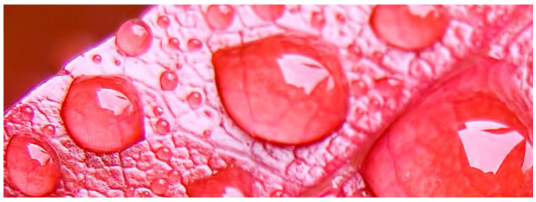


Capítulo 6

APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

6.1. Introducción

En este tema estudiaremos los casos más simples de crecimiento de poblaciones, cuando la variable tiempo toma valores en un conjunto discreto, clasificados en modelos independientes y dependientes de la densidad de la población.

DEFINICIÓN 6.1.1 *Diremos que el crecimiento de una población es independiente de la densidad si las tasas de nacimiento y mortalidad no dependen del tamaño de la población.*

Recordemos que en el estudio de los modelos matriciales, ya hemos tenido ocasión de analizar el comportamiento de ciertos modelos discretos y una breve introducción a los modelos exponencial y logístico. Ahora, aplicaremos parte de los resultados obtenidos en los temas anteriores y realizaremos un estudio más completo de algunos de estos modelos.

6.2. Crecimiento independiente de la densidad de la población

Comenzaremos analizando el modelo más simple de crecimiento de poblaciones de una sola especie. Supondremos para empezar que:

- La tasa de nacimientos es proporcional al número de individuos presentes.

- La tasa de muertes es proporcional al número de individuos presentes.

Existen ciertos tipos de animales, como por ejemplo la mariposa *Euphydrias editha,* que se reproduce una vez al año, poniendo sus huevos a primeros de Abril. Las mariposas adultas vuelan durante un período corto de tiempo y entonces mueren. Existen ratones que tienen crías solamente una vez al año en primavera, y que viven alrededor de diez años. Para este tipo de especies, un modelo que suponga que los nacimientos se dan continuamente y que las generaciones se superponen es inapropiado.

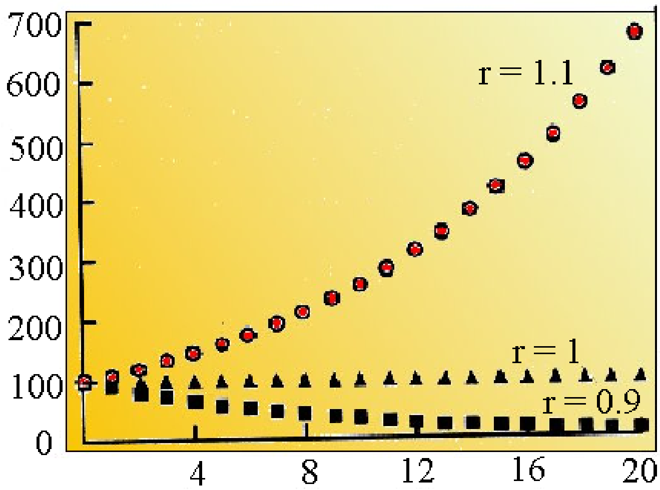


Figura 6.1: Modelo discreto exponencial.

Mediremos el tiempo k en unidades de generación (un año, un mes, ...), y supondremos que r es el número de individuos que nacen en la próxima generación a partir de un individuo de la generación actual. Si x_k simboliza al número de individuos de la población en la generación k, entonces

$$x_{k+1} = r\, x_k\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2, \cdots .$$

Si x_0 es el número inicial de individuos, de la expresión anterior se deduce

$$x_k = x_0\, r^k\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2, \cdots , \tag{6.1}$$

es decir, estamos ante un crecimiento exponencial o geométrico. El comportamiento cualitativo de (6.1) está determinado por el valor de r y queda simbolizado en la Figura 6.1.

Es evidente que este modelo representa a la población sólo en un intervalo corto de tiempo, ya que el crecimiento es demasiado rápido. Además, este modelo basado en la independencia de la densidad, no puede explicar la evolución de la mayoría de las poblaciones que existen en la naturaleza.

Podemos preguntarnos por los valores reales, y no los teóricos, que se obtienen del parámetro r en el laboratorio y en la naturaleza. En los experimentos en el laboratorio puede encontrarse valores de r muy diferentes, dando lugar a crecimiento muy rápido de poblaciones. Sin embargo, en la naturaleza este valor debe estar muy cerca de uno, ya que en caso contrario la población desaparecería o por el contrario crecería rápidamente.

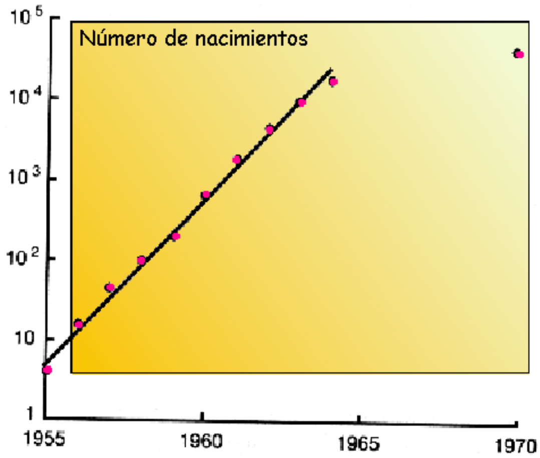


Figura 6.2: Crecimiento de una población de pájaros.

La Figura 6.2 muestra la representación en escala logarítmica de una población de pájaros de Gran Bretaña, desde el año 1955 al 1970. Observemos que al principio, la población crece exponencialmente, pero después de algunos años, disminuye sustancialmente. En la próxima sección trataremos de explicar este comportamiento. La cuestión más importante de la dinámica de poblaciones es determinar las causas y las consecuencias de la desviación del modelo exponencial.

EJEMPLO 6.1

- El censo de los Estados Unidos se elabora cada diez años. En la Tabla 11.1. se recogen los datos correspondientes al período 1790 - 2000.

  La tasa de crecimiento en cada década se calcula dividiendo el censo correspondiente al año superior entre el número de individuos en el año inferior. Por ejemplo, la tasa de crecimiento en la década 1790 - 1800 es:

  $$\frac{\text{Población en 1800}}{\text{Población en 1790}} = \frac{5.308.483}{3.929.214} = 1.351\,.$$

  El modelo matemático discreto más simple supone que la población en la próxima década es igual a la población actual más la población actual por la tasa de crecimiento medio, r, de la población. El modelo empieza con una población inicial, por ejemplo, la correspondiente al año 1790. Para encontrar la población en la década próxima, multiplicamos por $(1+r)$. Con ello obtenemos una sucesión de poblaciones, todas ellas encontradas a partir de la década anterior. Por ejemplo,

  $$\text{Población en 1800} = 1.349 \times \text{Población en 1790} = 5300510\,,$$

siendo 34.9 % la media de las tasas de crecimiento desde 1790 hasta 1860. Observemos que existe una diferencia de aproximadamente 8000 individuos que equivale a un error del 0.15 %. Podemos repetir el proceso anterior y encontrar las poblaciones para las décadas 1810, 1820, ... , 1860, ya que en estos períodos la tasa de crecimiento se mantiene razonablemente constante.

1790	3.929.214	**1870**	39.818.449	**1950**	151.325.798
1800	5.308.483	**1880**	50.155.783	**1960**	179.323.175
1810	7.239.881	**1890**	62.947.714	**1970**	203.302.031
1820	9.638.453	**1900**	75.994.575	**1980**	226.545.805
1830	12.866.020	**1910**	91.972.266	**1990**	248.709.873
1840	17.069.453	**1920**	105.710.620	**2000**	281.421.906
1850	23.191.876	**1930**	122.775.046		
1860	31.433.321	**1940**	131.669.275		

Tabla 6.1

La Tabla 6.2 muestra los datos obtenidos. En ella puede observarse que los errores cometidos son pequeños hasta 1870, y además la población predicha por el modelo es ligeramente superior a la población exacta, lo cual nos sugiere que durante el siglo XIX bajó la tasa de nacimiento. Entre los años 1860 y 1870 tuvo lugar la guerra civil americana, originando el brusco descenso en la tasa de crecimiento de la población de Estados Unidos; además durante estos años aconteció la revolución industrial y la sociedad pasó de ser mayoritariamente agrícola a una sociedad industrial con un descenso significativo de los nacimientos.

Si continuamos usando el modelo anterior hasta 1920 o 1970 nos encontraremos con una población predicha de 192365343 y 859382645 respectivamente, lo que supone una estimación del 82 % y 323 % mayores que las reales. La conclusión que deducimos es que el uso de este modelo de crecimiento está limitado a predecir la población futura en años muy próximos, no se puede extrapolar a largo plazo.

Recordemos que el modelo matemático dado por

$$x_{k+1} = x_k + r x_k = (1+r)x_k\,, \quad x_0 = P(1790) = 3.929.214\,, \tag{6.2}$$

siendo r la tasa media de crecimiento, se conoce con el nombre de **modelo de crecimiento discreto exponencial o de Malthus**. El modelo es un caso particular de un sistema dinámico discreto o ecuación en diferencias. Las ecuaciones en diferencias se usan con frecuencia en Ecología, donde a menudo se puede determinar la población de una especie o colección de especies, sabiendo la población en la generación anterior. El modelo de crecimiento malthusiano establece que la población en la próxima generación es proporcional a la población de la generación actual. De (6.2) se deduce inmediatamente

$$x_k = (1+r)^k x_0\,, \quad k = 1,\, 2,\, 3 \cdots .$$

AÑO	CENSO	x(k+1)=1.349x(k)	% ERROR
1790	**3.929.214**	3.929.214	-----
1800	**5.308.483**	5.300.510	**0.15**
1818	**7.239.881**	7.150.388	**1.24**
1820	**9.638.453**	9.645.873	**0.08**
1830	**12.866.020**	13.012.282	**1.14**
1840	**17.069.453**	17.553.569	**2.84**
1850	**23.191.876**	23.679.765	**2.10**
1860	**31.433.321**	31.944.002	**1.62**
1870	**39.818.449**	43.092.459	**8.22**

Tabla 6.2

A continuación modificaremos el modelo anterior para obligar a que la tasa de crecimiento sea una función que dependa del tiempo. Hemos comprobado que la tasa media de crecimiento que calculamos para las primeras décadas predice una población muy superior a la ofrecida por el censo. Para mejorar esta predicción, podemos calcular para cada una de las décadas su tasa de crecimiento r y encontrar la recta de regresión de todos estos datos.

Se pasa así del modelo discreto autónomo $x_{k+1} = f(x_k)$, al modelo discreto no autónomo $x_{k+1} = f(x_k, t_k)$. La recta de regresión $r(k) = 3.158 - 0.00155k$ ajusta a la nube de puntos de las diferentes tasas de crecimiento. En este caso, la ecuación en diferencia no autónoma será:

$$x_{k+1} = (1 + r(k))x_k\,, \tag{6.3}$$

siendo $t_k = 1790 + 10k$, y k el número de décadas después de 1790.

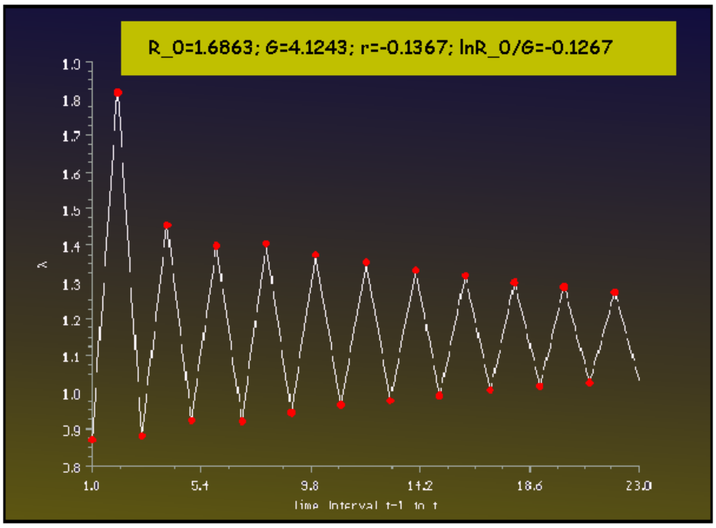


Figura 6.3: Tasa de crecimiento para la población de EEUU.

La Figura 6.3 permite comparar los datos del censo con las diferentes proyecciones que se obtienen al utilizar el modelo de crecimiento exponencial autónomo y no autónomo (que no dependen/dependen del tiempo). Llamamos la atención sobre el hecho de que si utilizamos (6.3) para encontrar la población en cada década, es imprescindible conocer la población en la década anterior.

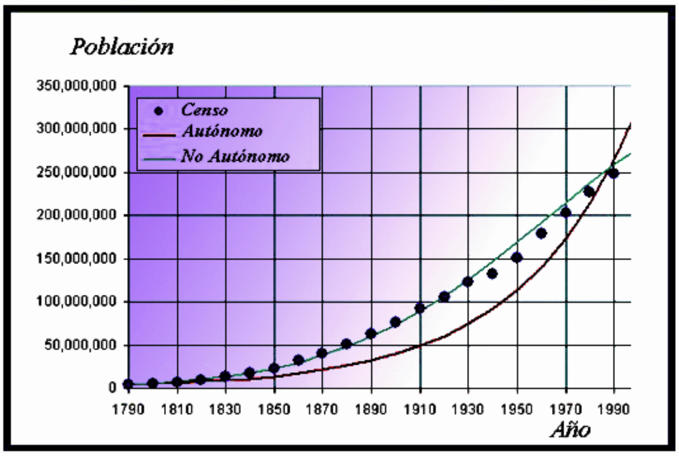


Figura 6.4: Modelos de crecimiento exponencial.

En la Tabla 6.3 se comparan numéricamente los datos reales con los obtenidos con (6.3). El modelo (6.3) predice 278244477 individuos para el año 2000, cifra que se encuentra ligeramente por debajo del valor real.

AÑO	CENSO	1+r(k)	x(k+1)=(1+r(k))x(k)	ERROR (%)
1790	3.929.214	1.3835	3.929.214	
1800	5.308.483	1.3680	5.436.068	2.4
1810	7.239.881	1.3525	7.436.540	2.7
1820	9.638.453	1.3370	10.057.921	4.4
1830	12.866.020	1.3215	13.447.440	4.5
1840	17.069.453	1.3060	17.770.792	4.1
1850	23.191.876	1.2905	23.208.655	0.1
1860	31.433.321	1.2750	29.950.769	4.7
1870	39.818.449	1.2595	38.187.231	4.1
1880	50.155.783	1.2440	48.096.817	4.1
1890	62.947.714	1.2285	59.832.440	4.9
1900	75.994.575	1.2130	73.504.153	3.3
1910	91.972.266	1.1975	89.160.537	3.1
1920	105.710.620	1.1820	106.769.743	1.0
1930	122.775.046	1.1665	126.201.837	2.8
1940	131.669.275	1.1510	147.214.442	11.8
1950	151.325.798	1.1355	169.443.823	12.0
1960	179.323.175	1.1200	192.403.461	7.3
1970	203.302.031	1.1045	215.491.877	6.0
1980	226.545.805	1.0890	238.010.778	5.1
1990	248.709.873	1.0735	259.193.737	4.2
2000	281.421.906		278.244.477	1.1

Tabla 6.3

6.2.1. Modelo discreto exponencial modificado

Hemos aplicado el modelo de crecimiento discreto exponencial para estudiar la evolución de una población. Durante su aplicación, se ha considerado el sistema como cerrado para poder trabajar con una tasa neta de crecimiento. Pero podemos modificar dicho modelo para tener en cuenta el hecho de la inmigración y de la emigración.

Supongamos que una población x_k crece de acuerdo al modelo discreto exponencial y asumimos que el número de personas que entran y salen en cada intervalo de tiempo es constante ($e - s = \mu$). Ahora, el crecimiento puede modelarse por la ecuación en diferencias:

$$x_{k+1} = (1+r)x_k - \mu\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,,$$

donde r es la tasa de crecimiento. Conocidos estos datos y la población inicial x_0 podemos encontrar una expresión general de x_k. En efecto,

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & (1+r)x_0 - \mu \\
x_2 & = & (1+r)x_1 - \mu = (1+r)\left((1+r)x_0 - \mu\right) - \mu = \\
 & & (1+r)^2 x_0 - \left((1+r)+1\right)\mu \\
x_3 & = & (1+r)^3 x_0 - \left((1+r)^2 + (1+r) + 1\right)\mu \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_k & = & (1+r)^k x_0 - \Big((1+r)^{k-1} + (1+r)^{k-2} + \cdots + (1+r) + 1\Big)\mu
\end{array}$$

Aplicando la fórmula que nos da la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica, se obtiene

$$\boxed{x_k = (1+r)^k x_0 - \frac{(1+r)^k - 1}{r}\mu\,,}$$

expresión más complicada que la correspondiente al modelo discreto exponencial simple. Aunque en este caso concreto hemos podido encontrar una expresión para x_k en función de x_0, r y μ, tenemos que decir que en general este cálculo suele ser complicado. Por esta razón, lo que se hace es estudiar el comportamiento cualitativo del modelo, por ejemplo, a través de su diagrama de *Cobweb*.

6.3. Crecimiento dependiente de la densidad de población

Ya hemos indicado que el análisis del modelo discreto exponencial y el sentido común, nos dicen que este tipo de crecimiento no puede mantenerse durante mucho tiempo.

En todos los casos, llega un momento en que la población se regula. Se han propuesto muchas hipótesis para explicar las causas que originan este autocontrol de la población, entre otras:

- Factores independientes de la densidad, como por ejemplo el clima.
- La cantidad de comida disponible.
- Problemas con su territorio o canibalismo.
- Depredadores.
- Parásitos o enfermedades.

De entre todos estos factores nosotros estudiaremos el segundo de ellos, es decir el crecimiento dependerá de la densidad de la población, y por tanto, ésta se autoregula.

Un modelo clásico apropiado para describir poblaciones de animales (o plantas) que viven un año, se reproducen y luego mueren, es de la forma:

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,, \tag{6.4}$$

donde f nos da el número de individuos para el próximo año en términos del número de individuos actuales. Se han propuesto diferentes modelos, simplemente cambiando la función f. Por ejemplo, en el estudio del caos se trabaja con el modelo de *May* (1974) donde la función f es,

$$f(x) = cx\,(1 - x)\,.$$

6.3.1. El modelo de crecimiento discreto logístico

En 1913 *T. Carlson* estudió el crecimiento de un cultivo de levadura. La Tabla 6.4 muestra los datos recogidos en intervalos de una hora.

TIEMPO	POBLACIÓN	TIEMPO	POBLACIÓN	TIEMPO	POBLACIÓN
1	9.6	7	174.6	13	594.8
2	18.3	8	257.3	14	629.4
3	29.0	9	350.7	15	640.8
4	47.2	10	441.0	16	651.1
5	71.1	11	513.3	17	655.9
6	119.1	12	559.7	18	659.6

Tabla 6.4: Población de un cultivo de levadura

En ella se observa que la población no sigue un modelo de crecimiento discreto exponencial, ya que a partir de cierto momento la población se estabiliza y no crece exponencialmente. Es necesario que la función $f(x)$, del sistema discreto dinámico general $x_{k+1} = f(x_k)$, ahora sea cuadrática en lugar de ser una ecuación lineal.

Este nuevo modelo se conoce con el nombre de **modelo discreto logístico**, y viene expresado por

$$x_{k+1} = x_k + r x_k \left(1 - \frac{x_k}{M}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{6.5}$$

Observemos que para valores pequeños de la población $1 - \frac{x_k}{M} \approx 1$ y el modelo coincide con el exponencial. Sin embargo, para valores de la población $x_k \approx M$ entonces $x_{k+1} \approx x_k$. El parámetro M recibe el nombre de **capacidad de carga de la población**.

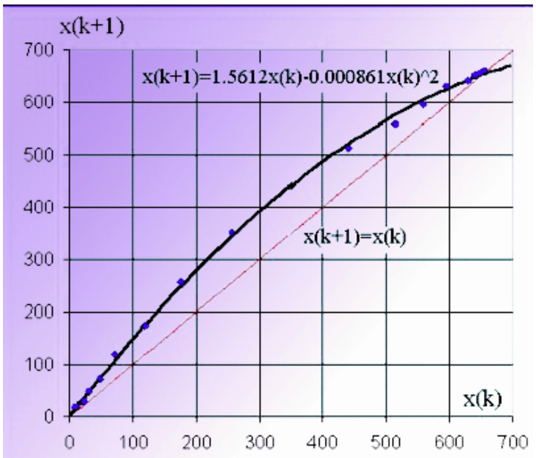


Figura 6.5: Modelo para un cultivo de levadura.

El comportamiento de (6.5) es bastante más complicado que (6.2). No existe una solución exacta de este sistema dinámico discreto. El ecologísta *Robert May* (1974) estudió dicha ecuación para diferentes poblaciones y descubrió que podía presentar dinámicas muy diferentes. Este hecho lo pusimos de manifiesto al analizar el caos matemático, ya que (6.5) puede ser escrita como $x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k)$.

A continuación aplicaremos este modelo para estudiar la evolución del cultivo de levadura.

EJEMPLO 6.2

- En la Figura 6.5 hemos dibujado x_{k+1} como función de x_k. Por ejemplo, los dos primeros puntos son (9.6 , 18.3) y (18.3 , 29). Posteriormente utilizando el programa `Mathematica`® se ha encontrado la parábola que pasa por el origen $y = ax - bx^2$ que mejor ajusta a estos datos, obteniéndose

$$x_{k+1} = 1.5612 x_k - 0.000861 x_k^2 .$$

Podemos utilizar un programa de simulación, como por ejemplo `POPULUS`®, y obtendríamos la Figura 6.5 De forma cualitativa podemos ver que inicialmente se produce un crecimiento exponencial y que posteriormente la población se estabiliza alrededor de 650 que es la capacidad de carga del modelo.

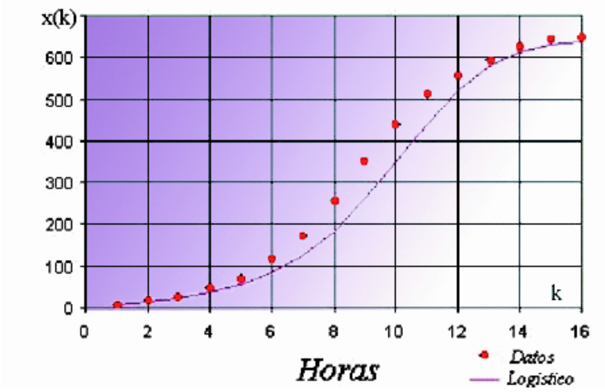


Figura 6.6: Simulación del modelo.

Observemos también que el punto de inflexión está situado en la mitad de la capacidad de carga, que corresponde a un tiempo entre las 9 y 10 horas. En este momento se produce el máximo crecimiento de la población.

6.3.2. Generalización del modelo discreto logístico

La mayoría de otros modelos comparten los rasgos cualitativos observados en el modelo de *May*. Si representamos en el eje de abscisas la población en el tiempo k, y en el eje de ordenadas la población en el período siguiente x_{k+1}, en gran parte de ellos se obtiene una curva del tipo representado en la Figura 6.7.

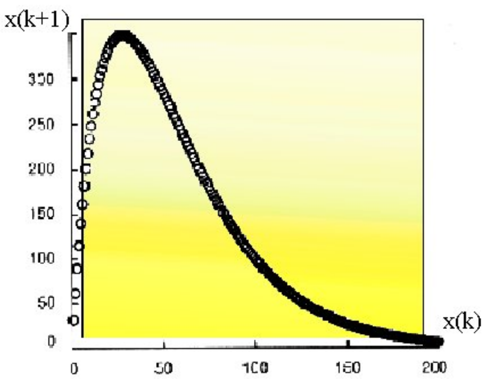


Figura 6.7: Representación de los puntos (x_k, x_{k+1})

Observemos que esta curva tiene un único máximo. Cuando el nivel de la población es pequeño, entonces aumenta en función de la población actual, pero cuando el número de individuos es elevado, los mecanismos propios relacionados con la densidad de la población (competición, por ejemplo) reducen su nivel en los próximos años.

De entre los modelos más citados en el estudio de dinámica de poblaciones, se encuentran:

$$f(x) = x\left(1 + x(1 - \frac{x}{k})\right),$$

$$f(x) = x\, e^{r(1-\frac{x}{k})},$$

$$f(x) = \frac{\lambda x}{(1+\alpha x)^{\beta}}$$

En una de las prácticas del Laboratorio Matemático, realizamos un estudio intensivo del segundo de los modelos, conocido con el nombre de **modelo de** *Ricker* (1954). Para los otros dos casos, se puede hacer un tratamiento similar.

EJEMPLO 6.3

- Un modelo matemático dependiente de la densidad de la población y alternativo al modelo logístico de *May*, ha sido propuesto por *Gilpin* y *Ayala* (1973), y se expresa como:

$$x_{k+1} = f(x_k) = r\,x_k\left(1 - \left(\frac{x_k}{\beta}\right)^{\alpha}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.6}$$

  donde α es un parámetro positivo que depende del organismo en cuestión.

  El punto de equilibrio no nulo de este modelo se obtiene resolviendo la ecuación

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad r\,x\left(1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right) = x$$

  cuyo valor es

$$x^* = \beta\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

  Para estudiar la estabilidad del modelo primero debemos derivar la función $f(x)$. Una vez simplificada se obtiene

$$f'(x) = r\left(1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} - \alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right).$$

  Luego

$$f'(x^*) = f'\left(\beta\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 1 - \alpha r + \alpha.$$

  Este punto de equilibrio será estable cuando $|f'(x^*)| < 1$, lo cual ocurre cuando $1 < r < 1 + \frac{2}{\alpha}$.

En ciertas ocasiones, como por ejemplo en el modelo logístico de *May*

$$f(x) = c\,x\,(1 - x/M),$$

si el nivel de la población es demasiado bajo, entonces el número de individuos tiende a largo plazo al punto de equilibrio $x^* = 0$ y la población desaparece. Este fenómeno es conocido en ecología con el nombre de **Efecto Allen**. Muchas poblaciones biológicas que presentan este efecto, decrecen en su tamaño si el número de individuos se encuentran por debajo de cierto nivel crítico x_c. La región donde $x_k < x_c$ es conocida con el nombre de zona de depredación.

Podemos modificar el modelo anterior, para tener en cuenta este hecho, de la manera siguiente:

$$f(x) = c\,x\left(1 - \frac{x}{M}\right)(x - a)\,, \quad a > 0\,.$$

6.4. Ejemplo de modelo discreto para la pesca

En los últimos años los modelos discretos han sido muy utilizados en el diseño de estrategias para la pesca. Se ha demostrado que son muy útiles para evaluar diversas tácticas de capturas de peces con un doble objetivo, en primer lugar para maximizar los beneficios y en segundo lugar para realizar una explotación de recursos mantenidos en el tiempo. El modelo que vamos a estudiar también puede ser aplicado a cualquier otro tipo de recurso renovable.

Supongamos que la densidad de la población en ausencia de capturas viene dada por

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,.$$

Si suponemos que $\epsilon(k)$ es la captura realizada en la población en el tiempo k, la cual es la que genera la población en el tiempo $k+1$, entonces el modelo que estudia la dinámica de la población viene dado por:

$$x_{k+1} = f(x_k) - \epsilon(k)\,, k = 0, 1, 2, \cdots\,. \tag{6.7}$$

Las dos preguntas que debemos contestar son:

- ¿Cuál es el máximo rendimiento biológico sostenible Y_M?
- ¿Cuál es el máximo rendimiento económico E_M?

Si encontramos los puntos de equilibrio de (6.7), deducimos que

$$x^* = f(x^*) - \epsilon^* \quad \Rightarrow \quad \epsilon^* = f(x^*) - x^*\,.$$

Si el máximo rendimiento sostenible del punto de equilibrio Y_M se alcanza cuando x^* toma el valor x_M, entonces su valor podemos encontrarlo haciendo

$$\frac{\partial \epsilon^*}{\partial x^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x^*) = 1\,.$$

El valor de Y_M será

$$Y_M = f(x_M) - x_M \tag{6.8}$$

y esta situación sólo es interesante cuando $Y_M \geq 0$.

Una estrategia podría ser mantener la población de peces en estos niveles con el objetivo de hacer máxima la captura Y_M. Pero como es difícil tener un conocimiento exacto de la población actual de peces, entonces este método puede ser difícil llevarlo a la práctica. Por esta razón, es más interesante formular el problema de optimización en términos de capturas y esfuerzos.

Supongamos que el esfuerzo para capturar un pez, de una población x, es ax, donde a es el parámetro de captura (que es independiente de la densidad x). Entonces el esfuerzo para reducir x en 1 unidad es $1/(ax)$ y $f(x)$ en 1 unidad es $1/(af(x))$. De esta manera, el esfuerzo E_M para obtener la captura $Y_M = f(x_M) - x_M$ es

$$E_M = \sum_{x_i = x_M}^{f(x_M)} (ax_i)^{-1} \,.$$

Frecuentemente los valores de este sumatorio son de tal manera que se pueden aproximar por la siguiente integral

$$E_M \approx \frac{1}{a}\int_{x_M}^{f(x_M)} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{f(x_M)}{x_M}\right) \,. \tag{6.9}$$

Las ecuaciones (6.8) y (6.9) nos dan la relación de Y_M, E_M en función de x.

EJEMPLO 6.4

- Para terminar, aplicamos estos resultados a un modelo concreto, conocido como disco de *Holling*, que viene definido por:

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{\beta x_k}{\alpha + x_k}\,, \quad 0 < \alpha < \beta\,.}$$

En primer lugar encontramos el valor de x_M resolviendo $1 = f'(x_M)$. Es decir,

$$1 = \left(\frac{\beta x_M}{\alpha + x_M}\right)' = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + x_M)^2} \quad \Rightarrow \quad x_M = \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right)\,.$$

Si sustituimos en las ecuaciones (6.8) y (6.9), nos da

$$Y_M = \frac{\beta x_M}{\alpha + x_M} - x_M$$

$$E_M = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha + x_M}\right)\,.$$

En este ejemplo, podemos eliminar entre las dos expresiones x_M y obtener una relación explícita entre Y_M y E_M,

$$\boxed{Y_M = \left(\beta e^{-cE_M} - \alpha\right)\left(e^{cE_M} - 1\right)\,.}$$

6.5. Ejemplo de modelo discreto para la economía. Modelo de la telaraña.

Es un modelo elemental que simula el comportamiento de un bien en el mercado, sujeto a las variaciones de la oferta y de la demanda.

La empresa que ofrece el bien, cambiará su oferta , O_t, durante el período t proporcionalmente a la variación del precio del bien en el período anterior $t-1$. Pensemos que si el precio del bien en el período anterior ha aumentado, entonces incrementará la oferta en el período siguiente t. Por el contrario, si el precio disminuye en el período $t-1$, entonces la empresa ofertará menos cantidad en el período siguiente t, intentando contrarestar la tendencia a la baja y evitando la disminución de ingresos. Por lo tanto, si el precio del bien sube (baja) en el período $t-1$, entonces la oferta del mismo bien en el período siguiente t sube (baja) proporcionalmente,

$$O_t = aP_{t-1}\,; \quad a > 0\,; \quad t \in \mathbb{N}$$

Además, debemos añadir a la ecuación anterior un sumando constante b que se interpreta como la acción de las fuerzas independientes de la variación del precio del bien, que también tiene influencia en la variación de la oferta del bien en el mercado.

$$O_t = aP_{t-1} + b\,; \quad a > 0\,; \quad t \in \mathbb{N} \tag{6.10}$$

Vamos a suponer que el incremento de la demanda en el período t de dicho bien, D_t, varía proporcionalmente al aumento de su precio en dicho período. Es decir, el consumo del bien crecerá si su precio disminuye y recíprocamente. En consecuencia, la constante de proporcionalidad c debe ser negativa. Además, y al igual que con la oferta, incluiremos un término constante d.

$$D_t = cP_t + d\,; \quad c < 0\,; \quad t \in \mathbb{N} \tag{6.11}$$

Por último, supondremos que la dinámica del mercado hace que la oferta y la demanda del bien tiendan a coincidir en cada período t,

$$O_t = D_t\,; \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad aP_{t-1} + b = cP_t + d \quad \Rightarrow \quad cP_t - aP_{t-1} + (d-b) = 0$$

que puede expresarse como el sistema dinámico discreto:

$$P_t = f(P_{t-1}) = \frac{a}{c}P_{t-1} + \frac{b-d}{c}\,; \quad t \in \mathbb{N} \tag{6.12}$$

EJEMPLO 6.5

- Dadas las siguientes funciones $D_t = 100 - 2P_t$ y $O_t = -20 + 3P_{t-1}$, hallar el valor de equilibrio del precio y comprobar si es estable o inestable. Suponer que el valor inicial es $P_0 = 25$, y calcular los valores numéricos de P_t hasta $t = 4$.

- Incluir solución

EJERCICIO 30 Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma:

$$y_{t+2} = \frac{3}{2}y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t\,, \quad t = 0,\,1,\,2,\cdots\,,$$

probar que la población se estabiliza a largo plazo.

- La ecuación en diferencias anterior es homogénea ya que puede ser escrita como,

$$2y_{t+2} - 3y_{t+1} + y_t = 0\,,$$

y tiene como ecuación característica

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\,,$$

luego la solución general

$$\boxed{y_t = k_1 + k_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^t = k_1 + \frac{k_2}{2^t}\,, \quad k_1\,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

- Si tomamos límites cuando t tiende a infinito se obtiene de manera inmediata que $y_t \to k_1$.

EJERCICIO 31 Resolver la ecuación en diferencias de orden dos

$$y_{t+2} + y_t = 1 + t\,.$$

- La solución general se construye a partir de una solución particular de la ecuación completa y la solución general de la ecuación homogénea asociada. Empezamos, por tanto, encontrando las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\,.$$

Es decir, dos números complejos conjugados de módulo 1 y argumento $\pi/2$. La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\boxed{y_t^h = k_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\, t\right) + k_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\, t\right)\ , \quad k_1\, , k_2 \in \mathbb{R}}$$

Para buscar una solución particular de la ecuación completa, observamos que el término independiente $1+t$, es un polinomio de primer grado. Ensayamos con la solución $y_t^p = a + bt$. Al imponer que sea solución de la ecuación en diferencias, se obtiene,

$$a + b(t+2) + a + bt = 1 + t \quad \Rightarrow \quad 2a + 2b = 1, \quad 2b = 1 \quad \Rightarrow a = 0,\, b = 1/2\,,$$

luego, la solución particular buscada es $y_t^p = 1/2\, t$. La solución general de la ecuación completa será

$$\boxed{y_t = k_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\, t\right) + k_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\, t\right) + \frac{1}{2}\, t\,, \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 32 Resolver la siguiente ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 5y_t = 3^t\,.$$

- Para encontrar la solución y_t de la ecuación completa empezamos buscando y_t^h, que es la solución general de la homogénea

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 5y_t = 0.$$

Al ser las raíces del polinomio característico $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$,

$$\boxed{y_t^h = k_1 + k_2 5^t\,.}$$

Para conocer una solución particular de la ecuación completa nos fijamos en el término independiente 3^t y ensayamos la solución $y_t^p = c3^t$. Sustituyendo en la ecuación inicial y simplificando

$$c3^{t+2} - 6c3^{t+1} + 5c3^t = 3^t \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{4}\,.$$

La solución general vendrá dada por

$$\boxed{y_t = k_1 + k_2 5^t - \frac{1}{4} 3^t\,, \quad k_1\, , k_2 \ \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 33 [Modelo de la telaraña.] **Para el ajuste dinámico de un bien en el mercado, se suele utilizar un modelo discreto, que se fundamenta en las siguientes hipótesis:**

- **La oferta del bien depende del precio del período anterior (la producción del producto se decide teniendo en cuenta el precio en ese momento, pero tarda en realizarse un período de tiempo, por ejemplo en los productos agrícolas),**

$$S_t = -c + dP_{t-1}, \quad c,\, d > 0$$

- **La demanda en cada período depende del precio del bien en el mismo período de tiempo**

$$D_t = a - bP_t, \quad a,\, b > 0$$

- **La condición de equilibrio será $D_t = S_t$, siendo el valor del precio inicial P_0.**

Analizar el comportamiento del modelo.

- De la tercera de las hipótesis que nos da la condición de equilibrio, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$P_t = -\frac{d}{b}P_{t-1} + \frac{a+c}{b} \quad \Rightarrow \quad P_{t+1} = -\frac{d}{b}P_t + \frac{a+c}{b},$$

que para resolverla, damos al tiempo los valores $t = 0,\, 1,\, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}
P_1 &= -\frac{d}{b}P_0 + \frac{a+c}{b} \\
P_2 &= -\frac{d}{b}P_1 + \frac{a+c}{b} = -\frac{d}{b}\left(-\frac{d}{b}P_0 + \frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&= \left(-\frac{d}{b}\right)^2 P_0 - \frac{d}{b}\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
P_3 &= -\frac{d}{b}P_2 + \frac{a+c}{b} = -\frac{d}{b}\left(\left(-\frac{d}{b}\right)^2 P_0 - \frac{d}{b}\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&= \left(-\frac{d}{b}\right)^3 P_0 + \left(-\frac{d}{b}\right)^2\left(\frac{a+c}{b}\right) + \left(-\frac{d}{b}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
P_t &= \left(-\frac{d}{b}\right)^t P_0 + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t-1}\left(\frac{a+c}{b}\right) + \cdots + \left(-\frac{d}{b}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&= \left(-\frac{d}{b}\right)^t P_0 + \left(\frac{a+c}{b}\right)\left[\left(-\frac{d}{b}\right)^{t-1} + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t-2} + \cdots + \left(-\frac{d}{b}\right) + 1\right]
\end{aligned}$$

Los sumandos que se encuentran dentro del corchete son la suma[1] de t términos de una progresión geométrica de razón $-\frac{d}{b}$, cuyo valor es

$$\frac{1-(-d/b)^t}{1-(-d/b)}\,,$$

si sustituimos este valor en P_t y simplificamos convenientemente,

$$P_t = \left(-\frac{d}{b}\right)^t P_0 + \frac{a+c}{b+d}\left[1-\left(-\frac{d}{b}\right)^t\right] = \left(-\frac{d}{b}\right)^t \left[P_0 - \frac{a+c}{b+d}\right] + \frac{a+c}{b+d}\,.$$

Llamando

$$P_e := \frac{a+c}{b+d}\,,$$

que se conoce con el nombre de precio teórico de equilibrio para las funciones de oferta y demanda dada. Sustituyendo

$$P_t = (P_0 - P_e)\left(-\frac{d}{b}\right)^t + P_e\,.$$

Si suponemos que $d < b$, entonces $d/b < 1$ y P_t tiende a P_e cuando t tiende a infinito. Es decir, las fuerzas del mercado harán que el precio del producto tienda al precio de equilibrio teórico. Esta situación queda reflejada en la figura siguiente:

[1]La suma de n términos de una progresión geométrica de razón r vale

$$S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

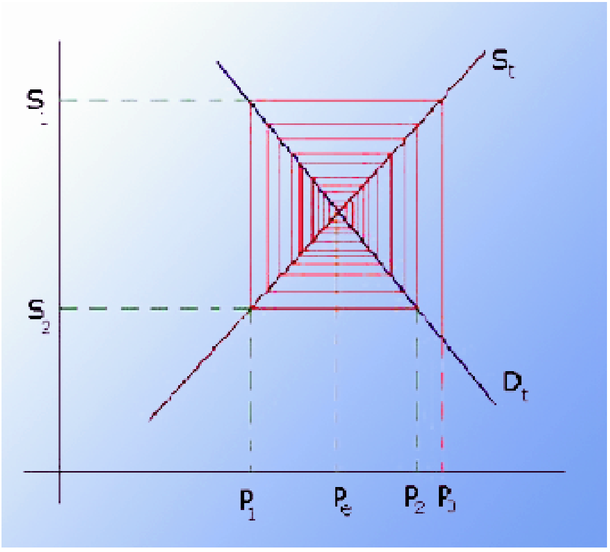


Figura 6.8: Modelo de telaraña.

Para un precio inicial P_0, los productores ofrecen en el período la oferta S_1, pero la demanda cubrirá dicha oferta a un precio diferente P_1. A este último precio la oferta del período siguiente será S_2, que será cubierta por la demanda a un precio P_2, y así sucesivamente.

EJERCICIO 34 Encontrar la raíz de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ utilizando el método del punto fijo.

- Recordemos que para aplicar el método debemos escribir la ecuación en la forma $x = g(x)$ y obtener una sucesión $x_{k+1} = g(x_k)$ partiendo de un valor $x_0 \in (a, b)$.

  Observemos que si aplicamos el Teorema de *Bolzano* a la función $\varphi(x) = x^3 - x - 1$ en el intervalo $[1, 2]$ nos aseguramos que la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(1, 2)$,

  Por otro lado, si escribimos la ecuación como $x^3 - 1 = x$ y consideramos la función $g(x) = x^3 - x$, podemos tomar como valor inicial o semilla un número entre 1 y 2, por ejemplo $x_0 = 1.5$. Al ser $g'(x) = 3x^2$, en cualquier entorno de 1.5 se cumple $|g'(x)| > 1$. En consecuencia, el método no es convergente.

  También es posible escribir la ecuación de esta otra manera $x = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, y ahora considerar otra función $h(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ con derivada $h'(x) \approx 0.165$ en un entorno de $x_0 = 1.85$. Es decir, el método del punto fijo es convergente.

  Para encontrar la raíz utilizamos el software `Mathemathica`®

```
h[x_] := (x + 1)^(1/3)
FixedPointList[h, 1.85, 14]
```

$\{1.85, 1.417799, 1.342167, 1.328024, 1.325345, 1.3248371, 1.324740,$
$1.324722, 1.324718, 1.324718, 1.324717, 1.324717, 1.324717, 1.324717\}$

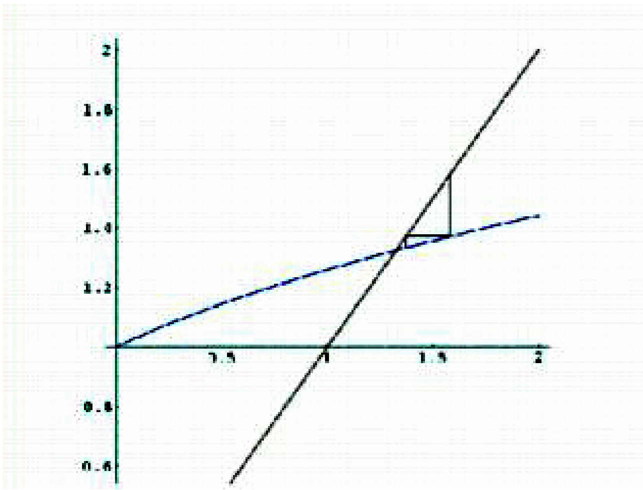


Figura 6.9: Diagrama de Cobweb.

EJERCICIO 35 El modelo formal a tiempo discreto, que describe la convivencia de dos especies con funciones de efectivos x_t e y_t, con medidas mensuales, es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = x_t + y_t - \frac{12}{2^t} \\ y_{t+1} = y_t + \frac{8}{2^t}\,. \end{array} \right.$$

Al principio $x_0 = 40$, $y_0 = 31$. ¿En qué situación está el ecosistema al cabo de 4 meses?

- Al no depender la segunda de las ecuaciones de x_t, empezamos resolviéndola. Su ecuación homogénea asociada es $\lambda - 1 = 0$, que tiene por raíz $\lambda = 1$, dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea $y_t = k_1$.

  Para encontrar la solución general de la ecuación completa, ensayamos la solución particular $y_t = a/2^t$. Sustituyendo

  $$\frac{a}{2^{t+1}} = \frac{a}{2^t} + \frac{8}{2^t} \quad \Rightarrow \quad a = -16\,,$$

  y la solución general de la ecuación completa es:

  $$\boxed{y_t = k_1 - \frac{16}{2^t}}$$

- Si sustituimos este valor en la primera de las ecuaciones del sistema

  $$x_{t+1} = x_t + k_1 - \frac{16}{2^t} - \frac{12}{2^t} \quad \Rightarrow \quad x_{t+1} - x_t = -\frac{28}{2^t} + k_1\,.$$

La ecuación homogénea tiene a $\lambda = 1$ como raíz de su ecuación característica asociada, por tanto, $y = k_2$ será su solución general. Para encontrar una solución particular de la solución completa nos fijamos en el término independiente $-28/2^t + k_1$, que como podemos ver está formado por dos términos $-28/2^t$ y la constante k_1 (un polinomio de grado cero). Al ser $\lambda = 1$ raíz de la ecuación característica, debemos tener en cuenta la observación realizada en la teoría, y tenemos que ensayar con un polinomio de un orden mayor. En resumen, debemos probar con $x_t = a/2^t + bt + c$. Sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$\frac{a}{2^{t+1}} + b(t+1) + c - \left(\frac{a}{2^t} + bt + c\right) = -\frac{28}{2^t} + k_1 \,.$$

Simplificando

$$\frac{a}{2^t}\left(-\frac{1}{2}\right) + b = -\frac{28}{2^t} + k_1 \quad \Rightarrow \quad a = 56, \quad b = k_1 \,.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación completa es

$$\boxed{x_t = k_2 + k_1 t + \frac{56}{2^t}\,, \quad k_1\,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

- Si estamos interesados en encontrar la solución particular para los valores $x_0 = 40$ e $y_0 = 31$, debemos sustituir en las soluciones generales encontradas

$$\begin{array}{lcl} 40 = k_2 + 56 & \Rightarrow & k_2 = -16 \\ 31 = k_1 - 16 & \Rightarrow & k_1 = 47 \end{array}$$

La solución particular que cumple las condiciones iniciales es:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = 47t - 16 + \dfrac{7}{2^{t-3}} \\ y_t = 47 - \dfrac{1}{2^{t-4}} \end{array}}$$

- **Un método alternativo** para resolver el ejercicio es el siguiente.

Dando los valores $t = 1, 2, 3, \cdots$, se obtiene

$$\begin{aligned}
y_1 &= 31 + 8\tfrac{1}{2^0} \\
y_2 &= \left(31 + 8\tfrac{1}{2^0}\right) + 8\tfrac{1}{2^1} = 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1}\right) \\
y_3 &= 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1}\right) + 8\tfrac{1}{2^2} = 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1} + \tfrac{1}{2^2}\right) \\
&\vdots \\
y_t &= 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{t-1}}\right) \,.
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la fórmula que nos da la suma de t términos de una progresión geométrica de razón $1/2$,

$$y_t = 31 + 8\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t}{1 - \frac{1}{2}}\,,$$

y simplificando

$$\boxed{y_t = 47 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^t}$$

Para encontrar x_t, sustituimos el valor de y_t en la primera de las ecuaciones

$$x_{t+1} = x_t + 47 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^t = x_t + 47 - 28\left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

y resulta ser del mismo tipo a la anterior,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 40 + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \\
x_2 &= \left(40 + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\right) + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 = 40 + 2\times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1\right] \\
x_3 &= 40 + 2\times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1\right] + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\
&= 40 + 3\times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right] \\
&\vdots \\
x_t &= 40 + t\times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right].
\end{aligned}$$

Sumando los t términos de esta progresión geométrica

$$x_t = 40 + 47t - 28\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t}{1 - \frac{1}{2}},$$

que una vez simplificada

$$\boxed{x_t = -16 + 47t + 56\left(\frac{1}{2}\right)^t}$$

- Para saber la situación de las poblaciones al cabo de los 4 años, sustituimos en las soluciones encontradas $t = 4$,

$$x_4 \approx 176, \qquad y_4 = 46\,.$$

EJERCICIO 36 Dos especies que conviven en un mismo territorio siguen un crecimiento descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{t+1} = 5x_t - 2y_t + t \\ y_{t+1} = 4x_t - y_t + 3 \end{array}\right.$$

donde el tiempo t está medido en años. Si inicialmente el número de individuos de cada especie es $x_0 = 130$ e $y_0 = 250$, resolver el sistema y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.

- Comenzamos el ejercicio convirtiendo el sistema en una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Para ello, de la segunda de las ecuaciones deducimos
$$y_{t+2} = 4x_{t+1} - y_{t+1} + 3\,.$$
Ahora, sustituimos x_{t+1} de la primera de las ecuaciones en la expresión anterior
$$y_{t+2} = 4\,(5x_t - 2y_t + t) - y_{t+1} + 3 = 20x_t - 8y_t + 4t - y_{t+1} + 3\,.$$
Por último, sustituimos el valor x_t de la segunda de las ecuaciones del sistema, y simplificamos
$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 4t - 12\,.$$
Para resolverla, empezamos encontrando la solución general de su ecuación homogénea asociada
$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3\,;$$
la solución buscada es:
$$y_t^h = k_1 + k_2\,3^t\,.$$
A continuación necesitamos una solución particular de la ecuación completa. Al ser el término independiente un polinomio de primer grado y $\lambda = 1$ raíz del polinomio característico, ensayamos la solución $y_t^p = at^2 + bt + c$. Si sustituimos en la ecuación y simplificamos
$$(-4a)t - 2b = 4t - 12 \quad \Rightarrow \quad a = -1, \quad b = 6 \quad \Rightarrow \quad y_t^p = -t^2 + 6t\,.$$
La solución general de la ecuación completa es:
$$\boxed{y_t = k_1 + k_2\,3^t - t^2 + 6t\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$
Para encontrar x_t, despejamos de la segunda de las ecuaciones y sustituimos el valor de y_t
$$\begin{aligned} x_t &= \tfrac{1}{4}\,(y_{t+1} + y_t - 3) \\ &= \tfrac{1}{4}\,\big(k_1 + k_2\,3^{t+1} - (t+1)^2 + 6(t+1) + k_1 + k_2\,3^t - t^2 + 6t - 3\big) \\ &= \tfrac{1}{4}\,\big(2k_1 + 4k_2 3^t - t^2 - 10t + 2\big)\ . \end{aligned}$$
Es decir,
$$\boxed{x_t = \frac{1}{2}k_1 + k_2 3^t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

- Finalizamos el ejercicio encontrando la solución particular del sistema correspondiente a las condiciones iniciales, $x_0 = 130$ e $y_0 = 250$. Sustituyendo en las expresiones de x_t e y_t obtenemos el sistema
$$\left\{ \begin{array}{l} 130 = \frac{1}{2}k_1 + k_2 + \frac{1}{2} \\ \\ 250 = k_1 + k_2\,; \end{array} \right.$$

cuya solución nos proporciona los valores $k_1 = 241$ y $k_2 = 9$. En consecuencia,

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = \dfrac{241}{2} + 9 \times 3^t - \dfrac{1}{4}t^2 - \dfrac{5}{2}t \\ \\ y_t = 241 + 9 \times 3^t - t^2 + 6t \end{array}}$$

- Como podemos apreciar, si en las expresiones anteriores tomamos límites cuando t tiende a infinito, nos encontramos con $x_t \to \infty$ e $y_t \to \infty$.

EJERCICIO 37 Dos especies admiten el siguiente modelo de coexistencia:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{t+1} & = & 4x_t + 6y_t - 3^t \\ y_{t+1} & = & -2x_t - 4y_t + 3^t \, . \end{array} \right.$$

Obtener las expresiones de las funciones de efectivos de las dos especies que satisfacen las condiciones iniciales: $x_0 = 21$, $y_0 = 150$, expresando por separado el caso t par del caso impar.

- Utilizando el método de reducción en el sistema anterior, obtenemos.

$$2x_{t+1} + 3y_{t+1} = 2x_t + 3^t \, . \tag{6.13}$$

Ahora, aumentamos un paso en la primera de las ecuaciones y despejamos y_{t+1},

$$y_{t+1} = \frac{1}{6}\left(x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3\,3^t\right) \, .$$

Sustituyendo en (6.13) y simplificando se obtiene,

$$x_{t+2} - 4x_t = -3^t \, . \tag{6.14}$$

Es fácil comprobar que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$ son las raíces de la ecuación característica. Por lo tanto, la solución general de la homogénea es

$$x_t^h = k_1\, 2^t + k_2(-2)^t.$$

El término independiente sugiere una solución particular del tipo $x_t^p = c\,3^t$. Sustituimos en (6.14)

$$c\,3^{t+2} - 4c\,3^t = -3^t \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad x_t^p = -\frac{1}{5}\,3^t \, .$$

La solución general de la ecuación completa es:

$$\boxed{x_t = k_1\, 2^t + k_2(-2)^t - \frac{1}{5}\,3^t \, , \quad k_1\, , k_2 \in \mathbb{R}}$$

Para encontrar el valor correspondiente de y_t despejamos su valor en la primera de las ecuaciones

$$y_t = \frac{1}{6}\left(x_{t+1} - 4x_t + 3^t\right)\,.$$

Al conocer el valor de x_t podemos sustituir

$$y_t = \frac{1}{6}\left((k_1\,2^{t+1} + k_2(-2)^{t+1} - \frac{1}{5}\,3^{t+1}) - 4(k_1\,2^t + k_2(-2)^t - \frac{1}{5}\,3^t) + 3^t\right)\,.$$

Finalmente, simplificando se llega a

$$\boxed{y_t = -\frac{1}{3}k_1\,2^t - k_2\,(-2)^t + \frac{1}{5}3^t\,, \quad k_1\,, k_2\ \in \mathbb{R}}$$

- Para determinar la solución particular, es necesario tener en cuenta las condiciones iniciales $x_0 = 21$, $y_0 = 150$. De aquí determinaríamos las constantes $k_1 = 256.5$ y $k_2 = -235.3$. Para finalizar, observemos que si t es par $(-2)^t = 2^t$, y en el caso impar $(-2)^t = -2^t$.

EJERCICIO 38 Resolver el sistema en diferencias

$$\left\{\begin{array}{l} x_{t+1} = -3x_t + 6y_t + e^{-t} \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t - e^{-t}\,, \end{array}\right.$$

donde x_t e y_t representan los efectivos de dos especies animales y el tiempo t, considerado como variable discreta, se mide en años. Comprobar que en este método, los efectivos iniciales de una de las especies han de necesariamente condicionar los de la otra. Tomar, por ejemplo, $x_0 = 35$ y calcular y_0. Analizar las posibilidades de extinción.

- El método que utilizamos está basado en convertir el sistema anterior en una única ecuación en diferencias que dependa de una sola variable. Para ello, sumamos a la primera ecuación del sistema la segunda multiplicada por (-3)

$$x_{t+1} - 3y_{t+1} = 4e^{-t}\,. \tag{6.15}$$

Necesitamos hacer desaparecer y_{t+1} de está ecuación, y esto lo conseguimos sustituyendo t por $t+1$ en la primera de las ecuaciones del sistema

$$x_{t+2} = -3x_{t+1} + 6y_{t+1} + e^{-t-1} \quad \Rightarrow \quad y_{t+1} = \frac{1}{6}\left(x_{t+2} + 3x_{t+1} - e^{-1}e^{-t}\right)\,,$$

sustituyendo en (6.15)

$$x_{t+2} + x_{t+1} = e^{-t}(e^{-1} - 8)\,.$$

Esta ecuación tiene como solución general de la ecuación homogénea asociada

$$x_t^h = k_1(-1)^t\,,$$

y como consecuencia de la forma del término independiente, probamos con la solución particular $x_t^p = Ae^{-t}$. Es fácil obtener el valor $A = 16.72$. Por tanto,

$$\boxed{x_t = k_1(-1)^t + 16.72e^{-t}\,, \quad k_1 \in \mathbb{R}}$$

En la primera de las ecuaciones del sistema, despejamos y_t y sustituimos el valor encontrado de x_t

$$y_t = \frac{1}{6}\left(x_{t+1} + 3x_t - e^{-t}\right) \quad \Rightarrow \quad y_t = \frac{1}{3}k_1(-1)^t + 9.22e^{-t}$$

Observemos que en las soluciones del sistema sólo aparece una constante (k_1), esto obliga a que los valores iniciales de cada una de las especies tengan que estar relacionados. Como sabemos que $x_0 = 37$, sustituimos y determinamos el valor $k_1 = 20.28$, lo que nos permite saber el valor inicial de la segunda de las especies

$$y_0 = \frac{1}{3}20.28(-1)^0 + 9.22e^0 = \frac{20.28}{3} + 9.22 = 16\,.$$

La solución particular pedida es:

$$\boxed{\begin{aligned} x_t &= 20.28(-1)^t + 16.72e^{-t} \\ y_t &= 6.76(-1)^t + 9.22e^{-t} \end{aligned}}$$

- **Analicemos el problema de la extinción**. Para la primera de la especie x_t, observamos que si t es par al ser e^{-t} y $(-1)^t$ positivos, es imposible que x_t se anule. Si consideramos un año impar

  $$e^{-t} = \frac{16.72}{28.28} < 1\,,$$

  pero si despejamos t tenemos que tomar logaritmos y aparecerá una cantidad negativa, la cual no tiene sentido biológico. En consecuencia, la primera de la especie nunca desaparecerá.

  Si repetimos el mismo razonamiento para la segunda de las especies, deducimos que si el tiempo es positivo $y_t \neq 0$. Supongamos que t es impar

  $$e^{-t} = \frac{9.22}{6.76} > 1 \quad \Rightarrow \quad t \approx 0.3\,.$$

  Si somos estrictos, esta solución al no ser entera no deberíamos considerarla, pero podemos interpretarla diciendo que la extinción de la segunda especie se producirá a los 0.3 años, o bien a los 109 días.

EJERCICIO 39 Dos especies, una depredadora x y otra presa y, se reproducen de manera que, en solitario, sus poblaciones se duplicarían y cuadruplicarían cada año, respectivamente. La presencia de depredadores produce el efecto de disminuir cada año la población de presas en cuatro veces el efectivo de los depredadores existentes al comienzo del año, y la de presas hace aumentar la especie depredadora en k veces el efectivo de las presas existentes al comienzo del año. Movimientos migratorios suman cada año 20 individuos a la especie depredadora procedente de otra región del ecosistema.

1.- **Describir la evolución cuantitativa de estas especies mediante un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden.**

2.- **Determinar el valor de k, sabiendo que la ecuación característica de la ecuación en diferencias de segundo orden que satisface la población presa tiene una raíz doble igual a 3**

3.- **Si inicialmente las poblaciones depredadora y presa constan de 7 y 80 individuos, respectivamente, se desea saber el número de individuos que componen cada una de ellas al cabo de 6 años y si alguna se extingue a tiempo finito.**

- El sistema de ecuaciones en diferencias cuando las poblaciones están en solitario es:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t \\ y_{t+1} = 4y_t \,, \end{cases}$$

donde el tiempo se encuentra expresado en años.

Al poner en contacto ambas especies, el sistema anterior se transforma en

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t + ky_t + 20 \\ y_{t+1} = 4y_t - 4x_t \,. \end{cases}$$

- Para el segundo de los apartados, resolveremos el sistema anterior. Comenzamos aumentando un paso en la segunda de las ecuaciones, y sustituyendo el valor de x_{t+1} dado en la primera,

$$y_{t+2} = 4y_{t+1} - 4x_{t+1} = 4y_{t+1} - 4(2x_t + ky_t + 20) = 4y_{t+1} - 8x_t - 4ky_t - 80 \,.$$

Despejamos en la segunda ecuación del sistema x_t y sustituimos

$$y_{t+2} = 4y_{t+1} - \frac{8}{4}(4y_t - y_{t+1}) - 4ky_t - 80 \,,$$

que da lugar a la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 4(2+k)y_t = -80 \,. \tag{6.16}$$

Su ecuación característica $\lambda^2 - 6\lambda + 4(2+k) = 0$, tiene por raíces

$$3 \pm \sqrt{9 - 4(2+k)}\,,$$

y al ser el 3 una raíz doble, entonces $k = 1/4$. El sistema nos quedará

$$\left\{\begin{array}{l} x_{t+1} = 2x_t + \frac{1}{4}y_t + 20 \\ \\ y_{t+1} = 4y_t - 4x_t\,, \end{array}\right.$$

- El tercer apartado consiste en resolver el sistema con las condiciones iniciales $x_0 = 7$, $y_0 = 80$. Sabemos que la solución general de la ecuación homogénea vale

$$y_t^h = (k_1 + k_2\,t)3^t\,.$$

Para encontrar una solución particular de la solución completa, probamos con $y_t = A$. Sustituimos en (6.16)

$$A - 6A + 9A = -80 \quad \Rightarrow \quad A = -20\,.$$

La solución general buscada es

$$\boxed{y_t = (k_1 + tk_2)3^t - 20\,, \quad k_1\,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

que nos permite, sustituyendo en

$$x_t = -\frac{1}{4}y_{t+1} + y_t$$

escribir

$$\boxed{x_t = \tfrac{1}{4}\left(k_1 + (t-3)k_2\right)3^t - 15\,, \quad k_1\,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

Si hacemos que $t = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} 7 = \frac{1}{4}\left(k_1 - 3k_2\right) - 15 \\ \\ 80 = k_1 - 20 \end{array}\right.$$

cuya solución es: $k_1 = 100$, $k_2 = 4$. Es decir,

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = (22+t)3^t - 15 \\ \\ y_t = (100+4t)3^t - 20 \end{array}}$$

- Ahora podemos encontrar el número de presas y depredadores al cabo de 6 años

$$x(6) = 20397\,, \quad y(6) = 90376\,.$$

Como se puede observar,

$$x_t \to +\infty\,, \quad y_t \to +\infty\,,$$

cuando $t \to \infty$, por lo que ninguna de las dos especies desaparecerá.

EJERCICIO 40 Supongamos que la función oferta y la función demanda, de un animal exótico, vienen dadas por:

$$S(p) = 1000p - 400 \qquad D(p) = 5000 - 500p$$

donde p denota el precio del animal. Supongamos que el cambio del precio viene descrito por

$$p_{t+1} = p_t + \alpha(D(p_t) - S(p_t)), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad t = 0, 1, 2, \cdots .$$

Demostrar que este modelo es lineal y encontrar el punto de equilibrio.

- Basta sustituir los valores de la oferta y de la demanda en la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_t + \alpha(D(p_t) - S(p_t)) = p_t + \alpha(5000 - 500p_t - 1000p_t + 400) \\ &= (1 - 1500\alpha)p_t + 5400\alpha . \end{aligned}$$

Estamos ante un modelo discreto lineal, siendo $f(x) = (1 - 1500\alpha)x + 5400\alpha$.

El punto de equilibrio se encuentra resolviendo la ecuación $f(x^*) = x^*$, cuyo valor es $x^* = 18/5$.

Para saber si es un punto de equilibrio estable o inestable, nos fijamos en la pendiente de la recta,

$$|1 - 1500\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < 1 - 1500\alpha < 1 ,$$

en consecuencia, para que el punto de equilibrio sea estable tiene que ocurrir

$$0 < \alpha < \frac{1}{750} .$$

Observemos que en el momento que el precio del animal corresponde al punto de equilibrio,

$$S(18/5) = 1000 \times \frac{18}{5} - 400 = 3200$$

$$D(18/5) = 5000 - 500 \times \frac{18}{5} = 3200 ,$$

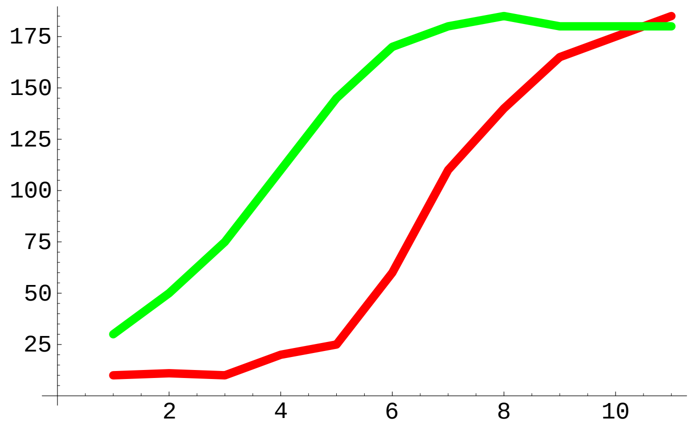
la oferta y la demanda coinciden.

EJERCICIO 41 Para dos poblaciones de un mismo tipo de bacterias, que crecen independientemente una de la otra, obtenemos los siguientes datos:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_1(t)$	10	11	10	20	25	60	110	140	165	175	185
$N_2(t)$	30	50	75	110	145	170	180	185	180	180	180

Dibujar $N_1(t)$ y $N_2(t)$ en función del tiempo t. ¿Cuál de estas dos poblaciones se parece más a la ecuación logística?.

- Si utilizamos el software `Mathematica`® obtenemos la siguiente representación gráfica



La curva en color verde tiende a 180 cuando aumentamos el valor del tiempo, tiene forma en S, y además su punto de inflexión se encuentra hacia la mitad de la capacidad de carga $180/2 = 90$. En consecuencia $N_2(t)$ es la más parecida a la ecuación logística.

EJERCICIO 42 Sea $r = 0.69$ y $K = 100$. Dibujar en el plano los puntos $(N(t), N(t+1))$ correspondientes a las siguientes ecuaciones:

$$N(t+1) = N(t)e^r \tag{6.17}$$

$$N(t+1) = \frac{N(t)e^r K}{N(t)(e^r - 1) + K} \tag{6.18}$$

- Empezamos la resolución del ejercicio con la ecuación (6.18) que podemos reescribirla

$$N(t+1) = \frac{200N(t)}{N(t) + 100},$$

El resto lo resolveremos con el software `Mathematica`®. Lo iniciamos escribiendo las funciones

$$\texttt{f[x\_]} := 200 * \texttt{x}/(\texttt{x} + 100)$$
$$\texttt{g[x\_]} := \texttt{x}$$

continuamos encontrando 20 términos de la órbita correspondiente al valor $x_0 = 5$,

$$\texttt{iters} = \texttt{NestList[f, 5., 20]}$$

cuyos valores son:
{ 5., 9.5238, 17.3913, 29.6296, 45.7142, 62.7450, 77.1084, 87.07482, 93.0909, 96.4218, 98.1783, 99.0807, 99.5382, 99.7686, 99.8841, 99.9420, 99.9710, 99.9855, 99., 99.9963, 99.9981 }

Se observa que los valores de esta población tienden al punto de equilibrio 100.

- En ciertas ocasiones, es frecuente enfrentar las representaciones gráficas de $N(t+1)$ en función de $N(t)$, con la de $N(t)$.

```
fg = Plot[{x, f[x]}, {x, 0, 150}, PlotStyle− > {RGBColor[1, 0, 0],
RGBColor[0, 0, 1]}, DisplayFunction− > Identity]

gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{iters, iters}]], 2, 1],
PlotJoined− > True, DisplayFunction− > Identity]
Show[fg, gi, AspectRatio− > 1, DisplayFunction− > $DisplayFunction]
ListPlot[iters, PlotJoined− > True]
```

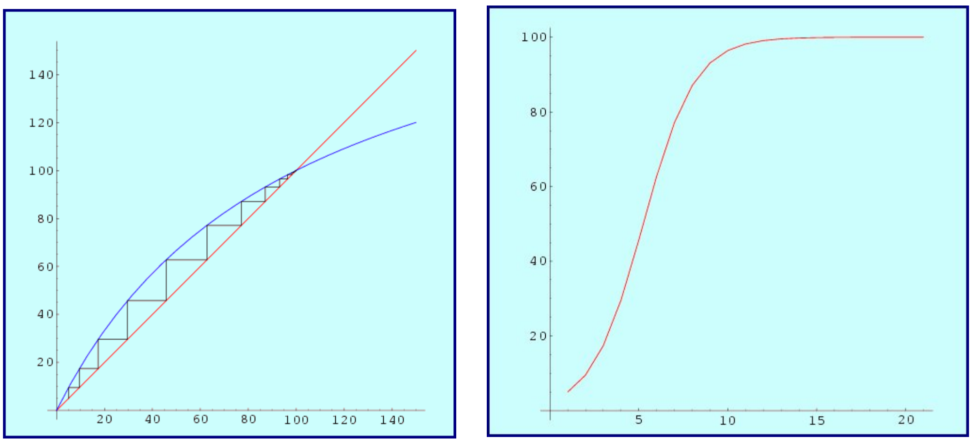


Figura 6.10:

Como puede apreciarse, la población sigue un modelo logístico discreto.

- La ecuación (6.17) observamos que es lineal en el plano $(N(t), N(t+1))$; pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente e^r. Para su estudio, realizamos un análisis similar al caso anterior. En este caso los primeros términos de la órbita son:

{ 5. 9.9685, 19.8745, 39.6241, 78.9992, 157.5019, 314.0141, 626.0548, 1248.1751, 2488.5062, 4961.3735, 9891.5675, 19720.9719, 39318.0080 }

que experimentan un crecimiento exponencial, como se pone de manifiesto en las siguientes gráficas

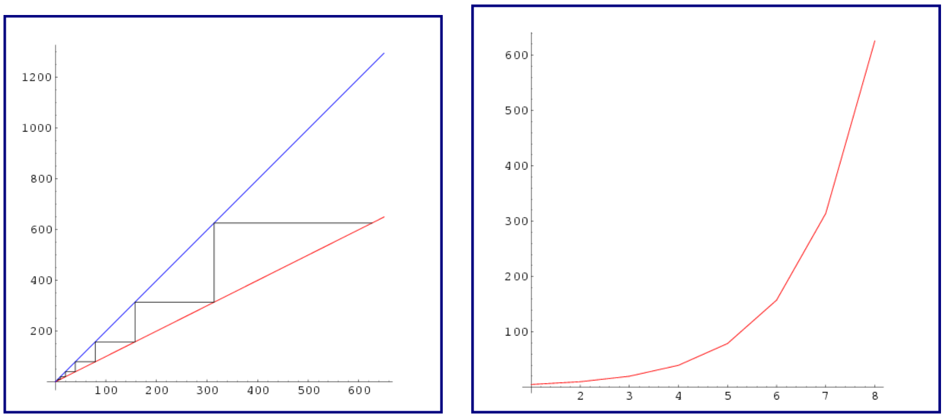


Figura 6.11.

EJERCICIO 43 **Dada la ecuación logística del crecimiento**

$$N(t)=\frac{K}{1+\left(\frac{K-N(0)}{N(0)}\right)e^{-rt}}$$

Expresar $N(t+1)$ **en función de** $N(t)$

- Empezamos resolviendo el ejercicio calculando $N(t+1)$ de la expresión $N(t)$,

$$\begin{aligned}
N(t+1) &= \frac{k}{1+\frac{k-N(0)}{N(0)}e^{-rt}e^{-r}}=\frac{k}{e^{-r}\left(e^{r}+\frac{k-N(0)}{N(0)}e^{-rt}\right)}\\
&= \frac{k}{e^{-r}\left(e^{r}-1+1+\frac{k-N(0)}{N(0)}e^{-rt}\right)}=\frac{k}{ke^{-r}\left(\frac{e^{r}-1}{k}+\frac{1+\frac{k-N(0)}{N(0)}e^{-rt}}{k}\right)}\\
&= \frac{1}{e^{-r}\left(\frac{e^{r}-1}{k}\right)+e^{-r}N(t)^{-1}}=\frac{e^{r}}{\frac{e^{r}-1}{k}+\frac{1}{N(t)}}\,,
\end{aligned}$$

que una vez simplificada, nos da como solución

$$\boxed{N(t+1)=\frac{e^{r}kN(t)}{k+N(t)(e^{r}-1)}}$$

EJERCICIO 44 [Modelo de Varley, Gradwell y Hassell]. Muchas poblaciones de insectos se rigen por el siguiente modelo

$$f(N_t) = N_{t+1} = \frac{\lambda}{\alpha} N_t^{1-b} \,, \quad \alpha,\, b,\, \lambda > 0 \,, \quad t = 0,\, 1,\, 2 \cdots \tag{6.19}$$

donde λ **representa a la tasa reproductiva** $(\lambda > 1)$ **y** N_t^{-b}/α **es la fracción de la población que sobreviven desde la infancia a la edad adulta reproductiva. Podemos expresar** (6.19) **como**

$$N_{t+1} = \left(\frac{1}{\alpha} N_t^{-b} \right) (\lambda N_t) \,,$$

es decir, N_{t+1} **será igual a la fracción de insectos que sobreviven en la generación** $t+1$ **por el número de insectos que nacen de la generación** t**. Estudiar los puntos de equilibrio del modelo.**

- Tenemos que estudiar el sistema dinámico discreto $N_{t+1} = f(N_t)$, siendo

  $$f(x) = \frac{\lambda}{\alpha} x^{1-b} \,.$$

  Sus puntos de equilibrio se obtienen resolviendo la ecuación

  $$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\alpha} x^{1-b} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda x}{\alpha x^b} = x \,,$$

  es decir, $x_1^* = 0$, $x_2^* = (\lambda/\alpha)^{1/b}$. Para poderlos clasificar es necesario conocer el valor de la derivada de $f(x)$ en cada uno de estos puntos. Al ser $f'(x) = \frac{\lambda}{\alpha}(1-b)x^{-b}$ tenemos

  $$f'(x_2^*) = 1 - b \quad \Rightarrow \quad |1-b| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < b < 2 \,.$$

  El punto de equilibrio $(\lambda/\alpha)^{1/b}$ es estable siempre que $0 < b < 2$. En caso contrario $b > 2$, el modelo tiene en $(\lambda/\alpha)^{1/b}$ un punto de equilibrio inestable.

  En el primero de los puntos no existe $f'(x_1^*)$, y por lo tanto no podemos seguir el procedimiento anterior. No obstante su análisis a nivel biológico no es interesante pues indicaría que inicialmente no existen individuos en la población.

EJERCICIO 45 Un modelo discreto frecuentemente utilizado en dinámica de poblaciones, consiste en la ecuación

$$N_{t+1} = f(N_t) = N_t e^{r\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)} \qquad r\,, k \in \mathbb{R}^+ \,, \quad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots \,.$$

Encontrar y analizar los puntos de equilibrio.

- Procedemos de forma idéntica al ejercicio anterior, pero ahora con la función $f(x) = xe^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)}$, obteniéndose de forma inmediata los puntos de equilibrio $x_1^* = 0$ y $x_2^* = k$. La derivada de la función $f(x)$ es

$$f'(x) = e^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)}\left(1 - \frac{xr}{k}\right),$$

que nos permite clasificar el punto de equilibrio que es más interesante. Puesto que $f'(k) = 1 - r$, entonces el $x_2^* = k$ será estable si $0 < r < 2$.

EJERCICIO 46 Analizar los puntos de equilibrio del modelo discreto no lineal siguiente:

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{kN_t}{b + N_t} \qquad b,\ k > 0\,, \quad t = 0,\ 1,\ 2, \cdots,$$

- Es inmediato comprobar que este modelo presenta en $x_1^* = k - b$ un punto de equilibrio estable, si $k > b$.

EJERCICIO 47 Calcular la posición de los puntos fijos y de los puntos 2-periódicos en el modelo logístico $N_{t+1} = 3.3N_t(1 - N_t)$, $t = 0, 1, 2, \cdots$.

- Para resolver gráficamente el ejercicio, necesitaremos representar las funciones $g(x) = x$, $f(x) = 3.3x(1-x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ y encontrar los puntos de corte. En nuestro caso

$$f^2(x) = 3.3^2x(1-x)(1 - 3.3x + 3.3x^2)\,.$$

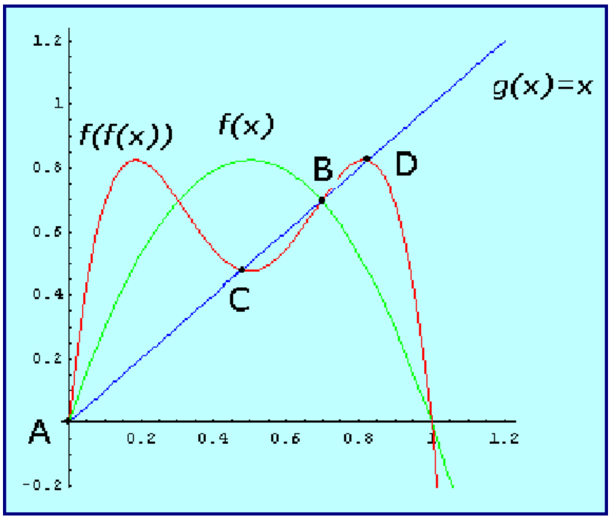


Figura 6.12: Puntos de equilibrio y 2-periódicos de $f(x) = 3.3x(1-x)$.

Los puntos de equilibrio son $x_A = 0$, $x_B = 0.6969..$ y los puntos 2-periódicos $x_c = 0.47492701..$, $x_D = 0.8236032$.

EJERCICIO 48 Supongamos que la tasa de crecimiento de una población P satisface

$$g(P) = 0.03P(1 - P/600)\,.$$

El modelo discreto de crecimiento logístico viene dado por

$$P_{t+1} = P_t + g(P_t)\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots\,.$$

1.- **Encontrar la población cuando $g(P)$ es cero y cuando tiene un máximo (vértice).**

2.- **Calcular P_1, P_2, P_3 para un valor inicial $P_0 = 100$. Encontrar los puntos de equilibrio.**

1.- Es evidente que $g(P)$ se anula para los valores $P = 0$ y $P = 600$. Al ser una parábola que corta al eje de abscisas en los puntos 0 y 600, su vértice estará situado en $P = 300$ siendo $g(300) = 4.5$. Es decir el valor máximo de la parábola será el punto (300, 4.5).

2.- Para encontrar las poblaciones pedidas solamente tendremos que sustituir los valores adecuados en el modelo presentado. De esta manera,

$$P_1 = P_0 + 0.03P_0(1 - P_0/600) = 102.5\,.$$

De forma similar $P_2 = 105.05$, $P_3 = 107.65$.

EJERCICIO 49 La población de China en 1980 era de 985 millones, y el censo de 1990 mostró que la población había crecido hasta 1.137 millones. Suponiendo que la población crece según la siguiente ley de crecimiento discreto exponencial

$$P_{t+1} = (1 + r)P_t\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots\,, \tag{6.20}$$

donde t es el número de décadas después de 1980 y P_t la población t décadas después de 1980.

1.- **Encontrar la constante r de crecimiento y predecir la población para el año 2000.**

2.- **Encontrar el tiempo necesario para que se duplique la población.**

1.- Llevando los datos en (6.20),

$$P(1990) = P_1 = (1+r)P(1980) = (1+r)P_0 \quad \Rightarrow \quad 1.137 = (1+r)985\,,$$

y el valor buscado es $r = 0.1543$.

2.- La segunda parte del ejercicio se deduce de la ecuación

$$P_t = 1.1543^t P_0 = 2P_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{\ln 1.1543} = 4.83 \text{ décadas}\,,$$

se necesitan 48.3 años para que la población se duplique.

EJERCICIO 50 **Un invertebrado vive en un lago que está afectado por el efecto de la contaminación que penetra lentamente en el ecosistema. La dinámica poblacional para este invertebrado viene dada por el siguiente modelo de crecimiento exponencial no autónomo**

$$P_{n+1} = (1 + k(t_n))P_n\,, \quad P_0 = 40.000\,, \tag{6.21}$$

donde $t_n = n$ **es el número de días desde la medida inicial de la población y** $k(t) = 0.08 - 0.01t$ **es la tasa de crecimiento, que claramente decrece con el tiempo.**

1.- **Encontrar la población para este organismo en los próximos 5 días.**

2.- **Cuando la tasa de crecimiento cae a cero, la población alcanza su máximo. Encontrar cuando ocurre y el tamaño de la población en este momento.**

3.- **Encontrar cuando se da el nivel máximo de polución, lo que obliga a la extinción de la especie.**

1.- La población para el primer día es $P_1 = 1.08 \times 40000 = 43200$, ya que $k(t_0) = 1.08$. Para el resto de los días la solución es $P_2 = 46224$, $P_3 = 48997$, $P_4 = 51447$, $P_5 = 53505$.

2.- La tasa de crecimiento es cero al cabo de los $t = 8$ días. La población será de $P_8 = 1.01P_7 = 1.01 \times 1.02 \times 1.03 \times 53505 = 56775$.

3.- Para encontrar la respuesta del tercer apartado, tenemos que determinar cuando el factor $1 + k(t_n)$ se anula. En nuestro caso,

$$1 + 0.08 - 0.01t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 108\,.$$

Esto ocurre al cabo de los 108 días que es la cota superior teórica para la extinción de la especie.

EJERCICIO 51 Para una determinada especie animal se considera que P es la proporción de individuos que como máximo pueden pertenecer a un hábitat concreto (esto es, $P = 0$ indica la ausencia y $P = 1$ indica que no puede haber más individuos). Además, se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad son, respectivamente, las siguientes:

$$f(P) = \frac{3a}{8}(1 - P)\,; \quad m(P) = 1 - \frac{a}{8} + \frac{a}{8}P\,,$$

siendo a un número real comprendido entre 2 y 6.

1.- **Comprobar que la ecuación en diferencias $y_{t+1} = \frac{a}{2}y_t(1-y_t)$, modeliza a la dinámica de la población.**

2.- **Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y estudia su estabilidad.**

1.- Para un año cualquiera t, tenemos que

$$y_{t+1} = y_t + (\text{fertilidad - mortalidad})y_t$$

es decir

$$y_{t+1} = y_t + \left(\left(\frac{3a}{8}(1 - y_t)\right) - \left(1 - \frac{a}{8} + \frac{a}{8}y_t\right)\right)y_t = \frac{ay_t}{2}(1 - y_t)\,.$$

2.- La función que define al modelo es $f(x) = \frac{a}{2}x(1-x)$. Para encontrar los puntos fijos o de equilibrio resolvemos la ecuación no lineal $f(x) = x$, cuyas soluciones son:

$$x_1^* = 0\,; \quad x_2^* = \frac{a-2}{a}\,.$$

Para analizar la estabilidad de los puntos fijos, en primer lugar, calculamos la derivada,

$$f'(x) = \frac{a}{2} - a\,x\,,$$

y sustituimos cada uno de los puntos,

$$f'(0) = \frac{a}{2}$$

Para que este punto sea estable tiene que ocurrir que $|f'(0)| < 1$, lo que obliga a que el valor del parámetro a sea menor que dos, y esto no puede ocurrir ya que el enunciado indica que $2 < a < 6$.

Para el segundo punto,

$$|f'(x_2^*)| = |f'(\frac{a-2}{a})| = |\frac{4-a}{a}| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \frac{4-a}{a} < 1 \quad \Rightarrow \quad 2 < a < 6\,.$$

En consecuencia, el punto de equilibrio x_1^* es inestable y el x_2^* es estable.

EJERCICIO 52 Dado el sistema dinámico discreto $x_{t+1} = f(x_t) = x_t^3 - x_t^2 + 1$. Analizar su comportamiento a largo plazo.

- En primer lugar realizaremos el estudio cuantitavivo encontrando los puntos de equilibrio del modelo y su clasificación.

$$F(x) = x \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 + 1 = x \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 1 \text{ (doble)}\,, \quad x_2^* = -1$$

si calculamos la derivada $f'(x) = 3x^2 - 2x$ y sustituimos en los puntos de equilibrio,

$$|f'(1)| = 1$$

estamos ante un punto de equilibrio $x_1^* = 1$ dudoso. Por otro lado,

$$|f'(-1)| = 5 > 1$$

en este caso el punto de equilibrio $x_2^* = -1$ es inestable.

Para poder clasificar el punto de equilibrio dudoso, encontraremos 25 términos de la órbita de f correspondiente a la semilla $x_0 = 1.2$

NestList[p,1.2,25]

$$\{1.2, 1.288, 1.47778, 2.04338, 5.35651, 125.998, 1.98439 \times 10^{6}, 7.81414 \times 10^{18}, 4.77137 \times 10^{56}, 1.08625 \times 10^{170}, 1.281696405368169 \times 10^{510}, 2.105501227265631 \times 10^{1530}, 9.33397206326970 \times 10^{4590}, 8.1320396988399 \times 10^{13772}, 5.3777235179070 \times 10^{41318}, 1.5552328140679 \times 10^{123956}, 3.761717978576 \times 10^{371868}, 5.32302735792 \times 10^{1115605}, 1.50825958784 \times 10^{3346817}, 3.43105977494 \times 10^{10040451}, 4.0391022997 \times 10^{30121354}, 6.589531805 \times 10^{90364063}, 2.861301849 \times 10^{271092191}, 2.342561635 \times 10^{813276574}, 1.285502955 \times 10^{2439829723}, 2.12431657 \times 10^{7319489169}\}$$

que podemos observar tiende a infinito. Por otro lado, la órbita de f correspondiente a la semilla $x_0 = 0.2$ es:

NestList[p,0.2,25]

$$\{0.2, 0.968, 0.970015, 0.971786, 0.973356, 0.974757, 0.976015, 0.977152, 0.978184, 0.979126, 0.979988, 0.980781, 0.981513, 0.98219, 0.982819, 0.983404, 0.98395, 0.984461, 0.98494, 0.985391, 0.985814, 0.986214, 0.986591, 0.986949, 0.987287, 0.987608\}$$

que se estabiliza en el punto de equilibrio $x_1^* = 1$. En consecuencia, este punto de equilibrio es un nodo.

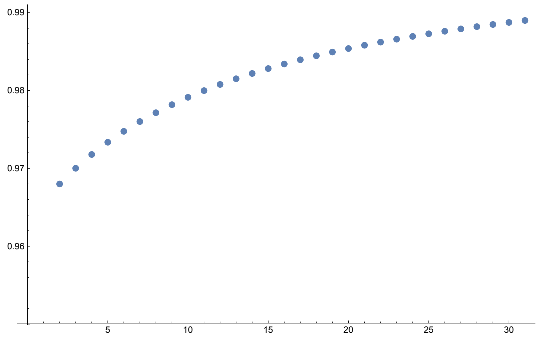


Figura 6.13: Órbita para la semilla $x_0 = 0.2$

Como ejercicio idéntico al anterior, se propone el estudio del siguiente sistema dinámico:

$$x_{t+1} = f(x_t) = \sqrt{4x_t - 3}$$

que presenta un punto de equilibrio estable en 3, y un punto de equilibrio inestable en 1.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 53

1.- **Calcular k para que la ecuación en diferencias de segundo orden:**

$$x_{t+2} - 2kx_{t+1} + (k+1)x_t = t^2 + 3 + 3^t$$

tenga a 1 y a 3 como raíces de la ecuación característica.
Resolver, a continuación, la ecuación completa con las condiciones iniciales: $x_0 = 10\,, x_1 = 18.$

2.- **El crecimiento de una especie viene descrito por la siguiente ecuación en diferencias:**

$$x_{t+2} - 4x_t = -3^{t+1}\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \cdots$$

donde x_t representa a la cantidad de animales en el año t. Determinar el número de animales al finalizar un año cualquiera "t", sabiendo que inicialmente hay 10 y que transcurrido un año su número es de 20

3.- **El incremento de la población de una determinada especie animal en un año es la mitad del incremento del año anterior, si no intervienen factores externos. La población inicial es de 950 individuos y de 975 al finalizar el primer año.**

- **Escribir la ecuación en diferencias que modeliza a la situación planteada.**
- **Determinar la cantidad de individuos de dicha especie al finalizar un año cualquiera "t".**
- **Estudiar el comportamiento a "largo plazo "de la población.**

4.- **Sea x_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Se sabe que año tras año sobreviven la tercera parte de los animales y además se incorporan 200 a la población.**

- **Construir un modelo discreto lineal para la situación planteada.**
- **Calcular los seis primeros términos de las órbitas correspondientes a las semillas:**

$$x_0 = 90\,, \qquad x_0 = 600\,.$$

- **Construir los diagramas de Cobweb del apartado anterior, e interpretar biológicamente los resultados obtenidos.**

5.- **Se sabe que la evolución de una población de una determinada especie de peces viene dada por el sistema dinámico discreto lineal**

$$y_{t+1} = f(y_t)$$

- **Encuentra una función f de tal manera que la población a largo plazo se estabilice en 10 individuos independientemente del número inicial de peces.**
- **Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb con los valores iniciales: $y_0 = 1$ peces y $y_0 = 20$ peces.**

6.- **La siguiente ecuación en diferencias describe la evolución de una población en años sucesivos,**

$$x_{t+1} = \frac{10e^r x_t}{10 + (e^r - 1)x_t}, \qquad t = 0, 1, 2, 3, \quad \cdots \quad .$$

- **Demuestra que si el parámetro r es positivo, entonces la población se estabiliza en 10 individuos, mientras que si r es negativo, la población desaparecerá.**

7.- **La siguiente ecuación en diferencias describe la población de insectos en un manglar en años sucesivos,**

$$x_{t+1} = \alpha x_t e^{-x_t}, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo α un parámetro positivo y x_t el número de insectos en el año t ¿Cuál debe ser el valor de α para que el punto de equilibrio no trivial sea estable?

8.- **Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,**

$$5x_{t+2} - 6x_{t+1} + x_t = \left(\frac{1}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo x_t el número de individuos en el año t. Encontrar el número de individuos en el quinto año, sabiendo que inicialmente eran 10 y al año siguiente 20.

9.- **La siguiente ecuación en diferencias representa la dinámica de una población**

$$y_{t+1} = f(y_t) = \frac{\alpha y_t}{10 + y_t}$$

donde y_t representa al número de individuos en el tiempo t.

9.a.- **Encuentra el valor del parámetro α para que uno de sus puntos de equilibrio sea 40.**

9.b.- **Con el valor calculado para α, encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo**

9.c.- **¿Qué puedes decir de la evolución "a largo plazo"de esta población?**

10.- **Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:**

10.a.- **Sea la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$, donde y_t representa a la cantidad de individuos en el año t. Si el número inicial de individuos es 2 y al cabo de un año es 5, ¿cuál será el valor de la población al cabo de 10 años?**

10.b.- **Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 8$.**

11.- **La dinámica de una determinada especie responde a la siguiente ecuación en diferencias:**

$$x_{t+1} = 2x_t e^{1-x_t}\,; \quad t \in \mathbb{N}$$

Responder, de forma razonada, a las siguientes cuestiones:

- **¿Cuáles son los puntos fijos (puntos de equilibrio)?**
- **¿Cómo son los puntos fijos con respecto a la estabilidad?**

12.- **Considera la ecuación en diferencias:**

$$x_{t-1} = x_t e^{x_t - 2}$$

Encuentra los puntos de equilibrio de la ecuación y estudia su estabilidad.

13.- **Supongamos los siguientes modelos matemáticos utilizados en dinámica de poblaciones de aves:**

Modelo 1: $P_{t+1} = \lambda P_t\,;$ **con** $\lambda > 0$
Modelo 2: $P_{t+1} = (\lambda P_t + a)P_t\,;$ **con** $\lambda < 0\,;\ a > 0$

La información de la que se dispone es la siguiente:

- **El primer año de observación se contaron 500 aves y el segundo 1000.**
- **La población no se espera que se extinga ni que crezca ilimitadamente.**
- **Si llegara a observarse 4000 aves es de esperar que ese número no varíe ya en el transcurso del tiempo (Es decir, P=4000 se mantendría constante).**

Justifica de manera razonada, si los dos modelos planteados cumplen los datos biológicos o no. Además, investigando sobre esta población se ha descubierto que la población constante de 4000 aves es estable. Justifica si los modelos matemáticos propuestos cumplen esta nueva condición.

14.- **Dada la ecuación en diferencias,**

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}\left(-x_t^3 + 4x_t^2 - 3x_t + 2\right)$$

- **Estudiar la estabilidad de sus puntos de equilibrio.**
- **Suponiendo que x_t represente al tamaño de una población, discutir su evolución a largo plazo, dependiendo de los valores iniciales x_0**

15.- **Sea y_t el número de individuos de una población en el año t. La evolución de dicha población viene dada por la siguiente ecuación en diferencias:**

$$y_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = 2^t$$

- **Si la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_t^h = c_1 2^t + c_2 3^t$, encontrar el valor de los parámetros a y b.**
- **Si inicialmente el número de individuos era de $y_0 = 4$ y al año siguiente era de 9, encontrar el número de individuos para un año cualquiera t.**

16.- **Para una especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por,**

$$f(P) = \frac{1}{2}, \qquad m(P) = 1 - \frac{1}{1+P},$$

respectivamente.

- **Determinar la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población.**
- **Calcular y clasificar los puntos de equilibrio del modelo.**
- **Realizar una interpretación del comportamiento de la especie a largo plazo, a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.**

17.- **Se considera la serie de pesos siguiente:**

$$p_{37} = 1.35\,Kg.\,;\ p_{38} = 2.90\,Kg.\,;\ p_{39} = 1.74\,Kg.\,;\ p_{40} = 3.06\,Kg.\,;\ p_{41} = 1.35\,Kg.$$

que se ajusta a una ecuación en diferencias del tipo $x_{t+1} = x_t(a - x_t)$, siendo a un parámetro a determinar.

- **Estimar el valor de a.**
- **Determinar los puntos de equilibrio del modelo y estudiar su estabilidad.**

18.- **Considera la siguiente versión del modelo logístico discreto de crecimiento:**

$$x_{t+1} = f(x_t) = 3.2x_t(1 - 0.25x_t)$$

Encuentra, mediante una simulación con ordenador, las primeras 100 iteraciones de la órbita de x_0 y dibújala, suponiendo que $x_0 = 2.75$, que $x_0 = 2.5$ y finalmente con $x_0 = 2$. ¿Qué tipo de equilibrio tiene el modelos?¿Existen 2-ciclos? Justifica las respuestas.

19.- **Una población de palomas parte de 1000 ejemplares. Se reproduce de tal manera que la población en cada año es el doble que la del año anterior más cuarenta y cinco cuartos de la de hace dos años. Además cada año se extraen 20 individuos para su estudio. ¿Cuál es la población de la colonia en un año cualquiera t? ¿cuántos individuos hay después de cinco años?**

20.- **La siguiente ecuación en diferencias describe la población de ardillas en años sucesivos,**

$$x_{t+1} = x_t^3 - 3x_t^2 - 3x_t + a\,, \qquad t = 0, 1, 2, 3, \quad \cdots \quad .$$

siendo a un parámetros positivo y x_t el número de ardillas en el año t .

- **Encuentra el valor del parámetro a sabiendo que existe un punto de equilibrio en $x^* = 2$**
- **Clasificar los puntos de equilibrios que tienen sentido biológico para conocer el comportamiento a largo plazo de la población.**

21.- **Sea el modelo discreto logístico**

$$N_{t+1} = 3.3N_t(1 - N_t)\,,$$

donde N_t representa al número de individuos de la población en el período t. Clasifica el punto de equilibrio no trivial, y comprueba el resultado haciendo uso del diagrama de Cobweb.

22.- **Calcular y clasificar los puntos de equilibrio del siguiente modelo discreto, con $r > 0$ y $k > 0$,**

$$f(N_t) = N_{t+1} = N_t\left(1 + r\left(1 - \frac{N_t}{k}\right)\right)\,, \qquad t = 0,\,1,\,2,\,3, \quad .$$

23.- **La siguiente ecuación en diferencias:**

$$x_{t+1} = \frac{\alpha\, x_t}{1 + \beta\, x_t}\,, \quad \alpha\,, \beta > 0\,, \quad x_t \geq 0\,,$$

fue propuesta por *Kaplan* & *Glais* en 1995 y juega un papel muy importante en análisis de modelos no lineales genéticos y en redes neuronales.

23.a.- **Encontrar y analizar los puntos de equilibrio**

23.b.- **Sea $\alpha = \beta = 1$. Dibujar de forma aproximada el diagrama en telaraña (cobweb) tomando como semilla $x_0 = 4$.**

24.- **Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,**

$$(y_{t+2} - y_{t+1}) - \frac{1}{3}(y_{t+1} - y_t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t ,$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t.

- **Explicar el significado “biológico”de la ecuación anterior**
- **¿Crecerá la población a largo plazo?.**

25.- **Indicar en cada una de las siguientes ecuaciones si es lineal o no lineal. Si es lineal determinar la solución; si es no lineal encontrar y analizar el tipo de puntos de equilibrio.**

- $x_t = (1-\alpha)x_{t-1} + \beta x_t \qquad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}^+$
- $x_{t+1} = \dfrac{x_t}{1+x_t}$
- $x_{t+1} = x_t e^{-a x_t} \qquad a \in \mathbb{R}^+$
- $(x_{t+1} - \alpha)^2 = \alpha^2(x_t^2 - 2x_t + 1) \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+$
- $x_{t+1} = \dfrac{k}{k_1 + k_2/x_t} \qquad k_1\,, k_2\,, k \in \mathbb{R}^+$

26.- **Se sabe que la evolución de una población de una determinada especie de peces viene dada por el sistema dinámico discreto lineal**

$$y_{t+1} = f(y_t)$$

26.a.- **Encuentra una función f de tal manera que la población a largo plazo se estabilice en 10 individuos independientemente del número inicial de peces.**

26.b.- **Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb con los valores iniciales: $y_0 = 1$ peces y $y_0 = 20$ peces.**

27.- **Sea y_t el número de individuos de una población en el año t. La evolución de dicha población viene dada por la siguiente ecuación en diferencias: $y_{t+2} + a y_{t+1} + b y_t = 3$**

- **Si la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_t^h = C_1\, 1^t + C_2\, 2^t$, encontrar el valor de los parámetros a y b.**
- **Si inicialmente el número de individuos era de $y_0 = 2$ y al año siguiente su número era $y_1 = 4$, encontrar la población después de 4 año.**

28.- **Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,**

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 3^t\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3\cdots\,,$$

siendo y_t el número de individuos en el año t. Encontrar el número de individuos en el tercer año, sabiendo que inicialmente eran 2 y al año siguiente 8 individuos.

29.- **La evolución de una población x_t viene determinada por el siguiente modelo discreto exponencial con inmigración y emigración,**

$$x_{t+1} = (1+r)x_t - \mu\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo el parámetro positivo μ la diferencia entre el número de personas que entran y las que salen, el parámetro r la tasa de crecimiento de la población, y x_0 el número inicial de individuos.

- **Estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo según los diferentes valores del parámetro r.**
- **Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb, para $r = 0.2$ y $\mu = 10$.**

30.- **Dos especies conviven de acuerdo con el siguiente modelo discreto:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = -x_t + y_t + 3^t \\ y_{t+1} = 4x_t + 2y_t + 3^t\,, \end{array} \right.$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años. Hallar sus funciones de efectivos.

31.- **Dos especies que conviven en un mismo territorio, evolucionan del modo descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = 7x_t - 2y_t - t + 2 \\ y_{t+1} = 6x_t - y_t + 5t\,, \end{array} \right.$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años.

- **Si, inicialmente, el número de individuos de cada especie es $x_0 = 70$, $y_0 = 251$, resolver el sistema para obtener los efectivos en función de t y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.**
- **Comprobar que al cabo de un año se ha extinguido la primera especie y analizar el comportamiento a posteriori de la segunda.**

32.- **El crecimiento de dos especies que coexisten viene descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{t+1} = (9-a)x_t + (4-b)y_t + 5^t & ; & x_0 = 10 \\ y_{t+1} = (b-2)x_t + 5y_t + 5^t & ; & y_0 = 45 \end{array} \right.$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años. Si la ecuación homogénea, asociada a la ecuación en diferencias de segundo orden, que resulta de eliminar y_t en el sistema es:

$$x_{t+2} - 8x_{t+1} + 15x_t = 0.$$

Resolver todos los sistemas que cumplan las condiciones anteriores y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.