz$. Si repetimos t veces este experimento la probabilidad de que en uno de ellos obtengamos E_1 no depende de lo que haya salido en el experimento anterior; ambos sucesos son independientes. Sin embargo, existen muchos otros fenómenos representados por variables aleatorias dependientes. En 1907 *Markov* estudió estas situaciones en las cuales la probabilidad de que ocurra un suceso depende del suceso inmediatamente anterior, y son estas las que estudiaremos en esta sección.

5.1.1. Resumen teórico

Sea la cadena de Markov $\vec{X}(t+1) = A\vec{X}(t)\,, t = 0,\, 1,\, \cdots$

- Si la matriz de transición A sólo tiene un autovalor de módulo 1, la cadena sólo tiene una clase final. Existe un único vector de estado permanente o estable que se corresponde con el autovector (normalizado) asociado al autovalor. Si este vector tiene todas sus componentes positivas, entonces la cadena es completamente ergódica, y si hay algún elemento nulo, será simplemente ergódica. A la larga, la distribución de la cadena, independientemente del valor inicial es el vector propio asociado al $\lambda = 1$

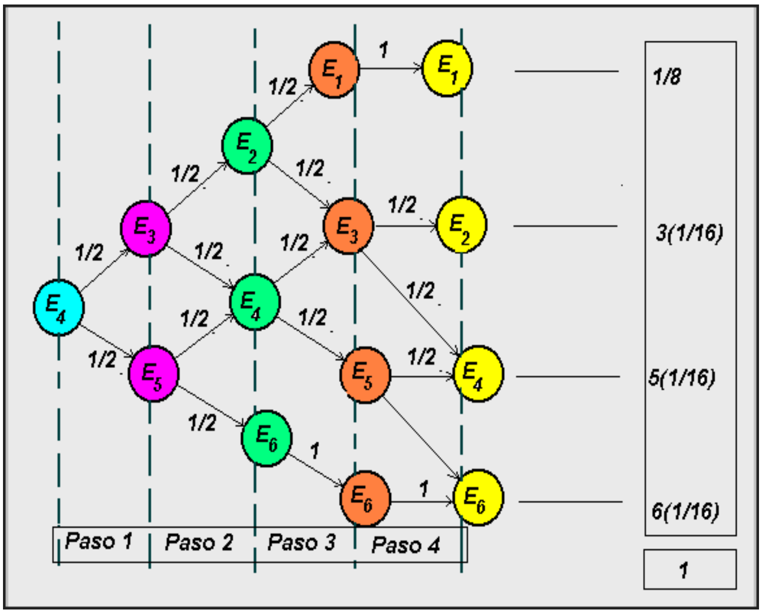
- Si además de $\lambda = 1$, existen otro m valores de módulo unidad, entonces la cadena es periódica de período m. Tiene una sola distribución estacionaria dada por el autovector asociado al autovalor dominante, pero no es una distribución de estado permanente, ya que no existe el límite de $\vec{X}(n)$ cuando $n \to \infty$.

- Si el autovalor unidad tiene multiplicidad k, la cadena es múltiple y consta de k clases finales y puede tener o no alguna clase de estados transitorios, pero a largo plazo, quedará atrapada en una de las clases finales. Si una clase final es unitaria, el único estado que lo forma es absorbente. Una clase múltiple de k clases finales tiene k distribuciones estacionarias que vienen dadas por k autovectores linealmente independientes asociados al autovalor dominante $\lambda = 1$. La distribución a la larga dependerá de la distribución inicial.

EJERCICIO 16 Sea la matriz de transición correspondiente a seis estados

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} .$$

- Supongamos que en el momento inicial el sistema se encuentra en el estado E_4.



1.- Veamos como podemos pasar del estado inicial E_4 al resto de los estados. Sabemos que

$$\vec{X}(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T .$$

Como puede apreciarse en la Figura, al cabo de un paso la probabilidad será,

$$\vec{X}(1) = (0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0)^T ,$$

o bien $\vec{X}(1) = A\,\vec{X}(0)$. Del mismo gráfico deducimos que,

$$\begin{aligned}
\vec{X}(2) &= (0, 1/4, 0, 1/2, 0, 1/4)^T \\
\vec{X}(3) &= (1/8, 0, 3/8, 0, 1/4, 1/4)^T \\
\vec{X}(4) &= (1/8, 3/16, 0, 5/16, 0, 3/8) \,.
\end{aligned}$$

O de forma matricial:

$$\vec{X}(2) = A\,\vec{X}(1)\,, \quad \vec{X}(3) = A\,\vec{X}(2)\,, \quad \vec{X}(4) = A\,\vec{X}(3)\,.$$

2.- Con el programa `Mathematica`® podemos encontrar A^{200},

```
A := {{1., 1/2, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0.5, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0},
{0, 0, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1/2, 1}}
MatrixPower[A, 200]
```

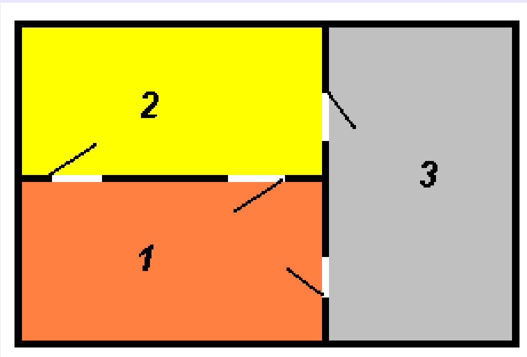
{{1., 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.}, {0., 1.07909*10^{-19} , 0., 1.746 *10^{-19}, 0., 0.}, {0., 0., 2.82509*10^{-19}, 0., 1.746* 10^{-19}, 0.}, {0., 1.746*10^{-19}, 0., 2.82509*10^{-19}, 0., 0.}, {0., 0., 1.746*10^{-19}, 0., 1.07909*10^{-19}, 0.}, {0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.}}

3.- Del apartado anterior deducimos que

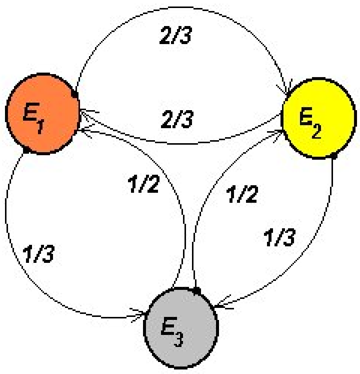
$$\lim_{n\to\infty} A^n\, X(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Es decir, a largo plazo existe un 40 % de posibilidades de que partiendo del estado E_4 la cadena se encuentre en el estado E_1 y un 60 % de que esté en el E_6.

EJERCICIO 17 Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la figura. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Sabiendo que semana tras semana todos los ratones cambian de ubicación y que los ratones cuando salen eligen un compartimento al azar, veamos cuál será su distribución de los ratones al cabo de "infinitas" semanas.



- Observemos que estamos ante una cadena de *Markov* cuyo diagrama de estados es el siguiente:



A partir del diagrama es inmediato obtener la matriz de transición

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $X_i(t)$ representa al número de ratones en el compartimento $i = 1, 2, 3$ en la semana t y $\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$ es la distribución inicial, deducimos del enunciado que

$$\left\{ \begin{array}{llll} X_1(1) = & & \frac{2}{3}X_2(0)+ & \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_2(1) = & \frac{2}{3}X_1(0)+ & & \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_3(1) = & \frac{1}{3}X_1(0)+ & \frac{1}{3}X_2(0) & . \end{array} \right.$$

Sistema de ecuaciones lineales que podemos expresarlo matricialmente

$$\begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\vec{X}(1) = A\vec{X}(0) .$$

Razonando de la misma manera

$$\vec{X}(2) = A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0) .$$

En general

$$\vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0) , \quad t = 1,\, 2,\, \cdots .$$

En consecuencia, para obtener el número de ratones en cada uno de los compartimentos en la semana t, tendremos que encontrar el valor de la matriz potencia A^t. Una aproximación de este valor podemos obtenerla con el `Mathematica`®

```
A := {{0, 2/3, 0.5}, {2/3, 0, 0.5}, {1/3, 1/3, 0}}
MatrixPower[A, 100]
```

$\{\{0.375, 0.375, 0.375\}, \{0.375, 0.375, 0.375\}, \{0.250, 0.250, 0.250\}\}$.

- Ahora, estamos interesados en deducir este valor de una manera diferente. Observemos que si la matriz A fuese diagonal, entonces A^t sería muy fácil de encontrar, bastaría elevar a t los elementos de la diagonal. Por esta razón, en primer lugar procederemos a diagonalizar la matriz simétrica A.

  Los valores propios de la matriz A son los siguientes:

$$|A - \lambda\, I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

  desarrollando obtenemos la ecuación característica

$$9\,\lambda^3 - 7\,\lambda - 2 = 0 ,$$

  cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2/3$, $\lambda_3 = -1/3$. Por tanto, la matriz A es diagonalizable siendo los subespacios propios asociados a estos valor propio

$$S_1 =< (3,3,2) > , \quad S_2 =< (-1,1,0) > , \quad S_3 =< (-1,-1,2) > \ .$$

  En consecuencia, la matriz de paso C es,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

  Para encontrar A^t, actuamos de la manera siguiente

$$D = C^{-1}AC \quad \Rightarrow \quad A = CDC^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^t = CD^tC^{-1} ,$$

que en nuestro caso

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Simplificando

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(3+4\left(-\frac{2}{3}\right)^t+\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{8}\left(3-4\left(-\frac{2}{3}\right)^t+\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{3}{8}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) \\ \frac{1}{8}\left(3-4\left(-\frac{2}{3}\right)^t+\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{8}\left(3+4\left(-\frac{2}{3}\right)^t+\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{3}{8}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) \\ \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{4}\left(1+3\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) \end{pmatrix}.$$

Finalmente hacemos que $t \to \infty$, entonces

$$A^t \to \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia después de infinitas semanas la distribución de los ratones tiende hacia

$$\left.\begin{array}{lcl} \textbf{Primero} & = & \frac{3}{8}X_1(0)+\frac{3}{8}X_2(0)+\frac{3}{8}X_3(0)=\frac{3}{8}(X_1(0)+X_2(0)+X_3(0))=\frac{3}{8}\text{Total} \\ \textbf{Segundo} & = & \frac{3}{8}X_1(0)+\frac{3}{8}X_2(0)+\frac{3}{8}X_3(0)=\frac{3}{8}(X_1(0)+X_2(0)+X_3(0))=\frac{3}{8}\text{Total} \\ \textbf{Tercero} & = & \frac{1}{4}X_1(0)+\frac{1}{4}X_2(0)+\frac{1}{4}X_3(0)=\frac{1}{4}(X_1(0)+X_2(0)+X_3(0))=\frac{1}{4}\text{Total} \end{array}\right\}$$

- Un camino alternativo para llegar a la conclusión anterior es utilizar el Teorema **??**.

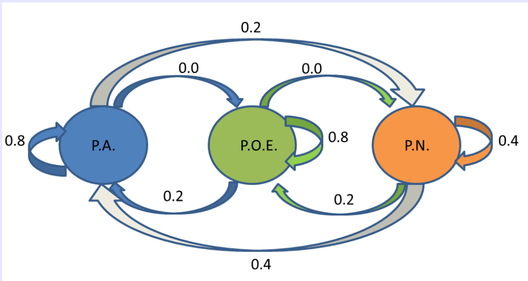
  En efecto, la cadena de *Markov* es regular ya que todos los estados son accesibles y existen dos ciclos $E_1E_2E_3E_1$ y $E_1E_2E_1$ al menos uno de ellos impar (además A^2 tiene todos sus elementos positivos) . Sabemos que el vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ es $(3, 3, 2)$.

$$\vec{\Pi} = (3/8,\, 3/8,\, 1/8)\,,$$

  y en consecuencia si $t \to \infty$,

$$A^t \to \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 18 La tendencia de voto, respecto a los partidos P.N., P.O.E. y P.A., en una Comunidad Autónoma son de gran interés cada 4 años. El diagrama de la figura siguiente representa a la matriz de transición de la tendencia de votos.



Modelizar la tendencia de voto de acuerdo con los datos anteriores a través de una Cadena de Markov.

- Empezamos introduciendo las siguientes variables para construir el modelo:

  - $x(t)$ = porcentaje de votantes que votan al P.A.en el periodo t
  - $y(t)$ = porcentaje de votantes que votan al P.O.E. el periodo t
  - $z(t)$ = porcentaje de votantes que votan al P.N.en el periodo t

  De tal manera que:

$$\begin{array}{rcl} x(t+1) & = & 0.8x(t) + 0.2y(t) + 0.4z(t) \\ y(t+1) & = & 0.8y(t) + 0.2z(t) \\ z(t+1) & = & 0.2x(t) + 0.4z(t) \end{array}$$

  o bien expresado matricialmente $X(t+1) = A\,X(t)$:

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \\ z(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

  De esta manera, conocido los valores iniciales $X(0)$ podríamos calcular el porcentaje de votos esperado para un periodo cualquiera n:

$$X(n) = A.x(n-1) = A.A.x(n-2) = A^2.X(n-2) = \cdots = A^n.X(0)$$

  Si $X(0) = (1/3, 1/3, 1/3)$, entonces:

Wolfram Mathematica | STUDENT EDITION

```
A := ( 0.8  0.2  0.4
       0    0.8  0.2
       0.2  0    0.4 )

X0 := {1/3, 1/3, 1/3}

For[i = 1, i ≤ 8, i++, Print["n=", i, "  ", MatrixForm[MatrixPower[A, i].X0]]]
|para cada            |escribe              |forma de matriz |potencia matricial

n=1  (0.466667, 0.333333, 0.2)
n=2  (0.52, 0.306667, 0.173333)
n=3  (0.546667, 0.28, 0.173333)
n=4  (0.562667, 0.258667, 0.178667)
n=5  (0.573333, 0.242667, 0.184)
n=6  (0.5808, 0.230933, 0.188267)
n=7  (0.586133, 0.2224, 0.191467)
n=8  (0.589973, 0.216213, 0.193813)
```

Se aprecia como los porcentajes de votos se estabilizan, de tal manera que para $X(20)$ el valor obtenido es de:

$$X(20) = (0.599793, 0.200334, 0.199872)$$

aproximadamente, el partido P.A. tendría el 60 % de los votos, el P.O:E. el 20 %, y el P.N. el otro 20 %

EJERCICIO 19 Para el ejercicio anterior:

1.- Encuentra los valores propios de la matriz de transición A. ¿Es diagonalizable? En caso afirmativo, diagonalizar dicha matriz A.

2.- Calcula la matriz potencia A^n y estudia la convergencia de la sucesión $\{A^n\}$

3.- Estudia la tendencia de voto cuando $n \to \infty$

EJERCICIO 20 Supongamos que disponemos de una casa, un granero, un gato y un ratón. Los animales pueden estar los dos en la casa, los dos en el granero o uno en el granero y otro en la casa. Realizamos de forma sucesiva la siguiente experiencia:

Lanzamos dos monedas al aire, si salen dos caras cambiamos al ratón del lugar donde se encuentre. Si salen una cara y una cruz, es el gato el que se cambia. Por último, si salen dos cruces, entonces cambiamos al gato y al ratón del sitio donde se encuentran.

- Si tenemos en cuenta las diferentes opciones para la casa, inmediatamente quedará también determinada las opciones para el granero. Los diferentes estados son:

  1.- E_1: la casa está vacía.

  2.- E_2: en la casa sólo se encuentra el gato.

  3.- E_3: en la casa sólo está el ratón.

  4.- E_4: los dos animales están en la casa.

  Observemos que podemos modelizar la situación anterior por medio de una cadena de *Markov* ya que la probabilidad P_{ij} de pasar del estado E_j al E_i sólo depende del i y del j. Por otro lado, como $1/4$ es la probabilidad de sacar dos caras o dos cruces y $1/2$ la probabilidad de que salga una cara y una cruz, entonces la matriz de transición para esta cadena es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Por ejemplo, la probabilidad P_{23} de pasar del estado E_3 al E_2 será pasar de la situación de que el ratón está en la casa y el gato en el granero a la nueva situación de que se permuten los dos animales, y esto obliga a que al lanzar las dos monedas salgan dos caras, cuya probabilidad es $1/4$. De manera similar, P_{43} es la probabilidad de pasar del estado E_3 (ratón el la casa) al estado E_4 (los dos animales están en la casa) y por ello es necesario que en una moneda salga una cara y en la otra una cruz, cuya probabilidad es $1/2$.

- Para estudiar la evolución a largo plazo de esta cadena tenemos que ver en primer lugar si es regular. Para ello al calcular

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 3/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

  observamos que todos sus elementos son no nulos y en consecuencia la matriz A es regular. Por tanto, podemos utilizar los Teoremas **??** y **??**.

`Eigenvalues[A]`

$\{-1/2,\ -1/2,\ 0\ ,\ 1\}$

`Eigenvectors[A]`

$\{\{0,\ 0,\ -1,\ 1\},\{-1,\ 1,\ 0,\ 0\},\ \{-1,\ -1,\ 1,\ 1\},\{1,\ 1,\ 1,\ 1\}\}$

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T\ ,$$

que una vez normalizado $(0.25,\ 0.25,\ 0.25,\ 0.25)^T$.

- Finalmente

$$A^t \longrightarrow \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \quad \text{cuando} \quad t \to \infty\,.$$

Si, por ejemplo, inicialmente la casa se encuentra vacía

$$\vec{X}(0) = (1,\ 0,\ 0,\ 0)^T\,,$$

entonces

$$\vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0) = (0.25,\ .25,\ 0.25,\ 0.25)^T\,,$$

y es igual de probable que a largo plazo nos encontremos en cualquiera de los cuatro estados posibles.

EJERCICIO 21 Supongamos una cola para comprar un billete en un mostrador de una línea aérea. Se sabe que:

1.- En un intervalo de un minuto, hay una probabilidad de 1/3 de que una persona se añada a la cola y una probabilidad de 2/3 de que nadie se agregue. Observemos, que en cualquier intervalo de un minuto nunca se agregará más de una persona a la cola.

2.- Si se está atendiendo a una persona en un intervalo, la probabilidad de que en ese mismo intervalo reciba el billete es de 3/8. Si es así, saldrá de la cola en el siguiente intervalo.

3.- Todas las probabilidades son independientes de lo que haya sucedido en intervalos anteriores.

4.- Una persona no puede ser atendida en el mismo intervalo en que llega a la cola.

5.- No pueden ser atendidas más de una persona en un mismo intervalo.

6.- Como media para que no se congestiones la cola, se cerrará si hay 4 personas esperando en ella. Es decir, como mucho, nuestra cola puede tener 4 personas.

- Se puede modelar esta situación a través de un modelo matricial tipo cadena de *Markov* con 5 estados. El estado E_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ representa a que en que en la cola hay i personas.

  Para calcular la matriz de transición representaremos, como siempre la columna indicará el estado actual y las filas el estado siguiente.

  - El elemento p_{00} representa a la probabilidad de que estando en el estado E_0 se pase al E_0. Es decir, la probabilidad de que si no hay nadie en la cola no se agregue nadie (que por enunciado sólo podría ser una persona). Sabemos que esta probabilidad es $p_{00} = 2/3$.
  - Del mismo modo p_{10} representa a la probabilidad de que si no hay nadie en la cola se agregue una persona y su valor es 1/3.
  - La probabilidad $p_{20} = p_{30} = p_{40} = 0$, ya que por el enunciado sabemos que si no hay nadie en la cola no se puede agregar a ella más de una persona, en un intervalo de tiempo.
  - El elemento $p_{01} = 1/3$
  - El elemento p_{11} corresponde al caso de que actualmente hay una persona en la cola y en el período siguiente sigue existiendo una persona, para ello es necesario que ocurra alguna de estas dos situaciones excluyentes:
    - que no se atienda a ninguna persona y no llegue nadie (su probabilidad es $\frac{5}{8} * \frac{2}{3}$, o bien,

- ∘ se atiende a una persona y llega otra a la cola (la probabilidad es $\frac{3}{8} * \frac{1}{3}$).

  En consecuencia, $p_{11} = \frac{5}{8} * \frac{2}{3} + \frac{3}{8} * \frac{1}{3} = \frac{13}{24}$

- Para pasar del estado E_1 al E_2, no se debe atender a nadie (probabilidad 5/8) y además se habrá agregado una persona a la cola (probabilidad 1/3). Por lo tanto, $p_{21} = \frac{5}{8} * \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$

Procediendo de esta manera, es fácil comprobar que la matriz de transición de la cadena de Markov es,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{24} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{24} & \frac{13}{24} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{24} & \frac{13}{24} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{24} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Observemos que la suma de los elementos de cada fila es 1 (corresponde al suceso seguro), y que cada elemento de la matriz es mayor o igual que cero y menor o igual a uno.

Procedemos a continuación a calcular, con el `Mathematica`®, los valores y vectores propios de la matriz A.

```
In[7]:= Eigenvalues[A]

Out[7]= {1., 0.881848, 0.599038, 0.304703, 0.131077}

In[8]:= Eigenvectors[A]

Out[8]= {{0.441326, 0.588435, 0.490362, 0.408635, 0.22702},
         {-0.556807, -0.479258, 0.0902714, 0.522216, 0.423578}, {-0.526458, 0.142414, 0.734627, 0.0499079, -0.40049
         {-0.445242, 0.644646, -0.0173738, -0.520737, 0.338707}, {-0.265408, 0.568598, -0.579964, 0.478676, -0.201
```

In[9]:=

$$\frac{0.441326}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$
$$\frac{0.588435}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$
$$\frac{0.490362}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$
$$\frac{0.408635}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$
$$\frac{0.22702}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$

```
Out[9]= 0.204718

Out[10]= 0.272957

Out[11]= 0.227464

Out[12]= 0.189553

Out[13]= 0.105308
```

El valor propio $\lambda_1 = 1$ es estrictamente dominante siendo un vector propio asociado,

$$\vec{v}_1 = (0.205, 0.272, 0.23, 0.19, 0.10)$$

cuya interpretación es la siguiente: a largo plazo, el vendedor de billetes estará sin hacer nada el 20.5 % del tiempo, tendrá que atender a una persona el 27.2 % del tiempo tendrá a dos personas en la cola el 22.7 % del tiempo, tendrá a tres personas en la cola el 18.9 % del tiempo y habrá cuatro personas en la cola (lo que obliga a cerrar la cola) el 10.5 % del tiempo.

EJERCICIO 22 Supongamos que la ruta que debe hacer un cartero tiene la forma pentagonal de la Figura 5.1. Al cartero se le asigna un buzón $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ al azar y al día siguiente debe cambiar de la manera siguiente: lanza una moneda y si sale cara se pasa al buzón más cercano situado a su derecha y si sale cruz al más próximo de su izquierda.

1.- **Construir un modelo matricial para esta situación**

2.- **Si el cartero inicialmente se encuentra en el buzón 1, ¿es posible que se encuentre en el buzón 4 después de 4 cambios?, ¿Es posible que se encuentre en el buzón 5 en el quinto día?**

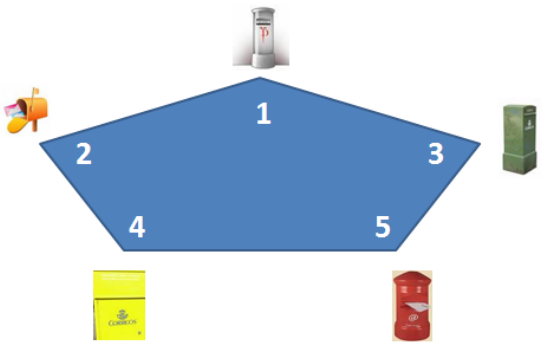


Figura 5.1: Disposición de los buzones.

- Sean los estados $E_i(t)\,, i = 1, 2, 3, 4, 5$, donde E_i indica que el cartero se encuentra en el buzón i. Del enunciado se deduce el siguiente diagrama

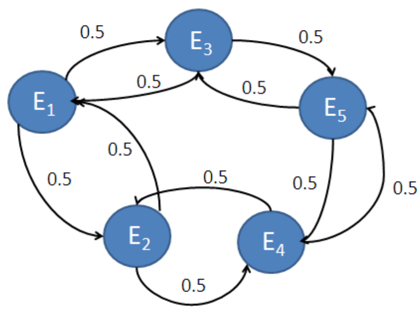


Figura 5.2: Diagrama de estados.

Todos los estados están comunicados, puesto que desde un estado cualquiera se puede alcanzar cualquier otro estado, siguiendo un camino en el diagrama de estados. La cadena de Markov es irreducible.

El estado E_1 es accesible desde el estado E_4, puesto que se puede llegar al E_1 en dos o tres etapas partiendo del E_4. Los estados E_1 y E_4 están conectados.

- Si notamos por $x_i(t)\,, i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ a la probabilidad de que en el día t el cartero se encuentre en el buzón i; la situación puede modelarse por,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix}, \qquad (5.1)$$

que puede expresarse de forma simbólica como $\vec{X}(t+1) = A\vec{X(t)}$ con $t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

- Si el cartero se encuentra en el buzón 1, entonces $\vec{X}(0) = (1,0,0,0,0)^T$, de tal manera que

$$\vec{X}(4) = A^4\vec{X}(0) = (\frac{3}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$$

y

$$\vec{X}(5) = A^5\vec{X}(0) = (\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32})^T$$

o bien

$$\vec{X}(5) = A\vec{X}(4) = (\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32})^T$$

como $1/16 \neq 0$, el cartero +llegará al buzón 1 al quinto día, aunque es el buzón menos probable.

- Todos los elementos de la matriz A^4 son distintos de cero, por tanto la cadena de Markov es regular y su comportamiento asintótico viene determinado por el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$,

$$(0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214)$$

o bien,

$$(0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$$

A largo plazo, existe la misma probabilidad (20 %) de estar en cualquiera de los buzones, $\vec{X}(n) = A^n\vec{X}(0)$ con $n \to \infty$

$$\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \\ x_5(0) \end{pmatrix},$$

despejando

$$\begin{array}{l}
x_1(n) = 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2\\
x_2(n) = 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2\\
x_3(n) = 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2\\
x_4(n) = 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2\\
x_5(n) = 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2
\end{array}$$

EJERCICIO 23 Modificar el ejemplo anterior suponiendo que al lanzar un dado sale un múmero mayor o igual que 3, entonces se pasa al buzón de la derecha, y en caso contrario se desplaza a la izquierda.

- Ahora el modelo matricial es,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1)\\ x_2(t+1)\\ x_3(t+1)\\ x_4(t+1)\\ x_5(t+1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\\ x_5(t)\end{pmatrix}, \qquad t = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

como

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{24}{81} & \frac{16}{81} & \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{32}{81}\\ \frac{1}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} & \frac{8}{81}\\ \frac{16}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{1}{81}\\ \frac{32}{81} & \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{16}{81}\\ \frac{8}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} & \frac{1}{81} & \frac{24}{81}\end{pmatrix}$$

tiene todos sus elementos distintos de cero, entonces la cadena de Markov es regular. El comportamiento asintótico está determinado por el valor propio asociado al valor propio $\lambda = 1$,

$$(0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214)$$

o bien

$$(0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$$

idéntico resultado al ejercicio anterior.

5.2. Dinámica de una población de pájaros

En esta sección se realiza una proyección para los próximos años de una colonia de pájaros, tomando como punto de partida los datos reales correspondientes al período 1991 - 1994.

El Helmeted Honeyeater (*Lichenostomus melanops cassidix*) es un tipo de pájaro de Australia que actualmente se encuentra en peligro de extinción. En esta sección construiremos un modelo matricial con el objetivo de estudiar la evolución de la población en los próximos años, basándonos en los datos que aparecen en la siguiente tabla, correspondientes al período 1991-1994.

Edad	1991	1992	1993	1994
0	26	28	27	29
1	16	17	20	20
2	12	11	13	14
3	9	8	9	10
4	7	6	6	8
5	5	4	5	5
6	4	3	3	4
7	3	3	2	3
8	2	2	2	2
9	1	1	1	2
Total	85	83	88	97

Empezamos definiendo las hipótesis básicas sobre las que construiremos nuestro modelo.

- Dividiremos la población en cinco clases de edades. En la primera de ellas se encontrarán los pájaros hembras de edad 0, es decir de 0 a 12 meses, y en la última las hembras de 4 años o más (de 48 meses en adelante).
- Por la información de que disponemos, supondremos que las hembras de la primera clase no son fértiles y las fertilidades del resto de las clases son iguales.
- Los parámetros de natalidad y supervivencia se mantienen constantes.

En la Tabla 5.1 hemos dispuesto el número de pájaros hembras para cada una de las cinco clases en el período 1991-1994.

Clase	1991	1992	1993	1994
1	26	28	27	29
2	16	17	20	20
3	12	11	13	14
4	9	8	9	10
5	22	19	19	24
Total	**85**	**83**	**88**	**97**

Tabla 5.1

Una rápida mirada al número total de individuos, nos permite conjeturar que la población tiende a crecer con el paso del tiempo. Podemos encontrar una primera aproximación de este crecimiento haciendo la media aritmética de los datos que disponemos. Es decir,

$$\frac{\frac{83}{85}+\frac{88}{83}+\frac{97}{88}}{3}=1.04633\,,$$

la población crece año tras año a una media aproximada del 4.63 %.

Como sabemos, la primera fila de la matriz de transición del modelo, está formada por las tasas de natalidad,

$$a_{11}=0\,,\quad a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{15}=\frac{\frac{28}{85-26}+\frac{27}{83-28}+\frac{29}{88-27}}{3}=0.480298\,.$$

Por otro lado, el elemento a_{21} representa al porcentaje de individuos de la primera clase que sobreviven al pasar un año para llegar a la segunda,

$$a_{21}=\frac{\frac{17}{26}+\frac{20}{28}+\frac{20}{27}}{3}=0.702958\,.$$

De forma similar, el resto de las tasas de supervivencia serán,

$$a_{32}=\frac{\frac{11}{16}+\frac{13}{17}+\frac{14}{20}}{3}=0.717402$$

$$a_{43}=\frac{\frac{8}{12}+\frac{9}{11}+\frac{10}{13}}{3}=0.751338$$

$$a_{54}=\frac{\frac{6}{9}+\frac{6}{8}+\frac{8}{9}}{3}=0.7682\,.$$

Por último, encontramos la probabilidad de que una hembra de la última clase siga permaneciendo a la misma clase en el año próximo,

$$a_{55}=\frac{\frac{13}{22}+\frac{13}{19}+\frac{16}{19}}{3}=0.705433\,.$$

En consecuencia, el modelo matricial $\vec{X}(t)=A\,\vec{X}(t-1)\,, t=1,2,\cdots$ que representa a la dinámica de esta población de Helmeted Honeyeater es:

$$\begin{pmatrix} X_1(t)\\ X_2(t)\\ X_3(t)\\ X_4(t)\\ X_5(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48\\ 0.702 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.717 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.751 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.7682 & 0.705\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(t-1)\\ X_2(t-1)\\ X_3(t-1)\\ X_4(t-1)\\ X_5(t-1)\end{pmatrix}$$

Si tomamos como vector inicial

$$\vec{X}0)=(26,16,12,9,22)^T\,,$$

podemos saber la "bondad"del modelo, calculando el número de individuos en las siguientes generaciones. De esta manera, para el año 1992 el modelo predice

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \\ X_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 \\ 0.702 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7682 & 0.705 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 16 \\ 12 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 28 \\ 18 \\ 11 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix}$$

En la tabla siguiente pueden verse las proyecciones de la población para distintas generaciones,

Clase	1991	1992	1993	1994	1995	2011	2012
1	26	28	29	31	32	69	73
2	16	18	20	21	22	47	49
3	12	11	13	14	15	32	33
4	9	9	9	10	11	23	24
5	22	22	23	23	23	51	53
Total	**85**	**88**	**94**	**99**	**103**	**222**	**232**

El modelo prevé un crecimiento de la población con una tasa

$$\frac{\frac{88}{85} + \frac{94}{88} + \frac{99}{94} + \frac{103}{99}}{4} = 1.048\,,$$

del 4.8 %, muy parecida a la obtenida con los datos reales de los primeros años. Además, en el período 2011 - 2012 la población se espera que crezca $232/222 = 1.04505$, un 4.5 %.

Si utilizamos el programa `Mathematica`® para conocer los valores y vectores propios de la matriz A, obtenemos $\lambda_1 = 1.04897$ como valor propio dominante y

$$\vec{U}_1 = (0.659,\, 0.441,\, 0.301,\, 0.216,\, 0.482)^T\,,$$

su vector propio asociado. En consecuencia, a largo plazo, la población crecerá a un ritmo del 4.897 % anual, y los porcentajes de hembras en cada una de las clases se mantendrán constantes, tal y como puede observarse en la Figura 5.3.

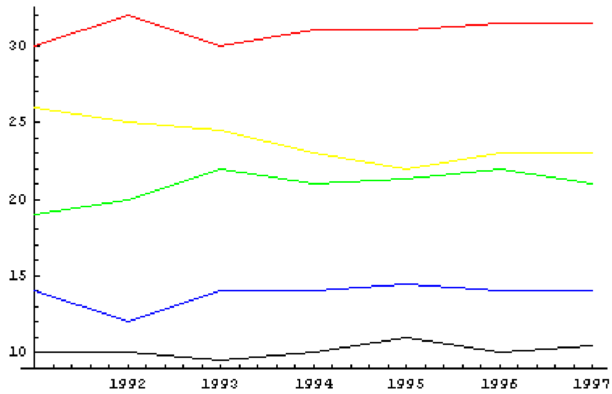


Figura 5.3. Rojo=clase 1, verde=clase 2, azul=clase 3, negro=clase 4, amarillo=clase 5

5.3. Dinámica de una población de ardillas

En este apartado probaremos como la reducción de una población de ardillas modifica la tasa de crecimiento de la población.

Recordemos que entendemos por dinámica de la población a la variación del número de individuos de una población en función del tiempo. Como un caso particular de este tipo de dinámica, mostraremos un ejemplo concreto que corresponde a la evolución a largo plazo de una población de ardillas (*Spermophilus armatus*).

Estas ardillas pueden encontrarse en el estado de Utah en USA, y suelen despertarse de la invernación cada año a finales de Marzo o primeros del mes de Abril, dependiendo de las condiciones climatológicas. Las hembras paren muy rápidamente después de despertar y establecer su territorio. En los primeros días de Mayo nacen las crías y las ardillas jóvenes dejan sus madrigueras aproximadamente tres semanas después. Durante los meses de Junio y Julio todas las clases de edades y sexos son activas. Finalmente, los adultos comienzan la hibernación a finales de Julio, de tal manera que en Septiembre todas las ardillas están de nuevo invernando en sus madrigueras.

La investigación se realizó en dos fases, la primera de ellas se desarrolló desde 1964 a 1968, y se dejó plena libertad a la población. En este caso, el número de ardillas fluctuó entre 178 y 255, con una media de 205. La primera parte de la Tabla 5.2 corresponde a la tabla de vida durante esa primera etapa.

La segunda fase se desarrolló entre los años 1968 - 1971 y los investigadores intervinieron reduciendo la población a 100 ardillas. La segunda parte de la Tabla 5.2 muestra su tabla de vida, para esta segunda etapa.

x(año)	l(x)	b(x)	l(x)	b(x)
0.00	1.000	0.00	1.000	0.00
0.25	0.662	0.00	0.783	0.00
0.75	0.332	1.29	0.398	1.71
1.25	0.251	0.00	0.288	0.00
1.75	0.142	2.08	0.211	2.24
2.25	0.104	0.00	0.167	0.00
2.75	0.061	2.08	0.115	2.24
3.75	0.026	2.08	0.060	2.24
4.75	0.011	2.08	0.034	2.24
5.75	0.000	0.00	0.019	2.24
6.75	-	-	0.010	2.24
7.75	-	-	0.000	0.00

Tabla 5.2.

Si analizamos los resultados utilizando como software `Populus`®, observamos que durante la primera de las fases las tasas de nacimientos y muertes estaban equilibradas, generando una tasa de crecimiento negativo (r=-0.0207 ardillas/(ardillas× año)).

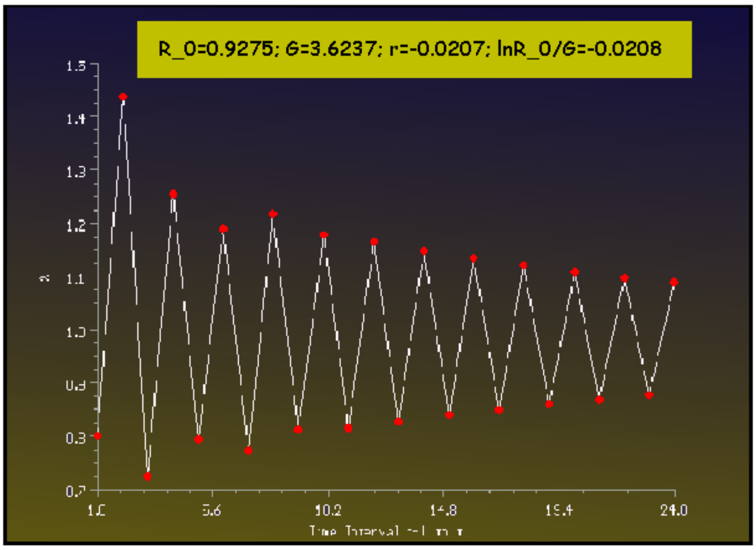


Figura 5.4: Evolución de $\lambda = e^r$ (primer caso)

En la Figura 5.4 se aprecia que a medida que aumentamos el número de años, $\lambda = e^r$ tiende al valor 0.979512.

La Figura 5.5 representa la distribución estable de clases

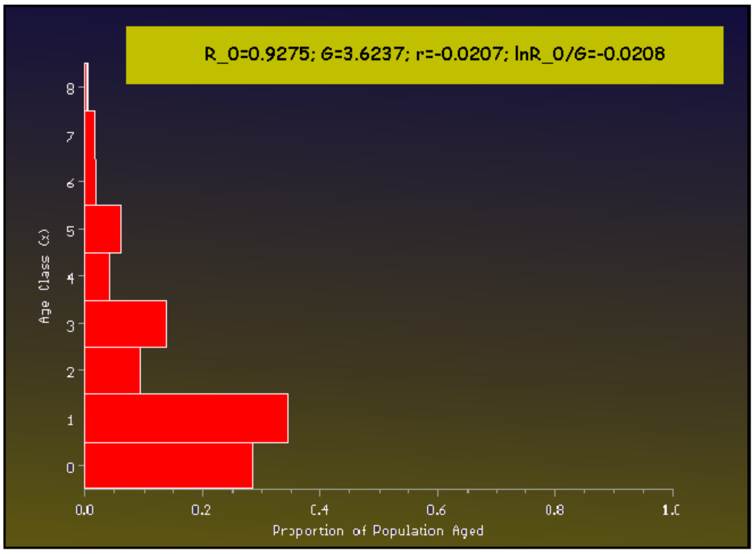


Figura 5.5: Distribución por edades (primer caso)

Cuando se reduce la densidad de población de ardillas, la natalidad supera a la mortalidad y se produce un aumento considerable en la tasa de crecimiento (r=0.1267 ardillas/(ardillas× año))

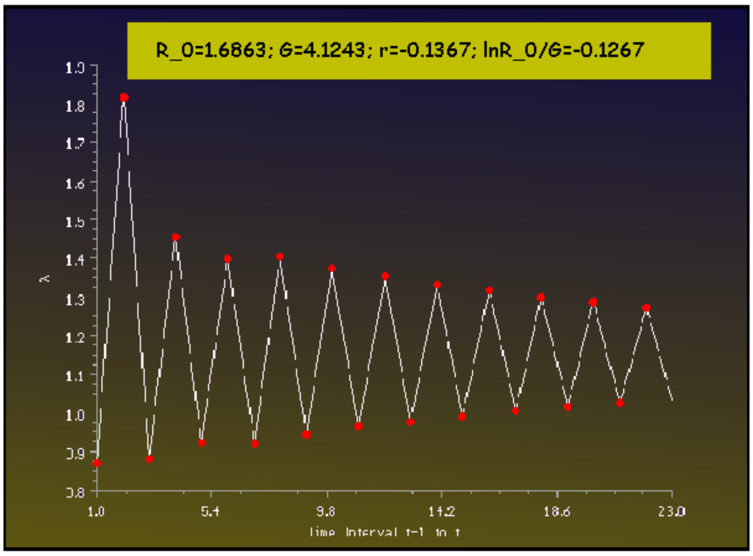


Figura 5.6: Representación gráfica de λ (segundo caso)

La Figura 5.6 muestra como ahora la estabilidad en las clases de edad tiene una tendencia diferente a la primera de las fases estudiadas.

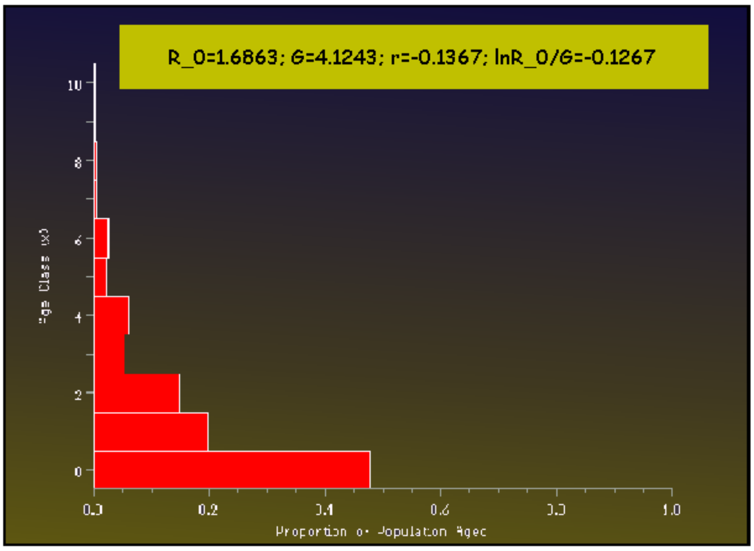


Figura 5.7. Distribución por edades (segundo caso)

En conclusión, la reducción en la densidad de la población pone de manifiesto que el agrupamiento tiene muchos efectos escondidos detrás de una determinada tasa de crecimiento. Por ejemplo, la natalidad, la mortalidad y la estabilidad en la estructura de edad, son muy sensibles a la densidad de la población.

5.4. Modelo para la producción de células rojas

El siguiente modelo simula la producción de células rojas del cuerpo humano. En el sistema circulatorio las células rojas son las encargadas de transportar el oxígeno a través del cuerpo. En este proceso son destruidas y reemplazadas de forma constante, por lo que su número debe mantenerse en un nivel fijo. Nos proponemos construir un modelo muy simple que simule la producción de estas células rojas en el cuerpo, para lo cual empezamos considerando unas hipótesis básicas de partida.

1.- El bazo filtra y destruye una cierta fracción de células al día.

2.- La médula ósea produce un número proporcional al número de células perdidas en el día anterior.

Tomando a estas restricciones como punto de partida, nuestro objetivo será determinar el número de células rojas existente para un día cualquiera k Para ello, representaremos por,

- R_k al número de células rojas en circulación en el día k.
- M_k al número de células rojas producidas por la médula en el día k.
- α a la fracción destruidas por el bazo.
- γ a la producción constante (número producido por número perdido.)

De las hipótesis y definiciones anteriores se deduce que,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} R_{k+1} & = & (1-\alpha)R_k + M_k \\ M_{k+1} & = & \gamma\alpha R_k \end{array} \right.$$

o bien, matricialmente

$$\begin{pmatrix} R_{k+1} \\ M_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \gamma\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_k \\ M_k \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(k+1) = A\vec{X}(k)\,, \quad k = 1, 2, 3, \cdots .$$

Para estudiar su evolución en el tiempo, es necesario encontrar la potencia de la matriz A, ya que $\vec{X}(k) = A\vec{X}(k-1) = A^k\vec{X}(0)$. Necesitamos conocer, en primer lugar, los valores propios de la matriz A.

$\mathtt{A} := \{\{\mathtt{1} - \alpha\}, \{\gamma\alpha, \mathtt{0}\}\}$
$\mathtt{Eigenvalues[A]}$

$$\{\frac{1-\alpha-\mathtt{Sqrt}[(-1+\alpha)^2+4\alpha\gamma]}{2}\}, \frac{1-\alpha+\mathtt{Sqrt}[(-1+\alpha)^2+4\alpha\gamma]}{2}\} \qquad (5.2)$$

Veamos a continuación que el comportamiento del modelo dependerá de los valores propios de la matriz de transición A.

- **Si los dos autovalores son menores que uno** y $D = C^{-1}AC$ es la matriz diagonal, entonces D^k tiende a la matriz nula cuando $k \to \infty$. En consecuencia, $A^k = CD^kC^{-1}$ tiende a largo plazo a la matriz nula, y **en el cuerpo no quedarán células rojas**.

- **Si al menos uno de los autovalores es más grande que uno**, entonces D^k crecerá cuando $k \to \infty$, y A^k también lo hará. Esto significa que **el número de células rojas aumentará de forma continua con el tiempo** y llegará un momento en el que el individuo fallecerá.

- Entonces la única forma de **mantener constante el número de células rojas, sería cuando existiese un valor propio dominante que valiese uno**.

Pero teniendo en cuenta (5.2), esto último ocurrirá si y sólo si $\gamma = 1$. Supongamos, por tanto, que $\gamma = 1$ con $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\alpha$, si calculamos los vectores propios asociados

$$\vec{U}_1 = (1,\, \alpha), \quad \vec{U}_2 = (1,\, -1)\,.$$

que nos permiten escribir

$$A^k = CD^kC^{-1} = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 1+\alpha(-\alpha)^k & 1-(-\alpha)^k \\ \alpha(1-(-\alpha)^k) & \alpha+(-\alpha)^k \end{pmatrix},$$

y deducir

$$R(k) = \frac{1}{1+\alpha}\left((1+\alpha(-\alpha)^k)R(0) + (1-(-\alpha)^k)M(0)\right)\,.$$

Como la fracción de células rojas α es reemplazada por el bazo cada día, si k es suficientemente grande, entonces $R(k)$ tiende al valor de equilibrio R^*, siendo

$$R^* = \frac{R(0) + M(0)}{1+\alpha}\,. \tag{5.3}$$

Conclusiones:

1.- Al ser $(-\alpha)$ negativo, al calcular $(-\alpha)^k$ con $k \to \infty$, el número de células rojas oscilará (dependiendo de que k sea par o impar) para aproximarse al punto de equilibrio (5.3). Una posible explicación biológica de este hecho puede deberse al efecto de retardo, ya que el número de células rojas que la médula ósea produce hoy está en función de las que se destruyeron ayer.

2.- La convergencia hacia el punto de equilibrio (5.3) será muy rápida si α es pequeño, y esto significaría que el bazo filtra pocas células rojas del día anterior.

3.- Cuando se extrae sangre se reducen las cantidades $R(0)$ y $M(0)$ y hay una reducción en el punto de equilibrio que no se recupera con el tiempo. Este comportamiento del modelo entra en contradicción con la realidad, y por ello es necesario modificarlo. Una posible mejora sería

$$\left\{ \begin{array}{lcl} R_{k+1} & = & (1-\alpha)R_k + \varepsilon \\ M_{k+1} & = & \gamma\alpha R_k \end{array} \right. ,$$

ya que ahora el punto de equilibrio sería constante de valor ε/α.

5.5. Explotación de una población de animales

El siguiente modelo puede ser utilizado en la gestión de un coto de caza o una granja para la explotación duradera de una población de animales.

Entendemos por explotación a la separación de algunos animales para su venta o sacrificio. Nosotros nos limitaremos a lo que se conoce como política de explotación duradera, lo cual significa:

- *Diremos que una explotación es duradera, si el rendimiento que se obtiene al término de cada período es el mismo y la distribución de las edades de la población se conserva al separar el rendimiento de cada período.*

Por tanto, la población animal no se agota, solo se explota el excedente debido al crecimiento. La idea básica del modelo que queremos construir es el siguiente. Se parte de una población con una determinada distribución de las edades. Esta población tiene un período de crecimiento descrito por una matriz de *Leslie*. Al término de este período, se obtiene como rendimiento una fracción de cada una de las clases de edades. La duración del período de separación de los animales que conforman el rendimiento, debe ser breve en comparación con el período de crecimiento (para que el crecimiento o los cambios de la población sean despreciables en dicho período de separación). Finalmente, la población debe quedar con la misma distribución de las edades que la población original. Este ciclo se repite después de cada separación y por tanto, el rendimiento es duradero. Sea:

$$\vec{X} = (X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4,)^T \ ,$$

el vector de distribución de las edades de la población al inicio del período de crecimiento; X_i es el número de hembras de la clase de orden i que sigue formando parte de la población (que no se separan como rendimiento). La duración de cada clase debe ser igual a la duración del período de crecimiento. Por ejemplo, si el rendimiento se separa una vez al año, la población tendrá que dividirse en clases de un año.

Sea L la matriz de *Leslie* que describe el crecimiento de la población; por lo tanto, $L\vec{X} =$ será el vector de la distribución de las edades de la población al término del período de crecimiento (esto es, inmediatamente antes de la separación). Sea h_i con $i = 1, 2, 3, 4$, la fracción de hembras que se va a separar de las clases de orden i. Entonces en la primera clase, después de un período de crecimiento se pasa de X_1 hembras a,

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 \,,$$

siendo el número de hembras que se separan

$$h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) \,,$$

y en consecuencia

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 - h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) \,,$$

serán las hembras que quedan en la primera clase después de la separación. Por tanto,

$$X_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 - h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) \,.$$

Del mismo modo, en la segunda clase

$$b_1X_1 - h_2b_1X_1 = X_2 \,,$$

y en la tercera y cuarta clase

$$\begin{array}{c} b_2X_2 - h_3b_2X_2 = X_3 \\ b_3X_3 - h_4b_3X_3 = X_4 \,. \end{array}$$

Las ecuaciones anteriores podemos expresarlas matricialmente,

$$\begin{array}{rcl} (1-h_1)(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) & = & X_1 \\ (1-h_2)b_1X_1 & = & X_2 \\ (1-h_3)b_2X_2 & = & X_3 \\ (1-h_4)b_3X_3 & = & X_4 \end{array} \qquad (5.4)$$

Es posible realizar un razonamiento similar de forma más simplificada, haciendo uso del álgebra matricial. Sea

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{pmatrix},$$

la matriz de separación de cada una de las clases. Si tenemos en cuenta lo que entendemos por una política duradera tenemos:

- La distribución de las edades al final del período de crecimiento ($L\vec{X}$) menos el rendimiento ($HL\vec{X}$) será igual a la distribución de las edades al comienzo del período de crecimiento ($\vec{X}$).

O bien,

$$L\vec{X} - HL\vec{X} = \vec{X} \quad \Rightarrow \quad (I - H)L\vec{X} = \vec{X}\,. \tag{5.5}$$

Las ecuaciones (5.4) y (5.5) son idénticas e indican que $\vec{X}$ es un vector propio de la matriz $(I - H)L$ asociado al valor propio $\lambda = 1$. Por esta razón, los valores de h_i y $\vec{X}$ que aparecen en el modelo no pueden tomar cualquier valor, sino que por el contrario estarán sometidos a ciertas restricciones que a continuación analizaremos.

Sabemos que la matriz de *Leslie* es,

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $(I - H)L$ vale,

$$\begin{pmatrix} (1-h_1)a_1 & (1-h_1)a_2 & (1-h_1)a_3 & (1-h_1)a_4 \\ (1-h_2)b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-h_4)b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos, que esta matriz es del mismo tipo que una matriz de *Leslie* y sabemos que la condición necesaria y suficiente para que una matriz de este tipo tenga como valor propio la unidad es que su tasa neta de reproducción R sea igual a 1. En nuestro caso:

$$\begin{array}{ll} (1-h_1)(a_1 + a_2 b_1(1-h_2) + a_3 b_1 b_2 (1-h_2)(1-h_3) & \\ +a_4 b_1 b_2 b_3 (1-h_2)(1-h_3)(1-h_3)) & = 1 \end{array} \tag{5.6}$$

Esta ecuación, proporciona unas restricciones para las fracciones h_i de separación de los animales. Solo aquellos valores que cumplan esta ecuación y pertenezcan al intervalo $(0, 1)$ dan origen a un rendimiento duradero.

Si h_i con $i = 1, 2, 3, 4$ satisfacen la ecuación (5.6), la matriz $(I - H)L$ tiene como valor propio $\lambda_1 = 1$ y además este valor propio tiene grado de multiplicidad 1 (ya que el valor propio positivo de una matriz de *Leslie* tiene siempre multiplicidad uno). Por tanto, solo existe un vector propio $\vec{X}$ linealmente independiente que cumple la ecuación,

$$(I - H)L\vec{X} = \vec{X}\,,$$

de valor,

$$\vec{X} = \vec{U}_1 = (1,\, b_1(1-h_2),\, b_1b_2(1-h_2)(1-h_3),\, b_1b_2b_3(1-h_2)(1-h_3)(1-h_4))^T\,.$$

Este vector, determinará la fracción de hembras que quedará en cada una de las 4 clases después de la separación si se sigue una política de explotación duradera. El número de animales suele estar condicionado por restricciones, por ejemplo del tipo ecológico (espacio, tipo de especies) o económico (precio de venta de los animales de cada clase).

5.5.1. Explotación uniforme

Suele ocurrir con frecuencia que en muchas poblaciones es difícil distinguir o capturar animales de una determinada edad. Por este motivo, es razonable pensar que la captura se realiza al azar, lo que equivale suponer que se separa la misma fracción en cada una de las clases. En consecuencia, un primer caso de estudio es

$$h = h_1 = h_2 = h_3 = h_4\,.$$

Entonces, la ecuación $(I - H)L\vec{X} = \vec{X}$, se convertirá en

$$(1-h)L\vec{X} = \vec{X} \quad \Rightarrow \quad L\vec{X} = \left(\frac{1}{1-h}\right)\vec{X}\,.$$

De este modo, $1/(1-h)$ debe ser el valor propio único positivo λ_1 de la matriz de crecimiento de *Leslie*, L

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-h}\,.$$

Despejando h se obtiene

$$\boxed{h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}\,.}$$

El vector $\vec{X}$ es, en este caso, igual al vector propio de L correspondiente al valor propio λ_1

$$\boxed{\vec{X} = \left(1,\, \frac{b_1}{\lambda_1},\, \frac{b_1b_2}{\lambda_1^2},\, \frac{b_1b_2b_3}{\lambda_1^3}\right)^T\,.}$$

Del valor de h encontrado, podemos deducir que, cuanto mayor sea λ_1, mayor será la fracción de los animales que se pueden separar de la población sin agotarla. Se observa también que si $\lambda_1 > 1$, la fracción a separar h se encuentra en el intervalo $(0, 1)$. Esto era de esperar ya que $\lambda_1 > 1$ significa que la población aumenta con el paso del tiempo.

5.5.2. Separación de la clase de menor edad

En algunas poblaciones, las hembras más jóvenes son las únicas que tienen valor económico. Por ello, sólo se separan las hembras de la clase de menor edad y por ello,

$$h_1 = h\,, \qquad h_2 = h_3 = h_4 = 0\,.$$

Bajo estas consideraciones, la ecuación (5.6) se transformará en

$$(1-h)(a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_4 b_1 b_2 b_3) = 1\,,$$

o lo que es lo mismo $(1-h)R = 1$, siendo R la tasa neta de reproducción de la población, correspondiente a la matriz L. Luego,

$$\boxed{h = 1 - \frac{1}{R}\,.}$$

En esta ecuación se observa que una política de explotación duradera se logra cuando $R > 1$, lo que equivale a que crezca la población.

El vector de la distribución de las edades después de la separación es proporcional al vector

$$\boxed{\vec{X} = (1,\, b_1,\, b_1 b_2,\, b_1 b_2 b_3)^T\ ,}$$

ya que $\lambda_1 = 1$. En efecto, $(I-H)L\vec{X} = \vec{X}$,

$$\begin{pmatrix} (1-h)a_1 & (1-h)a_2 & (1-h)a_3 & (1-h)a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \vec{X} = \vec{X}\,.$$

En este caso la tasa neta de reproducción $R' = 1$ será

$$R' = (1-h)[a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_4 b_1 b_2 b_3] = (1-h)R = 1\,.$$

EJEMPLO 5.1

Una cierta población de animales está dividida en tres clases de edades de un año de duración y la matriz de *Leslie* correspondiente es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0, & 1/4, & 0 \end{pmatrix}$$

- **Separación uniforme.** Como hemos demostrado, en este caso la fracción que debemos separar, viene dada por la expresión

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}\,.$$

Necesitamos conocer los valores propios de la matriz L

$$|L - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1.5\,,\ \lambda_2 = -1.31\,;\ \lambda_3 = -0.19\,,$$

y en consecuencia, la fracción buscada es

$$h = 1 - \frac{1}{1.5} = \frac{1}{3}\,.$$

Es decir, de cada una de las clases de edades, debemos elegir la tercera parte de los animales.

Para encontrar el vector de distribución que quedaría después de cada separación,

$$\vec{X} = \left(1,\, b_1/\lambda_1,\, b_1 b_2/\lambda_1^2\right)^T = (1,\, 1/3,\, 1/18)^T\ .$$

- **Separación de la clase de menor edad**. Actuamos de la misma manera que en el caso anterior, pero teniendo en cuenta que

$$h = 1 - \frac{1}{R}\,,$$

siendo R la tasa neta de reproducción de la matriz L

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 = 0 + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{8}\,.$$

Luego,

$$h = 1 - \frac{8}{19} = \frac{11}{21}\,.$$

El vector de distribución de las edades será:

$$\vec{X} = (1,\, b_1,\, b_1 b_2)^T = \left(1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{8}\right)^T\ .$$

EJEMPLO 5.2

Para una cierta especie de ovejas domésticas de Nueva Zelanda, cuyo período de crecimiento es de un año, se encontró la siguiente matriz de *Leslie*

$$L = \begin{pmatrix}
0.0 & 0.045 & 0.391 & 0.472 & 0.484 & 0.546 & 0.543 & 0.502 & 0.468 & 0.459 & 0.433 & 0.421 \\
0.845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.691 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.561 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.370 & 0
\end{pmatrix}$$

En cada uno de los casos estudiados, encontraremos la fracción h a separar, y el vector de la distribución de las edades de las ovejas, después de cada separación.

- **Separación uniforme.** Para conocer la fracción h necesitamos en primer lugar saber el valor propio positivo λ_1. Para ello, utilizamos el ordenador y puede comprobarse que $\lambda_1 = 1.17557$

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1} = 1 - \frac{1}{1.17557} = 0.15\,.$$

Entonces, la política de explotación uniforme consiste en separar, cada año, el 15 % de las ovejas en cada una de las doce clases.

A continuación encontramos la distribución de las edades de las ovejas, después de cada separación. En este caso, es proporcional al vector

$$\vec{X} = \left(1,\, \frac{b_1}{\lambda_1},\, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2},\, \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3}, \cdots, \frac{b_1 \cdots b_{11}}{\lambda_1^{11}}\right)^T = (1,\, 0.719,\, 0.59619,\, \cdots)^T\,.$$

Por cada 1000 ovejas cuya edad está comprendida entre 0 y 1 año después de la separación, hay 719 ovejas cuya edad está comprendida entre 1 y 2 años, 596 entre 2 y 3 y así sucesivamente.

- **Separación de la clase de menor edad.** El segundo caso se resuelve con la misma técnica empleada en el ejemplo anterior. La tasa neta de reproducción es

$$\begin{aligned} R &= a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1} = \\ &= (0 + (0.045)(0.845) + \cdots + (0.421)(0.845) \cdots = 2.513 \end{aligned}$$

La fracción que se separa de la primera clase es

$$h = 1 - \frac{1}{R} = 1 - \frac{1}{2.513} = 0.602\,.$$

La distribución de las edades de la población de ovejas, después de la separación, es proporcional al vector

$$\vec{v_1} = (1, 0.845, 0.824, 0.795, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.060)^T\,.$$

Si hacemos el producto $L\vec{U}_1$ obtenemos

$$(2.513, 0.845, 0.824, 0.795, 0.755, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.060)^T\,,$$

que es el vector de la distribución de las edades inmediatamente antes de la separación. La suma total de todas ellas es 8.518, por lo que la primera, 2.513 supone el 29,5 % del total. Esto significa que, inmediatamente antes de la separación, el 29.5 % de la población está en la clase de menor edad. Como en esta clase se separa el 60.2 %, se concluye que cada año el rendimiento equivale al 17.8 % de la población total de ovejas.

EJEMPLO 5.3

Supongamos que disponemos de una granja con una capacidad para 1760 cerdas. Hemos dividido la población en tres clases de edad: jóvenes, medianas y adultas, cuyos precios de venta son 36 euros, 30 euros y 42 euros respectivamente.

La tabla siguiente corresponde a la distribución en las tres clases en los años 1998 y 2000:

Edad	Núm. en 1998	Núm. crías 1998-2000	Núm. 2000
$[0,2)$	160	160	1360
$[2,4)$	300	1200	80
$[4,6]$	100	0	0

Realizaremos un estudio para deducir si es más rentable económicamente sacrificar el mismo número de animales de cada una de las clases o si por el contrario interesa sólo sacrificar una parte de los animales más jóvenes.

- Para saber el crecimiento de la población es necesario conocer la matriz de *Leslie*, y en concreto los parámetros de natalidad y supervivencia de la población.

$$a_1 = \frac{160}{160} = 1\,, \quad a_2 = \frac{1200}{300} = 4\,, \quad a_3 = \frac{0}{100} = 0\,, \quad b_1 = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}\,, \quad b_2 = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}\,.$$

El modelo matricial será,

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \\ X_3(t-1) \end{pmatrix}$$

- Para la **separación uniforme** de las hembras, es necesario encontrar el valor propio estrictamente dominante de matriz de *Leslie* así como su vector propio asociado.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2/3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\, \lambda_2 = 0,\, \lambda_3 = -1\,.$$

Como el valor propio dominante es $\lambda_1 = 2$, la fracción que debemos separar de cada una de las clases es

$$h = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

el 50 %. A continuación necesitamos el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 2/3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x - 2y & = & 0 \\ \frac{2}{3}y - 2z & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} x = 4\alpha \\ y = \alpha \\ z = \frac{1}{3}\alpha \end{array}\right.$$

Por tanto, el subespacio unidimensional de vectores propios asociados al $\lambda_1 = 2$ viene expresado por

$$S = \{(4\alpha,\, \alpha,\, 1/3\alpha)\, :\, \alpha \neq 0\}\,,$$

el cual es generado por el vector (4, 1, 1/3), o bien uno proporcional (12, 3, 1).

Recordemos que una manera alternativa de encontrar este vector propio es,

$$\vec{U}_1 = \left(1,\, \frac{b_1}{\lambda_1},\, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}\right)^T = \left(1,\, \frac{1/2}{2},\, \frac{1/2 * 2/3}{2^2}\right)^T = \left(1,\, \frac{1}{4},\, \frac{1}{12}\right)^T\,.$$

A la vista del vector propio, debemos repartir los 1760 animales entre las tres clases en la proporción $12 : \ 3 : \ 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1760}{16} * 12 &= 1320 \quad \text{animales en la primera clase}\\
\frac{1760}{16} * 3 &= 330 \quad \text{animales en la segunda clase}\\
\frac{1760}{16} * 1 &= 110 \quad \text{animales en la tercera clase}\,.
\end{aligned}$$

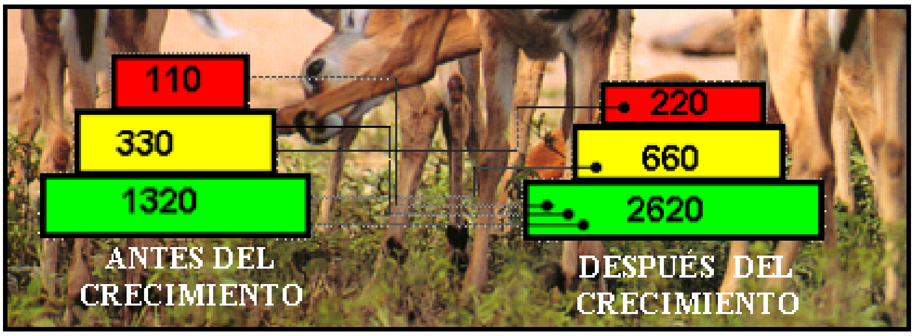


Figura 5.8. Distribución de las hembras antes y después de un período de crecimiento.

Ahora, debemos esperar un período de crecimiento (dos años),

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1320 \\ 330 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2620 \\ 660 \\ 220 \end{pmatrix}.$$

Finalmente el número de animales que separamos de la primera clase será de,

$$2620 - 1320 = 2620 * \frac{1}{2} = 1320\,,$$

de la segunda,

$$660 - 330 = 660 * \frac{1}{2} = 330\,,$$

y de la tercera

$$220 - 110 = 220 * \frac{1}{2} = 110\,.$$

De esta manera, el beneficio obtenido es de

$$1320 * 36 + 330 * 30 + 110 * 42 = 62040 \quad \text{euros}\,.$$

- Para conocer la fracción a separar en el segundo tipo correspondiente a la separación de la **clase de la menor edad**, calculamos la tasa neta de reproducción,

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 = 1 + \frac{4}{2} = 3\,,$$

entonces $h = 1 - 1/R = 1 - 1/3 = 2/3$, es decir un 66 % de las cerdas más pequeñas.

Al igual que en el caso anterior es necesario repartir los 1760 animales en las tres clases, por ello

$$\vec{X} = (1,\, b_1,\, b_1 b_2)^T = \left(1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}\right)^T ,$$

lo cual indica que la proporción buscada es 6 : 3 : 2. Estos porcentajes obligan a que 960 de los 1760 cerdas deben corresponder a las jóvenes, 480 a las medianas y 320 a las adultas. Por tanto, después de dos años el número de animales en cada una de las clases será de

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 960 \\ 480 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2880 \\ 480 \\ 320 \end{pmatrix} .$$

El número de animales jóvenes que debemos separar será de $2880 - 960 = 2880 * 2/3 = 1920$, cuya venta supone un beneficio de $1920 * 36 = 69120$ euros.

- **Conclusión:** Interesa vender el 66 % de las hembras más jóvenes.

Para terminar, insistimos en el hecho de que es posible establecer muchas políticas diferentes de explotación duradera, todas aquellas que cumplan la restricción dada por la ecuación (5.6). Es evidente, que cada una de estas políticas dará lugar a un beneficio distinto y una cuestión básica es conocer cuál de ellas proporciona un beneficio máximo. Este problema es muy interesante de responder pero su resolución escapa de los objetivos del curso ya que para poderlo abordar es necesario tener nociones de programación lineal.

5.6. Modelo para la explotación de un bosque

Por último presentamos un modelo para explotar de una forma racional la madera de un bosque. Supongamos que disponemos de un bosque de pinos que deseamos explotarlo como árboles para madera. Para ello, cada período de tiempo (dependiendo de la matriz de crecimiento) cortamos y vendemos algunos de estos árboles. Por cada pino cortado, se planta en el mismo lugar otro. De esta manera, el número de árboles del bosque se conserva constante[1]. Como es natural, los árboles de diferentes alturas tendrán diferentes precios. Para concretar, dividimos los árboles en cuatro clases de alturas, siendo p_i con $i = 1, 2, 3, 4$ el precio de un árbol que se encuentra en la clase i.

La primera clase está formada por los árboles cuya altura está comprendida en el

[1] *En este modelo simplificado no se tendrá en cuenta los árboles que mueren entre dos temporadas de corte. Supondremos que cada árbol del almácigo que se planta, sobrevive y crece hasta que se corta para su venta*

intervalo $[0, h_1)$ y es normal suponer que no tienen valor económico ($p_1 = 0$). La clase de orden 4 está formada por los árboles de altura igual o mayor que h_3. Representaremos por X_i con $i = 1, 2, 3, 4$ al número de árboles comprendido en la clase de orden i, que quedan sembrados después de cada temporada de corte. Con estos números puede formarse un vector

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T \ ,$$

que se conoce con el nombre de vector de árboles no cortados.

Para que la explotación del bosque sea duradera, éste tiene que recuperar después de cada temporada de corte, la configuración fija dada por el vector de árboles no cortados, $\vec{X}$.

Uno de los objetivos fundamentales de esta sección será encontrar los vectores de árboles no cortados $\vec{X}$, que hagan posible la explotación duradera. Como el número total de árboles del bosque es fijo, se cumple

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N \ ,$$

donde la cantidad N dependerá, por ejemplo, del terreno disponible y del espacio requerido por cada árbol. Entre dos temporadas de corte, los árboles crecen dando una configuración al bosque igual a la de antes de cada temporada de corte. En esta temporada, se cortan un cierto número de árboles de cada clase. Finalmente, se planta un árbol en el lugar de cada uno de los árboles cortados de forma que el bosque recupere la configuración inicial.

Si nos encontramos entre dos temporadas de corte, un árbol de la clase i puede crecer de forma que pase a ser de una clase de mayor altura o bien, tener por alguna razón un crecimiento retardado y permanecer dentro de la misma clase. En consecuencia, es necesario definir los siguientes parámetros de crecimiento, g_i, para $i = 1, 2, 3, 4$:

1.- g_i = la fracción de árboles de la clase de orden i que crecen y pasan a la clase de orden $i + 1$ durante un período de crecimiento.

2.- $1 - g_i$ = la fracción de árboles de la clase de orden i que permanecen dentro de la clase de orden i durante su crecimiento.

- Después de un período de crecimiento, el número de árboles en cada una de las clases será,

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1 - g_1)X_1 \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1 - g_2)X_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1 - g_3)X_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 \end{array}$$

- Supongamos que en una temporada se cortan Y_i , $i = 1, 2, 3, 4$ árboles de la clase de orden i. Al vector $\vec{Y} = (Y_1,\, Y_2,\, Y_3,\, Y_4)^T$ se conoce con el nombre de vector de árboles cortados,

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1-g_1)X_1 - Y_1 \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1-g_2)X_2 - Y_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1-g_3)X_3 - Y_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 - Y_4 \end{array}$$

- Y plantamos el mismo número de árboles cortados

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1-g_1)X_1 - Y_1 + (Y_1+Y_2+Y_3+Y_4) \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1-g_2)X_2 - Y_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1-g_3)X_3 - Y_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 - Y_4 \end{array}$$

- Finalmente la configuración del bosque debe coincidir con la que tenía antes del período de crecimiento,

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1-g_1)X_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = X_1 \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1-g_2)X_2 - Y_2 = X_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1-g_3)X_3 - Y_3 = X_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 - Y_4 = X_4 \end{array}$$

Simplificando las ecuaciones anteriores,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_1X_1 & = & Y_2+Y_3+Y_4 \\ g_1X_1 - g_2X_2 & = & Y_2 \\ g_2X_2 - g_3X_3 & = & Y_3 \\ g_3X_3 & = & Y_4 \end{array} \right. \tag{5.7}$$

A este mismo resultado se llega de una manera más simplificada si hacemos uso del álgebra matricial. Para ello, si G es la matriz de crecimiento,

$$G = \begin{pmatrix} 1-g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 1-g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1-g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$G\vec{X} = \begin{pmatrix} (1-g_1)X_1 \\ g_1X_1 + (1-g_2)X_2 \\ g_2X_2 + (1-g_3)X_3 \\ g_3X_3 + X_4 \end{pmatrix}$$

nos da el número de árboles que hay en cada una de las 4 clases después del período de crecimiento.

Como sabemos, en cada temporada de corte, se cortará un total de $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$

árboles. Este es también el número total de árboles agregados a la primera clase (los nuevos árboles) después de cada temporada de corte. Si se define la siguiente matriz de reforestación,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el vector columna

$$R\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

podemos escribir la ecuación que caracteriza a una política de explotación duradera.

- *Configuración al terminar el período de crecimiento, menos los árboles cortados, más la reforestación con nuevos árboles de almácigo será igual a la configuración al inicio de un período de crecimiento.*

O bien, en forma matemática

$$G\vec{X} - \vec{Y} + R\vec{Y} = \vec{X}\,,$$

ecuación que también puede escribirse

$$(I - R)\vec{Y} = (G - I)\vec{X}\,,$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos la ecuación matricial anterior, obtenemos el mismo sistema de ecuaciones (5.7),

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_1X_1 & = & Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ g_1X_1 - g_2X_2 & = & Y_2 \\ g_2X_2 - g_3X_3 & = & Y_3 \\ g_3X_3 & = & Y_4 \end{array} \right.$$

Podemos ver que la primera de las ecuaciones es la suma de las tres ecuaciones restantes. Como $Y_i \geq 0$ para $i = 2, 3, 4$, las ecuaciones anteriores requieren que

$$g_1X_1 \geq g_2X_2 \geq g_3X_3 \geq 0$$

5.6.1. El rendimiento óptimo duradero

Como se cortan Y_i árboles de la clase de orden i con $i = 2, 3, 4$ y como el precio de estos árboles es p_i, el rendimiento total en una temporada estará dado por

$$B = p_2 Y_2 + p_3 Y_3 + p_4 Y_4. \tag{5.8}$$

Ahora, combinando las distintas ecuaciones se puede enunciar el problema de la maximización del rendimiento del bosque para todas las posibles política de explotación que sean duraderas:

- **Obtener los valores no negativos X_1, X_2, X_3, X_4 que hagan máxima la expresión:**

$$\begin{aligned} B &= p_2\left(g_1 X_1 - g_2 X_2\right) + p_3\left(g_2 X_2 - g_3 X_3\right) + p_4 g_3 X_3 \\ &= p_2 g_1 X_1 + (p_3 - p_2) g_2 X_2 + (p_4 - p_3) g_3 X_3 \end{aligned}$$

  sujetos a $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N$ **y** $g_1 X_1 \geq g_2 X_2 \geq g_3 X_3 \geq 0$

Este problema pertenece al campo de la programación lineal, sin embargo, en nuestro caso sólo necesitaremos el siguiente resultado,

- **El rendimiento óptimo duradero se logra cortando todos los árboles de la misma clase y ninguno de las demás clases**

A continuación lo "comprobaremos"sin recurrir a la teoría de la programación lineal. Para ello, vamos a suponer que R_3 es el rendimiento que se obtiene al cortar todos los árboles de la tercera clase y ninguno de las demás.

Como los únicos árboles que se cortan son los de la tercera clase, se tendrá que

$$Y_1 = Y_2 = Y_4 = 0\,. \tag{5.9}$$

Además, como se cortan todos los árboles de la clase de orden 3, a largo plazo, nunca se tendrán árboles de mayor altura que los de esa clase. En consecuencia,

$$X_3 = X_4 = 0\,.$$

Así, con la sustitución en las ecuaciones (5.7) de la explotación duradera, se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_3 &=& g_1 X_1 \\ 0 &=& g_1 X_1 - g_2 X_2 \\ Y_3 &=& g_2 X_2 \\ 0 &=& 0\,, \end{array} \right.$$

que también podemos escribirlas

$$Y_3 = g_1 X_1 = g_2 X_2 \quad \Rightarrow \quad X_2 = \frac{g_1 X_1}{g_2}\,. \tag{5.10}$$

Si sustituimos en
$$X_1 = X_2 + X_3 + X_4 = N\,,$$
puede despejarse X_1 y se obtiene
$$X_1 + \frac{g_1 X_1}{g_2} = N \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{g_2}{g_1+g_2}N = \frac{1}{1+\frac{g_1}{g_2}}N\,. \tag{5.11}$$
El beneficio de la venta es $R_3 = p_3 Y_3$, pero por (5.10), $R_3 = p_3 g_1 X_1$, y teniendo en cuenta (5.11),
$$R_3 = p_3 g_1 \frac{1}{1+\dfrac{g_1}{g_2}} N = \frac{p_3 N}{\dfrac{1}{g_1}+\dfrac{1}{g_2}}$$
O bien, haciendo un estudio similar para n clases y cortando todos los árboles de la clase k, el beneficio viene dado por la expresión,
$$\boxed{R_k = \frac{p_k N}{\dfrac{1}{g_1}+\dfrac{1}{g_2}+\cdots+\dfrac{1}{g_{k-1}}}}$$
Esta ecuación determina a R_k en función de los parámetros ya conocidos del crecimiento y el valor económico, para cualquiera que sea el valor de k ($k = 2, 3, \cdots, n$). Resumiendo, el rendimiento óptimo, duradero se obtiene como sigue

TEOREMA 5.6.1 *El rendimiento óptimo duradero es el valor más grande de*
$$\frac{p_k N}{\dfrac{1}{g_1}+\dfrac{1}{g_2}+\cdots+\dfrac{1}{g_{k-1}}}$$
para $k = 2, 3, \cdots, n$. El valor correspondiente de k es el número que determina la clase de árboles que deben cortarse por completo.

EJERCICIO 24 Los árboles de cierto bosque están divididos en tres clases de alturas y tienen una matriz de crecimiento, entre dos temporadas de corte como sigue,
$$G = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\,.$$
Si el precio de los árboles de la segunda clase es de 30 euros, el de los de la tercera de 50 euros, deseamos saber la clase de árboles que debe cortarse por completo para lograr el rendimiento óptimo duradero.

- De la matriz de crecimiento obtenemos $g_1 = 1/2$ y $g_2 = 2/3$. Sustituyendo en

$$R_k = \frac{p_k N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{2}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}},$$

obtenemos su valor, para el caso en que se cortasen los árboles de la segunda y tercera clase

$$R_2 = \frac{30N}{2} = 15N, \quad R_3 = \frac{50N}{2+1.5} = 14N\,.$$

Conseguiremos un mayor beneficio si cortamos todos los árboles de la segunda clase.

- Si la plantación tuviese N=1000 árboles, entonces el beneficio de la venta es

$$R_2 = 15N = 15 \times 1000 = 15000\,\text{euros}$$

EJERCICIO 25 Para un bosque de pinos escoceses con período de crecimiento de seis años se encontró la siguiente matriz de crecimiento

$$G = \begin{pmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Supongamos que los precios de las cinco clases de árboles de mayor altura, son

$$p_2 = 50\,, \quad p_3 = 100\,, \quad p_4 = 150\,, \quad p_5 = 200\,, \quad p_6 = 250$$

- Interesa conocer la clase de árboles que debe cortarse por completo con el objetivo de obtener el rendimiento óptimo duradero. De la matriz G se obtiene

$$g_1 = 0.28, \quad g_2 = 0.31, \quad g_3 = 0.25, \quad g_4 = 0.23, \quad g_5 = 0.37\,.$$

Por el Teorema (5.6.1) deducimos

$$\begin{aligned} R_2 &= 50N/(0.28^{-1}) = 14.0N \\ R_3 &= 100N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1}) = 14.7N \\ R_4 &= 150N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1}) = 13.9N \\ R_5 &= 200N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1}) = 13.2N \\ R_6 &= 250N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1} + 0.37^{-1}) = 14.0N \end{aligned}$$

Se ve que R_3 es la cantidad mayor y por tanto, son los árboles de la tercera clase los que deben cortarse por completo cada seis años, para maximizar el rendimiento duradero.

- El rendimiento óptimo duradero es de $14.7N$, siendo N el número total de árboles que hay en el bosque.

EJERCICIO 26 En el Ejemplo anterior, deseamos conocer la relación entre los precios p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 para que los rendimientos R_k, con $k = 2, \cdots, 6$ sean iguales.

- En este caso, cualquier política de explotación racional y duradera producirá el mismo rendimiento). Para obtener esta relación debemos comparar cualquiera de las clases con la segunda, esto es

$$R_2 = R_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\frac{1}{28}} = \frac{p_3 s}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_3}{p_2} = 1.9$$

$$R_2 = R_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 N}{\frac{1}{28}} = \frac{p_4 N}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31} + \frac{1}{25}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_4}{p_2} = 3.02$$

  Y así sucesivamente hasta conseguir la relación

$$1 : \ 1.9 : \ 3.02 : \ 4.24 : \ 5$$

EJERCICIO 27 Si los parámetros de crecimiento $g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}$ son todos iguales, vamos a encontrar la relación entre los precios $p_2, p_3, \cdots, p_n$, para que cualquier política de explotación racional y duradera sea óptima.

- Suponiendo que $g_1 = g_2 = \cdots = g_{n-1}$, debemos de ir comparando tal y como hicimos en el ejercicio anterior.

$$R_2 = R_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 N}{\dfrac{1}{g_1}} = \frac{p_3 N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2}} = \frac{p_3 N}{\dfrac{2}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_3}{p_2} = 2$$

$$R_2 = R_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\dfrac{1}{g_1}} = \frac{p_4 N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + \dfrac{1}{g_3}} = \frac{p_4 N}{\dfrac{3}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_4}{p_2} = 3$$

  Y así sucesivamente con el resto de las clases.

  Es fácil obtener la siguiente relación

$$1 : 2 : 3 : \cdots : n - 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 28

1.- **Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 18 años y que esta población se divide en tres clases de edades iguales con intervalos de 6 años, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de crecimiento de *Leslie* viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra y una mediana dos, además el 50 % de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 25 % de las medianas se hacen adultas.**

El precio de venta de cada una de las clases es 15 euros las hembras jóvenes, 25 las medianas y 32 las adultas. Si disponemos de 1000 animales y cada 6 años separamos la misma fracción de cada una de las clases, ¿cuál es el importe de la venta?

2.- **Sea el modelo matricial de Leslie,**

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

siendo la unidad de tiempo del sistema igual a un año

- **Probar que para cualquier valor positivo de α la población siempre crece.**
- **Hallar el valor de α para que la población crezca cada año un 27 %.**
- **Para el valor de α encontrado, cuál será el total de la venta, en el caso particular de la separación uniforme, si disponemos inicialmente de 530 hembras y el precio de venta de las hembras de la primera clase es de 10 euros, 15 euros para los de la segunda clase y 5 euros para las hembras de la tercera clase?.**

3.- **Disponemos de una población de animales dividida en clases de edad de 6 meses de duración. De las siguientes matrices de Leslie,**

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

selecciona aquella que sea adecuada para realizar la siguiente explotación racional y duradera. La población inicial es de 500 animales, siendo el precio de venta de los animales más jóvenes de 10 euros. Calcular el importe de las ventas realizadas después de cinco años sabiendo que separación la realizamos sólo en la clase de menor edad.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 29

1.- **Se pretende realizar el estudio de la contaminación de cierta región en la que se están produciendo vertidos industriales. Se han clasificado los terrenos en tres niveles de contaminación:**

- **Terrenos limpios.**
- **Terrenos con nivel de contaminación medio.**
- **Terrenos con nivel de contaminación alto.**

Se comprueba que la evolución de la contaminación de un año para otro se ajusta a los siguientes datos:

- **Cada año se contamina un 30 % de los terrenos limpios de la siguiente manera: el 20 % con un nivel de contaminación medio y el 10 % con un nivel de contaminación alto.**
- **Anualmente el 30 % de los terrenos con nivel de contaminación media pasan a tener contaminación alta.**

Ante esta situación, las autoridades emprenden un plan de recuperación de las zonas contaminadas. El plan actúa directamente sobre los terrenos más contaminados consiguiendo, por un lado, limpiar totalmente el 70 % de los terrenos con contaminación alta, y por otro, reducir la contaminación de otro 10 % de zona de alta contaminación que pasa a contaminación media.

El territorio estudiado tiene una extensión de 1000 hectáreas e inicialmente todas ellas estaban limpias. Se trata de resolver las siguientes cuestiones:

1.a.- **Estudiar la distribución de terrenos contaminados pasada una cantidad concreta de años. Por ejemplo, intentemos estudiar lo que sucede a los diez años.**

1.b.- **Estudiar la tendencia pasado un número suficientemente grande de años.**

2.- **Supongamos que en una determinada ciudad tenemos tres estados climáticos posibles: soleado, nublado, y lluvioso. Supongamos, además, que si hoy está el día nublado, entonces la probabilidad de**

que mañana el día esté soleado es de 1/2, la probabilidad de que esté nublado es 1/4, y la probabilidad de que esté lluvioso es de 1/4. De forma similar, es posible considerar otras probabilidades de transición (ver tabla adjunta) en los casos en que el día de hoy haya estado lluvioso o soleado.

.	Hoy soleado	Hoy nublado	Hoy lluvioso
Mañana nublado	3/4	1/2	1/4
Mañana nublado	1/8	1/4	1/2
Mañana lluvioso	1/8	1/4	1/4

Supongamos que hoy existe la misma probabilidad de que el día sea nublado o lluvioso, ¿cuál será la probabilidad de que pasado mañana sea un día soleado?. Estudiar el comportamiento del clima a largo plazo.

3.- **Tras un estudio sobre las preferencias veraniegas (interior o costa) se sabe que el 80 % de los que un año optan por veranear en el interior lo vuelven a hacer al año siguiente,mientras que el 90 % de los que veranean en zonas de playa vuelven a la costa el año siguiente. Actualmente un millón veranea en el interior y 7 millones van a la costa.**

  3.a.- **Plantear un modelo matricial que permita calcular los veraneantes en el interior y en la costa para cada año a partir de los datos actuales.**

  3.b.- **¿Cuántos veraneantes elegirán cada opción pasados 10 años?**

4.- **Al realizar un estudio anual sobre el consumo de aceite de oliva en una población,se ha llegado a que el 80 % de los que consumen aceite de oliva un año continúan haciéndolo y que el 40 % de los que no lo consumían comienzan a hacerlo.**

  4.a.- **Plantear un modelo matricial que permita saber cada año el porcentaje de la población que consume aceite de oliva.**

  4.b.- **Plantear qué operaciones habría que realizar para obtener el porcentaje de la población que consume aceite de oliva cuando transcurren 10 y 20 años.**

  4.c.- **Cuando se realizó este estudio había 14000 individuos que consumían aceite de oliva y 6000 individuos que no lo utilizaban. Utilizar el modelo anterior para determinar qué porcentaje de la población consume aceite de oliva cuando ha transcurrido 1 año desde el inicio de nuestro estudio.**

5.- **Al realizar un estudio de mercado,los directivos de una empresa llegan a la conclusión de que cuando transcurre cada año el 70 % de sus clientes siguen siendo fieles, el 30 % de sus clientes se pasan a la competencia, el 35 % de los clientes de la competencia se pasan a su empresa, el 65 % de los que no son clientes permanecen en la competencia. Plantear el modelo matricial pertinente y diagonalizar para resolver la siguientes cuestión: Si la empresa tiene 2123 clientes y la competencia 10302, calcular la cantidad de clientes de la empresa y la competencia tras 17 años.**

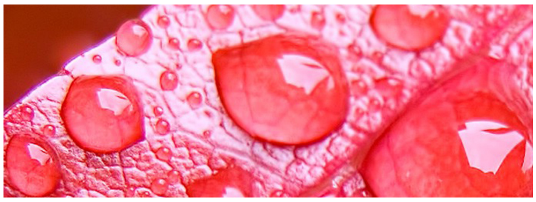
6.- **Cierta especie de aves se mueve entre tres asentamientos, A, B, y C, según la siguiente tabla de migraciones anuales:**

	Pasan a A	Pasan a B	Pasan a C
Las aves de A	80 %	10 %	10 %
Las aves de B	20 %	70 %	10 %
Las aves de C	30 %	10 %	60 %

- **¿Qué expresión matricial proporcionará el número de aves en cada asentamiento después de k años?**
- **Si inicialmente hay, en miles de aves, $A_0 = 2$, $B_0 = 3$ y $C_0 = 6$. Calcular el número de aves en cada asentamiento pasados dos años.**
- **En general, el esquema marcado por la tabla anterior hace que el número de aves en cada asentamiento cambie de un año a otro ¿Existe alguna configuración inicial de aves que permanezca constante año tras año? Calcular los porcentajes y comprobar el resultado.**

7.- **Una sala de cine decide programar las películas según el siguiente método: si una semana se proyectó una norteamericana, a la semana siguiente se programará una norteamericana. Si la película programada fue española, la semana siguiente una de cada dos será española y una de cada dos francesa. Finalmente, si la película programada fue francesa, la semana siguiente se programará norteamericana una de cada tres y dos de cada tres francesa. Si inicialmente las cuotas de pantalla son el 60 % para el cine norteamericano, el 30 % para el cine español, y el 10 % para el francés.**

- **¿Estamos ante una cadena de Markov regular? Justifica la respuesta.**
- **Analiza el comportamiento a largo plazo del modelo.**
- **¿Puedes deducir el resultado anterior analizando el diagrama de estados?**



Capítulo 6

APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

6.1. Introducción

En este tema estudiaremos los casos más simples de crecimiento de poblaciones, cuando la variable tiempo toma valores en un conjunto discreto, clasificados en modelos independientes y dependientes de la densidad de la población.

DEFINICIÓN 6.1.1 *Diremos que el crecimiento de una población es independiente de la densidad si las tasas de nacimiento y mortalidad no dependen del tamaño de la población.*

Recordemos que en el estudio de los modelos matriciales, ya hemos tenido ocasión de analizar el comportamiento de ciertos modelos discretos y una breve introducción a los modelos exponencial y logístico. Ahora, aplicaremos parte de los resultados obtenidos en los temas anteriores y realizaremos un estudio más completo de algunos de estos modelos.

6.2. Crecimiento independiente de la densidad de la población

Comenzaremos analizando el modelo más simple de crecimiento de poblaciones de una sola especie. Supondremos para empezar que:

- La tasa de nacimientos es proporcional al número de individuos presentes.

- La tasa de muertes es proporcional al número de individuos presentes.

Existen ciertos tipos de animales, como por ejemplo la mariposa *Euphydrias editha,* que se reproduce una vez al año, poniendo sus huevos a primeros de Abril. Las mariposas adultas vuelan durante un período corto de tiempo y entonces mueren. Existen ratones que tienen crías solamente una vez al año en primavera, y que viven alrededor de diez años. Para este tipo de especies, un modelo que suponga que los nacimientos se dan continuamente y que las generaciones se superponen es inapropiado.

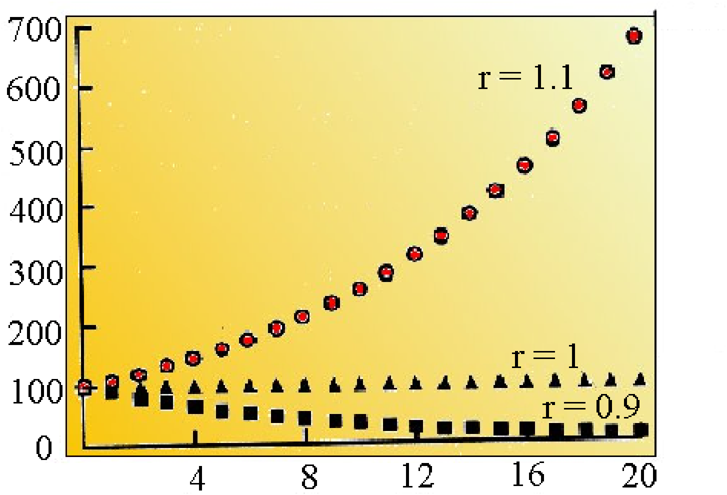


Figura 6.1: Modelo discreto exponencial.

Mediremos el tiempo k en unidades de generación (un año, un mes, ...), y supondremos que r es el número de individuos que nacen en la próxima generación a partir de un individuo de la generación actual. Si x_k simboliza al número de individuos de la población en la generación k, entonces

$$x_{k+1} = r\, x_k\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2, \cdots .$$

Si x_0 es el número inicial de individuos, de la expresión anterior se deduce

$$x_k = x_0\, r^k\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2, \cdots , \tag{6.1}$$

es decir, estamos ante un crecimiento exponencial o geométrico. El comportamiento cualitativo de (6.1) está determinado por el valor de r y queda simbolizado en la Figura 6.1.

Es evidente que este modelo representa a la población sólo en un intervalo corto de tiempo, ya que el crecimiento es demasiado rápido. Además, este modelo basado en la independencia de la densidad, no puede explicar la evolución de la mayoría de las poblaciones que existen en la naturaleza.

Podemos preguntarnos por los valores reales, y no los teóricos, que se obtienen del parámetro r en el laboratorio y en la naturaleza. En los experimentos en el laboratorio puede encontrarse valores de r muy diferentes, dando lugar a crecimiento muy rápido de poblaciones. Sin embargo, en la naturaleza este valor debe estar muy cerca de uno, ya que en caso contrario la población desaparecería o por el contrario crecería rápidamente.

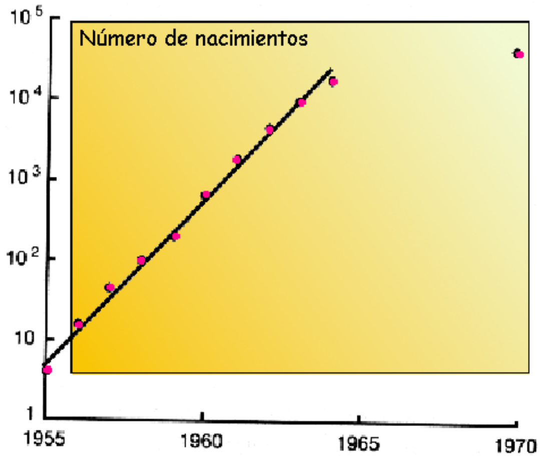


Figura 6.2: Crecimiento de una población de pájaros.

La Figura 6.2 muestra la representación en escala logarítmica de una población de pájaros de Gran Bretaña, desde el año 1955 al 1970. Observemos que al principio, la población crece exponencialmente, pero después de algunos años, disminuye sustancialmente. En la próxima sección trataremos de explicar este comportamiento. La cuestión más importante de la dinámica de poblaciones es determinar las causas y las consecuencias de la desviación del modelo exponencial.

EJEMPLO 6.1

- El censo de los Estados Unidos se elabora cada diez años. En la Tabla 11.1. se recogen los datos correspondientes al período 1790 - 2000.

  La tasa de crecimiento en cada década se calcula dividiendo el censo correspondiente al año superior entre el número de individuos en el año inferior. Por ejemplo, la tasa de crecimiento en la década 1790 - 1800 es:

  $$\frac{\text{Población en 1800}}{\text{Población en 1790}} = \frac{5.308.483}{3.929.214} = 1.351\,.$$

  El modelo matemático discreto más simple supone que la población en la próxima década es igual a la población actual más la población actual por la tasa de crecimiento medio, r, de la población. El modelo empieza con una población inicial, por ejemplo, la correspondiente al año 1790. Para encontrar la población en la década próxima, multiplicamos por $(1+r)$. Con ello obtenemos una sucesión de poblaciones, todas ellas encontradas a partir de la década anterior. Por ejemplo,

  $$\text{Población en 1800} = 1.349 \times \text{Población en 1790} = 5300510\,,$$

siendo 34.9 % la media de las tasas de crecimiento desde 1790 hasta 1860. Observemos que existe una diferencia de aproximadamente 8000 individuos que equivale a un error del 0.15 %. Podemos repetir el proceso anterior y encontrar las poblaciones para las décadas 1810, 1820, ... , 1860, ya que en estos períodos la tasa de crecimiento se mantiene razonablemente constante.

1790	3.929.214	**1870**	39.818.449	**1950**	151.325.798
1800	5.308.483	**1880**	50.155.783	**1960**	179.323.175
1810	7.239.881	**1890**	62.947.714	**1970**	203.302.031
1820	9.638.453	**1900**	75.994.575	**1980**	226.545.805
1830	12.866.020	**1910**	91.972.266	**1990**	248.709.873
1840	17.069.453	**1920**	105.710.620	**2000**	281.421.906
1850	23.191.876	**1930**	122.775.046		
1860	31.433.321	**1940**	131.669.275		

Tabla 6.1

La Tabla 6.2 muestra los datos obtenidos. En ella puede observarse que los errores cometidos son pequeños hasta 1870, y además la población predicha por el modelo es ligeramente superior a la población exacta, lo cual nos sugiere que durante el siglo XIX bajó la tasa de nacimiento. Entre los años 1860 y 1870 tuvo lugar la guerra civil americana, originando el brusco descenso en la tasa de crecimiento de la población de Estados Unidos; además durante estos años aconteció la revolución industrial y la sociedad pasó de ser mayoritariamente agrícola a una sociedad industrial con un descenso significativo de los nacimientos.

Si continuamos usando el modelo anterior hasta 1920 o 1970 nos encontraremos con una población predicha de 192365343 y 859382645 respectivamente, lo que supone una estimación del 82 % y 323 % mayores que las reales. La conclusión que deducimos es que el uso de este modelo de crecimiento está limitado a predecir la población futura en años muy próximos, no se puede extrapolar a largo plazo.

Recordemos que el modelo matemático dado por

$$x_{k+1} = x_k + r x_k = (1+r) x_k \,, \quad x_0 = P(1790) = 3.929.214 \,, \tag{6.2}$$

siendo r la tasa media de crecimiento, se conoce con el nombre de **modelo de crecimiento discreto exponencial o de Malthus**. El modelo es un caso particular de un sistema dinámico discreto o ecuación en diferencias. Las ecuaciones en diferencias se usan con frecuencia en Ecología, donde a menudo se puede determinar la población de una especie o colección de especies, sabiendo la población en la generación anterior. El modelo de crecimiento malthusiano establece que la población en la próxima generación es proporcional a la población de la generación actual. De (6.2) se deduce inmediatamente

$$x_k = (1+r)^k x_0 \,, \quad k = 1, 2, 3 \cdots .$$

AÑO	CENSO	x(k+1)=1.349x(k)	% ERROR
1790	**3.929.214**	3.929.214	-----
1800	**5.308.483**	5.300.510	**0.15**
1818	**7.239.881**	7.150.388	**1.24**
1820	**9.638.453**	9.645.873	**0.08**
1830	**12.866.020**	13.012.282	**1.14**
1840	**17.069.453**	17.553.569	**2.84**
1850	**23.191.876**	23.679.765	**2.10**
1860	**31.433.321**	31.944.002	**1.62**
1870	**39.818.449**	43.092.459	**8.22**

Tabla 6.2

A continuación modificaremos el modelo anterior para obligar a que la tasa de crecimiento sea una función que dependa del tiempo. Hemos comprobado que la tasa media de crecimiento que calculamos para las primeras décadas predice una población muy superior a la ofrecida por el censo. Para mejorar esta predicción, podemos calcular para cada una de las décadas su tasa de crecimiento r y encontrar la recta de regresión de todos estos datos.

Se pasa así del modelo discreto autónomo $x_{k+1} = f(x_k)$, al modelo discreto no autónomo $x_{k+1} = f(x_k, t_k)$. La recta de regresión $r(k) = 3.158 - 0.00155k$ ajusta a la nube de puntos de las diferentes tasas de crecimiento. En este caso, la ecuación en diferencia no autónoma será:

$$x_{k+1} = (1 + r(k))x_k \,, \tag{6.3}$$

siendo $t_k = 1790 + 10k$, y k el número de décadas después de 1790.

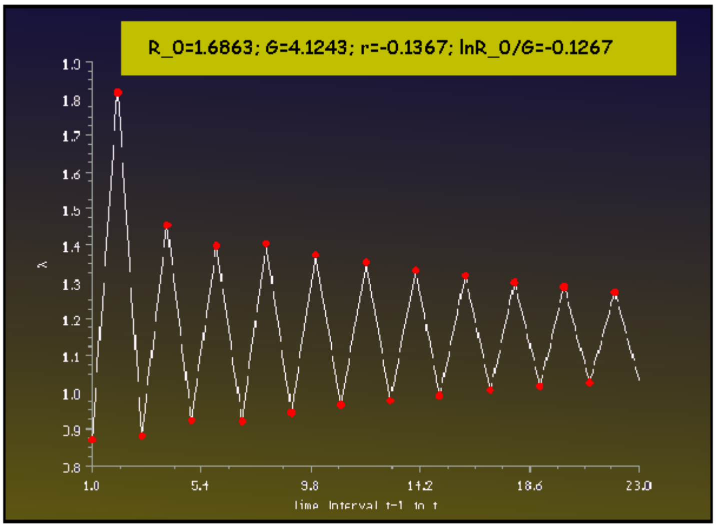


Figura 6.3: Tasa de crecimiento para la población de EEUU.

La Figura 6.3 permite comparar los datos del censo con las diferentes proyecciones que se obtienen al utilizar el modelo de crecimiento exponencial autónomo y no autónomo (que no dependen/dependen del tiempo). Llamamos la atención sobre el hecho de que si utilizamos (6.3) para encontrar la población en cada década, es imprescindible conocer la población en la década anterior.

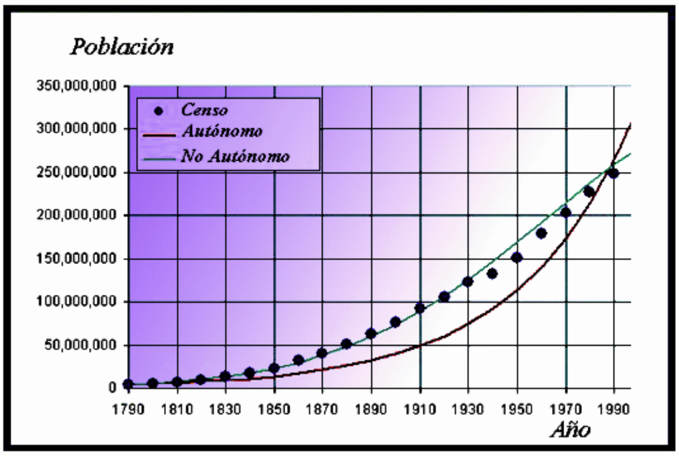


Figura 6.4: Modelos de crecimiento exponencial.

En la Tabla 6.3 se comparan numéricamente los datos reales con los obtenidos con (6.3). El modelo (6.3) predice 278244477 individuos para el año 2000, cifra que se encuentra ligeramente por debajo del valor real.

AÑO	CENSO	1+r(k)	x(k+1)=(1+r(k))x(k)	ERROR (%)
1790	3.929.214	1.3835	3.929.214	
1800	5.308.483	1.3680	5.436.068	2.4
1810	7.239.881	1.3525	7.436.540	2.7
1820	9.638.453	1.3370	10.057.921	4.4
1830	12.866.020	1.3215	13.447.440	4.5
1840	17.069.453	1.3060	17.770.792	4.1
1850	23.191.876	1.2905	23.208.655	0.1
1860	31.433.321	1.2750	29.950.769	4.7
1870	39.818.449	1.2595	38.187.231	4.1
1880	50.155.783	1.2440	48.096.817	4.1
1890	62.947.714	1.2285	59.832.440	4.9
1900	75.994.575	1.2130	73.504.153	3.3
1910	91.972.266	1.1975	89.160.537	3.1
1920	105.710.620	1.1820	106.769.743	1.0
1930	122.775.046	1.1665	126.201.837	2.8
1940	131.669.275	1.1510	147.214.442	11.8
1950	151.325.798	1.1355	169.443.823	12.0
1960	179.323.175	1.1200	192.403.461	7.3
1970	203.302.031	1.1045	215.491.877	6.0
1980	226.545.805	1.0890	238.010.778	5.1
1990	248.709.873	1.0735	259.193.737	4.2
2000	281.421.906		278.244.477	1.1

Tabla 6.3

6.2.1. Modelo discreto exponencial modificado

Hemos aplicado el modelo de crecimiento discreto exponencial para estudiar la evolución de una población. Durante su aplicación, se ha considerado el sistema como cerrado para poder trabajar con una tasa neta de crecimiento. Pero podemos modificar dicho modelo para tener en cuenta el hecho de la inmigración y de la emigración.

Supongamos que una población x_k crece de acuerdo al modelo discreto exponencial y asumimos que el número de personas que entran y salen en cada intervalo de tiempo es constante $(e - s = \mu)$. Ahora, el crecimiento puede modelarse por la ecuación en diferencias:

$$x_{k+1} = (1+r)x_k - \mu\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,,$$

donde r es la tasa de crecimiento. Conocidos estos datos y la población inicial x_0 podemos encontrar una expresión general de x_k. En efecto,

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & (1+r)x_0 - \mu \\
x_2 & = & (1+r)x_1 - \mu = (1+r)\left((1+r)x_0 - \mu\right) - \mu = \\
 & & (1+r)^2 x_0 - \left((1+r) + 1\right)\mu \\
x_3 & = & (1+r)^3 x_0 - \left((1+r)^2 + (1+r) + 1\right)\mu \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_k & = & (1+r)^k x_0 - \Big((1+r)^{k-1} + (1+r)^{k-2} + \cdots + (1+r) + 1\Big)\mu
\end{array}$$

Aplicando la fórmula que nos da la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica, se obtiene

$$\boxed{x_k = (1+r)^k x_0 - \frac{(1+r)^k - 1}{r}\mu\,,}$$

expresión más complicada que la correspondiente al modelo discreto exponencial simple. Aunque en este caso concreto hemos podido encontrar una expresión para x_k en función de x_0, r y μ, tenemos que decir que en general este cálculo suele ser complicado. Por esta razón, lo que se hace es estudiar el comportamiento cualitativo del modelo, por ejemplo, a través de su diagrama de *Cobweb*.

6.3. Crecimiento dependiente de la densidad de población

Ya hemos indicado que el análisis del modelo discreto exponencial y el sentido común, nos dicen que este tipo de crecimiento no puede mantenerse durante mucho tiempo.

En todos los casos, llega un momento en que la población se regula. Se han propuesto muchas hipótesis para explicar las causas que originan este autocontrol de la población, entre otras:

- Factores independientes de la densidad, como por ejemplo el clima.
- La cantidad de comida disponible.
- Problemas con su territorio o canibalismo.
- Depredadores.
- Parásitos o enfermedades.

De entre todos estos factores nosotros estudiaremos el segundo de ellos, es decir el crecimiento dependerá de la densidad de la población, y por tanto, ésta se autoregula.

Un modelo clásico apropiado para describir poblaciones de animales (o plantas) que viven un año, se reproducen y luego mueren, es de la forma:

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,, \tag{6.4}$$

donde f nos da el número de individuos para el próximo año en términos del número de individuos actuales. Se han propuesto diferentes modelos, simplemente cambiando la función f. Por ejemplo, en el estudio del caos se trabaja con el modelo de *May* (1974) donde la función f es,

$$f(x) = cx\,(1 - x)\,.$$

6.3.1. El modelo de crecimiento discreto logístico

En 1913 *T. Carlson* estudió el crecimiento de un cultivo de levadura. La Tabla 6.4 muestra los datos recogidos en intervalos de una hora.

TIEMPO	POBLACIÓN	TIEMPO	POBLACIÓN	TIEMPO	POBLACIÓN
1	9.6	7	174.6	13	594.8
2	18.3	8	257.3	14	629.4
3	29.0	9	350.7	15	640.8
4	47.2	10	441.0	16	651.1
5	71.1	11	513.3	17	655.9
6	119.1	12	559.7	18	659.6

Tabla 6.4: Población de un cultivo de levadura

En ella se observa que la población no sigue un modelo de crecimiento discreto exponencial, ya que a partir de cierto momento la población se estabiliza y no crece exponencialmente. Es necesario que la función $f(x)$, del sistema discreto dinámico general $x_{k+1} = f(x_k)$, ahora sea cuadrática en lugar de ser una ecuación lineal.

Este nuevo modelo se conoce con el nombre de **modelo discreto logístico**, y viene expresado por

$$x_{k+1} = x_k + r x_k \left(1 - \frac{x_k}{M}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{6.5}$$

Observemos que para valores pequeños de la población $1 - \frac{x_k}{M} \approx 1$ y el modelo coincide con el exponencial. Sin embargo, para valores de la población $x_k \approx M$ entonces $x_{k+1} \approx x_k$. El parámetro M recibe el nombre de **capacidad de carga de la población**.

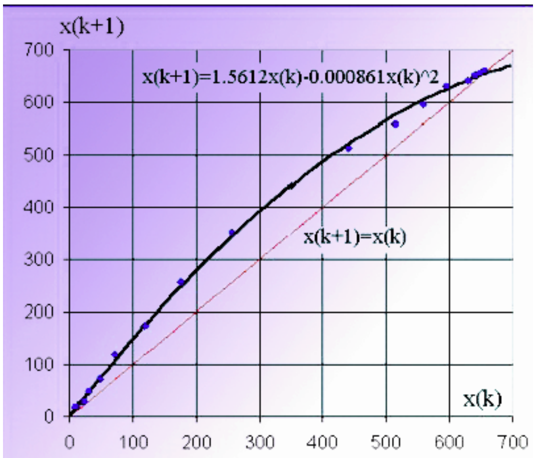


Figura 6.5: Modelo para un cultivo de levadura.

El comportamiento de (6.5) es bastante más complicado que (6.2). No existe una solución exacta de este sistema dinámico discreto. El ecologísta *Robert May* (1974) estudió dicha ecuación para diferentes poblaciones y descubrió que podía presentar dinámicas muy diferentes. Este hecho lo pusimos de manifiesto al analizar el caos matemático, ya que (6.5) puede ser escrita como $x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k)$.

A continuación aplicaremos este modelo para estudiar la evolución del cultivo de levadura.

EJEMPLO 6.2

- En la Figura 6.5 hemos dibujado x_{k+1} como función de x_k. Por ejemplo, los dos primeros puntos son (9.6 , 18.3) y (18.3 , 29). Posteriormente utilizando el programa `Mathematica`® se ha encontrado la parábola que pasa por el origen $y = ax - bx^2$ que mejor ajusta a estos datos, obteniéndose

$$x_{k+1} = 1.5612 x_k - 0.000861 x_k^2 .$$

  Podemos utilizar un programa de simulación, como por ejemplo `POPULUS`®, y obtendríamos la Figura 6.5 De forma cualitativa podemos ver que inicialmente se produce un crecimiento exponencial y que posteriormente la población se estabiliza alrededor de 650 que es la capacidad de carga del modelo.

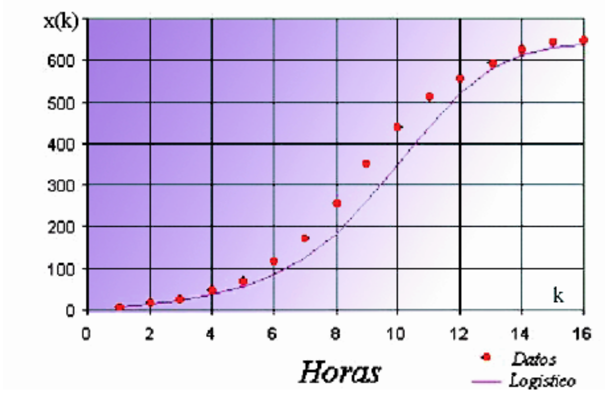


Figura 6.6: Simulación del modelo.

Observemos también que el punto de inflexión está situado en la mitad de la capacidad de carga, que corresponde a un tiempo entre las 9 y 10 horas. En este momento se produce el máximo crecimiento de la población.

6.3.2. Generalización del modelo discreto logístico

La mayoría de otros modelos comparten los rasgos cualitativos observados en el modelo de *May*. Si representamos en el eje de abscisas la población en el tiempo k, y en el eje de ordenadas la población en el período siguiente x_{k+1}, en gran parte de ellos se obtiene una curva del tipo representado en la Figura 6.7.

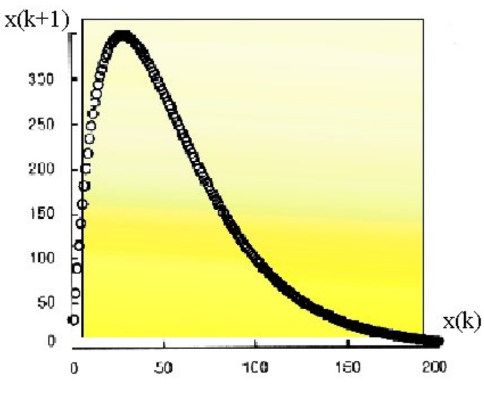


Figura 6.7: Representación de los puntos (x_k, x_{k+1})

Observemos que esta curva tiene un único máximo. Cuando el nivel de la población es pequeño, entonces aumenta en función de la población actual, pero cuando el número de individuos es elevado, los mecanismos propios relacionados con la densidad de la población (competición, por ejemplo) reducen su nivel en los próximos años.

De entre los modelos más citados en el estudio de dinámica de poblaciones, se encuentran:

$$f(x) = x\left(1 + x(1 - \frac{x}{k})\right) \,,$$

$$f(x) = x\, e^{r(1-\frac{x}{k})} \,,$$

$$f(x) = \frac{\lambda x}{(1+\alpha x)^{\beta}}$$

En una de las prácticas del Laboratorio Matemático, realizamos un estudio intensivo del segundo de los modelos, conocido con el nombre de **modelo de** *Ricker* (1954). Para los otros dos casos, se puede hacer un tratamiento similar.

EJEMPLO 6.3

- Un modelo matemático dependiente de la densidad de la población y alternativo al modelo logístico de *May*, ha sido propuesto por *Gilpin* y *Ayala* (1973), y se expresa como:

$$x_{k+1} = f(x_k) = r\,x_k\left(1 - \left(\frac{x_k}{\beta}\right)^{\alpha}\right) \,, \quad k = 0\,, 1,\, 2, \cdots \tag{6.6}$$

  donde α es un parámetro positivo que depende del organismo en cuestión.

  El punto de equilibrio no nulo de este modelo se obtiene resolviendo la ecuación

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad r\,x\left(1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right) = x$$

  cuyo valor es

$$x^* = \beta\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \,.$$

  Para estudiar la estabilidad del modelo primero debemos derivar la función $f(x)$. Una vez simplificada se obtiene

$$f'(x) = r\left(1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} - \alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right) \,.$$

  Luego

$$f'(x^*) = f'\left(\beta\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 1 - \alpha r + \alpha \,.$$

  Este punto de equilibrio será estable cuando $|f'(x^*)| < 1$, lo cual ocurre cuando $1 < r < 1 + \frac{2}{\alpha}$.

En ciertas ocasiones, como por ejemplo en el modelo logístico de *May*

$$f(x) = c\,x\,(1 - x/M),$$

si el nivel de la población es demasiado bajo, entonces el número de individuos tiende a largo plazo al punto de equilibrio $x^* = 0$ y la población desaparece. Este fenómeno es conocido en ecología con el nombre de **Efecto Allen**. Muchas poblaciones biológicas que presentan este efecto, decrecen en su tamaño si el número de individuos se encuentran por debajo de cierto nivel crítico x_c. La región donde $x_k < x_c$ es conocida con el nombre de zona de depredación.

Podemos modificar el modelo anterior, para tener en cuenta este hecho, de la manera siguiente:

$$f(x) = c\,x\left(1 - \frac{x}{M}\right)(x - a)\,, \quad a > 0\,.$$

6.4. Ejemplo de modelo discreto para la pesca

En los últimos años los modelos discretos han sido muy utilizados en el diseño de estrategias para la pesca. Se ha demostrado que son muy útiles para evaluar diversas tácticas de capturas de peces con un doble objetivo, en primer lugar para maximizar los beneficios y en segundo lugar para realizar una explotación de recursos mantenidos en el tiempo. El modelo que vamos a estudiar también puede ser aplicado a cualquier otro tipo de recurso renovable.

Supongamos que la densidad de la población en ausencia de capturas viene dada por

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,.$$

Si suponemos que $\epsilon(k)$ es la captura realizada en la población en el tiempo k, la cual es la que genera la población en el tiempo $k+1$, entonces el modelo que estudia la dinámica de la población viene dado por:

$$x_{k+1} = f(x_k) - \epsilon(k)\,, k = 0, 1, 2, \cdots\,. \tag{6.7}$$

Las dos preguntas que debemos contestar son:

- ¿Cuál es el máximo rendimiento biológico sostenible Y_M?
- ¿Cuál es el máximo rendimiento económico E_M?

Si encontramos los puntos de equilibrio de (6.7), deducimos que

$$x^* = f(x^*) - \epsilon^* \quad \Rightarrow \quad \epsilon^* = f(x^*) - x^*\,.$$

Si el máximo rendimiento sostenible del punto de equilibrio Y_M se alcanza cuando x^* toma el valor x_M, entonces su valor podemos encontrarlo haciendo

$$\frac{\partial \epsilon^*}{\partial x^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x^*) = 1\,.$$

El valor de Y_M será

$$Y_M = f(x_M) - x_M \tag{6.8}$$

y esta situación sólo es interesante cuando $Y_M \geq 0$.

Una estrategia podría ser mantener la población de peces en estos niveles con el objetivo de hacer máxima la captura Y_M. Pero como es difícil tener un conocimiento exacto de la población actual de peces, entonces este método puede ser difícil llevarlo a la práctica. Por esta razón, es más interesante formular el problema de optimización en términos de capturas y esfuerzos.

Supongamos que el esfuerzo para capturar un pez, de una población x, es ax, donde a es el parámetro de captura (que es independiente de la densidad x). Entonces el esfuerzo para reducir x en 1 unidad es $1/(ax)$ y $f(x)$ en 1 unidad es $1/(af(x))$. De esta manera, el esfuerzo E_M para obtener la captura $Y_M = f(x_M) - x_M$ es

$$E_M = \sum_{x_i = x_M}^{f(x_M)} (ax_i)^{-1} \,.$$

Frecuentemente los valores de este sumatorio son de tal manera que se pueden aproximar por la siguiente integral

$$E_M \approx \frac{1}{a} \int_{x_M}^{f(x_M)} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{f(x_M)}{x_M} \right) \,. \tag{6.9}$$

Las ecuaciones (6.8) y (6.9) nos dan la relación de Y_M, E_M en función de x.

EJEMPLO 6.4

- Para terminar, aplicamos estos resultados a un modelo concreto, conocido como disco de *Holling*, que viene definido por:

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{\beta x_k}{\alpha + x_k} \,, \quad 0 < \alpha < \beta \,.}$$

En primer lugar encontramos el valor de x_M resolviendo $1 = f'(x_M)$. Es decir,

$$1 = \left(\frac{\beta x_M}{\alpha + x_M} \right)' = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + x_M)^2} \quad \Rightarrow \quad x_M = \sqrt{\alpha} \left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} \right) \,.$$

Si sustituimos en las ecuaciones (6.8) y (6.9), nos da

$$Y_M = \frac{\beta x_M}{\alpha + x_M} - x_M$$

$$E_M = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\beta}{\alpha + x_M} \right) \,.$$

En este ejemplo, podemos eliminar entre las dos expresiones x_M y obtener una relación explícita entre Y_M y E_M,

$$\boxed{Y_M = \left(\beta e^{-cE_M} - \alpha\right)\left(e^{cE_M} - 1\right)\,.}$$

6.5. Ejemplo de modelo discreto para la economía. Modelo de la telaraña.

Es un modelo elemental que simula el comportamiento de un bien en el mercado, sujeto a las variaciones de la oferta y de la demanda.

La empresa que ofrece el bien, cambiará su oferta , O_t, durante el período t proporcionalmente a la variación del precio del bien en el período anterior $t-1$. Pensemos que si el precio del bien en el período anterior ha aumentado, entonces incrementará la oferta en el período siguiente t. Por el contrario, si el precio disminuye en el período $t-1$, entonces la empresa ofertará menos cantidad en el período siguiente t, intentando contrarestar la tendencia a la baja y evitando la disminución de ingresos. Por lo tanto, si el precio del bien sube (baja) en el período $t-1$, entonces la oferta del mismo bien en el período siguiente t sube (baja) proporcionalmente,

$$O_t = aP_{t-1}\ ; \quad a > 0\,; \quad t \in \mathbb{N}$$

Además, debemos añadir a la ecuación anterior un sumando constante b que se interpreta como la acción de las fuerzas independientes de la variación del precio del bien, que también tiene influencia en la variación de la oferta del bien en el mercado.

$$O_t = aP_{t-1} + b\ ; \quad a > 0\,; \quad t \in \mathbb{N} \tag{6.10}$$

Vamos a suponer que el incremento de la demanda en el período t de dicho bien, D_t, varía proporcionalmente al aumento de su precio en dicho período. Es decir, el consumo del bien crecerá si su precio disminuye y recíprocamente. En consecuencia, la constante de proporcionalidad c debe ser negativa. Además, y al igual que con la oferta, incluiremos un término constante d.

$$D_t = cP_t + d\ ; \quad c < 0\,; \quad t \in \mathbb{N} \tag{6.11}$$

Por último, supondremos que la dinámica del mercado hace que la oferta y la demanda del bien tiendan a coincidir en cada período t,

$$O_t = D_t\,; \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad aP_{t-1} + b = cP_t + d \quad \Rightarrow \quad cP_t - aP_{t-1} + (d-b) = 0$$

que puede expresarse como el sistema dinámico discreto:

$$P_t = f(P_{t-1}) = \frac{a}{c}P_{t-1} + \frac{b-d}{c}\ ; \quad t \in \mathbb{N} \tag{6.12}$$

EJEMPLO 6.5

- Dadas las siguientes funciones $D_t = 100 - 2P_t$ y $O_t = -20 + 3P_{t-1}$, hallar el valor de equilibrio del precio y comprobar si es estable o inestable. Suponer que el valor inicial es $P_0 = 25$, y calcular los valores numéricos de P_t hasta $t = 4$.

- Incluir solución

EJERCICIO 30 Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma:

$$y_{t+2} = \frac{3}{2}y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots\,,$$

probar que la población se estabiliza a largo plazo.

- La ecuación en diferencias anterior es homogénea ya que puede ser escrita como,

$$2y_{t+2} - 3y_{t+1} + y_t = 0\,,$$

y tiene como ecuación característica

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\,,$$

luego la solución general

$$\boxed{y_t = k_1 + k_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^t = k_1 + \frac{k_2}{2^t}\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

- Si tomamos límites cuando t tiende a infinito se obtiene de manera inmediata que $y_t \to k_1$.

EJERCICIO 31 Resolver la ecuación en diferencias de orden dos

$$y_{t+2} + y_t = 1 + t\,.$$

- La solución general se construye a partir de una solución particular de la ecuación completa y la solución general de la ecuación homogénea asociada. Empezamos, por tanto, encontrando las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\,.$$

Es decir, dos números complejos conjugados de módulo 1 y argumento $\pi/2$. La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\boxed{y_t^h = k_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\, t\right) + k_2 \,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\, t\right) \;, \quad k_1 \,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

Para buscar una solución particular de la ecuación completa, observamos que el término independiente $1 + t$, es un polinomio de primer grado. Ensayamos con la solución $y_t^p = a + bt$. Al imponer que sea solución de la ecuación en diferencias, se obtiene,

$$a + b(t + 2) + a + bt = 1 + t \quad \Rightarrow \quad 2a + 2b = 1, \quad 2b = 1 \quad \Rightarrow a = 0,\, b = 1/2\,,$$

luego, la solución particular buscada es $y_t^p = 1/2\, t$. La solución general de la ecuación completa será

$$\boxed{y_t = k_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\, t\right) + k_2 \,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\, t\right) + \tfrac{1}{2}\, t\,, \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 32 Resolver la siguiente ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 5y_t = 3^t\,.$$

- Para encontrar la solución y_t de la ecuación completa empezamos buscando y_t^h, que es la solución general de la homogénea

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 5y_t = 0.$$

Al ser las raíces del polinomio característico $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$,

$$\boxed{y_t^h = k_1 + k_2 5^t\,.}$$

Para conocer una solución particular de la ecuación completa nos fijamos en el término independiente 3^t y ensayamos la solución $y_t^p = c3^t$. Sustituyendo en la ecuación inicial y simplificando

$$c3^{t+2} - 6c3^{t+1} + 5c3^t = 3^t \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{4}\,.$$

La solución general vendrá dada por

$$\boxed{y_t = k_1 + k_2 5^t - \tfrac{1}{4} 3^t\,, \quad k_1 \,, k_2 \,\in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 33 [Modelo de la telaraña.] **Para el ajuste dinámico de un bien en el mercado, se suele utilizar un modelo discreto, que se fundamenta en las siguientes hipótesis:**

- **La oferta del bien depende del precio del período anterior (la producción del producto se decide teniendo en cuenta el precio en ese momento, pero tarda en realizarse un período de tiempo, por ejemplo en los productos agrícolas),**

$$S_t = -c + dP_{t-1}, \quad c,\, d > 0$$

- **La demanda en cada período depende del precio del bien en el mismo período de tiempo**

$$D_t = a - bP_t, \quad a,\, b > 0$$

- **La condición de equilibrio será $D_t = S_t$, siendo el valor del precio inicial P_0.**

Analizar el comportamiento del modelo.

- De la tercera de las hipótesis que nos da la condición de equilibrio, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$P_t = -\frac{d}{b}P_{t-1} + \frac{a+c}{b} \quad \Rightarrow \quad P_{t+1} = -\frac{d}{b}P_t + \frac{a+c}{b}\,,$$

que para resolverla, damos al tiempo los valores $t = 0,\, 1,\, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}
P_1 &= -\frac{d}{b}P_0 + \frac{a+c}{b} \\
P_2 &= -\frac{d}{b}P_1 + \frac{a+c}{b} = -\frac{d}{b}\left(-\frac{d}{b}P_0 + \frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&= \left(-\frac{d}{b}\right)^2 P_0 - \frac{d}{b}\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
P_3 &= -\frac{d}{b}P_2 + \frac{a+c}{b} = -\frac{d}{b}\left(\left(-\frac{d}{b}\right)^2 P_0 - \frac{d}{b}\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&= \left(-\frac{d}{b}\right)^3 P_0 + \left(-\frac{d}{b}\right)^2\left(\frac{a+c}{b}\right) + \left(-\frac{d}{b}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&\;\,\vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
P_t &= \left(-\frac{d}{b}\right)^t P_0 + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t-1}\left(\frac{a+c}{b}\right) + \cdots + \left(-\frac{d}{b}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&= \left(-\frac{d}{b}\right)^t P_0 + \left(\frac{a+c}{b}\right)\left[\left(-\frac{d}{b}\right)^{t-1} + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t-2} + \cdots + \left(-\frac{d}{b}\right) + 1\right]
\end{aligned}$$

Los sumandos que se encuentran dentro del corchete son la suma[1] de t términos de una progresión geométrica de razón $-\frac{d}{b}$, cuyo valor es

$$\frac{1-(-d/b)^t}{1-(-d/b)}\,,$$

si sustituimos este valor en P_t y simplificamos convenientemente,

$$P_t = \left(-\frac{d}{b}\right)^t P_0 + \frac{a+c}{b+d}\left[1-\left(-\frac{d}{b}\right)^t\right] = \left(-\frac{d}{b}\right)^t\left[P_0 - \frac{a+c}{b+d}\right] + \frac{a+c}{b+d}\,.$$

Llamando

$$P_e := \frac{a+c}{b+d}\,,$$

que se conoce con el nombre de precio teórico de equilibrio para las funciones de oferta y demanda dada. Sustituyendo

$$P_t = (P_0 - P_e)\left(-\frac{d}{b}\right)^t + P_e\,.$$

Si suponemos que $d < b$, entonces $d/b < 1$ y P_t tiende a P_e cuando t tiende a infinito. Es decir, las fuerzas del mercado harán que el precio del producto tienda al precio de equilibrio teórico. Esta situación queda reflejada en la figura siguiente:

[1]La suma de n términos de una progresión geométrica de razón r vale

$$S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

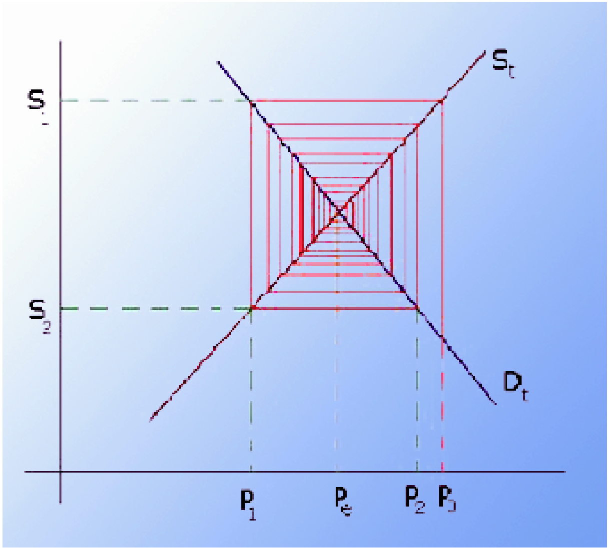


Figura 6.8: Modelo de telaraña.

Para un precio inicial P_0, los productores ofrecen en el período la oferta S_1, pero la demanda cubrirá dicha oferta a un precio diferente P_1. A este último precio la oferta del período siguiente será S_2, que será cubierta por la demanda a un precio P_2, y así sucesivamente.

EJERCICIO 34 Encontrar la raíz de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ utilizando el método del punto fijo.

- Recordemos que para aplicar el método debemos escribir la ecuación en la forma $x = g(x)$ y obtener una sucesión $x_{k+1} = g(x_k)$ partiendo de un valor $x_0 \in (a, b)$.

  Observemos que si aplicamos el Teorema de *Bolzano* a la función $\varphi(x) = x^3 - x - 1$ en el intervalo $[1, 2]$ nos aseguramos que la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(1, 2)$,

  Por otro lado, si escribimos la ecuación como $x^3 - 1 = x$ y consideramos la función $g(x) = x^3 - x$, podemos tomar como valor inicial o semilla un número entre 1 y 2, por ejemplo $x_0 = 1.5$. Al ser $g'(x) = 3x^2$, en cualquier entorno de 1.5 se cumple $|g'(x)| > 1$. En consecuencia, el método no es convergente.

  También es posible escribir la ecuación de esta otra manera $x = (x + 1)^{\frac{1}{3}}$, y ahora considerar otra función $h(x) = (x + 1)^{\frac{1}{3}}$ con derivada $h'(x) \approx 0.165$ en un entorno de $x_0 = 1.85$. Es decir, el método del punto fijo es convergente.

  Para encontrar la raíz utilizamos el software `Mathemathica`®

```
h[x_] := (x + 1)^(1/3)
FixedPointList[h, 1.85, 14]
```

{1.85, 1.417799, 1.342167, 1.328024, 1.325345, 1.3248371, 1.324740, 1.324722, 1.324718, 1.324718, 1.324717, 1.324717, 1.324717, 1.324717}

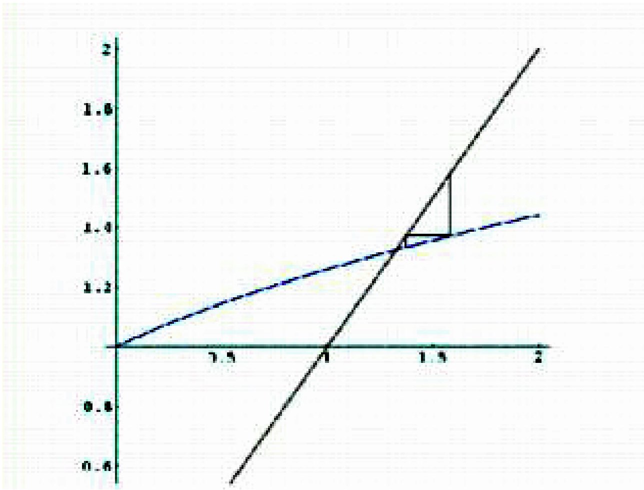


Figura 6.9: Diagrama de Cobweb.

EJERCICIO 35 El modelo formal a tiempo discreto, que describe la convivencia de dos especies con funciones de efectivos x_t e y_t, con medidas mensuales, es el siguiente:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + y_t - \frac{12}{2^t} \\ y_{t+1} = y_t + \frac{8}{2^t}\,. \end{cases}$$

Al principio $x_0 = 40$, $y_0 = 31$. ¿En qué situación está el ecosistema al cabo de 4 meses?

- Al no depender la segunda de las ecuaciones de x_t, empezamos resolviéndola. Su ecuación homogénea asociada es $\lambda - 1 = 0$, que tiene por raíz $\lambda = 1$, dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea $y_t = k_1$.

  Para encontrar la solución general de la ecuación completa, ensayamos la solución particular $y_t = a/2^t$. Sustituyendo

  $$\frac{a}{2^{t+1}} = \frac{a}{2^t} + \frac{8}{2^t} \quad \Rightarrow \quad a = -16\,,$$

  y la solución general de la ecuación completa es:

  $$\boxed{y_t = k_1 - \frac{16}{2^t}}$$

- Si sustituimos este valor en la primera de las ecuaciones del sistema

  $$x_{t+1} = x_t + k_1 - \frac{16}{2^t} - \frac{12}{2^t} \quad \Rightarrow \quad x_{t+1} - x_t = -\frac{28}{2^t} + k_1\,.$$

La ecuación homogénea tiene a $\lambda = 1$ como raíz de su ecuación característica asociada, por tanto, $y = k_2$ será su solución general. Para encontrar una solución particular de la solución completa nos fijamos en el término independiente $-28/2^t + k_1$, que como podemos ver está formado por dos términos $-28/2^t$ y la constante k_1 (un polinomio de grado cero). Al ser $\lambda = 1$ raíz de la ecuación característica, debemos tener en cuenta la observación realizada en la teoría, y tenemos que ensayar con un polinomio de un orden mayor. En resumen, debemos probar con $x_t = a/2^t + bt + c$. Sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$\frac{a}{2^{t+1}} + b(t+1) + c - \left(\frac{a}{2^t} + bt + c\right) = -\frac{28}{2^t} + k_1 .$$

Simplificando

$$\frac{a}{2^t}\left(-\frac{1}{2}\right) + b = -\frac{28}{2^t} + k_1 \quad \Rightarrow \quad a = 56, \quad b = k_1 .$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación completa es

$$\boxed{x_t = k_2 + k_1 t + \frac{56}{2^t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

- Si estamos interesados en encontrar la solución particular para los valores $x_0 = 40$ e $y_0 = 31$, debemos sustituir en las soluciones generales encontradas

$$\begin{array}{lcl} 40 = k_2 + 56 & \Rightarrow & k_2 = -16 \\ 31 = k_1 - 16 & \Rightarrow & k_1 = 47 \end{array}$$

La solución particular que cumple las condiciones iniciales es:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = 47t - 16 + \dfrac{7}{2^{t-3}} \\ y_t = 47 - \dfrac{1}{2^{t-4}} \end{array}}$$

- **Un método alternativo** para resolver el ejercicio es el siguiente.

Dando los valores $t = 1, 2, 3, \cdots$, se obtiene

$$\begin{aligned} y_1 &= 31 + 8\tfrac{1}{2^0} \\ y_2 &= \left(31 + 8\tfrac{1}{2^0}\right) + 8\tfrac{1}{2^1} = 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1}\right) \\ y_3 &= 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1}\right) + 8\tfrac{1}{2^2} = 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1} + \tfrac{1}{2^2}\right) \\ &\vdots \\ y_t &= 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{t-1}}\right) . \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la fórmula que nos da la suma de t términos de una progresión geométrica de razón $1/2$,

$$y_t = 31 + 8\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t}{1 - \frac{1}{2}} ,$$

y simplificando

$$\boxed{y_t = 47 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^t}$$

Para encontrar x_t, sustituimos el valor de y_t en la primera de las ecuaciones

$$x_{t+1} = x_t + 47 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^t = x_t + 47 - 28\left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

y resulta ser del mismo tipo a la anterior,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 40 + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \\
x_2 &= \left(40 + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\right) + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 = 40 + 2\times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1\right] \\
x_3 &= 40 + 2\times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1\right] + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\
&= 40 + 3\times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right] \\
&\vdots \\
x_t &= 40 + t\times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right].
\end{aligned}$$

Sumando los t términos de esta progresión geométrica

$$x_t = 40 + 47t - 28\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t}{1 - \frac{1}{2}},$$

que una vez simplificada

$$\boxed{x_t = -16 + 47t + 56\left(\frac{1}{2}\right)^t}$$

- Para saber la situación de las poblaciones al cabo de los 4 años, sustituimos en las soluciones encontradas $t = 4$,

$$x_4 \approx 176, \qquad y_4 = 46.$$

EJERCICIO 36 Dos especies que conviven en un mismo territorio siguen un crecimiento descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{t+1} = 5x_t - 2y_t + t \\ y_{t+1} = 4x_t - y_t + 3 \end{array}\right.$$

donde el tiempo t está medido en años. Si inicialmente el número de individuos de cada especie es $x_0 = 130$ e $y_0 = 250$, resolver el sistema y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.

- Comenzamos el ejercicio convirtiendo el sistema en una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Para ello, de la segunda de las ecuaciones deducimos
$$y_{t+2} = 4x_{t+1} - y_{t+1} + 3\,.$$
Ahora, sustituimos x_{t+1} de la primera de las ecuaciones en la expresión anterior
$$y_{t+2} = 4\,(5x_t - 2y_t + t) - y_{t+1} + 3 = 20x_t - 8y_t + 4t - y_{t+1} + 3\,.$$
Por último, sustituimos el valor x_t de la segunda de las ecuaciones del sistema, y simplificamos
$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 4t - 12\,.$$
Para resolverla, empezamos encontrando la solución general de su ecuación homogénea asociada
$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3\,;$$
la solución buscada es:
$$y_t^h = k_1 + k_2\,3^t\,.$$
A continuación necesitamos una solución particular de la ecuación completa. Al ser el término independiente un polinomio de primer grado y $\lambda = 1$ raíz del polinomio característico, ensayamos la solución $y_t^p = at^2 + bt + c$. Si sustituimos en la ecuación y simplificamos
$$(-4a)t - 2b = 4t - 12 \quad \Rightarrow \quad a = -1, \quad b = 6 \quad \Rightarrow \quad y_t^p = -t^2 + 6t\,.$$
La solución general de la ecuación completa es:
$$\boxed{y_t = k_1 + k_2\,3^t - t^2 + 6t\,, \quad k_1\,, k_2 \in \mathbb{R}}$$
Para encontrar x_t, despejamos de la segunda de las ecuaciones y sustituimos el valor de y_t
$$\begin{aligned} x_t &= \tfrac{1}{4}\,(y_{t+1} + y_t - 3) \\ &= \tfrac{1}{4}\,\big(k_1 + k_2\,3^{t+1} - (t+1)^2 + 6(t+1) + k_1 + k_2\,3^t - t^2 + 6t - 3\big) \\ &= \tfrac{1}{4}\,\big(2k_1 + 4k_2 3^t - t^2 - 10t + 2\big)\,. \end{aligned}$$
Es decir,
$$\boxed{x_t = \frac{1}{2}k_1 + k_2 3^t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}\,, \quad k_1\,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

- Finalizamos el ejercicio encontrando la solución particular del sistema correspondiente a las condiciones iniciales, $x_0 = 130$ e $y_0 = 250$. Sustituyendo en las expresiones de x_t e y_t obtenemos el sistema
$$\left\{ \begin{array}{l} 130 = \tfrac{1}{2}k_1 + k_2 + \tfrac{1}{2} \\ \\ 250 = k_1 + k_2\,; \end{array} \right.$$

cuya solución nos proporciona los valores $k_1 = 241$ y $k_2 = 9$. En consecuencia,

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = \dfrac{241}{2} + 9 \times 3^t - \dfrac{1}{4}t^2 - \dfrac{5}{2}t \\ \\ y_t = 241 + 9 \times 3^t - t^2 + 6t \end{array}}$$

- Como podemos apreciar, si en las expresiones anteriores tomamos límites cuando t tiende a infinito, nos encontramos con $x_t \to \infty$ e $y_t \to \infty$.

EJERCICIO 37 Dos especies admiten el siguiente modelo de coexistencia:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{t+1} & = & 4x_t + 6y_t - 3^t \\ y_{t+1} & = & -2x_t - 4y_t + 3^t \,. \end{array} \right.$$

Obtener las expresiones de las funciones de efectivos de las dos especies que satisfacen las condiciones iniciales: $x_0 = 21$, $y_0 = 150$, expresando por separado el caso t par del caso impar.

- Utilizando el método de reducción en el sistema anterior, obtenemos.

$$2x_{t+1} + 3y_{t+1} = 2x_t + 3^t \,. \tag{6.13}$$

Ahora, aumentamos un paso en la primera de las ecuaciones y despejamos y_{t+1},

$$y_{t+1} = \frac{1}{6}\left(x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3\,3^t\right) \,.$$

Sustituyendo en (6.13) y simplificando se obtiene,

$$x_{t+2} - 4x_t = -3^t \,. \tag{6.14}$$

Es fácil comprobar que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$ son las raíces de la ecuación característica. Por lo tanto, la solución general de la homogénea es

$$x_t^h = k_1\, 2^t + k_2(-2)^t.$$

El término independiente sugiere una solución particular del tipo $x_t^p = c\,3^t$. Sustituimos en (6.14)

$$c\,3^{t+2} - 4c\,3^t = -3^t \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad x_t^p = -\frac{1}{5}\,3^t \,.$$

La solución general de la ecuación completa es:

$$\boxed{x_t = k_1\, 2^t + k_2(-2)^t - \frac{1}{5}\,3^t \,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

Para encontrar el valor correspondiente de y_t despejamos su valor en la primera de las ecuaciones

$$y_t = \frac{1}{6}\left(x_{t+1} - 4x_t + 3^t\right) .$$

Al conocer el valor de x_t podemos sustituir

$$y_t = \frac{1}{6}\left((k_1\, 2^{t+1} + k_2(-2)^{t+1} - \frac{1}{5}\, 3^{t+1}) - 4(k_1\, 2^t + k_2(-2)^t - \frac{1}{5}\, 3^t) + 3^t\right) .$$

Finalmente, simplificando se llega a

$$\boxed{y_t = -\frac{1}{3}k_1\, 2^t - k_2\, (-2)^t + \frac{1}{5}3^t\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

- Para determinar la solución particular, es necesario tener en cuenta las condiciones iniciales $x_0 = 21$, $y_0 = 150$. De aquí determinaríamos las constantes $k_1 = 256.5$ y $k_2 = -235.3$. Para finalizar, observemos que si t es par $(-2)^t = 2^t$, y en el caso impar $(-2)^t = -2^t$.

EJERCICIO 38 Resolver el sistema en diferencias

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = -3x_t + 6y_t + e^{-t} \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t - e^{-t}\,, \end{array} \right.$$

donde x_t e y_t representan los efectivos de dos especies animales y el tiempo t, considerado como variable discreta, se mide en años. Comprobar que en este método, los efectivos iniciales de una de las especies han de necesariamente condicionar los de la otra. Tomar, por ejemplo, $x_0 = 35$ y calcular y_0. Analizar las posibilidades de extinción.

- El método que utilizamos está basado en convertir el sistema anterior en una única ecuación en diferencias que dependa de una sola variable. Para ello, sumamos a la primera ecuación del sistema la segunda multiplicada por (-3)

$$x_{t+1} - 3y_{t+1} = 4e^{-t}\,. \tag{6.15}$$

Necesitamos hacer desaparecer y_{t+1} de está ecuación, y esto lo conseguimos sustituyendo t por $t+1$ en la primera de las ecuaciones del sistema

$$x_{t+2} = -3x_{t+1} + 6y_{t+1} + e^{-t-1} \quad \Rightarrow \quad y_{t+1} = \frac{1}{6}\left(x_{t+2} + 3x_{t+1} - e^{-1}e^{-t}\right) ,$$

sustituyendo en (6.15)

$$x_{t+2} + x_{t+1} = e^{-t}(e^{-1} - 8)\,.$$

Esta ecuación tiene como solución general de la ecuación homogénea asociada

$$x_t^h = k_1(-1)^t\,,$$

y como consecuencia de la forma del término independiente, probamos con la solución particular $x_t^p = Ae^{-t}$. Es fácil obtener el valor $A = 16.72$. Por tanto,

$$\boxed{x_t = k_1(-1)^t + 16.72e^{-t}\,, \quad k_1 \in \mathbb{R}}$$

En la primera de las ecuaciones del sistema, despejamos y_t y sustituimos el valor encontrado de x_t

$$y_t = \frac{1}{6}\left(x_{t+1} + 3x_t - e^{-t}\right) \quad \Rightarrow \quad y_t = \frac{1}{3}k_1(-1)^t + 9.22e^{-t}$$

Observemos que en las soluciones del sistema sólo aparece una constante (k_1), esto obliga a que los valores iniciales de cada una de las especies tengan que estar relacionados. Como sabemos que $x_0 = 37$, sustituimos y determinamos el valor $k_1 = 20.28$, lo que nos permite saber el valor inicial de la segunda de las especies

$$y_0 = \frac{1}{3}20.28(-1)^0 + 9.22e^0 = \frac{20.28}{3} + 9.22 = 16\,.$$

La solución particular pedida es:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = 20.28(-1)^t + 16.72e^{-t} \\[1em] y_t = 6.76(-1)^t + 9.22e^{-t} \end{array}}$$

- **Analicemos el problema de la extinción**. Para la primera de la especie x_t, observamos que si t es par al ser e^{-t} y $(-1)^t$ positivos, es imposible que x_t se anule. Si consideramos un año impar

  $$e^{-t} = \frac{16.72}{28.28} < 1\,,$$

  pero si despejamos t tenemos que tomar logaritmos y aparecerá una cantidad negativa, la cual no tiene sentido biológico. En consecuencia, la primera de la especie nunca desaparecerá.

  Si repetimos el mismo razonamiento para la segunda de las especies, deducimos que si el tiempo es positivo $y_t \neq 0$. Supongamos que t es impar

  $$e^{-t} = \frac{9.22}{6.76} > 1 \quad \Rightarrow \quad t \approx 0.3\,.$$

  Si somos estrictos, esta solución al no ser entera no deberíamos considerarla, pero podemos interpretarla diciendo que la extinción de la segunda especie se producirá a los 0.3 años, o bien a los 109 días.

EJERCICIO 39 Dos especies, una depredadora x y otra presa y, se reproducen de manera que, en solitario, sus poblaciones se duplicarían y cuadruplicarían cada año, respectivamente. La presencia de depredadores produce el efecto de disminuir cada año la población de presas en cuatro veces el efectivo de los depredadores existentes al comienzo del año, y la de presas hace aumentar la especie depredadora en k veces el efectivo de las presas existentes al comienzo del año. Movimientos migratorios suman cada año 20 individuos a la especie depredadora procedente de otra región del ecosistema.

1.- **Describir la evolución cuantitativa de estas especies mediante un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden.**

2.- **Determinar el valor de k, sabiendo que la ecuación característica de la ecuación en diferencias de segundo orden que satisface la población presa tiene una raíz doble igual a 3**

3.- **Si inicialmente las poblaciones depredadora y presa constan de 7 y 80 individuos, respectivamente, se desea saber el número de individuos que componen cada una de ellas al cabo de 6 años y si alguna se extingue a tiempo finito.**

- El sistema de ecuaciones en diferencias cuando las poblaciones están en solitario es:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t \\ y_{t+1} = 4y_t \,, \end{cases}$$

donde el tiempo se encuentra expresado en años.

Al poner en contacto ambas especies, el sistema anterior se transforma en

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t + ky_t + 20 \\ y_{t+1} = 4y_t - 4x_t \,. \end{cases}$$

- Para el segundo de los apartados, resolveremos el sistema anterior. Comenzamos aumentando un paso en la segunda de las ecuaciones, y sustituyendo el valor de x_{t+1} dado en la primera,

$$y_{t+2} = 4y_{t+1} - 4x_{t+1} = 4y_{t+1} - 4(2x_t + ky_t + 20) = 4y_{t+1} - 8x_t - 4ky_t - 80 \,.$$

Despejamos en la segunda ecuación del sistema x_t y sustituimos

$$y_{t+2} = 4y_{t+1} - \frac{8}{4}(4y_t - y_{t+1}) - 4ky_t - 80 \,,$$

que da lugar a la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 4(2+k)y_t = -80 \,. \tag{6.16}$$

Su ecuación característica $\lambda^2 - 6\lambda + 4(2+k) = 0$, tiene por raíces

$$3 \pm \sqrt{9 - 4(2+k)}\,,$$

y al ser el 3 una raíz doble, entonces $k = 1/4$. El sistema nos quedará

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = 2x_t + \frac{1}{4}y_t + 20 \\ \\ y_{t+1} = 4y_t - 4x_t\,, \end{array} \right.$$

- El tercer apartado consiste en resolver el sistema con las condiciones iniciales $x_0 = 7$, $y_0 = 80$. Sabemos que la solución general de la ecuación homogénea vale

$$y_t^h = (k_1 + k_2\,t)3^t\,.$$

Para encontrar una solución particular de la solución completa, probamos con $y_t = A$. Sustituimos en (6.16)

$$A - 6A + 9A = -80 \quad \Rightarrow \quad A = -20\,.$$

La solución general buscada es

$$\boxed{y_t = (k_1 + tk_2)3^t - 20\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

que nos permite, sustituyendo en

$$x_t = -\frac{1}{4}y_{t+1} + y_t$$

escribir

$$\boxed{x_t = \frac{1}{4}\left(k_1 + (t-3)k_2\right)3^t - 15\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

Si hacemos que $t = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 = \frac{1}{4}\left(k_1 - 3k_2\right) - 15 \\ \\ 80 = k_1 - 20 \end{array} \right.$$

cuya solución es: $k_1 = 100$, $k_2 = 4$. Es decir,

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = (22+t)3^t - 15 \\ \\ y_t = (100+4t)3^t - 20 \end{array}}$$

- Ahora podemos encontrar el número de presas y depredadores al cabo de 6 años

$$x(6) = 20397\,, \quad y(6) = 90376\,.$$

Como se puede observar,

$$x_t \to +\infty\,, \quad y_t \to +\infty\,,$$

cuando $t \to \infty$, por lo que ninguna de las dos especies desaparecerá.

EJERCICIO 40 Supongamos que la función oferta y la función demanda, de un animal exótico, vienen dadas por:

$$S(p) = 1000p - 400 \qquad D(p) = 5000 - 500p$$

donde p denota el precio del animal. Supongamos que el cambio del precio viene descrito por

$$p_{t+1} = p_t + \alpha(D(p_t) - S(p_t))\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots .$$

Demostrar que este modelo es lineal y encontrar el punto de equilibrio.

- Basta sustituir los valores de la oferta y de la demanda en la ecuación en diferencias

$$p_{t+1} = p_t + \alpha(D(p_t) - S(p_t)) = p_t + \alpha(5000 - 500p_t - 1000p_t + 400)$$
$$= (1 - 1500\alpha)p_t + 5400\alpha\,.$$

Estamos ante un modelo discreto lineal, siendo $f(x) = (1 - 1500\alpha)x + 5400\alpha$.

El punto de equilibrio se encuentra resolviendo la ecuación $f(x^*) = x^*$, cuyo valor es $x^* = 18/5$.

Para saber si es un punto de equilibrio estable o inestable, nos fijamos en la pendiente de la recta,

$$|1 - 1500\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < 1 - 1500\alpha < 1\,,$$

en consecuencia, para que el punto de equilibrio sea estable tiene que ocurrir

$$0 < \alpha < \frac{1}{750}\,.$$

Observemos que en el momento que el precio del animal corresponde al punto de equilibrio,

$$S(18/5) = 1000 \times \frac{18}{5} - 400 = 3200$$

$$D(18/5) = 5000 - 500 \times \frac{18}{5} = 3200\,,$$

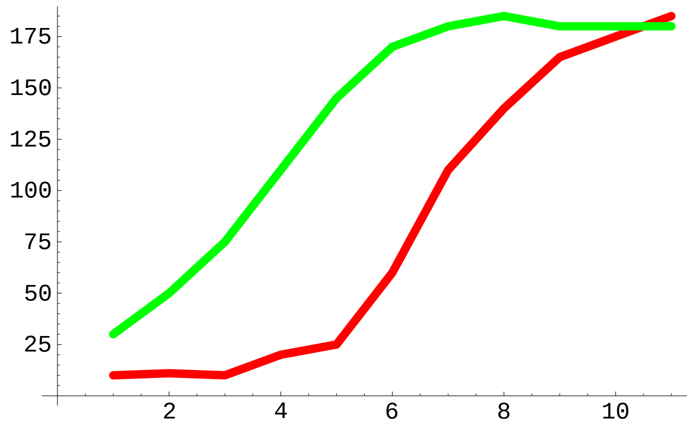
la oferta y la demanda coinciden.

EJERCICIO 41 Para dos poblaciones de un mismo tipo de bacterias, que crecen independientemente una de la otra, obtenemos los siguientes datos:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_1(t)$	10	11	10	20	25	60	110	140	165	175	185
$N_2(t)$	30	50	75	110	145	170	180	185	180	180	180

Dibujar $N_1(t)$ y $N_2(t)$ en función del tiempo t. ¿Cuál de estas dos poblaciones se parece más a la ecuación logística?.

- Si utilizamos el software `Mathematica`® obtenemos la siguiente representación gráfica



La curva en color verde tiende a 180 cuando aumentamos el valor del tiempo, tiene forma en S, y además su punto de inflexión se encuentra hacia la mitad de la capacidad de carga $180/2 = 90$. En consecuencia $N_2(t)$ es la más parecida a la ecuación logística.

EJERCICIO 42 Sea $r = 0.69$ y $K = 100$. Dibujar en el plano los puntos $(N(t), N(t+1))$ correspondientes a las siguientes ecuaciones:

$$N(t+1) = N(t)e^r \tag{6.17}$$

$$N(t+1) = \frac{N(t)e^r K}{N(t)(e^r - 1) + K} \tag{6.18}$$

- Empezamos la resolución del ejercicio con la ecuación (6.18) que podemos reescribirla

$$N(t+1) = \frac{200N(t)}{N(t) + 100},$$

El resto lo resolveremos con el software Mathematica®. Lo iniciamos escribiendo las funciones

```
f[x_] := 200 * x/(x + 100)
g[x_] := x
```

continuamos encontrando 20 términos de la órbita correspondiente al valor $x_0 = 5$,

```
iters = NestList[f, 5., 20]
```

cuyos valores son:
{ 5., 9.5238, 17.3913, 29.6296, 45.7142, 62.7450, 77.1084, 87.07482, 93.0909, 96.4218, 98.1783, 99.0807, 99.5382, 99.7686, 99.8841, 99.9420, 99.9710, 99.9855, 99., 99.9963, 99.9981 }

Se observa que los valores de esta población tienden al punto de equilibrio 100.

- En ciertas ocasiones, es frecuente enfrentar las representaciones gráficas de $N(t+1)$ en función de $N(t)$, con la de $N(t)$.

```
fg = Plot[{x, f[x]}, {x, 0, 150}, PlotStyle- > {RGBColor[1, 0, 0],
RGBColor[0, 0, 1]}, DisplayFunction- > Identity]

gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{iters, iters}]], 2, 1],
PlotJoined- > True, DisplayFunction- > Identity]
Show[fg, gi, AspectRatio- > 1, DisplayFunction- > $DisplayFunction]
ListPlot[iters, PlotJoined- > True]
```

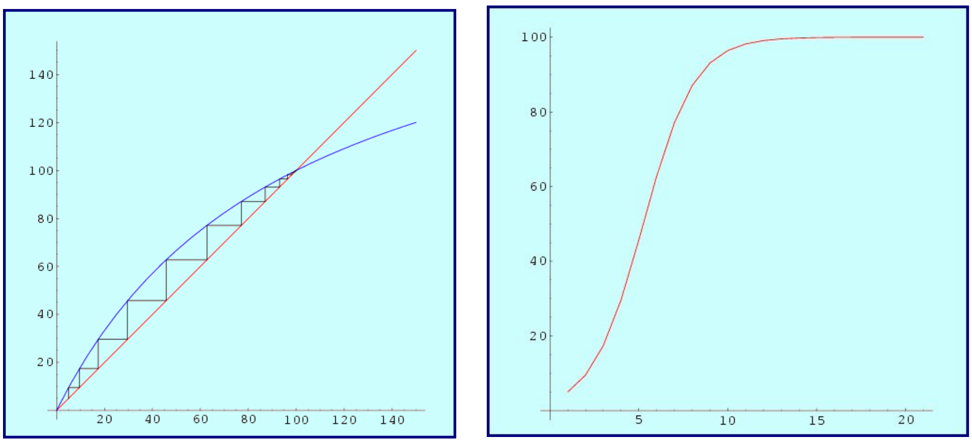


Figura 6.10:

Como puede apreciarse, la población sigue un modelo logístico discreto.

- La ecuación (6.17) observamos que es lineal en el plano $(N(t), N(t+1))$; pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente e^r. Para su estudio, realizamos un análisis similar al caso anterior. En este caso los primeros términos de la órbita son:

  { 5. 9.9685, 19.8745, 39.6241, 78.9992, 157.5019, 314.0141, 626.0548, 1248.1751, 2488.5062, 4961.3735, 9891.5675, 19720.9719, 39318.0080 }

  que experimentan un crecimiento exponencial, como se pone de manifiesto en las siguientes gráficas

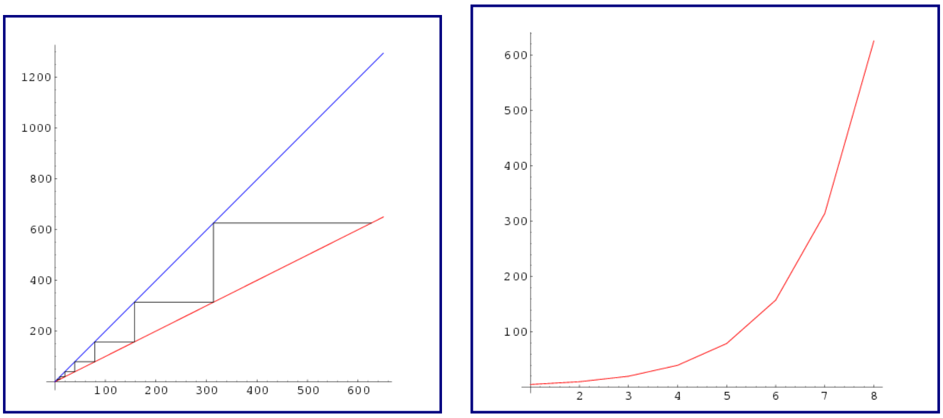


Figura 6.11.

EJERCICIO 43 Dada la ecuación logística del crecimiento

$$N(t)=\frac{K}{1+\left(\frac{K-N(0)}{N(0)}\right)e^{-rt}}$$

Expresar $N(t+1)$ en función de $N(t)$

- Empezamos resolviendo el ejercicio calculando $N(t+1)$ de la expresión $N(t)$,

$$\begin{aligned}
N(t+1) &= \frac{k}{1+\frac{k-N(0)}{N(0)}e^{-rt}e^{-r}} = \frac{k}{e^{-r}\left(e^{r}+\frac{k-N(0)}{N(0)}e^{-rt}\right)}\\
&= \frac{k}{e^{-r}\left(e^{r}-1+1+\frac{k-N(0)}{N(0)}e^{-rt}\right)} = \frac{k}{ke^{-r}\left(\frac{e^{r}-1}{k}+\frac{1+\frac{k-N(0)}{N(0)}e^{-rt}}{k}\right)}\\
&= \frac{1}{e^{-r}\left(\frac{e^{r}-1}{k}\right)+e^{-r}N(t)^{-1}} = \frac{e^{r}}{\frac{e^{r}-1}{k}+\frac{1}{N(t)}}\,,
\end{aligned}$$

que una vez simplificada, nos da como solución

$$\boxed{N(t+1)=\frac{e^{r}kN(t)}{k+N(t)(e^{r}-1)}}$$

EJERCICIO 44 [Modelo de Varley, Gradwell y Hassell]. Muchas poblaciones de insectos se rigen por el siguiente modelo

$$f(N_t) = N_{t+1} = \frac{\lambda}{\alpha} N_t^{1-b}\,, \quad \alpha,\, b,\, \lambda > 0\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2\cdots \tag{6.19}$$

donde λ **representa a la tasa reproductiva** $(\lambda > 1)$ **y** N_t^{-b}/α **es la fracción de la población que sobreviven desde la infancia a la edad adulta reproductiva. Podemos expresar** (6.19) **como**

$$N_{t+1} = \left(\frac{1}{\alpha} N_t^{-b}\right)(\lambda N_t)\ ,$$

es decir, N_{t+1} **será igual a la fracción de insectos que sobreviven en la generación** $t+1$ **por el número de insectos que nacen de la generación** t**. Estudiar los puntos de equilibrio del modelo.**

- Tenemos que estudiar el sistema dinámico discreto $N_{t+1} = f(N_t)$, siendo

$$f(x) = \frac{\lambda}{\alpha} x^{1-b}\,.$$

Sus puntos de equilibrio se obtienen resolviendo la ecuación

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\alpha} x^{1-b} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda x}{\alpha x^b} = x\,,$$

es decir, $x_1^* = 0$, $x_2^* = (\lambda/\alpha)^{1/b}$. Para poderlos clasificar es necesario conocer el valor de la derivada de $f(x)$ en cada uno de estos puntos. Al ser $f'(x) = \frac{\lambda}{\alpha}(1-b)x^{-b}$ tenemos

$$f'(x_2^*) = 1 - b \quad \Rightarrow \quad |1-b| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < b < 2\,.$$

El punto de equilibrio $(\lambda/\alpha)^{1/b}$ es estable siempre que $0 < b < 2$. En caso contrario $b > 2$, el modelo tiene en $(\lambda/\alpha)^{1/b}$ un punto de equilibrio inestable.

En el primero de los puntos no existe $f'(x_1^*)$, y por lo tanto no podemos seguir el procedimiento anterior. No obstante su análisis a nivel biológico no es interesante pues indicaría que inicialmente no existen individuos en la población.

EJERCICIO 45 Un modelo discreto frecuentemente utilizado en dinámica de poblaciones, consiste en la ecuación

$$N_{t+1} = f(N_t) = N_t e^{r\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)} \qquad r\,,k \in \mathbb{R}^+\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots\,.$$

Encontrar y analizar los puntos de equilibrio.

- Procedemos de forma idéntica al ejercicio anterior, pero ahora con la función $f(x) = xe^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)}$, obteniéndose de forma inmediata los puntos de equilibrio $x_1^* = 0$ y $x_2^* = k$. La derivada de la función $f(x)$ es

$$f'(x) = e^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)}\left(1 - \frac{xr}{k}\right),$$

que nos permite clasificar el punto de equilibrio que es más interesante. Puesto que $f'(k) = 1 - r$, entonces el $x_2^* = k$ será estable si $0 < r < 2$.

EJERCICIO 46 Analizar los puntos de equilibrio del modelo discreto no lineal siguiente:

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{kN_t}{b + N_t} \qquad b,\ k > 0\,, \quad t = 0,\ 1,\ 2, \cdots,$$

- Es inmediato comprobar que este modelo presenta en $x_1^* = k - b$ un punto de equilibrio estable, si $k > b$.

EJERCICIO 47 Calcular la posición de los puntos fijos y de los puntos 2-periódicos en el modelo logístico $N_{t+1} = 3.3N_t(1 - N_t)$, $t = 0, 1, 2, \cdots$.

- Para resolver gráficamente el ejercicio, necesitaremos representar las funciones $g(x) = x$, $f(x) = 3.3x(1-x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ y encontrar los puntos de corte. En nuestro caso

$$f^2(x) = 3.3^2 x(1-x)(1 - 3.3x + 3.3x^2)\,.$$

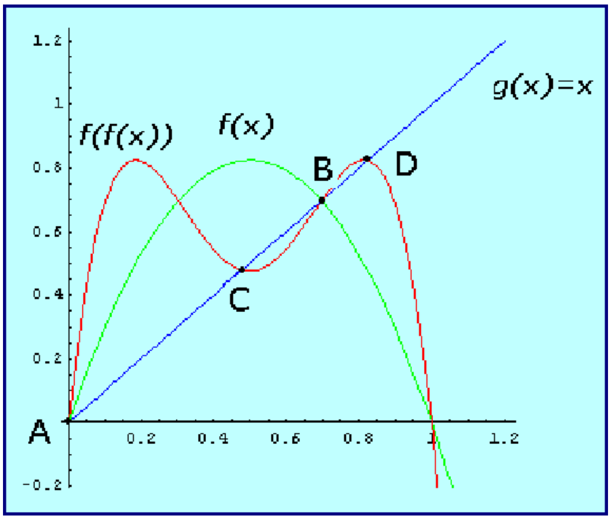


Figura 6.12: Puntos de equilibrio y 2-periódicos de $f(x) = 3.3x(1-x)$.

Los puntos de equilibrio son $x_A = 0$, $x_B = 0.6969..$ y los puntos 2-periódicos $x_c = 0.47492701..$, $x_D = 0.8236032$.

EJERCICIO 48 Supongamos que la tasa de crecimiento de una población P satisface

$$g(P) = 0.03P(1 - P/600)\,.$$

El modelo discreto de crecimiento logístico viene dado por

$$P_{t+1} = P_t + g(P_t)\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots\,.$$

1.- **Encontrar la población cuando $g(P)$ es cero y cuando tiene un máximo (vértice).**

2.- **Calcular P_1, P_2, P_3 para un valor inicial $P_0 = 100$. Encontrar los puntos de equilibrio.**

1.- Es evidente que $g(P)$ se anula para los valores $P = 0$ y $P = 600$. Al ser una parábola que corta al eje de abscisas en los puntos 0 y 600, su vértice estará situado en $P = 300$ siendo $g(300) = 4.5$. Es decir el valor máximo de la parábola será el punto (300, 4.5).

2.- Para encontrar las poblaciones pedidas solamente tendremos que sustituir los valores adecuados en el modelo presentado. De esta manera,

$$P_1 = P_0 + 0.03P_0(1 - P_0/600) = 102.5\,.$$

De forma similar $P_2 = 105.05$, $P_3 = 107.65$.

EJERCICIO 49 La población de China en 1980 era de 985 millones, y el censo de 1990 mostró que la población había crecido hasta 1.137 millones. Suponiendo que la población crece según la siguiente ley de crecimiento discreto exponencial

$$P_{t+1} = (1 + r)P_t\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots\,, \tag{6.20}$$

donde t es el número de décadas después de 1980 y P_t la población t décadas después de 1980.

1.- **Encontrar la constante r de crecimiento y predecir la población para el año 2000.**

2.- **Encontrar el tiempo necesario para que se duplique la población.**

1.- Llevando los datos en (6.20),

$$P(1990) = P_1 = (1+r)P(1980) = (1+r)P_0 \quad \Rightarrow \quad 1.137 = (1+r)985\,,$$

y el valor buscado es $r = 0.1543$.

2.- La segunda parte del ejercicio se deduce de la ecuación

$$P_t = 1.1543^t P_0 = 2P_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{\ln 1.1543} = 4.83 \text{ décadas}\,,$$

se necesitan 48.3 años para que la población se duplique.

EJERCICIO 50 Un invertebrado vive en un lago que está afectado por el efecto de la contaminación que penetra lentamente en el ecosistema. La dinámica poblacional para este invertebrado viene dada por el siguiente modelo de crecimiento exponencial no autónomo

$$P_{n+1} = (1 + k(t_n))P_n\,, \quad P_0 = 40.000\,, \tag{6.21}$$

donde $t_n = n$ es el número de días desde la medida inicial de la población y $k(t) = 0.08 - 0.01t$ es la tasa de crecimiento, que claramente decrece con el tiempo.

1.- Encontrar la población para este organismo en los próximos 5 días.

2.- Cuando la tasa de crecimiento cae a cero, la población alcanza su máximo. Encontrar cuando ocurre y el tamaño de la población en este momento.

3.- Encontrar cuando se da el nivel máximo de polución, lo que obliga a la extinción de la especie.

1.- La población para el primer día es $P_1 = 1.08 \times 40000 = 43200$, ya que $k(t_0) = 1.08$. Para el resto de los días la solución es $P_2 = 46224$, $P_3 = 48997$, $P_4 = 51447$, $P_5 = 53505$.

2.- La tasa de crecimiento es cero al cabo de los $t = 8$ días. La población será de $P_8 = 1.01P_7 = 1.01 \times 1.02 \times 1.03 \times 53505 = 56775$.

3.- Para encontrar la respuesta del tercer apartado, tenemos que determinar cuando el factor $1 + k(t_n)$ se anula. En nuestro caso,

$$1 + 0.08 - 0.01t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 108\,.$$

Esto ocurre al cabo de los 108 días que es la cota superior teórica para la extinción de la especie.

EJERCICIO 51 Para una determinada especie animal se considera que P es la proporción de individuos que como máximo pueden pertenecer a un hábitat concreto (esto es, $P = 0$ indica la ausencia y $P = 1$ indica que no puede haber más individuos). Además, se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad son, respectivamente, las siguientes:

$$f(P) = \frac{3a}{8}(1-P)\,; \quad m(P) = 1 - \frac{a}{8} + \frac{a}{8}P\,,$$

siendo a un número real comprendido entre 2 y 6.

1.- **Comprobar que la ecuación en diferencias $y_{t+1} = \frac{a}{2}y_t(1-y_t)$, modeliza a la dinámica de la población.**

2.- **Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y estudia su estabilidad.**

1.- Para un año cualquiera t, tenemos que

$$y_{t+1} = y_t + (\text{fertilidad - mortalidad})y_t$$

es decir

$$y_{t+1} = y_t + \left(\left(\frac{3a}{8}(1-y_t)\right) - \left(1 - \frac{a}{8} + \frac{a}{8}y_t\right)\right)y_t = \frac{ay_t}{2}(1-y_t)\,.$$

2.- La función que define al modelo es $f(x) = \frac{a}{2}x(1-x)$. Para encontrar los puntos fijos o de equilibrio resolvemos la ecuación no lineal $f(x) = x$, cuyas soluciones son:

$$x_1^* = 0\,; \quad x_2^* = \frac{a-2}{a}\,.$$

Para analizar la estabilidad de los puntos fijos, en primer lugar, calculamos la derivada,

$$f'(x) = \frac{a}{2} - a\,x\,,$$

y sustituimos cada uno de los puntos,

$$f'(0) = \frac{a}{2}$$

Para que este punto sea estable tiene que ocurrir que $|f'(0)| < 1$, lo que obliga a que el valor del parámetro a sea menor que dos, y esto no puede ocurrir ya que el enunciado indica que $2 < a < 6$.

Para el segundo punto,

$$|f'(x_2^*)| = |f'(\frac{a-2}{a})| = |\frac{4-a}{a}| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \frac{4-a}{a} < 1 \quad \Rightarrow \quad 2 < a < 6\,.$$

En consecuencia, el punto de equilibrio x_1^* es inestable y el x_2^* es estable.

EJERCICIO 52 Dado el sistema dinámico discreto $x_{t+1} = f(x_t) = x_t^3 - x_t^2 + 1$. Analizar su comportamiento a largo plazo.

- En primer lugar realizaremos el estudio cuantitavivo encontrando los puntos de equilibrio del modelo y su clasificación.

$$F(x) = x \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 + 1 = x \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 1 \text{ (doble)}\,, \quad x_2^* = -1$$

si calculamos la derivada $f'(x) = 3x^2 - 2x$ y sustituimos en los puntos de equilibrio,

$$|f'(1)| = 1$$

estamos ante un punto de equilibrio $x_1^* = 1$ dudoso. Por otro lado,

$$|f'(-1)| = 5 > 1$$

en este caso el punto de equilibrio $x_2^* = -1$ es inestable.

Para poder clasificar el punto de equilibrio dudoso, encontraremos 25 términos de la órbita de f correspondiente a la semilla $x_0 = 1.2$

NestList[p,1.2,25]

$$\{1.2, 1.288, 1.47778, 2.04338, 5.35651, 125.998, 1.98439 \times 10^{6}, 7.81414 \times 10^{18}, 4.77137 \times 10^{56}, 1.08625 \times 10^{170}, 1.281696405368169 \times 10^{510}, 2.105501227265631 \times 10^{1530}, 9.33397206326970 \times 10^{4590}, 8.1320396988399 \times 10^{13772}, 5.3777235179070 \times 10^{41318}, 1.5552328140679 \times 10^{123956}, 3.761717978576 \times 10^{371868}, 5.32302735792 \times 10^{1115605}, 1.50825958784 \times 10^{3346817}, 3.43105977494 \times 10^{10040451}, 4.0391022997 \times 10^{30121354}, 6.589531805 \times 10^{90364063}, 2.861301849 \times 10^{271092191}, 2.342561635 \times 10^{813276574}, 1.285502955 \times 10^{2439829723}, 2.12431657 \times 10^{7319489169}\}$$

que podemos observar tiende a infinito. Por otro lado, la órbita de f correspondiente a la semilla $x_0 = 0.2$ es:

NestList[p,0.2,25]

$$\{0.2, 0.968, 0.970015, 0.971786, 0.973356, 0.974757, 0.976015, 0.977152, 0.978184, 0.979126, 0.979988, 0.980781, 0.981513, 0.98219, 0.982819, 0.983404, 0.98395, 0.984461, 0.98494, 0.985391, 0.985814, 0.986214, 0.986591, 0.986949, 0.987287, 0.987608\}$$

que se estabiliza en el punto de equilibrio $x_1^* = 1$. En consecuencia, este punto de equilibrio es un nodo.

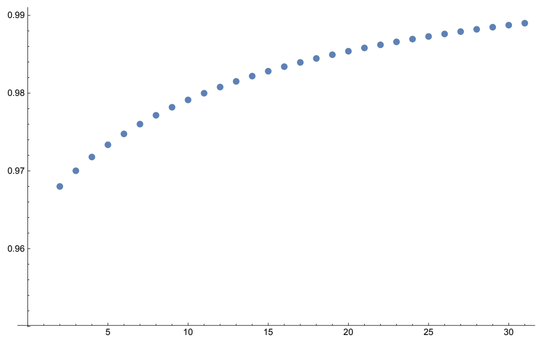


Figura 6.13: Órbita para la semilla $x_0 = 0.2$

Como ejercicio idéntico al anterior, se propone el estudio del siguiente sistema dinámico:

$$x_{t+1} = f(x_t) = \sqrt{4x_t - 3}$$

que presenta un punto de equilibrio estable en 3, y un punto de equilibrio inestable en 1.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 53

1.- **Calcular k para que la ecuación en diferencias de segundo orden:**

$$x_{t+2} - 2kx_{t+1} + (k+1)x_t = t^2 + 3 + 3^t$$

tenga a 1 y a 3 como raíces de la ecuación característica.
Resolver, a continuación, la ecuación completa con las condiciones iniciales: $x_0 = 10\,, x_1 = 18.$

2.- **El crecimiento de una especie viene descrito por la siguiente ecuación en diferencias:**

$$x_{t+2} - 4x_t = -3^{t+1}\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \cdots$$

donde x_t representa a la cantidad de animales en el año t. Determinar el número de animales al finalizar un año cualquiera "t", sabiendo que inicialmente hay 10 y que transcurrido un año su número es de 20

3.- **El incremento de la población de una determinada especie animal en un año es la mitad del incremento del año anterior, si no intervienen factores externos. La población inicial es de 950 individuos y de 975 al finalizar el primer año.**

- **Escribir la ecuación en diferencias que modeliza a la situación planteada.**
- **Determinar la cantidad de individuos de dicha especie al finalizar un año cualquiera "t".**
- **Estudiar el comportamiento a "largo plazo "de la población.**

4.- **Sea x_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Se sabe que año tras año sobreviven la tercera parte de los animales y además se incorporan 200 a la población.**

- **Construir un modelo discreto lineal para la situación planteada.**
- **Calcular los seis primeros términos de las órbitas correspondientes a las semillas:**

$$x_0 = 90\,, \quad x_0 = 600\,.$$

- **Construir los diagramas de Cobweb del apartado anterior, e interpretar biológicamente los resultados obtenidos.**

5.- **Se sabe que la evolución de una población de una determinada especie de peces viene dada por el sistema dinámico discreto lineal**

$$y_{t+1} = f(y_t)$$

- **Encuentra una función f de tal manera que la población a largo plazo se estabilice en 10 individuos independientemente del número inicial de peces.**
- **Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb con los valores iniciales: $y_0 = 1$ peces y $y_0 = 20$ peces.**

6.- **La siguiente ecuación en diferencias describe la evolución de una población en años sucesivos,**

$$x_{t+1} = \frac{10e^r x_t}{10 + (e^r - 1)x_t}, \qquad t = 0, 1, 2, 3, \quad \cdots \quad .$$

- **Demuestra que si el parámetro r es positivo, entonces la población se estabiliza en 10 individuos, mientras que si r es negativo, la población desaparecerá.**

7.- **La siguiente ecuación en diferencias describe la población de insectos en un manglar en años sucesivos,**

$$x_{t+1} = \alpha x_t e^{-x_t}, \qquad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo α un parámetro positivo y x_t el número de insectos en el año t ¿Cuál debe ser el valor de α para que el punto de equilibrio no trivial sea estable?

8.- **Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,**

$$5x_{t+2} - 6x_{t+1} + x_t = \left(\frac{1}{5}\right)^t, \qquad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo x_t el número de individuos en el año t. Encontrar el número de individuos en el quinto año, sabiendo que inicialmente eran 10 y al año siguiente 20.

9.- **La siguiente ecuación en diferencias representa la dinámica de una población**

$$y_{t+1} = f(y_t) = \frac{\alpha y_t}{10 + y_t}$$

donde y_t representa al número de individuos en el tiempo t.

9.a.- **Encuentra el valor del parámetro α para que uno de sus puntos de equilibrio sea 40.**

9.b.- **Con el valor calculado para α, encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo**

9.c.- **¿Qué puedes decir de la evolución "a largo plazo"de esta población?**

10.- **Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:**

10.a.- **Sea la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$, donde y_t representa a la cantidad de individuos en el año t. Si el número inicial de individuos es 2 y al cabo de un año es 5, ¿cuál será el valor de la población al cabo de 10 años?**

10.b.- **Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 8$.**

11.- **La dinámica de una determinada especie responde a la siguiente ecuación en diferencias:**

$$x_{t+1} = 2x_t e^{1-x_t}\,; \quad t \in \mathbb{N}$$

Responder, de forma razonada, a las siguientes cuestiones:

- **¿Cuáles son los puntos fijos (puntos de equilibrio)?**
- **¿Cómo son los puntos fijos con respecto a la estabilidad?**

12.- **Considera la ecuación en diferencias:**

$$x_{t-1} = x_t e^{x_t - 2}$$

Encuentra los puntos de equilibrio de la ecuación y estudia su estabilidad.

13.- **Supongamos los siguientes modelos matemáticos utilizados en dinámica de poblaciones de aves:**

Modelo 1: $P_{t+1} = \lambda P_t\,;$ **con** $\lambda > 0$
Modelo 2: $P_{t+1} = (\lambda P_t + a)P_t\,;$ **con** $\lambda < 0\,;\ a > 0$

La información de la que se dispone es la siguiente:

- **El primer año de observación se contaron 500 aves y el segundo 1000.**
- **La población no se espera que se extinga ni que crezca ilimitadamente.**
- **Si llegara a observarse 4000 aves es de esperar que ese número no varíe ya en el transcurso del tiempo (Es decir, P=4000 se mantendría constante).**

Justifica de manera razonada, si los dos modelos planteados cumplen los datos biológicos o no. Además, investigando sobre esta población se ha descubierto que la población constante de 4000 aves es estable. Justifica si los modelos matemáticos propuestos cumplen esta nueva condición.

14.- **Dada la ecuación en diferencias,**

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}\left(-x_t^3 + 4x_t^2 - 3x_t + 2\right)$$

- **Estudiar la estabilidad de sus puntos de equilibrio.**
- **Suponiendo que x_t represente al tamaño de una población, discutir su evolución a largo plazo, dependiendo de los valores iniciales x_0**

15.- **Sea y_t el número de individuos de una población en el año t. La evolución de dicha población viene dada por la siguiente ecuación en diferencias:**

$$y_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = 2^t$$

- **Si la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_t^h = c_1 2^t + c_2 3^t$, encontrar el valor de los parámetros a y b.**
- **Si inicialmente el número de individuos era de $y_0 = 4$ y al año siguiente era de 9, encontrar el número de individuos para un año cualquiera t.**

16.- **Para una especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por,**

$$f(P) = \frac{1}{2}, \qquad m(P) = 1 - \frac{1}{1+P},$$

respectivamente.

- **Determinar la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población.**
- **Calcular y clasificar los puntos de equilibrio del modelo.**
- **Realizar una interpretación del comportamiento de la especie a largo plazo, a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.**

17.- **Se considera la serie de pesos siguiente:**

$$p_{37} = 1.35\,Kg.\,;\ p_{38} = 2.90\,Kg.\,;\ p_{39} = 1.74\,Kg.\,;\ p_{40} = 3.06\,Kg.\,;\ p_{41} = 1.35\,Kg.$$

que se ajusta a una ecuación en diferencias del tipo $x_{t+1} = x_t(a - x_t)$, siendo a un parámetro a determinar.

- **Estimar el valor de a.**
- **Determinar los puntos de equilibrio del modelo y estudiar su estabilidad.**

18.- **Considera la siguiente versión del modelo logístico discreto de crecimiento:**

$$x_{t+1} = f(x_t) = 3.2x_t(1 - 0.25x_t)$$

Encuentra, mediante una simulación con ordenador, las primeras 100 iteraciones de la órbita de x_0 y dibújala, suponiendo que $x_0 = 2.75$, que $x_0 = 2.5$ y finalmente con $x_0 = 2$. ¿Qué tipo de equilibrio tiene el modelos?¿Existen 2-ciclos? Justifica las respuestas.

19.- **Una población de palomas parte de 1000 ejemplares. Se reproduce de tal manera que la población en cada año es el doble que la del año anterior más cuarenta y cinco cuartos de la de hace dos años. Además cada año se extraen 20 individuos para su estudio. ¿Cuál es la población de la colonia en un año cualquiera t? ¿cuántos individuos hay después de cinco años?**

20.- **La siguiente ecuación en diferencias describe la población de ardillas en años sucesivos,**

$$x_{t+1} = x_t^3 - 3x_t^2 - 3x_t + a\,, \qquad t = 0, 1, 2, 3, \quad \cdots \quad .$$

siendo a un parámetros positivo y x_t el número de ardillas en el año t .

- **Encuentra el valor del parámetro a sabiendo que existe un punto de equilibrio en $x^* = 2$**
- **Clasificar los puntos de equilibrios que tienen sentido biológico para conocer el comportamiento a largo plazo de la población.**

21.- **Sea el modelo discreto logístico**

$$N_{t+1} = 3.3N_t(1 - N_t)\,,$$

donde N_t representa al número de individuos de la población en el período t. Clasifica el punto de equilibrio no trivial, y comprueba el resultado haciendo uso del diagrama de Cobweb.

22.- **Calcular y clasificar los puntos de equilibrio del siguiente modelo discreto, con $r > 0$ y $k > 0$,**

$$f(N_t) = N_{t+1} = N_t\left(1 + r\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)\right)\,, \qquad t = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \quad .$$

23.- **La siguiente ecuación en diferencias:**

$$x_{t+1} = \frac{\alpha\, x_t}{1 + \beta\, x_t}\,, \quad \alpha\,,\beta > 0\,, \quad x_t \geq 0\,,$$

fue propuesta por *Kaplan* & *Glais* en 1995 y juega un papel muy importante en análisis de modelos no lineales genéticos y en redes neuronales.

23.a.- **Encontrar y analizar los puntos de equilibrio**

23.b.- **Sea $\alpha = \beta = 1$. Dibujar de forma aproximada el diagrama en telaraña (cobweb) tomando como semilla $x_0 = 4$.**

24.- **Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,**

$$(y_{t+2} - y_{t+1}) - \frac{1}{3}(y_{t+1} - y_t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t ,$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t.

- **Explicar el significado "biológico"de la ecuación anterior**
- **¿Crecerá la población a largo plazo?.**

25.- **Indicar en cada una de las siguientes ecuaciones si es lineal o no lineal. Si es lineal determinar la solución; si es no lineal encontrar y analizar el tipo de puntos de equilibrio.**

- $x_t = (1-\alpha)x_{t-1} + \beta x_t \qquad \alpha\,,\beta\, \in \mathbb{R}^+$
- $x_{t+1} = \dfrac{x_t}{1+x_t}$
- $x_{t+1} = x_t e^{-a x_t} \qquad a \in \mathbb{R}^+$
- $(x_{t+1} - \alpha)^2 = \alpha^2(x_t^2 - 2x_t + 1) \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+$
- $x_{t+1} = \dfrac{k}{k_1 + k_2/x_t} \qquad k_1\,, k_2\,, k \in \mathbb{R}^+$

26.- **Se sabe que la evolución de una población de una determinada especie de peces viene dada por el sistema dinámico discreto lineal**

$$y_{t+1} = f(y_t)$$

26.a.- **Encuentra una función f de tal manera que la población a largo plazo se estabilice en 10 individuos independientemente del número inicial de peces.**

26.b.- **Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb con los valores iniciales: $y_0 = 1$ peces y $y_0 = 20$ peces.**

27.- **Sea y_t el número de individuos de una población en el año t. La evolución de dicha población viene dada por la siguiente ecuación en diferencias: $y_{t+2} + a y_{t+1} + b y_t = 3$**

- **Si la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_t^h = C_1\, 1^t + C_2\, 2^t$, encontrar el valor de los parámetros a y b.**
- **Si inicialmente el número de individuos era de $y_0 = 2$ y al año siguiente su número era $y_1 = 4$, encontrar la población después de 4 año.**

28.- **Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,**

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 3^t\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3\cdots\,,$$

siendo y_t el número de individuos en el año t. Encontrar el número de individuos en el tercer año, sabiendo que inicialmente eran 2 y al año siguiente 8 individuos.

29.- **La evolución de una población x_t viene determinada por el siguiente modelo discreto exponencial con inmigración y emigración,**

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t - \mu\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo el parámetro positivo μ la diferencia entre el número de personas que entran y las que salen, el parámetro r la tasa de crecimiento de la población, y x_0 el número inicial de individuos.

- **Estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo según los diferentes valores del parámetro r.**
- **Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb, para $r = 0.2$ y $\mu = 10$.**

30.- **Dos especies conviven de acuerdo con el siguiente modelo discreto:**

$$\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + y_t + 3^t \\ y_{t+1} = 4x_t + 2y_t + 3^t\,, \end{cases}$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años. Hallar sus funciones de efectivos.

31.- **Dos especies que conviven en un mismo territorio, evolucionan del modo descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:**

$$\begin{cases} x_{t+1} = 7x_t - 2y_t - t + 2 \\ y_{t+1} = 6x_t - y_t + 5t\,, \end{cases}$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años.

- **Si, inicialmente, el número de individuos de cada especie es $x_0 = 70$, $y_0 = 251$, resolver el sistema para obtener los efectivos en función de t y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.**
- **Comprobar que al cabo de un año se ha extinguido la primera especie y analizar el comportamiento a posteriori de la segunda.**

32.- **El crecimiento de dos especies que coexisten viene descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:**

$$\begin{cases} x_{t+1} = (9 - a)x_t + (4 - b)y_t + 5^t & ; \quad x_0 = 10 \\ y_{t+1} = (b - 2)x_t + 5y_t + 5^t & ; \quad y_0 = 45 \end{cases}$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años. Si la ecuación homogénea, asociada a la ecuación en diferencias de segundo orden, que resulta de eliminar y_t en el sistema es:

$$x_{t+2} - 8x_{t+1} + 15x_t = 0.$$

Resolver todos los sistemas que cumplan las condiciones anteriores y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.

6.6. Práctica 1: Conceptos básicos de dinámica discreta

En esta práctica vamos a usar la potencia de la recursión para experimentar con diferentes modelos discretos lineales y no lineales. Observaremos puntos de bifurcación y caos para el modelo logístico discreto.

6.6.1. Introducción

Consideremos la siguiente ecuación $x = cosx$. Cualquier solución de esta ecuación es la abscisa de la intersección de la recta $y = x$ con la gráfica de la función $y = cosx$.

EJEMPLO 6.6 *Dibuja las dos gráficas y comprueba que hay un punto de intersección en el intervalo* $[0, 1]$.

En general, cualquier solución p de la ecuación $x = g(x)$ se llama un punto fijo de la función g.

La fórmula de iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ se llama *iteración Funcional o Iteración de Punto Fijo* y en muchos casos (dependiendo de la función g y del punto inicial x_0) la sucesión $\{x_n\}_n$ converge al punto fijo.

Para poder construir estas sucesiones, podemos utilizar las siguientes órdenes de `Mathematica`

`Nest[g,x0,n]` : da el término n-ésimo de la sucesión.

`NestList[g,x0,n]` : da una lista con las iteraciones desde x_0 a n.

`FixedPoint[g,x0]`

`FixedPointListNest[g,x0]`

Las órdenes `FixedPoint[g,x0]` y `FixedPointListNest[g,x0]` son similares a las anteriores, salvo que paran cuando encuentran dos iteraciones sucesivas iguales.

EJEMPLO 6.7 *Utiliza las funciones anteriores y construye la sucesión de iteraciones que se obtiene para* $g(x) = cosx$ *comenzando en* $x_0 = 0$.

Con la orden `ListPlot[ ]` podemos ahora dibujar los puntos y hacer una interpretación gráfica de lo que ocurre.

Empezamos definiendo la función

```
f[x ]:= Cos[x]
```

a continuación, construimos los veinte primeros términos de la órbita

```
iters=NestList[f,0.,20]
```

Dibujamos en primer lugar la función $f[x]$ y la bisectriz del primer cuadrante.

```
fg=Plot[{x,f[x]}, {x,0,1.5}, PlotStyle->{RGBColor[1,0,0], RGBColor[0,0,1]},]
DisplayFunction->Identity]
```

trazamos la órbita

```
gi=ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{iters, iters}]],2,1],PlotJoined
->True,DisplayFunction->Identity]
```

Finalmente, superponemos los dos gráficos anteriores. `Show[fg,gi,AspectRatio->1, DisplayFunction->$DisplayFunction]`

EJEMPLO 6.8 *Supongamos que nos encontramos en una árida isla cerca de la costa de un rico continente. Estamos interesados en un determinado tipo de gaviotas que viven en esta isla. Por desgracia, las condiciones medioambientales no son las más adecuadas, de tal forma que si se encontraran aisladas su población disminuiría según el siguiente modelo exponencial o de Malthus*

$$x_{k+1} = -1.5x_k\,, \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{6.22}$$

donde x_k es la población de pájaros en el tiempo k.

Hay una gran colonia de gaviotas en el continente y cada año 100 de ellas emigran a nuestra isla.

1.- *Modifica el modelo (6.22) para tener en cuenta el factor de la emigración*

2.- *Supongamos que inicialmente hay 30 gaviotas. Encontrar los primeros 10 términos de su órbita*

3.- *Describir el comportamiento a "largo plazo"de la colonia de gaviotas*

4.- *Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.*

Repetir el ejercicio suponiendo que ahora el modelo exponencial es:

$$x_{k+1} = -0.5x_k\,, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

6.6.2. Caos

El *Teorema del Punto Fijo de Brouwer* establece que toda función continua de un intervalo cerrado en sí mismo $f : [a, b] \to [a, b]$, tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$.

En este apartado, analizaremos el comportamiento de los términos de la iteración funcional con respecto a los puntos fijos.

Si x^* es un punto fijo ($f(x) = x$), cuando la función f es derivable, y

$$|f'(x^*)| < 1$$

entonces, el punto x^* se llama **punto fijo atractor**. Cuando una iteración funcional comienza suficientemente cerca de él, irremediablemente cae dentro de su ámbito de influencia y la sucesión (órbita) converge.

Por el contrario, si
$$|f'(x^*)| > 1$$
se trata de un **punto fijo repulsor**, y por muy cerca de él que se comience, la sucesión termina por alejarse.

EJEMPLO 6.9 *Consideremos la familia de parábolas*

$$y = kx(1-x)\,, \qquad k > 0\,.$$

Empezamos definiendo una función (de k y x) para la familia anterior.

```
p[k_ ][x_ ]:=k x (1-x)
```

Utilizando `Mathematica`*:*

1.- *¿Cuáles son los puntos fijos en función de k?*

2.- *Considera el caso* $0 < k < 1$. *¿Cuáles son los puntos fijos?. ¿Son los puntos fijos atractores o respulsores?. Para ello, usa* `ListPlot[ ]` *y* `GraficoPuntoFijo[ ]` *para ver qué ocurre con la iteración funcional para distintas elecciones del punto inicial. Toma, por ejemplo,* $k = 0.5$ *y comenta los resultados.*

3.- *Cuando* $1 < k < 3$, *¿de qué tipo son los puntos fijos?. Comprueba gráficamente que para* $k = 2.6$ *la iteración funcional converge rápidamente al punto fijo* $8/13$

4.- *Toma* $k = 3.2$ *y usa* `ListPlot[ ]` *y* `GraficoPuntoFijo[ ]`. *Podrás ver que después de algunas iteraciones, los términos sucesivos oscilan entre dos valores diferentes, y quedan atrapados en un bucle sin fin. Es lo que se llama un* **ciclo periódico de longitud 2**. *¿Qué ocurre cuando* $k = 3.5$. *¿Hay un ciclo periódico?. ¿De qué longitud?*

5.- *Cuando* $k = 4$, *las cosas se ponen más interesantes. En este caso, las iteraciones son aleatorias y la situación se vuelve completamente caótica.*
Haz un gráfico con `ListPlot[ ]` *y* `GraficoPuntoFijo[ ]` *para esta situación caótica.*

6.7. Práctica 2: El modelo de Ricker.

En esta práctica realizaremos la simulación completa de un modelo clásico discreto no lineal conocido con el nombre de Modelo de Ricker[2]

[2]Extraído del Trabajo Fin de Grado de Francisco Javier Navas Moreno de título "*Modelos discretos no lineales aplicados a la Economía*". Tutor: Juan Navas Ureña.

6.7.1. Introducción

El modelo de Ricker se ha venido utilizando a partir de la publicación del artículo original [15] en 1950 hasta la actualidad, en dinámica de poblaciones de peces, y especialmente en la evolución de una población de salmones.

Según la página web de la *Canadian Aquatic Resources Section of the American Fisheries Society*[3], Willian Edwin Ricker (1908-2001) nació en Waterdown, Ontario y fué un gran biólogo teórico, además de gran entomólogo. Sus libros de textos, especialmente en ecología, siguen teniendo una gran influencia en los estudios actuales de posgrados.

Figura 6.14: W. Ricker en su despacho, fotografiado en 1999 por de David L. Noakes

Se trata de un modelo discreto basado en una ecuación en diferencias, con el objetivo de predecir, conocido el valor inicial y_0 el número de individuos que habrá en cierto momento $t+1$ a partir de la cantidad de individuos en el momento t. Es decir, el modelo es un sistema dinámico del tipo:

$$y_{t+1} = f(y_t) \ ; \quad y_0 = y(0)$$

Sus ecuaciones son:

$$y_{t+1} = y_t e^{r\left(1 - \frac{y_t}{k}\right)} \ , \quad y_0 = y(0) \tag{6.23}$$

donde r se suele interpretar como la tasa intrinseca de crecimeitno de la población y k su capacidad de carga.

El modelo es dependiente de la densidad de la población y generaliza al modelo logístico. En su formulación existe un término que limita el crecimiento de la población para que ésta no crezca sin límite. Observamos que para valores pequenos $y_t \ll k$, la población crecerá exponencialmente, pero a medida que y_t aumenta el factor exponencial de la ecuación reduce el crecimiento de y_{t+1}

[3]http://cars.fisheries.org/legends-of-canadian-fisheries-science-and-management/

6.7.2. Estudio de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrios del modelo son las soluciones constantes. Como la función f que define al modelo viene dada por

$$f(x) = xe^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)}$$

entonces, los puntos de equilibrios se obtienen resolviendo la ecuación

$$f(x) = xe^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)} = x$$

Observemos que estos puntos se obtienen geométricamente como intersección de la curva $f(x)$ y la bisectriz del primer cuadrante.

Si resolvemos la ecuación,

$$xe^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)} = x \quad \Rightarrow \quad x\left(e^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)} - 1\right) = 0$$

es evidente que las soluciones son $x_1^* = 0$, y $x_2^* = k$.

El siguiente paso es clasificar estos puntos como estables o inestables. Un punto de equilibrio es estable cuando la órbita de cualquier punto tiende a es epunto de equilibrio a medida que transcurra el tiempo, estabilizandose en ese valor. Es conocido que ello ocurre cuando el valor absoluto de la primera derivada de la función que define al modelo en el punto de equilibrio es menor que la unidad. Por el contrario, si $|f'(x^*)| > 1$, entonces el punto de equilibrio x^* será inestable.

derivando la función $f(x)$ obtenemos:

$$f'(x) = e^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)}\left(1-\frac{xr}{k}\right)$$

y particularizando en el primer punto de equilibrio $|f'(0)| = |e^r|$. Es decir, si $e^r < 1$, el punto $x_1^* = 0$ será estable, y esto ocurre cuando $r < 0$. Este valor negativo,en ocasiones, no suele interesar ya que el parámetro r representa a una tasa de crecimiento, por ejemplo para una población de salmones.

El segundo punto $x_2^* = k$, será estable cuando $|f'(k)| = |1 - r| < 1$, es decir, si $0 < r < 2$. Por tanto, mientras el valor de r pertenezca al intervalo $(0, 2)$, la órbita de nuestro sistema tenderá a estabilizarse en el valor k.

6.7.3. Simulación del modelo

En esta sección nos proponemos visualizar, a través de distintas simulaciones los resultados obtenidos en la sección anterior. Analizaremos que le ocurre a y_t cuando t aumenta, y cuando variamos los valores del parámetro r.

Estabilidad

El parámetro k es una constante que hace referencia a la capacidad de carga del sistema. Es decir, en el caso de modelos poblacionales, representaría al número máximo de individuos que puede soportar el medioambiente donde esten situados. Para el desarrollo de este estudio tomaremos, sin pérdida de generalidad, el valor de $k = 30$. El programa que hemos usado para realizar esta simulación es Wolfram Mathematica®.

La primera simulación se corresponde con, $r = 0.8$. Es decir,

$$y_{t+1} = y_t e^{0.8\left(1 - \dfrac{y_t}{30}\right)}, \quad y_0 = 3$$

Las ecuaciones que debemos introducir en el programa son, en primer lugar la función que define al modelo

$$f[\mathrm{x\_}] := x * e^{0.8*\left(1-\frac{x}{30}\right)}$$

El siguiente paso será calcular el resultado de la órbita por medio de la orden `NestList`

$$\begin{aligned} In[2] &= NestList[f, 3, 15] \\ Out[2] &= \{3, 6.1633, 11.6378, 18.9901, 25.4703, 28.7404, 29.7222, \\ &\quad 29.9432, 29.9886, 29.9977, 29.9995, 29.9999, 30., 30., 30., 30.\} \end{aligned}$$

Se puede apreciar que si tomamos como semilla el valor inicial $y_0 = 3$, aparecen los 15 primeros términos de la órbita. Estos valores se estabilizan en el 30 que coincide con el punto de equilibrio estable $x_2^* = k = 30$. Este resultado puede visualizarse mejor si representamos gráficamente la órbita.

$$orbita := NestList[f, 3, 15]$$
$$ListPlot[orbita, PlotStyle- > PointSize[0.02]]$$

A continuación puede verse el gráfico obtenido con la orden `ListPlot`.

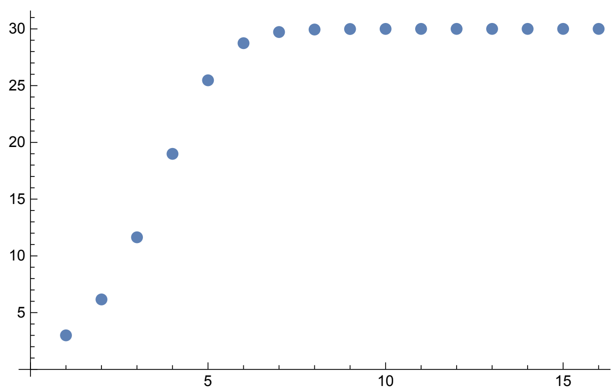


Figura 6.15: Órbita del modelo de Ricker con $y_0 = 3$, $r = 0.8$ y $k = 30$

El eje de abscisas muestra el número dela iteración y en el de ordenada el valor de su órbita. El comportamiento seguiría siendo el mismo si el punto de inicio (y_0=semilla) de la iteración cambia, o si modificamos el valor de k. La órbita siempre tenderá al valor de la capacidad de carga k. Tendremos la posibilidad de analizar este comportamiento un poco más adelante.

La Figura 6.16. se corresponde con el Diagrama de Cobweb del modelo, y se obtiene de la manera siguiente. Si tomamos una semilla cualquiera y_0, el valor del siguiente término de la órbita $y_1 = f(y_0)$ se encontrará sobre la gráfica de la función f. Partiendo de este punto se traza una recta horizontal al eje de abscisas hasta que corte a la bisectriz del primer cuadrante. Este punto tendrá como abscisa y_1, y podemos repetir de nuevo el proceso para calcular el vaor de $y_2 = f(y_1$, y así sucesivamente.

Puede observarse en la Figura como las dos gráficas se cortan en los puntos de equibrio $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 30$

$$\begin{aligned} funciones &= Plot[\{x, f[x]\}, \{x, 0, 1\}, \\ &\quad PlotStyle- > \{RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]\}, \\ &\quad DisplayFunction- > Identity]; \end{aligned}$$

Posteriormente representamos la órbita correspondiente a la semilla $y_0 = 3$

$$\begin{aligned} ruta &= ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[\{orbita, orbita\}]], 2, 1], \\ &\quad PlotJoined- > True]; \\ &\quad funciones = Plot[\{x, f[x]\}, \{x, 0, 35\}, \\ &\quad PlotStyle- > \{RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]\}, \\ &\quad DisplayFunction- > Identity]; \end{aligned}$$

Por último superponemos las dos gráficas obtenidas

$$Show[\{ruta, funciones\}, PlotRange- > \{\{0, 40\}, \{0, 40\}\}, AxesOrigin- > \{0, 0\}]$$

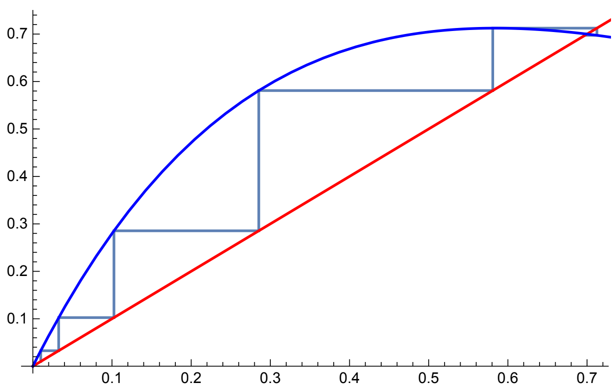


Figura 6.16: Diagrama de Cobweb del modelo de Ricker $r = 0.8$, $k = 30$, $y_0 = 3$

Periodo de orden dos

En el apartado anterior se ha confirmado la estabilidad del punto de equilibrio $x_2^* = k = 30$ cuando $0 < r < 2$. En este apartado analizaremos lo que sucede a la órbita cuando el parámetro $r > 2$, por ejemplo, $r = 2.2$

$$f[\text{x}\_]{:=}x * e^{2.2*\left(1-\frac{x}{30}\right)}$$

Ahora los 30 términos de la órbita correspondiente a la semilla $y_0 = 3$ son:

$$\begin{array}{lcl} In[2] & = & NestList[f, 3, 30] \\ Out[2] & = & \{3, 21.7282, 39.8534, 19.3487, 42.255, 17.202, 43.9717, 15.7834, \\ & & 44.7687, 15.1571, 45.0129, 14.9694, 45.0716, 14.9245, 45.0846, , \\ & & 14.9145, 45.0874, 14.9124, 45.088, 14.9119, 45.0882, 14.9118, 45.0882, \\ & & 14.9118, 45.0882, 14.9118, 45.0882, 14.9118, 45.0882, 14.9118, 45.088\} \end{array}$$

Puede apreciarse como el comportamiento del modelo es totalmente distinto, puesto que no tiende a estabilizarse en un sólo punto. Como se muestra en la Figura 6.17, en esta ocasión la órbita no tiende a un valor sino que intercala dos valores de forma consecutiva, que son 14.91182 y 45.088. El sistema ahora en vez de tener un comportamiento estable, tiene un comportamiento cíclico de orden dos. Esos dos valores son equidistantes al punto de equilibrio $x_2^* = k = 30 = (45.0882 + 14.9118)/2$

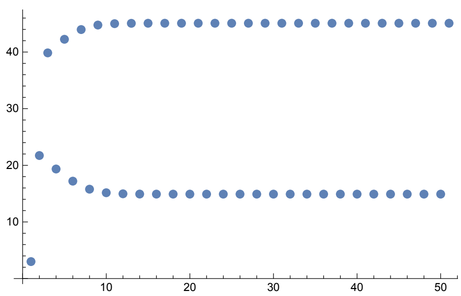


Figura 6.17: Comportamiento del modelo de Ricker $r = 2.2$, $k = 30$, $y_0 = 3$

El diagrama de Cobweb que aparece en la Figura 6.4, es un método gráfico de poder apreciar el comportamiento cíclico del modelo.

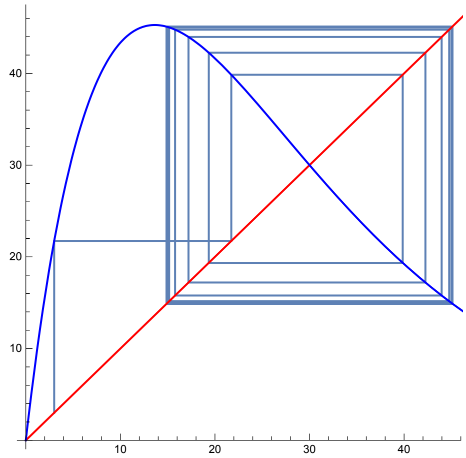


Figura 6.18: Diagrama de Cobweb del modelo de Ricker $r = 2.2$, $k = 30$, $y_0 = 30$

A continuación explicaremos las causas de este comportamiento del modelo. Para ello construimos la función $g(x) = f(f(x))$, encontraremos sus puntos de equilibrio y finalmente los clasificaremos.

Para encontrar los puntos de equilibrios de g debemos resolver la ecuación $g(x) = x$ por medio de la orden *FindRoot* del Wolfram Mathematica®. Previamente se debe representar las funciones $g(x)$ y la bisectriz del primer cuadrante para conocer de forma aproximada los puntos de cortes de ambas funciones.

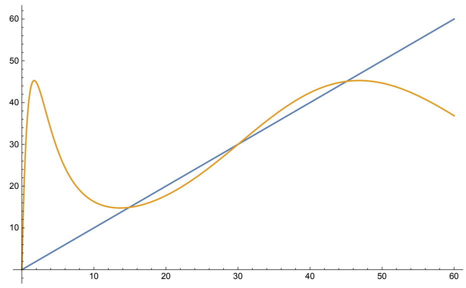


Figura 6.19: Puntos de equilibrio de la función $g(x) = f(f(x))$

Los puntos de equilibrio de g son:

$$\begin{array}{lcl} FindRoot[g[x] == x, \{x, 0.5\}] & \Rightarrow & \{x- > -4.13631 * 10^{-24}\} \\ FindRoot[g[x] == x, \{x, 14\}] & \Rightarrow & \{x- > 14.9118\} \\ FindRoot[g[x] == x, \{x, 29\}] & \Rightarrow & \{x- > 30\} \\ FindRoot[g[x] == x, \{x, 45\}] & \Rightarrow & \{x- > 45.0882\} \end{array}$$

Para estudiar la estabilidad de estos cuatro puntos tendremos que ver si el valor absoluto de la derivada de g en cada uno de ellos es menor o mayor que la unidad.

$$\begin{array}{lcl} g'[x]/.\{x- > 0\} & \Rightarrow & 81.4509 \\ g'[x]/.\{x- > 14.9118\} & \Rightarrow & 0.215728 \\ g'[x]/.\{x- > 30\} & \Rightarrow & 1.44 \\ g'[x]/.\{x- > 45.0882\} & \Rightarrow & 0.215728 \end{array}$$

A la vista de estos resultados podemos concluir que la función g tiene dos puntos de equilibrios $x_1^* = 14.9118$ y $x_2^* = 45.0882$, que son precisamente los puntos periódicos de la función f.

Periodo de orden cuatro

A medida que va aumentando el parámetro r las órbitas se vuelven cada vez más inestables. Si en lugar de $r = 2.2$, ahora nuestro valor es $r = 2.6$, pasaremos de un comportamiento ciclico de orden dos a uno de orden cuatro. En efecto, sea la función que define al modelo:

$$f[\mathrm{x}\_]{:=}x * e^{2.6*\left(1-\frac{x}{30}\right)}$$

En este caso, los 30 términos de la órbita correspondiente a la semilla $y_0 = 3$ son:

$$\begin{aligned}
In[2] &= NestList[f, 3, 30] \\
Out[2] &= \{3, 31.1437, 28.2048, 32.9529, 25.5124, 37.6409, 19.4118, 48.5953, \\
&\quad 9.69815, 56.3414, 5.74604, 47.0176, 10.7582, 57.0137, 5.4855, 45.9107, \\
&\quad 11.5626, 57.1502, 5.43393, 45.6828, 11.7347, 57.1422, 5.43695, \\
&\quad 45.6962, 11.7244, 57.143, 5.43664, 45.6949, 11.7255, 57.1429, 5.43667\}
\end{aligned}$$

A partir de un deterinado momento, los valores que toma la órbita son los números: $0.273592, 1.33334, 0.126856$ y 1.06622.

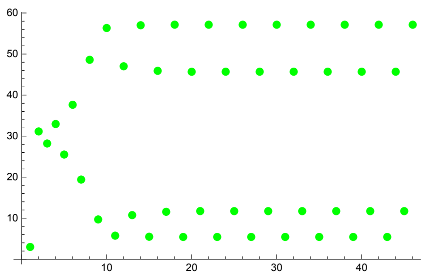


Figura 6.20: Órbita del modelo de Ricker con $y_0 = 3$, $r = 2.6$ y $k = 30$

En la Figura 6.20 se ha dibujado el diagrama de Cobweb correspondiente, y puede apreciarse como a partir de un terminado momento, la órbita es una figura cerrada (cuadrado).

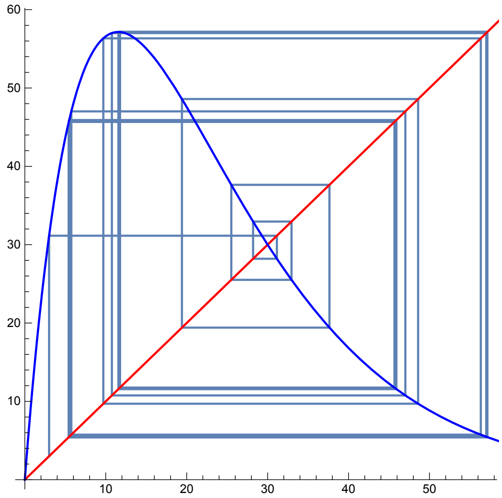


Figura 6.21: Diagrama de Cobweb del modelo de Ricker $r = 2.6$, $k = 30$, $y_0 = 30$

Procediento de la misma manera que en el apartado anterior, es fácil ver que los ocho puntos de equilibrio de esta función g son los que se han representado en la Figura 6.21 y de ellos los valores de los que son estable son:

$$x_1^* = 5.43664;\ x_2^* = 11.7255;\ x_3^* = 45.6949;\ x_4^* = 57.1429$$

que coinciden con los valores periódicos de la función f.

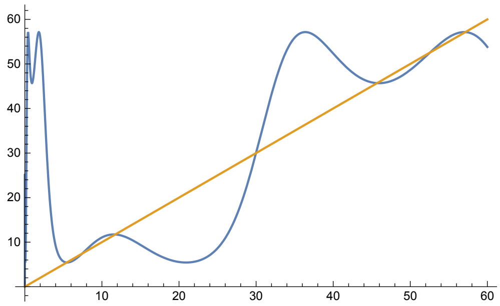


Figura 6.22. Puntos de equilibrio de la función $g(x) = f(f(f(f(x))))$

Caos determinista

Si seguimos aumentando el valor de r observaremos un comportamiento mucho más complicado del modelo. Sea la función que define al modelo :

$$f[\text{x\_}]\text{:=}x * e^{2.6*\left(1-\frac{x}{30}\right)}$$

En este caso, los últimos 34 términos de la órbita (de 200 elementos) correspondiente a la semilla $y_0 = 3$ son:

$$\begin{aligned} In[2] &= NestList[f, 3, 200] \\ Out[2] &= \{47.4369, 9.87569, 60.4166, 3.91091, 40.9269, 15.3079, 57.4353, 4.86216, \\ &\quad 46.7067, 10.3842, 60.6856, 3.83435, 40.4032, 15.8414, 56.6506, 5.14668, \\ &\quad 48.1899, 9.37508, 59.9972, 4.03316, 41.7444, 14.5061, 58.4996, 4.4999, 44.6593, \\ &\quad 11.938, 60.6614, 3.8412, 40.4504, 15.7926, 56.7246, 5.11918, 48.0512, 9.46553\} \end{aligned}$$

En esta ocasión, los elementos no se repiten y se dice que el comportamiento del modelo es caótico.

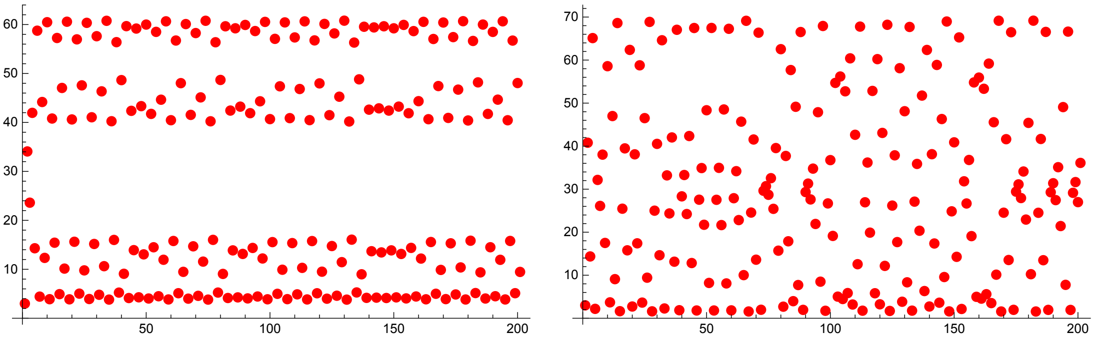


Figura 6.23: Órbitas del modelo de Ricker con $r = 2.7$ (izquierda) y $r = 2.9$ (derecha)

Este comportamiento caótico se ha hace más evidente si se observa los diagramas de Cobweb, Figura 6.24, correspondientes a los valores del parámetro $r = 2.7$, y $r = 2.9$. Es evidente que las órbitas del modelo no tienden hacia ningún valor en concreto, sino que ocupan todo el espacio de la figura representada .

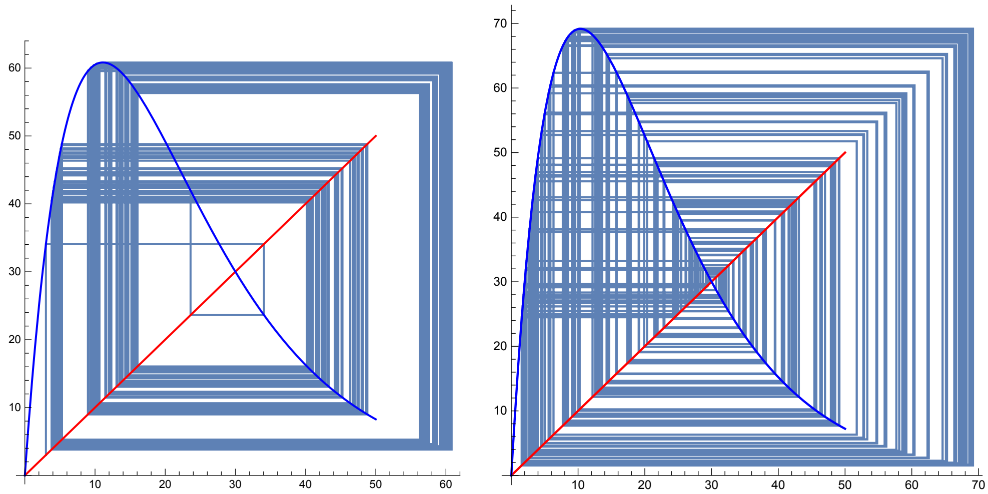


Figura 6.24: Diagramas de Cobweb para $r = 2.7$ (izquierda) y $r = 2.9$ (derecha)

El caos determinista es un punto de partida muy interesante para el estudio de la Teoría del Caos y de la Ciencia de la Complejidad y que se encuentra profundamente conectado con el estudio de la Sensibilidad de las Condiciones Iniciales.

Diagrama de bifurcación

Como resumen de los apartados anteriores, podemos decir que un modelo "relativamente sencillo", como es este modelo determinista, exhibe un comportamiento muy complicado. Desde la estabilidad, periodicidad y caos determinista, según los valores que asignemos a un parámetro en el intervalo $0 < r < 3$. Es conocido que todos estos comportamientos diferentes pueden visualizarse mejor en el llamado diagrama de bifurcación del modelo que se encuentra en la Figura 6.25. Su construcción se ha realizado en Matlab® y programa para su cálculo puede obtenerse en el Anexo I de la presente memoria.

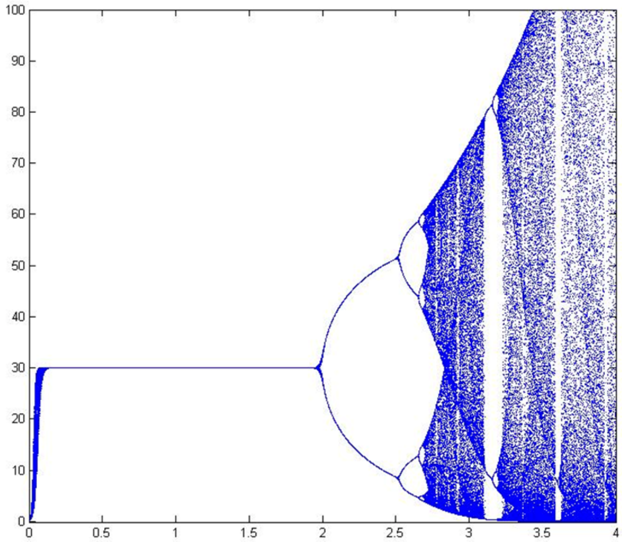


Figura 6.25: Diagrama de bifurcación del modelo de Ricker.

Si analizamos este diagrama, podemos observar como para valores de $0 < r < 2$ las órbitas del modelo tienden siempre al punto fijo $k = 30$, independientemente del valor inicial que tomemos. Para un valor un poco mayor de $r = 2$ el modelo cambia de comportamiento siendo ahora sus órbitas 2-periódicas. Es decir, se ha producido una bifurcación del tipo horca, aquella donde el punto fijo se desdobla en dos, debido a que el punto fijo estable se ha convertido en inestable dividiéndose en dos nuevos puntos estables. Y así sucesivamente, de tal manera que estos nuevos desdoblamientos llevan finalmente a un comportamiento caótico. Ahora bien, es interesante comprobar como dentro este comportamiento caótico existen zonas donde éste desaparece. Observemos también que esta figura del diagrama de bifurcación tiene la propiedad interesante de contener cópias de ella misma a pequena escala, esto es, el diagrama de bifurcación tiene estructura fractal.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ACERO, I.; LÓPEZ, M. *Ecuaciones Diferenciales. Teoría y Problemas.* Editorial Tebar Flores, Madrid, (1997).

[2] ALLMAN E.S.; RHODES J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction.* Cambridge University Press, (2004)

[3] BALACCO, H.R.; MARADONA, G. *Senal de Caos en Series de tiempo financieras. El spectrum de Lyapunov en el análisis de "sensibilidad a condiciones iniciales".* FCE, UN de Cuyo, Mendoza- Argentina. Disponible en: http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2000/balacco-maradona.pdf, (Marzo-2017).

[4] BALIBREA GALLEGO, F. *Caos y atractores extranos. Dos problemas no lineales en matemáticas.* La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Espanola, Vol. 2, núm, 1; 99-116, (1999)

[5] CORTÉS, R.; CORTÉS J.C.; JÓDAR, L.; ORERO, G.; ROSELLÓ, D.; VILLANUEVA, R.J. *Problemas y Modelos Matemáticos para la Administración y Dirección de Empresas.* Editorial Universidad Politécnica de Valencia, (2003).

[6] FERNÁNDEZ DÍAZ, A.; GRAU CARLES, P. *Dinámica caótica en economía. teoría y aplicaciones.* Delta Publicaciones, (2014)

[7] GLEICK, J. *Caos. La Creación de una Nueva Ciencia.* Seix Barrall, (1989)

[8] GONZÁLEZ, M.T. *Modelos matemáticos discretos en las ciencias de la naturaleza. Teoría y problemas.* Editorial Díaz de Santos, (2002).

[9] GUTIERREZ, J.M. *Sistemas no lineales. Conceptos, algoritmos y aplicaciones.* V Conferencia Nacional de Ciencias de la Computacin. CCBOL' 98. Disponible en: http://personales.unican.es/gutierjm/docs/tu_SistNoLin.pdf, (Mayo-2017).

[10] LOFFREDO, M.I. *Testing Chaos and Fractal Properties in Economic Time Series.* International Mathematical Symposium 1999. Disponible en: http://www.internationalmathematicasymposium.org/IMS99/paper25/ims99paper25.pdf, (Abril-2017).

[11] MANDELBROIT, B.; HUDSON, R.H. *Fractales y finanzas. Una aproximación a los mercados: arriesgar, perder y ganar.* Tusquet editores, (2006)

[12] MORGA, S. *Ejercicios de Matemáticas Aplicadas a la Economía* Editorial AC, Madrid, (1997).

[13] NAVAS, J. *Modelos Matemáticos en Biología.*Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén. (2009)

[14] PRIGOGINE, I. *Las leyes del Caos.* Drakontos, (1997)

[15] RICKER W.E. *Cycle dominance among the Fraser sockeye.* Ecology 31(1): 6-26, (1950)

[16] RICKER W.E. *Handbook of Computation for Biological Satatistics of Fish Populations.* (1958)

[17] STEWART, I. *¿Juega Dios a los dados?* Drakontos, (1991)