

6.6. Práctica 1: Conceptos básicos de dinámica discreta

En esta práctica vamos a usar la potencia de la recursión para experimentar con diferentes modelos discretos lineales y no lineales. Observaremos puntos de bifurcación y caos para el modelo logístico discreto.

6.6.1. Introducción

Consideremos la siguiente ecuación $x = \cos x$. Cualquier solución de esta ecuación es la abscisa de la intersección de la recta $y = x$ con la gráfica de la función $y = \cos x$.

EJEMPLO 6.6 *Dibuja las dos gráficas y comprueba que hay un punto de intersección en el intervalo $[0, 1]$.*

En general, cualquier solución p de la ecuación $x = g(x)$ se llama un punto fijo de la función g .

La fórmula de iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ se llama *iteración Funcional o Iteración de Punto Fijo* y en muchos casos (dependiendo de la función g y del punto inicial x_0) la sucesión $\{x_n\}_n$ converge al punto fijo.

Para poder construir estas sucesiones, podemos utilizar las siguientes órdenes de Mathematica

`Nest[g,x0,n]` : da el término n-ésimo de la sucesión.

`NestList[g,x0,n]` : da una lista con las iteraciones desde x_0 a n .

`FixedPoint[g,x0]`

`FixedPointListNest[g,x0]`

Las órdenes `FixedPoint[g,x0]` y `FixedPointListNest[g,x0]` son similares a las anteriores, salvo que paran cuando encuentran dos iteraciones sucesivas iguales.

EJEMPLO 6.7 *Utiliza las funciones anteriores y construye la sucesión de iteraciones que se obtiene para $g(x) = \cos x$ comenzando en $x_0 = 0$.*

Con la orden `ListPlot[]` podemos ahora dibujar los puntos y hacer una interpretación gráfica de lo que ocurre.

Empezamos definiendo la función

`f[x] := Cos[x]`

a continuación, construimos los veinte primeros términos de la órbita

`iters=NestList[f,0.,20]`

Dibujamos en primer lugar la función $f[x]$ y la bisectriz del primer cuadrante.

```
fg=Plot[{x,f[x]}, {x,0,1.5}, PlotStyle->{RGBColor[1,0,0], RGBColor[0,0,1]},]
DisplayFunction->Identity]
```

trazamos la órbita

```
gi=ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{iters, iters}]]],2,1],PlotJoined
->True,DisplayFunction->Identity]
```

Finalmente, superponemos los dos gráficos anteriores. `Show[fg,gi,AspectRatio->1, DisplayFunction->DisplayFunction]`

EJEMPLO 6.8 *Supongamos que nos encontramos en una árida isla cerca de la costa de un rico continente. Estamos interesados en un determinado tipo de gaviotas que viven en esta isla. Por desgracia, las condiciones medioambientales no son las más adecuadas, de tal forma que si se encontraran aisladas su población disminuiría según el siguiente modelo exponencial o de Malthus*

$$x_{k+1} = -1.5x_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.22)$$

donde x_k es la población de pájaros en el tiempo k .

Hay una gran colonia de gaviotas en el continente y cada año 100 de ellas emigran a nuestra isla.

- 1.- Modifica el modelo (6.22) para tener en cuenta el factor de la emigración
- 2.- Supongamos que inicialmente hay 30 gaviotas. Encontrar los primeros 10 términos de su órbita
- 3.- Describir el comportamiento a “largo plazo” de la colonia de gaviotas
- 4.- Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

Repetir el ejercicio suponiendo que ahora el modelo exponencial es:

$$x_{k+1} = -0.5x_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

6.6.2. Caos

El *Teorema del Punto Fijo de Brouwer* establece que toda función continua de un intervalo cerrado en sí mismo $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$.

En este apartado, analizaremos el comportamiento de los términos de la iteración funcional con respecto a los puntos fijos.

Si x^* es un punto fijo ($f(x) = x$), cuando la función f es derivable, y

$$|f'(x^*)| < 1$$

entonces, el punto x^* se llama **punto fijo atractor**. Cuando una iteración funcional comienza suficientemente cerca de él, irremediablemente cae dentro de su ámbito de influencia y la sucesión (órbita) converge.

Por el contrario, si

$$|f'(x^*)| > 1$$

se trata de un **punto fijo repulsor**, y por muy cerca de él que se comience, la sucesión termina por alejarse.

EJEMPLO 6.9 Consideremos la familia de parábolas

$$y = kx(1 - x), \quad k > 0.$$

Empezamos definiendo una función (de k y x) para la familia anterior.

$$p[k_][x_] := k x (1 - x)$$

Utilizando Mathematica:

- 1.- ¿Cuáles son los puntos fijos en función de k ?
- 2.- Considera el caso $0 < k < 1$. ¿Cuáles son los puntos fijos?. ¿Son los puntos fijos atractores o repulsores?. Para ello, usa `ListPlot[]` y `GraficoPuntoFijo[]` para ver qué ocurre con la iteración funcional para distintas elecciones del punto inicial. Toma, por ejemplo, $k = 0.5$ y comenta los resultados.
- 3.- Cuando $1 < k < 3$, ¿de qué tipo son los puntos fijos?. Comprueba gráficamente que para $k = 2.6$ la iteración funcional converge rápidamente al punto fijo $8/13$.
- 4.- Toma $k = 3.2$ y usa `ListPlot[]` y `GraficoPuntoFijo[]`. Podrás ver que después de algunas iteraciones, los términos sucesivos oscilan entre dos valores diferentes, y quedan atrapados en un bucle sin fin. Es lo que se llama un **ciclo periódico de longitud 2**. ¿Qué ocurre cuando $k = 3.5$. ¿Hay un ciclo periódico?. ¿De qué longitud?
- 5.- Cuando $k = 4$, las cosas se ponen más interesantes. En este caso, las iteraciones son aleatorias y la situación se vuelve completamente caótica. Haz un gráfico con `ListPlot[]` y `GraficoPuntoFijo[]` para esta situación caótica.

6.7. Práctica 2: El modelo de Ricker.

En esta práctica realizaremos la simulación completa de un modelo clásico discreto no lineal conocido con el nombre de Modelo de Ricker²

²Extraído del Trabajo Fin de Grado de Francisco Javier Navas Moreno de título “Modelos discretos no lineales aplicados a la Economía”. Tutor: Juan Navas Ureña.

6.7.1. Introducción

El modelo de Ricker se ha venido utilizando a partir de la publicación del artículo original [15] en 1950 hasta la actualidad, en dinámica de poblaciones de peces, y especialmente en la evolución de una población de salmones.

Según la página web de la *Canadian Aquatic Resources Section of the American Fisheries Society*³, Willian Edwin Ricker (1908-2001) nació en Waterdown, Ontario y fué un gran biólogo teórico, además de gran entomólogo. Sus libros de textos, especialmente en ecología, siguen teniendo una gran influencia en los estudios actuales de posgrados.



Figura 6.14: W. Ricker en su despacho, fotografiado en 1999 por de David L. Noakes

Se trata de un modelo discreto basado en una ecuación en diferencias, con el objetivo de predecir, conocido el valor inicial y_0 el número de individuos que habrá en cierto momento $t + 1$ a partir de la cantidad de individuos en el momento t . Es decir, el modelo es un sistema dinámico del tipo:

$$y_{t+1} = f(y_t) ; \quad y_0 = y(0)$$

Sus ecuaciones son:

$$y_{t+1} = y_t e^{r \left(1 - \frac{y_t}{k}\right)}, \quad y_0 = y(0) \quad (6.23)$$

donde r se suele interpretar como la tasa intrínseca de crecimiento de la población y k su capacidad de carga.

El modelo es dependiente de la densidad de la población y generaliza al modelo logístico. En su formulación existe un término que limita el crecimiento de la población para que ésta no crezca sin límite. Observamos que para valores pequeños $y_t \ll k$, la población crecerá exponencialmente, pero a medida que y_t aumenta el factor exponencial de la ecuación reduce el crecimiento de y_{t+1}

³<http://cars.fisheries.org/legends-of-canadian-fisheries-science-and-management/>

6.7.2. Estudio de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrios del modelo son las soluciones constantes. Como la función f que define al modelo viene dada por

$$f(x) = xe^{r\left(1 - \frac{x}{k}\right)}$$

entonces, los puntos de equilibrios se obtienen resolviendo la ecuación

$$f(x) = xe^{r\left(1 - \frac{x}{k}\right)} = x$$

Observemos que estos puntos se obtienen geoméricamente como intersección de la curva $f(x)$ y la bisectriz del primer cuadrante.

Si resolvemos la ecuación,

$$xe^{r\left(1 - \frac{x}{k}\right)} = x \quad \Rightarrow \quad x \left(e^{r\left(1 - \frac{x}{k}\right)} - 1 \right) = 0$$

es evidente que las soluciones son $x_1^* = 0$, y $x_2^* = k$.

El siguiente paso es clasificar estos puntos como estables o inestables. Un punto de equilibrio es estable cuando la órbita de cualquier punto tiende a ese punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo, estabilizándose en ese valor. Es conocido que ello ocurre cuando el valor absoluto de la primera derivada de la función que define al modelo en el punto de equilibrio es menor que la unidad. Por el contrario, si $|f'(x^*)| > 1$, entonces el punto de equilibrio x^* será inestable.

derivando la función $f(x)$ obtenemos:

$$f'(x) = e^{r\left(1 - \frac{x}{k}\right)} \left(1 - \frac{xr}{k}\right)$$

y particularizando en el primer punto de equilibrio $|f'(0)| = |e^r|$. Es decir, si $e^r < 1$, el punto $x_1^* = 0$ será estable, y esto ocurre cuando $r < 0$. Este valor negativo, en ocasiones, no suele interesar ya que el parámetro r representa a una tasa de crecimiento, por ejemplo para una población de salmones.

El segundo punto $x_2^* = k$, será estable cuando $|f'(k)| = |1 - r| < 1$, es decir, si $0 < r < 2$. Por tanto, mientras el valor de r pertenezca al intervalo $(0, 2)$, la órbita de nuestro sistema tenderá a estabilizarse en el valor k .

6.7.3. Simulación del modelo

En esta sección nos proponemos visualizar, a través de distintas simulaciones los resultados obtenidos en la sección anterior. Analizaremos que le ocurre a y_t cuando t aumenta, y cuando variamos los valores del parámetro r .

Estabilidad

El parámetro k es una constante que hace referencia a la capacidad de carga del sistema. Es decir, en el caso de modelos poblacionales, representaría al número máximo de individuos que puede soportar el medioambiente donde esten situados. Para el desarrollo de este estudio tomaremos, sin pérdida de generalidad, el valor de $k = 30$. El programa que hemos usado para realizar esta simulación es Wolfram Mathematica®.

La primera simulación se corresponde con, $r = 0.8$. Es decir,

$$y_{t+1} = y_t e^{0.8 \left(1 - \frac{y_t}{30}\right)}, \quad y_0 = 3$$

Las ecuaciones que debemos introducir en el programa son, en primer lugar la función que define al modelo

$$f[x_]:=x * e^{0.8*(1-\frac{x}{30})}$$

El siguiente paso será calcular el resultado de la órbita por medio de la orden `NestList`

```
In[2] = NestList[f, 3, 15]
Out[2] = {3, 6.1633, 11.6378, 18.9901, 25.4703, 28.7404, 29.7222,
          29.9432, 29.9886, 29.9977, 29.9995, 29.9999, 30., 30., 30., 30.}
```

Se puede apreciar que si tomamos como semilla el valor inicial $y_0 = 3$, aparecen los 15 primeros términos de la órbita. Estos valores se estabilizan en el 30 que coincide con el punto de equilibrio estable $x_2^* = k = 30$. Este resultado puede visualizarse mejor si representamos gráficamente la órbita.

```
orbita := NestList[f, 3, 15]
ListPlot[orbita, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```

A continuación puede verse el gráfico obtenido con la orden `ListPlot`.

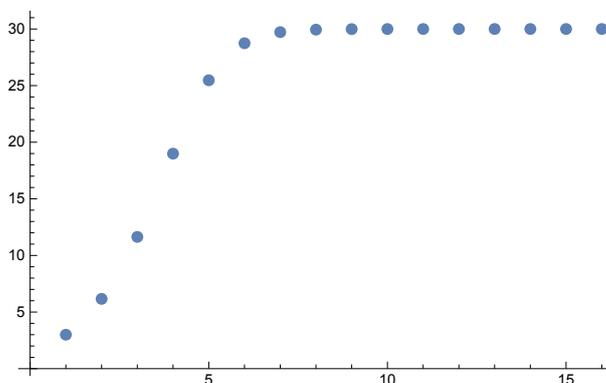


Figura 6.15: Órbita del modelo de Ricker con $y_0 = 3$, $r = 0.8$ y $k = 30$

El eje de abscisas muestra el número de la iteración y en el de ordenada el valor de su órbita. El comportamiento seguiría siendo el mismo si el punto de inicio (y_0 =semilla) de la iteración cambia, o si modificamos el valor de k . La órbita siempre tenderá al valor de la capacidad de carga k . Tendremos la posibilidad de analizar este comportamiento un poco más adelante.

La Figura 6.16. se corresponde con el Diagrama de Cobweb del modelo, y se obtiene de la manera siguiente. Si tomamos una semilla cualquiera y_0 , el valor del siguiente término de la órbita $y_1 = f(y_0)$ se encontrará sobre la gráfica de la función f . Partiendo de este punto se traza una recta horizontal al eje de abscisas hasta que corte a la bisectriz del primer cuadrante. Este punto tendrá como abscisa y_1 , y podemos repetir de nuevo el proceso para calcular el valor de $y_2 = f(y_1)$, y así sucesivamente.

Puede observarse en la Figura como las dos gráficas se cortan en los puntos de equilibrio $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 30$

```
funciones = Plot[{x, f[x]}, {x, 0, 1},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
  DisplayFunction -> Identity];
```

Posteriormente representamos la órbita correspondiente a la semilla $y_0 = 3$

```
ruta = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{orbita, orbita}]], 2, 1],
  PlotJoined -> True];
funciones = Plot[{x, f[x]}, {x, 0, 35},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
  DisplayFunction -> Identity];
```

Por último superponemos las dos gráficas obtenidas

```
Show[{ruta, funciones}, PlotRange -> {{0, 40}, {0, 40}}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

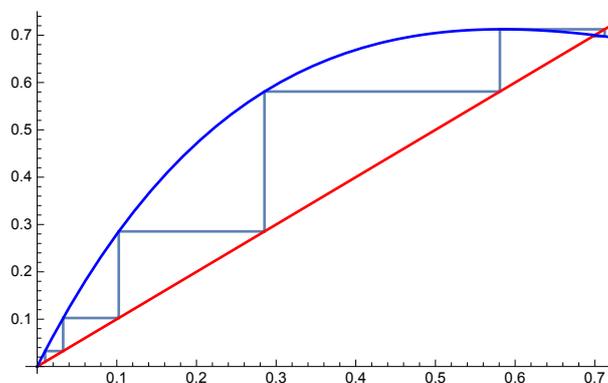


Figura 6.16: Diagrama de Cobweb del modelo de Ricker $r = 0.8$, $k = 30$, $y_0 = 3$

Periodo de orden dos

En el apartado anterior se ha confirmado la estabilidad del punto de equilibrio $x_2^* = k = 30$ cuando $0 < r < 2$. En este apartado analizaremos lo que sucede a la órbita cuando el parámetro $r > 2$, por ejemplo, $r = 2.2$

$$f[x_+] := x * e^{2.2 * (1 - \frac{x}{30})}$$

Ahora los 30 términos de la órbita correspondiente a la semilla $y_0 = 3$ son:

```
In[2] = NestList[f, 3, 30]
Out[2] = {3, 21.7282, 39.8534, 19.3487, 42.255, 17.202, 43.9717, 15.7834,
44.7687, 15.1571, 45.0129, 14.9694, 45.0716, 14.9245, 45.0846, ,
14.9145, 45.0874, 14.9124, 45.088, 14.9119, 45.0882, 14.9118, 45.0882,
14.9118, 45.0882, 14.9118, 45.0882, 14.9118, 45.0882, 14.9118, 45.088}
```

Puede apreciarse como el comportamiento del modelo es totalmente distinto, puesto que no tiende a estabilizarse en un sólo punto. Como se muestra en la Figura 6.17, en esta ocasión la órbita no tiende a un valor sino que intercala dos valores de forma consecutiva, que son 14.91182 y 45.088. El sistema ahora en vez de tener un comportamiento estable, tiene un comportamiento cíclico de orden dos. Esos dos valores son equidistantes al punto de equilibrio $x_2^* = k = 30 = (45.0882 + 14.9118)/2$

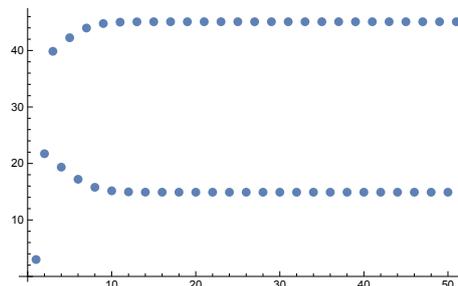


Figura 6.17: Comportamiento del modelo de Ricker $r = 2.2$, $k = 30$, $y_0 = 3$

El diagrama de Cobweb que aparece en la Figura 6.4, es un método gráfico de poder apreciar el comportamiento cíclico del modelo.

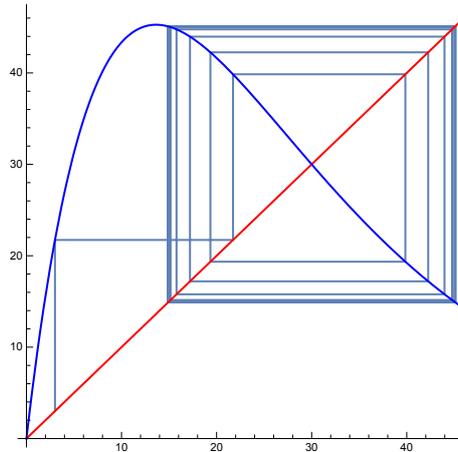


Figura 6.18: Diagrama de Cobweb del modelo de Ricker $r = 2.2$, $k = 30$, $y_0 = 30$

A continuación explicaremos las causas de este comportamiento del modelo. Para ello construimos la función $g(x) = f(f(x))$, encontraremos sus puntos de equilibrio y finalmente los clasificaremos.

Para encontrar los puntos de equilibrios de g debemos resolver la ecuación $g(x) = x$ por medio de la orden *FindRoot* del Wolfram Mathematica®. Previamente se debe representar las funciones $g(x)$ y la bisectriz del primer cuadrante para conocer de forma aproximada los puntos de cortes de ambas funciones.

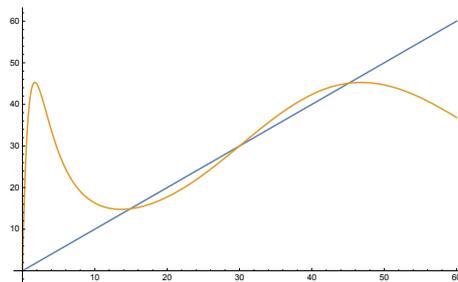


Figura 6.19: Puntos de equilibrio de la función $g(x) = f(f(x))$

Los puntos de equilibrio de g son:

$$\begin{aligned} \text{FindRoot}[g[x] == x, \{x, 0.5\}] &\Rightarrow \{x \rightarrow -4.13631 * 10^{-24}\} \\ \text{FindRoot}[g[x] == x, \{x, 14\}] &\Rightarrow \{x \rightarrow 14.9118\} \\ \text{FindRoot}[g[x] == x, \{x, 29\}] &\Rightarrow \{x \rightarrow 30\} \\ \text{FindRoot}[g[x] == x, \{x, 45\}] &\Rightarrow \{x \rightarrow 45.0882\} \end{aligned}$$

Para estudiar la estabilidad de estos cuatro puntos tendremos que ver si el valor absoluto de la derivada de g en cada uno de ellos es menor o mayor que la unidad.

$$\begin{aligned} g'[x] /. \{x \rightarrow 0\} &\Rightarrow 81.4509 \\ g'[x] /. \{x \rightarrow 14.9118\} &\Rightarrow 0.215728 \\ g'[x] /. \{x \rightarrow 30\} &\Rightarrow 1.44 \\ g'[x] /. \{x \rightarrow 45.0882\} &\Rightarrow 0.215728 \end{aligned}$$

A la vista de estos resultados podemos concluir que la función g tiene dos puntos de equilibrios $x_1^* = 14.9118$ y $x_2^* = 45.0882$, que son precisamente los puntos periódicos de la función f .

Periodo de orden cuatro

A medida que va aumentando el parámetro r las órbitas se vuelven cada vez más inestables. Si en lugar de $r = 2.2$, ahora nuestro valor es $r = 2.6$, pasaremos de un comportamiento ciclico de orden dos a uno de orden cuatro. En efecto, sea la función que define al modelo:

$$f[x_]:=x * e^{2.6*(1-\frac{x}{30})}$$

En este caso, los 30 términos de la órbita correspondiente a la semilla $y_0 = 3$ son:

```
In[2] = NestList[f, 3, 30]
Out[2] = {3, 31.1437, 28.2048, 32.9529, 25.5124, 37.6409, 19.4118, 48.5953,
          9.69815, 56.3414, 5.74604, 47.0176, 10.7582, 57.0137, 5.4855, 45.9107,
          11.5626, 57.1502, 5.43393, 45.6828, 11.7347, 57.1422, 5.43695,
          45.6962, 11.7244, 57.143, 5.43664, 45.6949, 11.7255, 57.1429, 5.43667}
```

A partir de un determinado momento, los valores que toma la órbita son los números: 0.273592, 1.33334, 0.126856 y 1.06622.

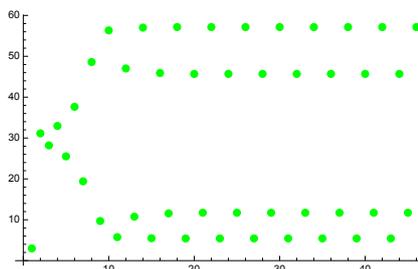


Figura 6.20: Órbita del modelo de Ricker con $y_0 = 3$, $r = 2.6$ y $k = 30$

En la Figura 6.20 se ha dibujado el diagrama de Cobweb correspondiente, y puede apreciarse como a partir de un determinado momento, la órbita es una figura cerrada (cuadrado).

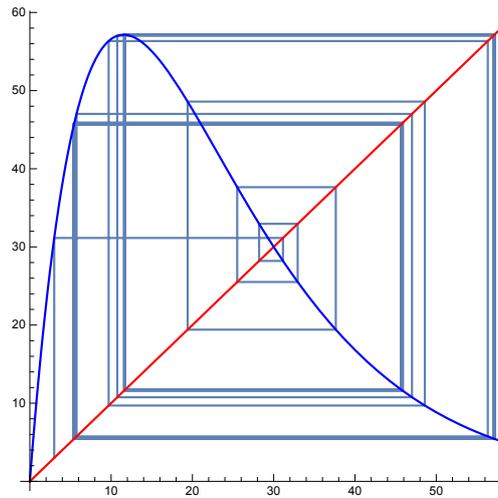


Figura 6.21: Diagrama de Cobweb del modelo de Ricker $r = 2.6$, $k = 30$, $y_0 = 30$

Procediendo de la misma manera que en el apartado anterior, es fácil ver que los ocho puntos de equilibrio de esta función g son los que se han representado en la Figura 6.21 y de ellos los valores de los que son estable son:

$$x_1^* = 5.43664; \quad x_2^* = 11.7255; \quad x_3^* = 45.6949; \quad x_4^* = 57.1429$$

que coinciden con los valores periódicos de la función f .

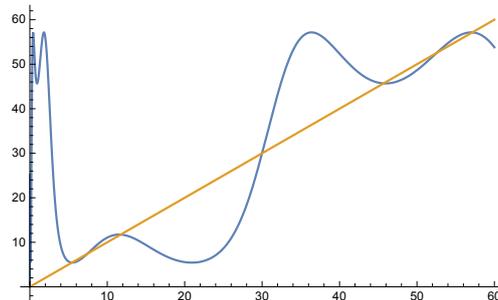


Figura 6.22. Puntos de equilibrio de la función $g(x) = f(f(f(f(x))))$

Caos determinista

Si seguimos aumentando el valor de r observaremos un comportamiento mucho más complicado del modelo. Sea la función que define al modelo :

$$f[x_] := x * e^{2.6 * (1 - \frac{x}{30})}$$

En este caso, los últimos 34 términos de la órbita (de 200 elementos) correspondiente a la semilla $y_0 = 3$ son:

```
In[2] = NestList[f, 3, 200]
Out[2] = {47.4369, 9.87569, 60.4166, 3.91091, 40.9269, 15.3079, 57.4353, 4.86216,
46.7067, 10.3842, 60.6856, 3.83435, 40.4032, 15.8414, 56.6506, 5.14668,
48.1899, 9.37508, 59.9972, 4.03316, 41.7444, 14.5061, 58.4996, 4.4999, 44.6593,
11.938, 60.6614, 3.8412, 40.4504, 15.7926, 56.7246, 5.11918, 48.0512, 9.46553}
```

En esta ocasión, los elementos no se repiten y se dice que el comportamiento del modelo es caótico.

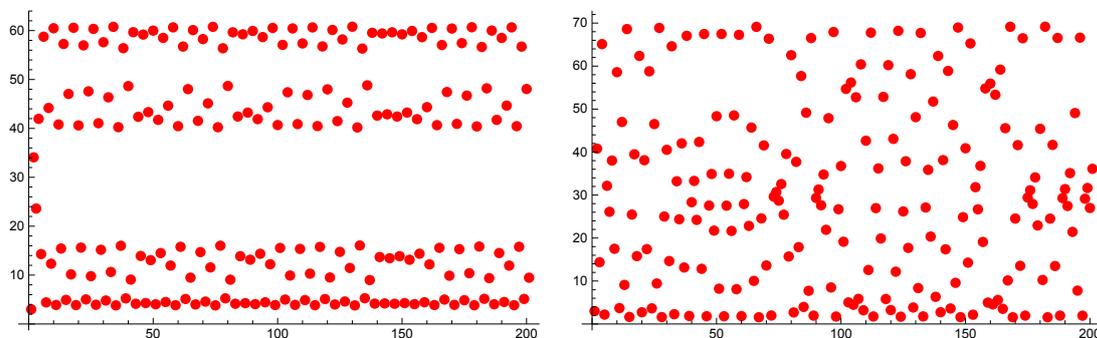


Figura 6.23: Órbitas del modelo de Ricker con $r = 2.7$ (izquierda) y $r = 2.9$ (derecha)

Este comportamiento caótico se hace más evidente si se observa los diagramas de Cobweb, Figura 6.24, correspondientes a los valores del parámetro $r = 2.7$, y $r = 2.9$. Es evidente que las órbitas del modelo no tienden hacia ningún valor en concreto, sino que ocupan todo el espacio de la figura representada.

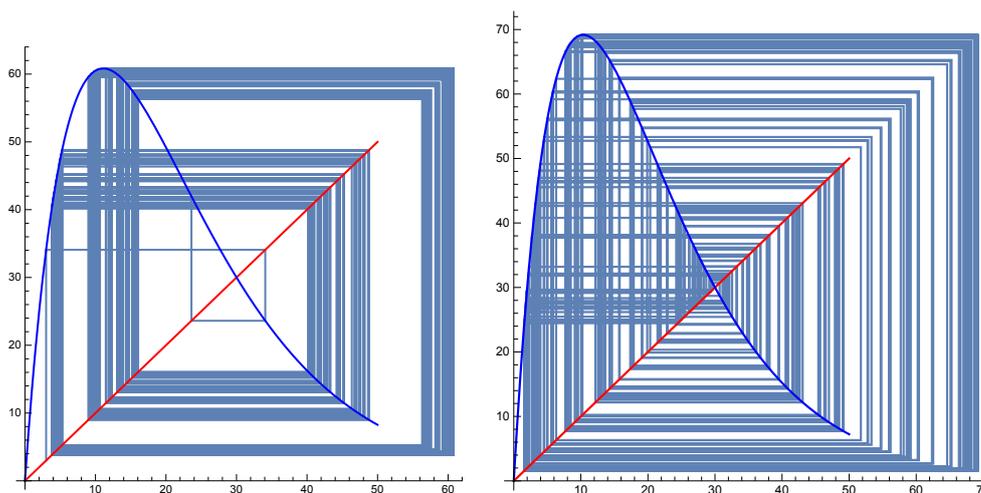


Figura 6.24: Diagramas de Cobweb para $r = 2.7$ (izquierda) y $r = 2.9$ (derecha)

El caos determinista es un punto de partida muy interesante para el estudio de la Teoría del Caos y de la Ciencia de la Complejidad y que se encuentra profundamente conectado con el estudio de la Sensibilidad de las Condiciones Iniciales.

Diagrama de bifurcación

Como resumen de los apartados anteriores, podemos decir que un modelo “relativamente sencillo”, como es este modelo determinista, exhibe un comportamiento muy complicado. Desde la estabilidad, periodicidad y caos determinista, según los valores que asignemos a un parámetro en el intervalo $0 < r < 3$. Es conocido que todos estos comportamientos diferentes pueden visualizarse mejor en el llamado diagrama

de bifurcación del modelo que se encuentra en la Figura 6.25. Su construcción se ha realizado en Matlab® y programa para su cálculo puede obtenerse en el Anexo I de la presente memoria.

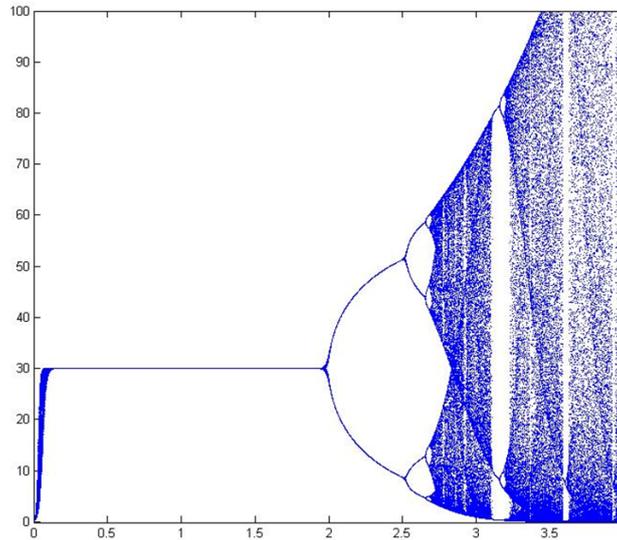


Figura 6.25: Diagrama de bifurcación del modelo de Ricker.

Si analizamos este diagrama, podemos observar como para valores de $0 < r < 2$ las órbitas del modelo tienden siempre al punto fijo $k = 30$, independientemente del valor inicial que tomemos. Para un valor un poco mayor de $r = 2$ el modelo cambia de comportamiento siendo ahora sus órbitas 2-periódicas. Es decir, se ha producido una bifurcación del tipo horca, aquella donde el punto fijo se desdobra en dos, debido a que el punto fijo estable se ha convertido en inestable dividiéndose en dos nuevos puntos estables. Y así sucesivamente, de tal manera que estos nuevos desdoblamientos llevan finalmente a un comportamiento caótico. Ahora bien, es interesante comprobar como dentro este comportamiento caótico existen zonas donde éste desaparece. Observemos también que esta figura del diagrama de bifurcación tiene la propiedad interesante de contener copias de ella misma a pequeña escala, esto es, el diagrama de bifurcación tiene estructura fractal.