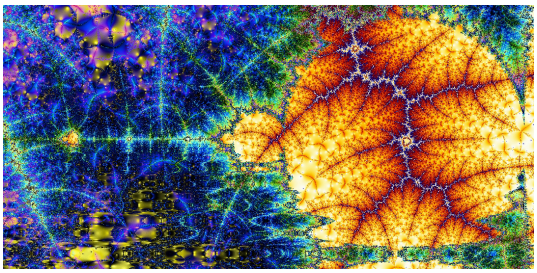


Capítulo 5

MODELOS MATRICIALES

5.1. Cadenas de Markov

A los dos resultados que podemos obtener al realizar el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire los designaremos por $E_1 = salir\ cara$ y $E_2 = salir\ cruz$. Si repetimos t veces este experimento la probabilidad de que en uno de ellos obtengamos E_1 no depende de lo que haya salido en el experimento anterior; ambos sucesos son independientes. Sin embargo, existen muchos otros fenómenos representados por variables aleatorias dependientes. En 1907 *Markov* estudió estas situaciones en las cuales la probabilidad de que ocurra un suceso depende del suceso inmediatamente anterior, y son estas las que estudiaremos en esta sección.

5.1.1. Resumen teórico

Sea la cadena de Markov $\vec{X}(t+1) = A\vec{X}(t)\,, t = 0,\ 1,\ \cdots$

- Si la matriz de transición A sólo tiene un autovalor de módulo 1, la cadena sólo tiene una clase final. Existe un único vector de estado permanente o estable que se corresponde con el autovector (normalizado) asociado al autovalor. Si este vector tiene todas sus componentes positivas, entonces la cadena es completamente ergódica, y si hay algún elemento nulo, será simplemente ergódica. A la larga, la distribución de la cadena, independientemente del valor inicial es el vector propio asociado al $\lambda = 1$
- Si además de $\lambda = 1$, existen otro m valores de módulo unidad, entonces la cadena es periódica de período m. Tiene una sola distribución estacionaria dada

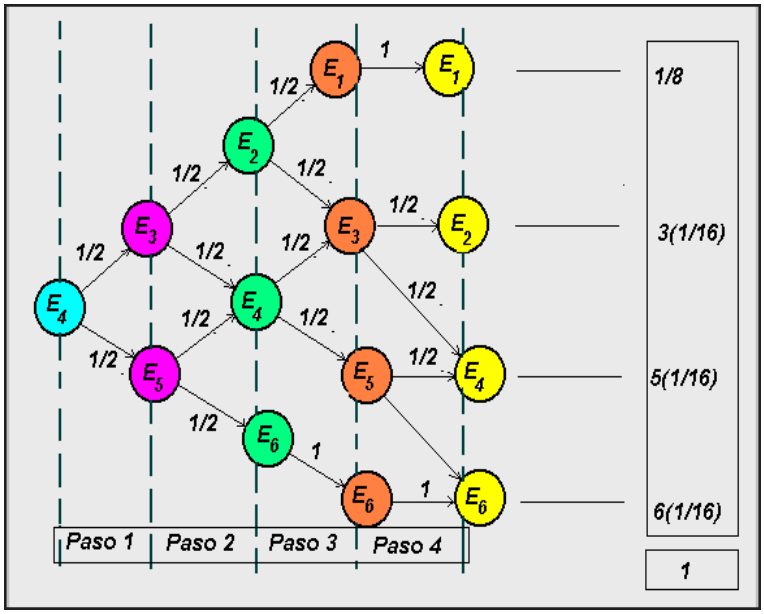
por el autovector asociado al autovalor dominante, pero no es una distribución de estado permanente, ya que no existe el límite de $\vec{X}(n)$ cuando $n \to \infty$.

- Si el autovalor unidad tiene multiplicidad k, la cadena es múltiple y consta de k clases finales y puede tener o no alguna clase de estados transitorios, pero a largo plazo, quedará atrapada en una de las clases finales. Si una clase final es unitaria, el único estado que lo forma es absorbente. Una clase múltiple de k clases finales tiene k distribuciones estacionarias que vienen dadas por k autovectores linealmente independientes asociados al autovalor dominante $\lambda = 1$. La distribución a la larga dependerá de la distribución inicial.

EJERCICIO 16 Sea la matriz de transición correspondiente a seis estados

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Supongamos que en el momento inicial el sistema se encuentra en el estado E_4.



1.- Veamos como podemos pasar del estado inicial E_4 al resto de los estados. Sabemos que

$$\vec{X}(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T.$$

Como puede apreciarse en la Figura, al cabo de un paso la probabilidad será,

$$\vec{X}(1) = (0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0)^T ,$$

o bien $\vec{X}(1) = A\,\vec{X}(0)$. Del mismo gráfico deducimos que,

$$\begin{aligned}\vec{X}(2) &= (0, 1/4, 0, 1/2, 0, 1/4)^T \\ \vec{X}(3) &= (1/8, 0, 3/8, 0, 1/4, 1/4)^T \\ \vec{X}(4) &= (1/8, 3/16, 0, 5/16, 0, 3/8)\,.\end{aligned}$$

O de forma matricial:

$$\vec{X}(2) = A\,\vec{X}(1)\,, \quad \vec{X}(3) = A\,\vec{X}(2)\,, \quad \vec{X}(4) = A\,\vec{X}(3)\,.$$

2.- Con el programa Mathematica® podemos encontrar A^{200},

```
A := {{1., 1/2, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0.5, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0},
{0, 0, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1/2, 1}}
MatrixPower[A, 200]
```

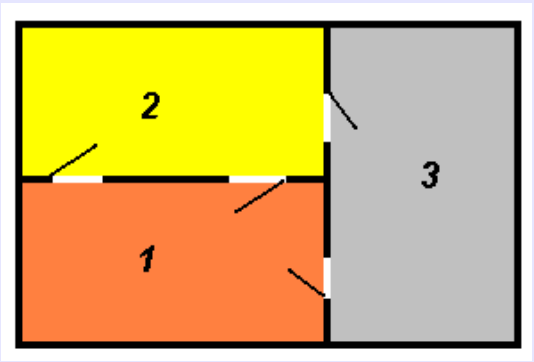
{{1., 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.}, {0., 1.07909*10^{-19} , 0., 1.746 *10^{-19}, 0., 0.}, {0., 0., 2.82509*10^{-19}, 0., 1.746* 10^{-19}, 0.}, {0., 1.746*10^{-19}, 0., 2.82509*10^{-19}, 0., 0.}, {0., 0., 1.746*10^{-19}, 0., 1.07909*10^{-19}, 0.}, {0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.}}

3.- Del apartado anterior deducimos que

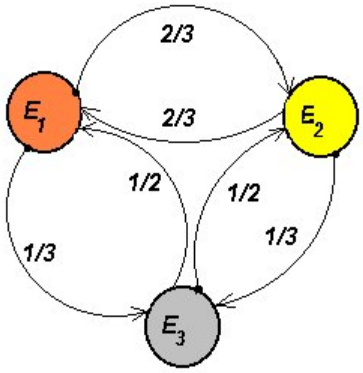
$$\lim_{n\to\infty} A^n\,\vec{X(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Es decir, a largo plazo existe un 40 % de posibilidades de que partiendo del estado E_4 la cadena se encuentre en el estado E_1 y un 60 % de que esté en el E_6.

EJERCICIO 17 Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la figura. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Sabiendo que semana tras semana todos los ratones cambian de ubicación y que los ratones cuando salen eligen un compartimento al azar, veamos cuál será su distribución de los ratones al cabo de "infinitas" semanas.



- Observemos que estamos ante una cadena de *Markov* cuyo diagrama de estados es el siguiente:



A partir del diagrama es inmediato obtener la matriz de transición

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $X_i(t)$ representa al número de ratones en el compartimento $i = 1, 2, 3$ en la semana t y $\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$ es la distribución inicial, deducimos del enunciado que

$$\begin{cases} X_1(1) = & & \frac{2}{3}X_2(0) + & \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_2(1) = & \frac{2}{3}X_1(0) + & & \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_3(1) = & \frac{1}{3}X_1(0) + & \frac{1}{3}X_2(0) & . \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales que podemos expresarlo matricialmente

$$\begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\vec{X}(1) = A\vec{X}(0)\,.$$

Razonando de la misma manera

$$\vec{X}(2) = A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0)\,.$$

En general

$$\vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0)\,, \quad t = 1,\, 2,\, \cdots\,.$$

En consecuencia, para obtener el número de ratones en cada uno de los compartimentos en la semana t, tendremos que encontrar el valor de la matriz potencia A^t. Una aproximación de este valor podemos obtenerla con el `Mathematica`®

```
A := {{0, 2/3, 0.5}, {2/3, 0, 0.5}, {1/3, 1/3, 0}}
MatrixPower[A, 100]
```

$\{\{0.375, 0.375, 0.375\}, \{0.375, 0.375, 0.375\}, \{0.250, 0.250, 0.250\}\}$.

- Ahora, estamos interesados en deducir este valor de una manera diferente. Observemos que si la matriz A fuese diagonal, entonces A^t sería muy fácil de encontrar, bastaría elevar a t los elementos de la diagonal. Por esta razón, en primer lugar procederemos a diagonalizar la matriz simétrica A.

  Los valores propios de la matriz A son los siguientes:

$$|A - \lambda\, I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

  desarrollando obtenemos la ecuación característica

$$9\,\lambda^3 - 7\,\lambda - 2 = 0\,,$$

  cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2/3$, $\lambda_3 = -1/3$. Por tanto, la matriz A es diagonalizable siendo los subespacios propios asociados a estos valor propio

$$S_1 =< (3,3,2) >\,, \quad S_2 =< (-1,1,0) >\,, \quad S_3 =< (-1,-1,2) >\ .$$

  En consecuencia, la matriz de paso C es,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Para encontrar A^t, actuamos de la manera siguiente

$$D = C^{-1}AC \quad \Rightarrow \quad A = CDC^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^t = CD^tC^{-1}\,,$$

que en nuestro caso

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Simplificando

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(3+4\left(-\frac{2}{3}\right)^t+\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{8}\left(3-4\left(-\frac{2}{3}\right)^t+\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{3}{8}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) \\ \frac{1}{8}\left(3-4\left(-\frac{2}{3}\right)^t+\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{8}\left(3+4\left(-\frac{2}{3}\right)^t+\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{3}{8}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) \\ \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) & \frac{1}{4}\left(1+3\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right) \end{pmatrix}.$$

Finalmente hacemos que $t \to \infty$, entonces

$$A^t \to \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia después de infinitas semanas la distribución de los ratones tiende hacia

$$\left.\begin{array}{rcl} \textbf{Primero} & = & \frac{3}{8}X_1(0)+\frac{3}{8}X_2(0)+\frac{3}{8}X_3(0) = \frac{3}{8}(X_1(0)+X_2(0)+X_3(0)) = \frac{3}{8}\text{Total} \\ \textbf{Segundo} & = & \frac{3}{8}X_1(0)+\frac{3}{8}X_2(0)+\frac{3}{8}X_3(0) = \frac{3}{8}(X_1(0)+X_2(0)+X_3(0)) = \frac{3}{8}\text{Total} \\ \textbf{Tercero} & = & \frac{1}{4}X_1(0)+\frac{1}{4}X_2(0)+\frac{1}{4}X_3(0) = \frac{1}{4}(X_1(0)+X_2(0)+X_3(0)) = \frac{1}{4}\text{Total} \end{array}\right\}$$

- Un camino alternativo para llegar a la conclusión anterior es utilizar el Teorema **??**.

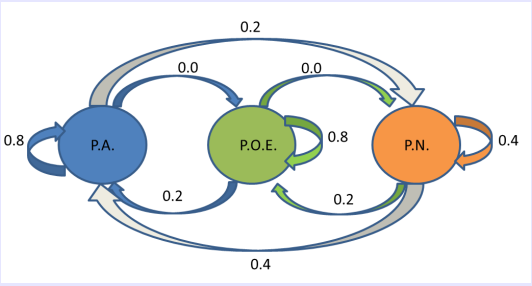
  En efecto, la cadena de *Markov* es regular ya que todos los estados son accesibles y existen dos ciclos $E_1E_2E_3E_1$ y $E_1E_2E_1$ al menos uno de ellos impar (además A^2 tiene todos sus elementos positivos) . Sabemos que el vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ es $(3, 3, 2)$.

$$\vec{\Pi} = (3/8,\, 3/8,\, 1/8),$$

y en consecuencia si $t \to \infty$,

$$A^t \to \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 18 La tendencia de voto, respecto a los partidos P.N., P.O.E. y P.A., en una Comunidad Autónoma son de gran interés cada 4 años. El diagrama de la figura siguiente representa a la matriz de transición de la tendencia de votos.



Modelizar la tendencia de voto de acuerdo con los datos anteriores a través de una Cadena de Markov.

- Empezamos introduciendo las siguientes variables para construir el modelo:

  - $x(t)$ = porcentaje de votantes que votan al P.A.en el periodo t
  - $y(t)$ = porcentaje de votantes que votan al P.O.E. el periodo t
  - $z(t)$ = porcentaje de votantes que votan al P.N.en el periodo t

  De tal manera que:

$$\begin{array}{rcl} x(t+1) & = & 0.8x(t) + 0.2y(t) + 0.4z(t) \\ y(t+1) & = & 0.8y(t) + 0.2z(t) \\ z(t+1) & = & 0.2x(t) + 0.4z(t) \end{array}$$

  o bien expresado matricialmente $X(t+1) = A\,X(t)$:

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \\ z(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

  De esta manera, conocido los valores iniciales $X(0)$ podríamos calcular el porcentaje de votos esperado para un periodo cualquiera n:

$$X(n) = A.x(n-1) = A.A.x(n-2) = A^2.X(n-2) = \cdots = A^n.X(0)$$

  Si $X(0) = (1/3, 1/3, 1/3)$, entonces:

Wolfram Mathematica | STUDENT EDITION

```
A := {{0.8, 0.2, 0.4}, {0, 0.8, 0.2}, {0.2, 0, 0.4}}

X0 := {1/3, 1/3, 1/3}

For[i = 1, i ≤ 8, i++, Print["n=", i, "  ", MatrixForm[MatrixPower[A, i].X0]]]
```

para cada | escribe | forma de matriz | potencia matricial

```
n=1
0.466667
0.333333
0.2

n=2
0.52
0.306667
0.173333

n=3
0.546667
0.28
0.173333

n=4
0.562667
0.258667
0.178667

n=5
0.573333
0.242667
0.184

n=6
0.5808
0.230933
0.188267

n=7
0.586133
0.2224
0.191467

n=8
0.589973
0.216213
0.193813
```

Se aprecia como los porcentajes de votos se estabilizan, de tal manera que para $X(20)$ el valor obtenido es de:

$$X(20) = (0.599793, 0.200334, 0.199872)$$

aproximadamente, el partido P.A. tendría el 60 % de los votos, el P.O:E. el 20 %, y el P.N. el otro 20 %

EJERCICIO 19 Para el ejercicio anterior:

1.- Encuentra los valores propios de la matriz de transición A. ¿Es diagonalizable? En caso afirmativo, diagonalizar dicha matriz A.

2.- Calcula la matriz potencia A^n y estudia la convergencia de la sucesión $\{A^n\}$

3.- Estudia la tendencia de voto cuando $n \to \infty$

EJERCICIO 20 Supongamos que disponemos de una casa, un granero, un gato y un ratón. Los animales pueden estar los dos en la casa, los dos en el granero o uno en el granero y otro en la casa. Realizamos de forma sucesiva la siguiente experiencia:

Lanzamos dos monedas al aire, si salen dos caras cambiamos al ratón del lugar donde se encuentre. Si salen una cara y una cruz, es el gato el que se cambia. Por último, si salen dos cruces, entonces cambiamos al gato y al ratón del sitio donde se encuentran.

- Si tenemos en cuenta las diferentes opciones para la casa, inmediatamente quedará también determinada las opciones para el granero. Los diferentes estados son:

  1.- E_1: la casa está vacía.

  2.- E_2: en la casa sólo se encuentra el gato.

  3.- E_3: en la casa sólo está el ratón.

  4.- E_4: los dos animales están en la casa.

  Observemos que podemos modelizar la situación anterior por medio de una cadena de *Markov* ya que la probabilidad P_{ij} de pasar del estado E_j al E_i sólo depende del i y del j. Por otro lado, como $1/4$ es la probabilidad de sacar dos caras o dos cruces y $1/2$ la probabilidad de que salga una cara y una cruz, entonces la matriz de transición para esta cadena es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Por ejemplo, la probabilidad P_{23} de pasar del estado E_3 al E_2 será pasar de la situación de que el ratón está en la casa y el gato en el granero a la nueva situación de que se permuten los dos animales, y esto obliga a que al lanzar las dos monedas salgan dos caras, cuya probabilidad es $1/4$. De manera similar, P_{43} es la probabilidad de pasar del estado E_3 (ratón el la casa) al estado E_4 (los dos animales están en la casa) y por ello es necesario que en una moneda salga una cara y en la otra una cruz, cuya probabilidad es $1/2$.

- Para estudiar la evolución a largo plazo de esta cadena tenemos que ver en primer lugar si es regular. Para ello al calcular

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 3/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

  observamos que todos sus elementos son no nulos y en consecuencia la matriz A es regular. Por tanto, podemos utilizar los Teoremas **??** y **??**.

`Eigenvalues[A]`

$\{-1/2,\ -1/2,\ 0\,,\ 1\}$

`Eigenvectors[A]`

$\{\{0,\ 0,\ -1,\ 1\}, \{-1,\ 1,\ 0,\ 0\},\ \{-1,\ -1,\ 1,\ 1\}, \{1,\ 1,\ 1,\ 1\}\}$

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T\ ,$$

que una vez normalizado $(0.25,\ 0.25,\ 0.25,\ 0.25)^T$.

- Finalmente

$$A^t \longrightarrow \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \quad \text{cuando} \quad t \to \infty\,.$$

Si, por ejemplo, inicialmente la casa se encuentra vacía

$$\vec{X}(0) = (1,\ 0,\ 0,\ 0)^T\,,$$

entonces

$$\vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0) = (0.25,\ .25,\ 0.25,\ 0.25)^T\,,$$

y es igual de probable que a largo plazo nos encontremos en cualquiera de los cuatro estados posibles.

EJERCICIO 21 Supongamos una cola para comprar un billete en un mostrador de una línea aérea. Se sabe que:

1.- En un intervalo de un minuto, hay una probabilidad de 1/3 de que una persona se añada a la cola y una probabilidad de 2/3 de que nadie se agregue. Observemos, que en cualquier intervalo de un minuto nunca se agregará más de una persona a la cola.

2.- Si se está atendiendo a una persona en un intervalo, la probabilidad de que en ese mismo intervalo reciba el billete es de 3/8. Si es así, saldrá de la cola en el siguiente intervalo.

3.- Todas las probabilidades son independientes de lo que haya sucedido en intervalos anteriores.

4.- Una persona no puede ser atendida en el mismo intervalo en que llega a la cola.

5.- No pueden ser atendidas más de una persona en un mismo intervalo.

6.- Como media para que no se congestiones la cola, se cerrará si hay 4 personas esperando en ella. Es decir, como mucho, nuestra cola puede tener 4 personas.

- Se puede modelar esta situación a través de un modelo matricial tipo cadena de *Markov* con 5 estados. El estado E_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ representa a que en que en la cola hay i personas.

  Para calcular la matriz de transición representaremos, como siempre la columna indicará el estado actual y las filas el estado siguiente.

  - El elemento p_{00} representa a la probabilidad de que estando en el estado E_0 se pase al E_0. Es decir, la probabilidad de que si no hay nadie en la cola no se agregue nadie (que por enunciado sólo podría ser una persona). Sabemos que esta probabilidad es $p_{00} = 2/3$.
  - Del mismo modo p_{10} representa a la probabilidad de que si no hay nadie en la cola se agregue una persona y su valor es $1/3$.
  - La probabilidad $p_{20} = p_{30} = p_{40} = 0$, ya que por el enunciado sabemos que si no hay nadie en la cola no se puede agregar a ella más de una persona, en un intervalo de tiempo.
  - El elemento $p_{01} = 1/3$
  - El elemento p_{11} corresponde al caso de que actualmente hay una persona en la cola y en el período siguiente sigue existiendo una persona, para ello es necesario que ocurra alguna de estas dos situaciones excluyentes:
    - que no se atienda a ninguna persona y no llegue nadie (su probabilidad es $\frac{5}{8} * \frac{2}{3}$, o bien,

- ∘ se atiende a una persona y llega otra a la cola (la probabilidad es $\frac{3}{8} * \frac{1}{3}$).

  En consecuencia, $p_{11} = \frac{5}{8} * \frac{2}{3} + \frac{3}{8} * \frac{1}{3} = \frac{13}{24}$

- Para pasar del estado E_1 al E_2, no se debe atender a nadie (probabilidad 5/8) y además se habrá agregado una persona a la cola (probabilidad 1/3). Por lo tanto, $p_{21} = \frac{5}{8} * \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$

Procediendo de esta manera, es fácil comprobar que la matriz de transición de la cadena de Markov es,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{24} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{24} & \frac{13}{24} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{24} & \frac{13}{24} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{24} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Observemos que la suma de los elementos de cada fila es 1 (corresponde al suceso seguro), y que cada elemento de la matriz es mayor o igual que cero y menor o igual a uno.

Procedemos a continuación a calcular, con el `Mathematica`®, los valores y vectores propios de la matriz A.

```
In[7]:= Eigenvalues[A]

Out[7]= {1., 0.881848, 0.599038, 0.304703, 0.131077}

In[8]:= Eigenvectors[A]

Out[8]= {{0.441326, 0.588435, 0.490362, 0.408635, 0.22702},
  {-0.556807, -0.479258, 0.0902714, 0.522216, 0.423578}, {-0.526458, 0.142414, 0.734627, 0.0499079, -0.40049
  {-0.445242, 0.644646, -0.0173738, -0.520737, 0.338707}, {-0.265408, 0.568598, -0.579964, 0.478676, -0.2019
```

In[9]:=
$$\frac{0.441326}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$
$$\frac{0.588435}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$
$$\frac{0.490362}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$
$$\frac{0.408635}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$
$$\frac{0.22702}{0.441326 + 0.588435 + 0.490362 + 0.408635 + 0.22702}$$

```
Out[9]= 0.204718

Out[10]= 0.272957

Out[11]= 0.227464

Out[12]= 0.189553

Out[13]= 0.105308
```

El valor propio $\lambda_1 = 1$ es estrictamente dominante siendo un vector propio asociado,

$$\vec{v}_1 = (0.205, 0.272, 0.23, 0.19, 0.10)$$

cuya interpretación es la siguiente: a largo plazo, el vendedor de billetes estará sin hacer nada el 20.5 % del tiempo, tendrá que atender a una persona el 27.2 % del tiempo tendrá a dos personas en la cola el 22.7 % del tiempo, tendrá a tres personas en la cola el 18.9 % del tiempo y habrá cuatro personas en la cola (lo que obliga a cerrar la cola) el 10.5 % del tiempo.

EJERCICIO 22 Supongamos que la ruta que debe hacer un cartero tiene la forma pentagonal de la Figura 5.1. Al cartero se le asigna un buzón $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ al azar y al día siguiente debe cambiar de la manera siguiente: lanza una moneda y si sale cara se pasa al buzón más cercano situado a su derecha y si sale cruz al más próximo de su izquierda.

1.- **Construir un modelo matricial para esta situación**

2.- **Si el cartero inicialmente se encuentra en el buzón 1, ¿es posible que se encuentre en el buzón 4 después de 4 cambios?, ¿Es posible que se encuentre en el buzón 5 en el quinto día?**

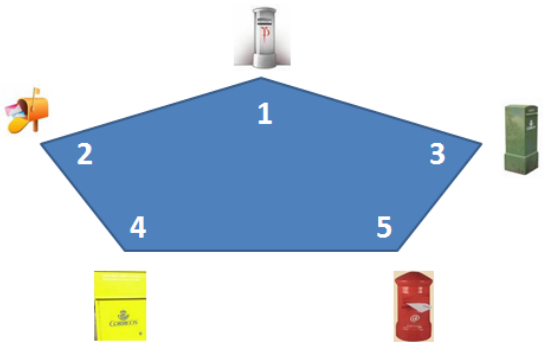


Figura 5.1: Disposición de los buzones.

- Sean los estados $E_i(t)\,, i = 1, 2, 3, 4, 5$, donde E_i indica que el cartero se encuentra en el buzón i. Del enunciado se deduce el siguiente diagrama

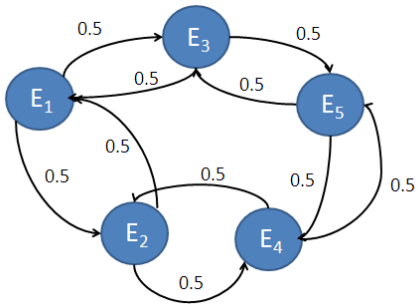


Figura 5.2: Diagrama de estados.

Todos los estados están comunicados, puesto que desde un estado cualquiera se puede alcanzar cualquier otro estado, siguiendo un camino en el diagrama de estados. La cadena de Markov es irreducible.

El estado E_1 es accesible desde el estado E_4, puesto que se puede llegar al E_1 en dos o tres etapas partiendo del E_4. Los estados E_1 y E_4 están conectados.

- Si notamos por $x_i(t)\,, i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ a la probabilidad de que en el día t el cartero se encuentre en el buzón i; la situación puede modelarse por,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

que puede expresarse de forma simbólica como $\vec{X}(t+1) = A\vec{X(t)}$ con $t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

- Si el cartero se encuentra en el buzón 1, entonces $\vec{X}(0) = (1, 0, 0, 0, 0)^T$, de tal manera que

$$\vec{X}(4) = A^4\vec{X}(0) = (\frac{3}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$$

y

$$\vec{X}(5) = A^5\vec{X}(0) = (\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32})^T$$

o bien

$$\vec{X}(5) = A\vec{X}(4) = (\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32})^T$$

como $1/16 \neq 0$, el cartero +llegará al buzón 1 al quinto día, aunque es el buzón menos probable.

- Todos los elementos de la matriz A^4 son distintos de cero, por tanto la cadena de Markov es regular y su comportamiento asintótico viene determinado por el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$,

$$(0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214)$$

o bien,

$$(0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$$

A largo plazo, existe la misma probabilidad (20 %) de estar en cualquiera de los buzones, $\vec{X}(n) = A^n\vec{X}(0)$ con $n \to \infty$

$$\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \\ x_5(0) \end{pmatrix},$$

despejando

$$\begin{aligned}
x_1(n) &= 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2\\
x_2(n) &= 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2\\
x_3(n) &= 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2\\
x_4(n) &= 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2\\
x_5(n) &= 0.2\,(x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)+x_4(0)+x_5(0)) = 0.2\times 1 = 0.2
\end{aligned}$$

EJERCICIO 23 Modificar el ejemplo anterior suponiendo que al lanzar un dado sale un múmero mayor o igual que 3, entonces se pasa al buzón de la derecha, y en caso contrario se desplaza a la izquierda.

- Ahora el modelo matricial es,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1)\\ x_2(t+1)\\ x_3(t+1)\\ x_4(t+1)\\ x_5(t+1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\\ x_5(t)\end{pmatrix}, \qquad t=0,\,1,\,2,\,3,\cdots$$

como

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{24}{81} & \frac{16}{81} & \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{32}{81}\\ \frac{1}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} & \frac{8}{81}\\ \frac{16}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{1}{81}\\ \frac{32}{81} & \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{16}{81}\\ \frac{8}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} & \frac{1}{81} & \frac{24}{81}\end{pmatrix}$$

tiene todos sus elementos distintos de cero, entonces la cadena de Markov es regular. El comportamiento asintótico está determinado por el valor propio asociado al valor propio $\lambda = 1$,

$$(0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214,\ 0.447214)$$

o bien

$$(0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$$

idéntico resultado al ejercicio anterior.

5.2. Dinámica de una población de pájaros

En esta sección se realiza una proyección para los próximos años de una colonia de pájaros, tomando como punto de partida los datos reales correspondientes al período 1991 - 1994.

El Helmeted Honeyeater (*Lichenostomus melanops cassidix*) es un tipo de pájaro de Australia que actualmente se encuentra en peligro de extinción. En esta sección

construiremos un modelo matricial con el objetivo de estudiar la evolución de la población en los próximos años, basándonos en los datos que aparecen en la siguiente tabla, correspondientes al período 1991-1994.

Edad	1991	1992	1993	1994
0	26	28	27	29
1	16	17	20	20
2	12	11	13	14
3	9	8	9	10
4	7	6	6	8
5	5	4	5	5
6	4	3	3	4
7	3	3	2	3
8	2	2	2	2
9	1	1	1	2
Total	85	83	88	97

Empezamos definiendo las hipótesis básicas sobre las que construiremos nuestro modelo.

- Dividiremos la población en cinco clases de edades. En la primera de ellas se encontrarán los pájaros hembras de edad 0, es decir de 0 a 12 meses, y en la última las hembras de 4 años o más (de 48 meses en adelante).
- Por la información de que disponemos, supondremos que las hembras de la primera clase no son fértiles y las fertilidades del resto de las clases son iguales.
- Los parámetros de natalidad y supervivencia se mantienen constantes.

En la Tabla 5.1 hemos dispuesto el número de pájaros hembras para cada una de las cinco clases en el período 1991-1994.

Clase	1991	1992	1993	1994
1	26	28	27	29
2	16	17	20	20
3	12	11	13	14
4	9	8	9	10
5	22	19	19	24
Total	**85**	**83**	**88**	**97**

Tabla 5.1

Una rápida mirada al número total de individuos, nos permite conjeturar que la población tiende a crecer con el paso del tiempo. Podemos encontrar una primera

aproximación de este crecimiento haciendo la media aritmética de los datos que disponemos. Es decir,

$$\frac{\frac{83}{85}+\frac{88}{83}+\frac{97}{88}}{3}=1.04633\,,$$

la población crece año tras año a una media aproximada del 4.63 %.

Como sabemos, la primera fila de la matriz de transición del modelo, está formada por las tasas de natalidad,

$$a_{11}=0\,,\quad a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{15}=\frac{\frac{28}{85-26}+\frac{27}{83-28}+\frac{29}{88-27}}{3}=0.480298\,.$$

Por otro lado, el elemento a_{21} representa al porcentaje de individuos de la primera clase que sobreviven al pasar un año para llegar a la segunda,

$$a_{21}=\frac{\frac{17}{26}+\frac{20}{28}+\frac{20}{27}}{3}=0.702958\,.$$

De forma similar, el resto de las tasas de supervivencia serán,

$$a_{32}=\frac{\frac{11}{16}+\frac{13}{17}+\frac{14}{20}}{3}=0.717402$$

$$a_{43}=\frac{\frac{8}{12}+\frac{9}{11}+\frac{10}{13}}{3}=0.751338$$

$$a_{54}=\frac{\frac{6}{9}+\frac{6}{8}+\frac{8}{9}}{3}=0.7682\,.$$

Por último, encontramos la probabilidad de que una hembra de la última clase siga permaneciendo a la misma clase en el año próximo,

$$a_{55}=\frac{\frac{13}{22}+\frac{13}{19}+\frac{16}{19}}{3}=0.705433\,.$$

En consecuencia, el modelo matricial $\vec{X}(t)=A\,\vec{X}(t-1)\,,t=1,2,\cdots$ que representa a la dinámica de esta población de Helmeted Honeyeater es:

$$\begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\\X_3(t)\\X_4(t)\\X_5(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0.48&0.48&0.48&0.48\\0.702&0&0&0&0\\0&0.717&0&0&0\\0&0&0.751&0&0\\0&0&0&0.7682&0.705\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(t-1)\\X_2(t-1)\\X_3(t-1)\\X_4(t-1)\\X_5(t-1)\end{pmatrix}$$

Si tomamos como vector inicial

$$\vec{X}0)=(26,16,12,9,22)^T\,,$$

podemos saber la "bondad"del modelo, calculando el número de individuos en las siguientes generaciones. De esta manera, para el año 1992 el modelo predice

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \\ X_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 \\ 0.702 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7682 & 0.705 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 16 \\ 12 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 28 \\ 18 \\ 11 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix}$$

En la tabla siguiente pueden verse las proyecciones de la población para distintas generaciones,

Clase	1991	1992	1993	1994	1995	2011	2012
1	26	28	29	31	32	69	73
2	16	18	20	21	22	47	49
3	12	11	13	14	15	32	33
4	9	9	9	10	11	23	24
5	22	22	23	23	23	51	53
Total	**85**	**88**	**94**	**99**	**103**	**222**	**232**

El modelo prevé un crecimiento de la población con una tasa

$$\frac{\frac{88}{85} + \frac{94}{88} + \frac{99}{94} + \frac{103}{99}}{4} = 1.048\,,$$

del 4.8 %, muy parecida a la obtenida con los datos reales de los primeros años. Además, en el período 2011 - 2012 la población se espera que crezca $232/222 = 1.04505$, un 4.5 %.

Si utilizamos el programa `Mathematica`® para conocer los valores y vectores propios de la matriz A, obtenemos $\lambda_1 = 1.04897$ como valor propio dominante y

$$\vec{U}_1 = (0.659,\, 0.441,\, 0.301,\, 0.216,\, 0.482)^T\,,$$

su vector propio asociado. En consecuencia, a largo plazo, la población crecerá a un ritmo del 4.897 % anual, y los porcentajes de hembras en cada una de las clases se mantendrán constantes, tal y como puede observarse en la Figura 5.3.

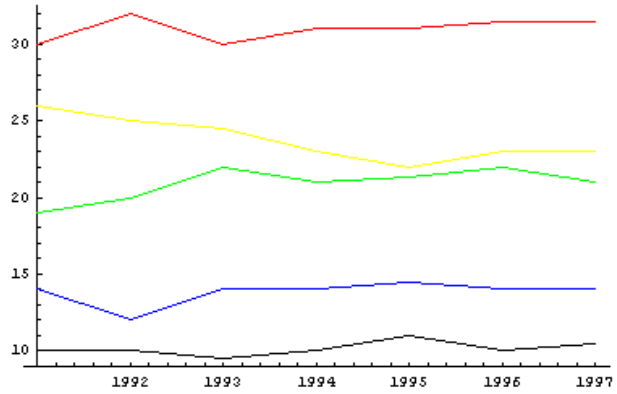


Figura 5.3. Rojo=clase 1, verde=clase 2, azul=clase 3, negro=clase 4, amarillo=clase 5

5.3. Dinámica de una población de ardillas

En este apartado probaremos como la reducción de una población de ardillas modifica la tasa de crecimiento de la población.

Recordemos que entendemos por dinámica de la población a la variación del número de individuos de una población en función del tiempo. Como un caso particular de este tipo de dinámica, mostraremos un ejemplo concreto que corresponde a la evolución a largo plazo de una población de ardillas (*Spermophilus armatus*).

Estas ardillas pueden encontrarse en el estado de Utah en USA, y suelen despertarse de la invernación cada año a finales de Marzo o primeros del mes de Abril, dependiendo de las condiciones climatológicas. Las hembras paren muy rápidamente después de despertar y establecer su territorio. En los primeros días de Mayo nacen las crías y las ardillas jóvenes dejan sus madrigueras aproximadamente tres semanas después. Durante los meses de Junio y Julio todas las clases de edades y sexos son activas. Finalmente, los adultos comienzan la hibernación a finales de Julio, de tal manera que en Septiembre todas las ardillas están de nuevo invernando en sus madrigueras.

La investigación se realizó en dos fases, la primera de ellas se desarrolló desde 1964 a 1968, y se dejó plena libertad a la población. En este caso, el número de ardillas fluctuó entre 178 y 255, con una media de 205. La primera parte de la Tabla 5.2 corresponde a la tabla de vida durante esa primera etapa.

La segunda fase se desarrolló entre los años 1968 - 1971 y los investigadores intervinieron reduciendo la población a 100 ardillas. La segunda parte de la Tabla 5.2 muestra su tabla de vida, para esta segunda etapa.

x(año)	l(x)	b(x)	l(x)	b(x)
0.00	1.000	0.00	1.000	0.00
0.25	0.662	0.00	0.783	0.00
0.75	0.332	1.29	0.398	1.71
1.25	0.251	0.00	0.288	0.00
1.75	0.142	2.08	0.211	2.24
2.25	0.104	0.00	0.167	0.00
2.75	0.061	2.08	0.115	2.24
3.75	0.026	2.08	0.060	2.24
4.75	0.011	2.08	0.034	2.24
5.75	0.000	0.00	0.019	2.24
6.75	-	-	0.010	2.24
7.75	-	-	0.000	0.00

Tabla 5.2.

Si analizamos los resultados utilizando como software `Populus`®, observamos que durante la primera de las fases las tasas de nacimientos y muertes estaban equilibradas, generando una tasa de crecimiento negativo (r=-0.0207 ardillas/(ardillas× año)).

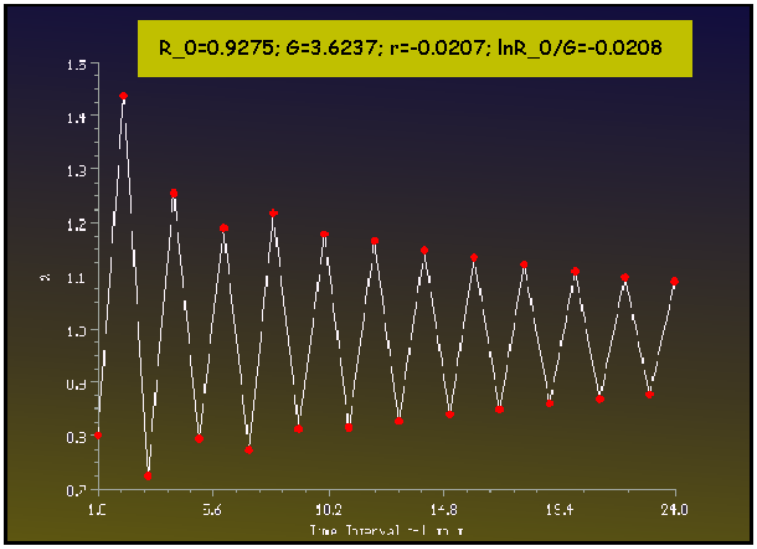


Figura 5.4: Evolución de $\lambda = e^r$ (primer caso)

En la Figura 5.4 se aprecia que a medida que aumentamos el número de años, $\lambda = e^r$ tiende al valor 0.979512.

La Figura 5.5 representa la distribución estable de clases

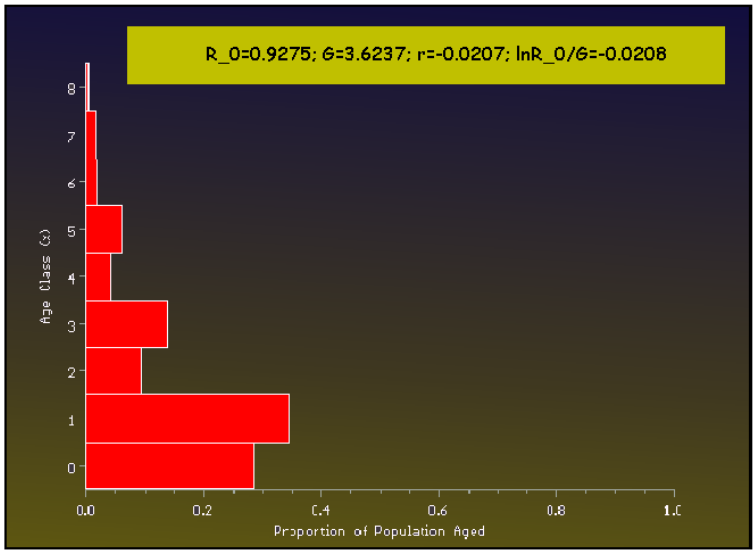


Figura 5.5: Distribución por edades (primer caso)

Cuando se reduce la densidad de población de ardillas, la natalidad supera a la mortalidad y se produce un aumento considerable en la tasa de crecimiento (r=0.1267 ardillas/(ardillas× año))

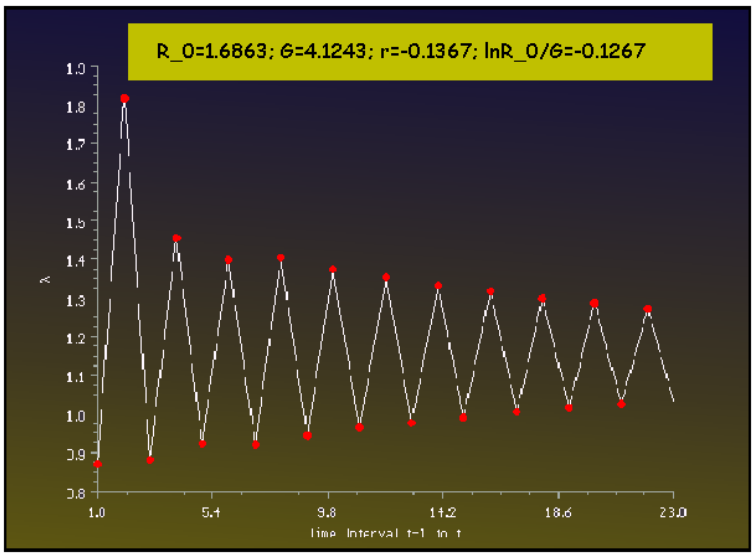


Figura 5.6: Representación gráfica de λ (segundo caso)

La Figura 5.6 muestra como ahora la estabilidad en las clases de edad tiene una tendencia diferente a la primera de las fases estudiadas.

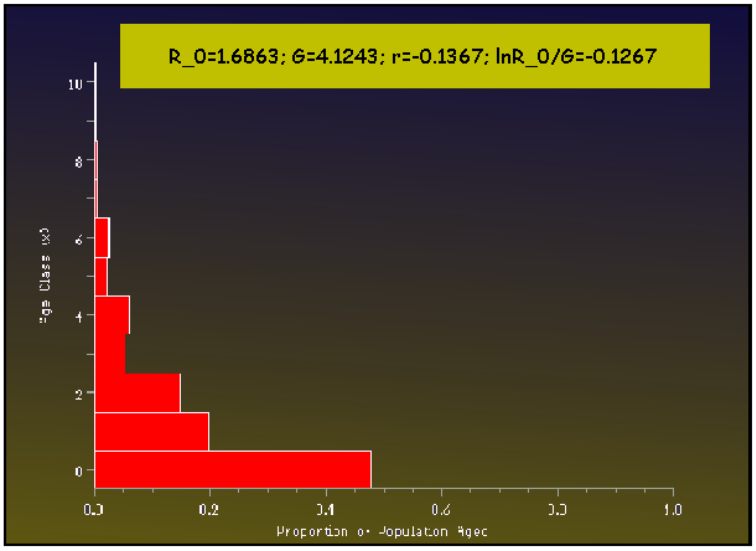


Figura 5.7. Distribución por edades (segundo caso)

En conclusión, la reducción en la densidad de la población pone de manifiesto que el agrupamiento tiene muchos efectos escondidos detrás de una determinada tasa de crecimiento. Por ejemplo, la natalidad, la mortalidad y la estabilidad en la estructura de edad, son muy sensibles a la densidad de la población.

5.4. Modelo para la producción de células rojas

El siguiente modelo simula la producción de células rojas del cuerpo humano. En el sistema circulatorio las células rojas son las encargadas de transportar el oxígeno a través del cuerpo. En este proceso son destruidas y reemplazadas de forma constante, por lo que su número debe mantenerse en un nivel fijo. Nos proponemos construir un modelo muy simple que simule la producción de estas células rojas en el cuerpo, para lo cual empezamos considerando unas hipótesis básicas de partida.

1.- El bazo filtra y destruye una cierta fracción de células al día.

2.- La médula ósea produce un número proporcional al número de células perdidas en el día anterior.

Tomando a estas restricciones como punto de partida, nuestro objetivo será determinar el número de células rojas existente para un día cualquiera k Para ello, representaremos por,

- R_k al número de células rojas en circulación en el día k.
- M_k al número de células rojas producidas por la médula en el día k.
- α a la fracción destruidas por el bazo.
- γ a la producción constante (número producido por número perdido.)

De las hipótesis y definiciones anteriores se deduce que,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} R_{k+1} & = & (1-\alpha)R_k + M_k \\ M_{k+1} & = & \gamma\alpha R_k \end{array} \right.$$

o bien, matricialmente

$$\begin{pmatrix} R_{k+1} \\ M_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \gamma\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_k \\ M_k \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(k+1) = A\vec{X}(k), \quad k = 1, 2, 3, \cdots .$$

Para estudiar su evolución en el tiempo, es necesario encontrar la potencia de la matriz A, ya que $\vec{X}(k) = A\vec{X}(k-1) = A^k\vec{X}(0)$. Necesitamos conocer, en primer lugar, los valores propios de la matriz A.

```
A := {{1 - α}, {γα, 0}}
Eigenvalues[A]
```

$$\{\frac{1-\alpha-\texttt{Sqrt}[(-1+\alpha)^2+4\alpha\gamma]}{2}\}, \frac{1-\alpha+\texttt{Sqrt}[(-1+\alpha)^2+4\alpha\gamma]}{2}\} \qquad (5.2)$$

Veamos a continuación que el comportamiento del modelo dependerá de los valores propios de la matriz de transición A.

- **Si los dos autovalores son menores que uno** y $D = C^{-1}AC$ es la matriz diagonal, entonces D^k tiende a la matriz nula cuando $k \to \infty$. En consecuencia, $A^k = CD^kC^{-1}$ tiende a largo plazo a la matriz nula, y **en el cuerpo no quedarán células rojas**.
- **Si al menos uno de los autovalores es más grande que uno**, entonces D^k crecerá cuando $k \to \infty$, y A^k también lo hará. Esto significa que **el número de células rojas aumentará de forma continua con el tiempo** y llegará un momento en el que el individuo fallecerá.
- Entonces la única forma de **mantener constante el número de células rojas, sería cuando existiese un valor propio dominante que valiese uno**.

Pero teniendo en cuenta (5.2), esto último ocurrirá si y sólo si $\gamma = 1$. Supongamos, por tanto, que $\gamma = 1$ con $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\alpha$, si calculamos los vectores propios asociados

$$\vec{U}_1 = (1,\, \alpha), \quad \vec{U}_2 = (1,\, -1)\,.$$

que nos permiten escribir

$$A^k = CD^kC^{-1} = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 1+\alpha(-\alpha)^k & 1-(-\alpha)^k \\ \alpha(1-(-\alpha)^k) & \alpha+(-\alpha)^k \end{pmatrix},$$

y deducir

$$R(k) = \frac{1}{1+\alpha}\left((1+\alpha(-\alpha)^k)R(0) + (1-(-\alpha)^k)M(0)\right).$$

Como la fracción de células rojas α es reemplazada por el bazo cada día, si k es suficientemente grande, entonces $R(k)$ tiende al valor de equilibrio R^*, siendo

$$R^* = \frac{R(0) + M(0)}{1 + \alpha}\,. \tag{5.3}$$

Conclusiones:

1.- Al ser $(-\alpha)$ negativo, al calcular $(-\alpha)^k$ con $k \to \infty$, el número de células rojas oscilará (dependiendo de que k sea par o impar) para aproximarse al punto de equilibrio (5.3). Una posible explicación biológica de este hecho puede deberse al efecto de retardo, ya que el número de células rojas que la médula ósea produce hoy está en función de las que se destruyeron ayer.

2.- La convergencia hacia el punto de equilibrio (5.3) será muy rápida si α es pequeño, y esto significaría que el bazo filtra pocas células rojas del día anterior.

3.- Cuando se extrae sangre se reducen las cantidades $R(0)$ y $M(0)$ y hay una reducción en el punto de equilibrio que no se recupera con el tiempo. Este comportamiento del modelo entra en contradicción con la realidad, y por ello es necesario modificarlo. Una posible mejora sería

$$\left\{ \begin{array}{lcl} R_{k+1} & = & (1-\alpha)R_k + \varepsilon \\ M_{k+1} & = & \gamma\alpha R_k \end{array} \right. ,$$

ya que ahora el punto de equilibrio sería constante de valor ε/α.

5.5. Explotación de una población de animales

El siguiente modelo puede ser utilizado en la gestión de un coto de caza o una granja para la explotación duradera de una población de animales.

Entendemos por explotación a la separación de algunos animales para su venta o sacrificio. Nosotros nos limitaremos a lo que se conoce como política de explotación duradera, lo cual significa:

- *Diremos que una explotación es duradera, si el rendimiento que se obtiene al término de cada período es el mismo y la distribución de las edades de la población se conserva al separar el rendimiento de cada período.*

Por tanto, la población animal no se agota, solo se explota el excedente debido al crecimiento. La idea básica del modelo que queremos construir es el siguiente. Se parte de una población con una determinada distribución de las edades. Esta población tiene un período de crecimiento descrito por una matriz de *Leslie*. Al término de este período, se obtiene como rendimiento una fracción de cada una de las clases de edades. La duración del período de separación de los animales que conforman el rendimiento, debe ser breve en comparación con el período de crecimiento (para que

el crecimiento o los cambios de la población sean despreciables en dicho período de separación). Finalmente, la población debe quedar con la misma distribución de las edades que la población original. Este ciclo se repite después de cada separación y por tanto, el rendimiento es duradero. Sea:

$$\vec{X} = (X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4,)^T \ ,$$

el vector de distribución de las edades de la población al inicio del período de crecimiento; X_i es el número de hembras de la clase de orden i que sigue formando parte de la población (que no se separan como rendimiento). La duración de cada clase debe ser igual a la duración del período de crecimiento. Por ejemplo, si el rendimiento se separa una vez al año, la población tendrá que dividirse en clases de un año.

Sea L la matriz de *Leslie* que describe el crecimiento de la población; por lo tanto, $L\vec{X} =$ será el vector de la distribución de las edades de la población al término del período de crecimiento (esto es, inmediatamente antes de la separación). Sea h_i con $i = 1, 2, 3, 4$, la fracción de hembras que se va a separar de las clases de orden i. Entonces en la primera clase, después de un período de crecimiento se pasa de X_1 hembras a,

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 \,,$$

siendo el número de hembras que se separan

$$h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) \,,$$

y en consecuencia

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 - h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) \,,$$

serán las hembras que quedan en la primera clase después de la separación. Por tanto,

$$X_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 - h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) \,.$$

Del mismo modo, en la segunda clase

$$b_1X_1 - h_2b_1X_1 = X_2 \,,$$

y en la tercera y cuarta clase

$$\begin{aligned} b_2X_2 - h_3b_2X_2 &= X_3 \\ b_3X_3 - h_4b_3X_3 &= X_4 \,. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores podemos expresarlas matricialmente,

$$\begin{aligned} (1-h_1)(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) &= X_1 \\ (1-h_2)b_1X_1 &= X_2 \\ (1-h_3)b_2X_2 &= X_3 \\ (1-h_4)b_3X_3 &= X_4 \end{aligned} \qquad (5.4)$$

Es posible realizar un razonamiento similar de forma más simplificada, haciendo uso del álgebra matricial. Sea

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{pmatrix},$$

la matriz de separación de cada una de las clases. Si tenemos en cuenta lo que entendemos por una política duradera tenemos:

- La distribución de las edades al final del período de crecimiento ($L\vec{X}$) menos el rendimiento ($HL\vec{X}$) será igual a la distribución de las edades al comienzo del período de crecimiento ($\vec{X}$).

O bien,

$$L\vec{X} - HL\vec{X} = \vec{X} \quad \Rightarrow \quad (I - H)L\vec{X} = \vec{X}\,. \tag{5.5}$$

Las ecuaciones (5.4) y (5.5) son idénticas e indican que $\vec{X}$ es un vector propio de la matriz $(I - H)L$ asociado al valor propio $\lambda = 1$. Por esta razón, los valores de h_i y $\vec{X}$ que aparecen en el modelo no pueden tomar cualquier valor, sino que por el contrario estarán sometidos a ciertas restricciones que a continuación analizaremos.

Sabemos que la matriz de *Leslie* es,

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $(I - H)L$ vale,

$$\begin{pmatrix} (1-h_1)a_1 & (1-h_1)a_2 & (1-h_1)a_3 & (1-h_1)a_4 \\ (1-h_2)b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-h_4)b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos, que esta matriz es del mismo tipo que una matriz de *Leslie* y sabemos que la condición necesaria y suficiente para que una matriz de este tipo tenga como valor propio la unidad es que su tasa neta de reproducción R sea igual a 1. En nuestro caso:

$$\begin{aligned} &(1-h_1)(a_1 + a_2b_1(1-h_2) + a_3b_1b_2(1-h_2)(1-h_3) \\ &+a_4b_1b_2b_3(1-h_2)(1-h_3)(1-h_3)) \end{aligned} \quad = 1 \tag{5.6}$$

Esta ecuación, proporciona unas restricciones para las fracciones h_i de separación de los animales. Solo aquellos valores que cumplan esta ecuación y pertenezcan al intervalo $(0, 1)$ dan origen a un rendimiento duradero.

Si h_i con $i = 1, 2, 3, 4$ satisfacen la ecuación (5.6), la matriz $(I - H)L$ tiene como valor propio $\lambda_1 = 1$ y además este valor propio tiene grado de multiplicidad 1 (ya que el valor propio positivo de una matriz de *Leslie* tiene siempre multiplicidad uno). Por tanto, solo existe un vector propio $\vec{X}$ linealmente independiente que cumple la ecuación,

$$(I - H)L\vec{X} = \vec{X}\,,$$

de valor,

$$\vec{X} = \vec{U}_1 = (1,\, b_1(1-h_2),\, b_1b_2(1-h_2)(1-h_3),\, b_1b_2b_3(1-h_2)(1-h_3)(1-h_4))^T\,.$$

Este vector, determinará la fracción de hembras que quedará en cada una de las 4 clases después de la separación si se sigue una política de explotación duradera. El número de animales suele estar condicionado por restricciones, por ejemplo del tipo ecológico (espacio, tipo de especies) o económico (precio de venta de los animales de cada clase).

5.5.1. Explotación uniforme

Suele ocurrir con frecuencia que en muchas poblaciones es difícil distinguir o capturar animales de una determinada edad. Por este motivo, es razonable pensar que la captura se realiza al azar, lo que equivale suponer que se separa la misma fracción en cada una de las clases. En consecuencia, un primer caso de estudio es

$$h = h_1 = h_2 = h_3 = h_4\,.$$

Entonces, la ecuación $(I - H)L\vec{X} = \vec{X}$, se convertirá en

$$(1-h)L\vec{X} = \vec{X} \quad \Rightarrow \quad L\vec{X} = \left(\frac{1}{1-h}\right)\vec{X}\,.$$

De este modo, $1/(1-h)$ debe ser el valor propio único positivo λ_1 de la matriz de crecimiento de *Leslie*, L

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-h}\,.$$

Despejando h se obtiene

$$\boxed{h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}\,.}$$

El vector $\vec{X}$ es, en este caso, igual al vector propio de L correspondiente al valor propio λ_1

$$\boxed{\vec{X} = \left(1,\, \frac{b_1}{\lambda_1},\, \frac{b_1b_2}{\lambda_1^2},\, \frac{b_1b_2b_3}{\lambda_1^3}\right)^T\,.}$$

Del valor de h encontrado, podemos deducir que, cuanto mayor sea λ_1, mayor será la fracción de los animales que se pueden separar de la población sin agotarla. Se observa también que si $\lambda_1 > 1$, la fracción a separar h se encuentra en el intervalo $(0, 1)$. Esto era de esperar ya que $\lambda_1 > 1$ significa que la población aumenta con el paso del tiempo.

5.5.2. Separación de la clase de menor edad

En algunas poblaciones, las hembras más jóvenes son las únicas que tienen valor económico. Por ello, sólo se separan las hembras de la clase de menor edad y por ello,

$$h_1 = h\,, \qquad h_2 = h_3 = h_4 = 0\,.$$

Bajo estas consideraciones, la ecuación (5.6) se transformará en

$$(1-h)(a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + a_4b_1b_2b_3) = 1\,,$$

o lo que es lo mismo $(1-h)R = 1$, siendo R la tasa neta de reproducción de la población, correspondiente a la matriz L. Luego,

$$\boxed{h = 1 - \frac{1}{R}\,.}$$

En esta ecuación se observa que una política de explotación duradera se logra cuando $R > 1$, lo que equivale a que crezca la población.

El vector de la distribución de las edades después de la separación es proporcional al vector

$$\boxed{\vec{X} = (1,\, b_1,\, b_1b_2,\, b_1b_2b_3)^T\,,}$$

ya que $\lambda_1 = 1$. En efecto, $(I-H)L\vec{X} = \vec{X}$,

$$\begin{pmatrix} (1-h)a_1 & (1-h)a_2 & (1-h)a_3 & (1-h)a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \vec{X} = \vec{X}\,.$$

En este caso la tasa neta de reproducción $R' = 1$ será

$$R' = (1-h)[a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + a_4b_1b_2b_3] = (1-h)R = 1\,.$$

EJEMPLO 5.1

Una cierta población de animales está dividida en tres clases de edades de un año de duración y la matriz de *Leslie* correspondiente es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0, & 1/4, & 0 \end{pmatrix}$$

- **Separación uniforme.** Como hemos demostrado, en este caso la fracción que debemos separar, viene dada por la expresión

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}\,.$$

Necesitamos conocer los valores propios de la matriz L

$$|L - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1.5\ ,\ \lambda_2 = -1.31\ ;\ \lambda_3 = -0.19\,,$$

y en consecuencia, la fracción buscada es

$$h = 1 - \frac{1}{1.5} = \frac{1}{3}\,.$$

Es decir, de cada una de las clases de edades, debemos elegir la tercera parte de los animales.

Para encontrar el vector de distribución que quedaría después de cada separación,

$$\vec{X} = \left(1,\, b_1/\lambda_1,\, b_1 b_2/\lambda_1^2\right)^T = (1,\, 1/3,\, 1/18)^T\ .$$

- **Separación de la clase de menor edad**. Actuamos de la misma manera que en el caso anterior, pero teniendo en cuenta que

$$h = 1 - \frac{1}{R}\,,$$

siendo R la tasa neta de reproducción de la matriz L

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 = 0 + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{8}\,.$$

Luego,

$$h = 1 - \frac{8}{19} = \frac{11}{21}\,.$$

El vector de distribución de las edades será:

$$\vec{X} = (1,\, b_1,\, b_1 b_2)^T = \left(1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{8}\right)^T\ .$$

EJEMPLO 5.2

Para una cierta especie de ovejas domésticas de Nueva Zelanda, cuyo período de crecimiento es de un año, se encontró la siguiente matriz de *Leslie*

$$L = \begin{pmatrix}
0.0 & 0.045 & 0.391 & 0.472 & 0.484 & 0.546 & 0.543 & 0.502 & 0.468 & 0.459 & 0.433 & 0.421 \\
0.845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.691 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.561 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.370 & 0
\end{pmatrix}$$

En cada uno de los casos estudiados, encontraremos la fracción h a separar, y el vector de la distribución de las edades de las ovejas, después de cada separación.

- **Separación uniforme.** Para conocer la fracción h necesitamos en primer lugar saber el valor propio positivo λ_1. Para ello, utilizamos el ordenador y puede comprobarse que $\lambda_1 = 1.17557$

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1} = 1 - \frac{1}{1.17557} = 0.15\,.$$

Entonces, la política de explotación uniforme consiste en separar, cada año, el 15 % de las ovejas en cada una de las doce clases.

A continuación encontramos la distribución de las edades de las ovejas, después de cada separación. En este caso, es proporcional al vector

$$\vec{X} = \left(1,\, \frac{b_1}{\lambda_1},\, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2},\, \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3}, \cdots,\, \frac{b_1 \cdots b_{11}}{\lambda_1^{11}}\right)^T = (1,\, 0.719,\, 0.59619,\, \cdots)^T\,.$$

Por cada 1000 ovejas cuya edad está comprendida entre 0 y 1 año después de la separación, hay 719 ovejas cuya edad está comprendida entre 1 y 2 años, 596 entre 2 y 3 y así sucesivamente.

- **Separación de la clase de menor edad.** El segundo caso se resuelve con la misma técnica empleada en el ejemplo anterior. La tasa neta de reproducción es

$$\begin{aligned} R &= a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1} = \\ &= (0 + (0.045)(0.845) + \cdots + (0.421)(0.845) \cdots = 2.513 \end{aligned}$$

La fracción que se separa de la primera clase es

$$h = 1 - \frac{1}{R} = 1 - \frac{1}{2.513} = 0.602\,.$$

La distribución de las edades de la población de ovejas, después de la separación, es proporcional al vector

$$\vec{v_1} = (1, 0.845, 0.824, 0.795, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.060)^T\,.$$

Si hacemos el producto $L\vec{U}_1$ obtenemos

$$(2.513, 0.845, 0.824, 0.795, 0.755, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.060)^T\,,$$

que es el vector de la distribución de las edades inmediatamente antes de la separación. La suma total de todas ellas es 8.518, por lo que la primera, 2.513 supone el $29,5\,\%$ del total. Esto significa que, inmediatamente antes de la separación, el 29.5 % de la población está en la clase de menor edad. Como en esta clase se separa el 60.2 %, se concluye que cada año el rendimiento equivale al 17.8 % de la población total de ovejas.

EJEMPLO 5.3

Supongamos que disponemos de una granja con una capacidad para 1760 cerdas. Hemos dividido la población en tres clases de edad: jóvenes, medianas y adultas, cuyos precios de venta son 36 euros, 30 euros y 42 euros respectivamente.

La tabla siguiente corresponde a la distribución en las tres clases en los años 1998 y 2000:

Edad	Núm. en 1998	Núm. crías 1998-2000	Núm. 2000
$[0,2)$	160	160	1360
$[2,4)$	300	1200	80
$[4,6]$	100	0	0

Realizaremos un estudio para deducir si es más rentable económicamente sacrificar el mismo número de animales de cada una de las clases o si por el contrario interesa sólo sacrificar una parte de los animales más jóvenes.

- Para saber el crecimiento de la población es necesario conocer la matriz de *Leslie*, y en concreto los parámetros de natalidad y supervivencia de la población.

$$a_1 = \frac{160}{160} = 1\,, \quad a_2 = \frac{1200}{300} = 4\,, \quad a_3 = \frac{0}{100} = 0\,, \quad b_1 = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}\,, \quad b_2 = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}\,.$$

  El modelo matricial será,

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \\ X_3(t-1) \end{pmatrix}$$

- Para la **separación uniforme** de las hembras, es necesario encontrar el valor propio estrictamente dominante de matriz de *Leslie* así como su vector propio asociado.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2/3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\, \lambda_2 = 0,\, \lambda_3 = -1\,.$$

  Como el valor propio dominante es $\lambda_1 = 2$, la fracción que debemos separar de cada una de las clases es

$$h = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

  el 50 %. A continuación necesitamos el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 2/3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x - 2y & = & 0 \\ \frac{2}{3}y - 2z & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 4\alpha \\ y = \alpha \\ z = \frac{1}{3}\alpha \end{array}\right.$$

  Por tanto, el subespacio unidimensional de vectores propios asociados al $\lambda_1 = 2$ viene expresado por

$$S = \{(4\alpha,\, \alpha,\, 1/3\alpha) \,:\, \alpha \neq 0\}\,,$$

  el cual es generado por el vector $(4,\, 1,\, 1/3)$, o bien uno proporcional $(12,\, 3,\, 1)$.

  Recordemos que una manera alternativa de encontrar este vector propio es,

$$\vec{U}_1 = \left(1,\, \frac{b_1}{\lambda_1},\, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}\right)^T = \left(1,\, \frac{1/2}{2},\, \frac{1/2 * 2/3}{2^2}\right)^T = \left(1,\, \frac{1}{4},\, \frac{1}{12}\right)^T\,.$$

A la vista del vector propio, debemos repartir los 1760 animales entre las tres clases en la proporción 12 : 3 : 1,

$$\frac{1760}{16} * 12 = 1320 \quad \text{animales en la primera clase}$$

$$\frac{1760}{16} * 3 = 330 \quad \text{animales en la segunda clase}$$

$$\frac{1760}{16} * 1 = 110 \quad \text{animales en la tercera clase}\,.$$

Figura 5.8. Distribución de las hembras antes y después de un período de crecimiento.

Ahora, debemos esperar un período de crecimiento (dos años),

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1320 \\ 330 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2620 \\ 660 \\ 220 \end{pmatrix}.$$

Finalmente el número de animales que separamos de la primera clase será de,

$$2620 - 1320 = 2620 * \frac{1}{2} = 1320\,,$$

de la segunda,

$$660 - 330 = 660 * \frac{1}{2} = 330\,,$$

y de la tercera

$$220 - 110 = 220 * \frac{1}{2} = 110\,.$$

De esta manera, el beneficio obtenido es de

$$1320 * 36 + 330 * 30 + 110 * 42 = 62040 \quad \text{euros}\,.$$

- Para conocer la fracción a separar en el segundo tipo correspondiente a la separación de la **clase de la menor edad**, calculamos la tasa neta de reproducción,

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 = 1 + \frac{4}{2} = 3\,,$$

entonces $h = 1 - 1/R = 1 - 1/3 = 2/3$, es decir un 66 % de las cerdas más pequeñas.

Al igual que en el caso anterior es necesario repartir los 1760 animales en las tres clases, por ello

$$\vec{X} = (1,\, b_1,\, b_1 b_2)^T = \left(1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}\right)^T ,$$

lo cual indica que la proporción buscada es $6 : 3 : 2$. Estos porcentajes obligan a que 960 de los 1760 cerdas deben corresponder a las jóvenes, 480 a las medianas y 320 a las adultas. Por tanto, después de dos años el número de animales en cada una de las clases será de

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 960 \\ 480 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2880 \\ 480 \\ 320 \end{pmatrix} .$$

El número de animales jóvenes que debemos separar será de $2880 - 960 = 2880 * 2/3 = 1920$, cuya venta supone un beneficio de $1920 * 36 = 69120$ euros.

- **Conclusión:** Interesa vender el 66 % de las hembras más jóvenes.

Para terminar, insistimos en el hecho de que es posible establecer muchas políticas diferentes de explotación duradera, todas aquellas que cumplan la restricción dada por la ecuación (5.6). Es evidente, que cada una de estas políticas dará lugar a un beneficio distinto y una cuestión básica es conocer cuál de ellas proporciona un beneficio máximo. Este problema es muy interesante de responder pero su resolución escapa de los objetivos del curso ya que para poderlo abordar es necesario tener nociones de programación lineal.

5.6. Modelo para la explotación de un bosque

Por último presentamos un modelo para explotar de una forma racional la madera de un bosque. Supongamos que disponemos de un bosque de pinos que deseamos explotarlo como árboles para madera. Para ello, cada período de tiempo (dependiendo de la matriz de crecimiento) cortamos y vendemos algunos de estos árboles. Por cada pino cortado, se planta en el mismo lugar otro. De esta manera, el número de árboles del bosque se conserva constante[1]. Como es natural, los árboles de diferentes alturas tendrán diferentes precios. Para concretar, dividimos los árboles en cuatro clases de alturas, siendo p_i con $i = 1, 2, 3, 4$ el precio de un árbol que se encuentra en la clase i.

La primera clase está formada por los árboles cuya altura está comprendida en el

[1] *En este modelo simplificado no se tendrá en cuenta los árboles que mueren entre dos temporadas de corte. Supondremos que cada árbol del almácigo que se planta, sobrevive y crece hasta que se corta para su venta*

intervalo $[0, h_1)$ y es normal suponer que no tienen valor económico ($p_1 = 0$). La clase de orden 4 está formada por los árboles de altura igual o mayor que h_3. Representaremos por X_i con $i = 1, 2, 3, 4$ al número de árboles comprendido en la clase de orden i, que quedan sembrados después de cada temporada de corte. Con estos números puede formarse un vector

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T \ ,$$

que se conoce con el nombre de vector de árboles no cortados.

Para que la explotación del bosque sea duradera, éste tiene que recuperar después de cada temporada de corte, la configuración fija dada por el vector de árboles no cortados, $\vec{X}$.

Uno de los objetivos fundamentales de esta sección será encontrar los vectores de árboles no cortados $\vec{X}$, que hagan posible la explotación duradera. Como el número total de árboles del bosque es fijo, se cumple

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N \ ,$$

donde la cantidad N dependerá, por ejemplo, del terreno disponible y del espacio requerido por cada árbol. Entre dos temporadas de corte, los árboles crecen dando una configuración al bosque igual a la de antes de cada temporada de corte. En esta temporada, se cortan un cierto número de árboles de cada clase. Finalmente, se planta un árbol en el lugar de cada uno de los árboles cortados de forma que el bosque recupere la configuración inicial.

Si nos encontramos entre dos temporadas de corte, un árbol de la clase i puede crecer de forma que pase a ser de una clase de mayor altura o bien, tener por alguna razón un crecimiento retardado y permanecer dentro de la misma clase. En consecuencia, es necesario definir los siguientes parámetros de crecimiento, g_i, para $i = 1, 2, 3, 4$:

1.- g_i = la fracción de árboles de la clase de orden i que crecen y pasan a la clase de orden $i + 1$ durante un período de crecimiento.

2.- $1 - g_i$ = la fracción de árboles de la clase de orden i que permanecen dentro de la clase de orden i durante su crecimiento.

- Después de un período de crecimiento, el número de árboles en cada una de las clases será,

$$\begin{aligned} \text{Primera} &= (1 - g_1)X_1 \\ \text{Segunda} &= g_1X_1 + (1 - g_2)X_2 \\ \text{Tercera} &= g_2X_2 + (1 - g_3)X_3 \\ \text{Cuarta} &= g_3X_3 + X_4 \end{aligned}$$

- Supongamos que en una temporada se cortan Y_i , $i = 1, 2, 3, 4$ árboles de la clase de orden i. Al vector $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)^T$ se conoce con el nombre de

vector de árboles cortados,

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1-g_1)X_1 - Y_1 \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1-g_2)X_2 - Y_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1-g_3)X_3 - Y_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 - Y_4 \end{array}$$

- Y plantamos el mismo número de árboles cortados

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1-g_1)X_1 - Y_1 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1-g_2)X_2 - Y_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1-g_3)X_3 - Y_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 - Y_4 \end{array}$$

- Finalmente la configuración del bosque debe coincidir con la que tenía antes del período de crecimiento,

$$\begin{array}{rcl} \text{Primera} & = & (1-g_1)X_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = X_1 \\ \text{Segunda} & = & g_1X_1 + (1-g_2)X_2 - Y_2 = X_2 \\ \text{Tercera} & = & g_2X_2 + (1-g_3)X_3 - Y_3 = X_3 \\ \text{Cuarta} & = & g_3X_3 + X_4 - Y_4 = X_4 \end{array}$$

Simplificando las ecuaciones anteriores,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_1X_1 & = & Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ g_1X_1 - g_2X_2 & = & Y_2 \\ g_2X_2 - g_3X_3 & = & Y_3 \\ g_3X_3 & = & Y_4 \end{array} \right. \tag{5.7}$$

A este mismo resultado se llega de una manera más simplificada si hacemos uso del álgebra matricial. Para ello, si G es la matriz de crecimiento,

$$G = \begin{pmatrix} 1-g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 1-g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1-g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$G\vec{X} = \begin{pmatrix} (1-g_1)X_1 \\ g_1X_1 + (1-g_2)X_2 \\ g_2X_2 + (1-g_3)X_3 \\ g_3X_3 + X_4 \end{pmatrix}$$

nos da el número de árboles que hay en cada una de las 4 clases después del período de crecimiento.

Como sabemos, en cada temporada de corte, se cortará un total de $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$

árboles. Este es también el número total de árboles agregados a la primera clase (los nuevos árboles) después de cada temporada de corte. Si se define la siguiente matriz de reforestación,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el vector columna

$$R\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

podemos escribir la ecuación que caracteriza a una política de explotación duradera.

- *Configuración al terminar el período de crecimiento, menos los árboles cortados, más la reforestación con nuevos árboles de almácigo será igual a la configuración al inicio de un período de crecimiento.*

O bien, en forma matemática

$$G\vec{X} - \vec{Y} + R\vec{Y} = \vec{X}\,,$$

ecuación que también puede escribirse

$$(I - R)\vec{Y} = (G - I)\vec{X}\,,$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos la ecuación matricial anterior, obtenemos el mismo sistema de ecuaciones (5.7),

$$\begin{cases} g_1 X_1 &= Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ g_1 X_1 - g_2 X_2 &= Y_2 \\ g_2 X_2 - g_3 X_3 &= Y_3 \\ g_3 X_3 &= Y_4 \end{cases}$$

Podemos ver que la primera de las ecuaciones es la suma de las tres ecuaciones restantes. Como $Y_i \geq 0$ para $i = 2, 3, 4$, las ecuaciones anteriores requieren que

$$g_1 X_1 \geq g_2 X_2 \geq g_3 X_3 \geq 0$$

5.6.1. El rendimiento óptimo duradero

Como se cortan Y_i árboles de la clase de orden i con $i = 2, 3, 4$ y como el precio de estos árboles es p_i, el rendimiento total en una temporada estará dado por

$$B = p_2 Y_2 + p_3 Y_3 + p_4 Y_4. \tag{5.8}$$

Ahora, combinando las distintas ecuaciones se puede enunciar el problema de la maximización del rendimiento del bosque para todas las posibles política de explotación que sean duraderas:

- **Obtener los valores no negativos X_1, X_2, X_3, X_4 que hagan máxima la expresión:**

$$\begin{aligned} B &= p_2 (g_1 X_1 - g_2 X_2) + p_3 (g_2 X_2 - g_3 X_3) + p_4 g_3 X_3 \\ &= p_2 g_1 X_1 + (p_3 - p_2) g_2 X_2 + (p_4 - p_3) g_3 X_3 \end{aligned}$$

  sujetos a $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N$ **y** $g_1 X_1 \geq g_2 X_2 \geq g_3 X_3 \geq 0$

Este problema pertenece al campo de la programación lineal, sin embargo, en nuestro caso sólo necesitaremos el siguiente resultado,

- **El rendimiento óptimo duradero se logra cortando todos los árboles de la misma clase y ninguno de las demás clases**

A continuación lo "comprobaremos"sin recurrir a la teoría de la programación lineal. Para ello, vamos a suponer que R_3 es el rendimiento que se obtiene al cortar todos los árboles de la tercera clase y ninguno de las demás.

Como los únicos árboles que se cortan son los de la tercera clase, se tendrá que

$$Y_1 = Y_2 = Y_4 = 0\,. \tag{5.9}$$

Además, como se cortan todos los árboles de la clase de orden 3, a largo plazo, nunca se tendrán árboles de mayor altura que los de esa clase. En consecuencia,

$$X_3 = X_4 = 0\,.$$

Así, con la sustitución en las ecuaciones (5.7) de la explotación duradera, se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_3 &=& g_1 X_1 \\ 0 &=& g_1 X_1 - g_2 X_2 \\ Y_3 &=& g_2 X_2 \\ 0 &=& 0\,, \end{array} \right.$$

que también podemos escribirlas

$$Y_3 = g_1 X_1 = g_2 X_2 \quad \Rightarrow \quad X_2 = \frac{g_1 X_1}{g_2}\,. \tag{5.10}$$

Si sustituimos en

$$X_1 = X_2 + X_3 + X_4 = N\,,$$

puede despejarse X_1 y se obtiene

$$X_1 + \frac{g_1 X_1}{g_2} = N \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{g_2}{g_1 + g_2} N = \frac{1}{1 + \frac{g_1}{g_2}} N\,. \tag{5.11}$$

El beneficio de la venta es $R_3 = p_3 Y_3$, pero por (5.10), $R_3 = p_3 g_1 X_1$, y teniendo en cuenta (5.11),

$$R_3 = p_3 g_1 \frac{1}{1 + \dfrac{g_1}{g_2}} N = \frac{p_3 N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2}}$$

O bien, haciendo un estudio similar para n clases y cortando todos los árboles de la clase k, el beneficio viene dado por la expresión,

$$\boxed{R_k = \frac{p_k N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}}}$$

Esta ecuación determina a R_k en función de los parámetros ya conocidos del crecimiento y el valor económico, para cualquiera que sea el valor de k ($k = 2, 3, \cdots, n$). Resumiendo, el rendimiento óptimo, duradero se obtiene como sigue

TEOREMA 5.6.1 *El rendimiento óptimo duradero es el valor más grande de*

$$\frac{p_k N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}}$$

para $k = 2, 3, \cdots, n$. El valor correspondiente de k es el número que determina la clase de árboles que deben cortarse por completo.

EJERCICIO 24 Los árboles de cierto bosque están divididos en tres clases de alturas y tienen una matriz de crecimiento, entre dos temporadas de corte como sigue,

$$G = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Si el precio de los árboles de la segunda clase es de 30 euros, el de los de la tercera de 50 euros, deseamos saber la clase de árboles que debe cortarse por completo para lograr el rendimiento óptimo duradero.

- De la matriz de crecimiento obtenemos $g_1 = 1/2$ y $g_2 = 2/3$. Sustituyendo en

$$R_k = \frac{p_k N}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{2}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}},$$

obtenemos su valor, para el caso en que se cortasen los árboles de la segunda y tercera clase

$$R_2 = \frac{30N}{2} = 15N, \quad R_3 = \frac{50N}{2 + 1.5} = 14N\,.$$

Conseguiremos un mayor beneficio si cortamos todos los árboles de la segunda clase.

- Si la plantación tuviese N=1000 árboles, entonces el beneficio de la venta es

$$R_2 = 15N = 15 \times 1000 = 15000\,\text{euros}$$

EJERCICIO 25 Para un bosque de pinos escoceses con período de crecimiento de seis años se encontró la siguiente matriz de crecimiento

$$G = \begin{pmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Supongamos que los precios de las cinco clases de árboles de mayor altura, son

$$p_2 = 50\,, \quad p_3 = 100\,, \quad p_4 = 150\,, \quad p_5 = 200\,, \quad p_6 = 250$$

- Interesa conocer la clase de árboles que debe cortarse por completo con el objetivo de obtener el rendimiento óptimo duradero. De la matriz G se obtiene

$$g_1 = 0.28, \quad g_2 = 0.31, \quad g_3 = 0.25, \quad g_4 = 0.23, \quad g_5 = 0.37\,.$$

Por el Teorema (5.6.1) deducimos

$$\begin{aligned} R_2 &= 50N/(0.28^{-1}) = 14.0N \\ R_3 &= 100N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1}) = 14.7N \\ R_4 &= 150N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1}) = 13.9N \\ R_5 &= 200N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1}) = 13.2N \\ R_6 &= 250N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1} + 0.37^{-1}) = 14.0N \end{aligned}$$

Se ve que R_3 es la cantidad mayor y por tanto, son los árboles de la tercera clase los que deben cortarse por completo cada seis años, para maximizar el rendimiento duradero.

- El rendimiento óptimo duradero es de $14.7N$, siendo N el número total de árboles que hay en el bosque.

EJERCICIO 26 En el Ejemplo anterior, deseamos conocer la relación entre los precios p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 para que los rendimientos R_k, con $k = 2, \cdots, 6$ sean iguales.

- En este caso, cualquier política de explotación racional y duradera producirá el mismo rendimiento). Para obtener esta relación debemos comparar cualquiera de las clases con la segunda, esto es

$$R_2 = R_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\frac{1}{28}} = \frac{p_3 s}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_3}{p_2} = 1.9$$

$$R_2 = R_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 N}{\frac{1}{28}} = \frac{p_4 N}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31} + \frac{1}{25}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_4}{p_2} = 3.02$$

  Y así sucesivamente hasta conseguir la relación

$$1 : 1.9 : 3.02 : 4.24 : 5$$

EJERCICIO 27 Si los parámetros de crecimiento $g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}$ son todos iguales, vamos a encontrar la relación entre los precios $p_2, p_3, \cdots, p_n$, para que cualquier política de explotación racional y duradera sea óptima.

- Suponiendo que $g_1 = g_2 = \cdots = g_{n-1}$, debemos de ir comparando tal y como hicimos en el ejercicio anterior.

$$R_2 = R_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 N}{\frac{1}{g_1}} = \frac{p_3 N}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}} = \frac{p_3 N}{\frac{2}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_3}{p_2} = 2$$

$$R_2 = R_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\frac{1}{g_1}} = \frac{p_4 N}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3}} = \frac{p_4 N}{\frac{3}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_4}{p_2} = 3$$

  Y así sucesivamente con el resto de las clases.

  Es fácil obtener la siguiente relación

$$1 : 2 : 3 : \cdots : n - 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 28

1.- **Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 18 años y que esta población se divide en tres clases de edades iguales con intervalos de 6 años, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de crecimiento de *Leslie* viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra y una mediana dos, además el 50 % de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 25 % de las medianas se hacen adultas.**

El precio de venta de cada una de las clases es 15 euros las hembras jóvenes, 25 las medianas y 32 las adultas. Si disponemos de 1000 animales y cada 6 años separamos la misma fracción de cada una de las clases, ¿cuál es el importe de la venta?

2.- **Sea el modelo matricial de Leslie,**

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

siendo la unidad de tiempo del sistema igual a un año

- **Probar que para cualquier valor positivo de α la población siempre crece.**
- **Hallar el valor de α para que la población crezca cada año un 27 %.**
- **Para el valor de α encontrado, cuál será el total de la venta, en el caso particular de la separación uniforme, si disponemos inicialmente de 530 hembras y el precio de venta de las hembras de la primera clase es de 10 euros, 15 euros para los de la segunda clase y 5 euros para las hembras de la tercera clase?.**

3.- **Disponemos de una población de animales dividida en clases de edad de 6 meses de duración. De las siguientes matrices de Leslie,**

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

selecciona aquella que sea adecuada para realizar la siguiente explotación racional y duradera. La población inicial es de 500 animales, siendo el precio de venta de los animales más jóvenes de 10 euros. Calcular el importe de las ventas realizadas después de cinco años sabiendo que separación la realizamos sólo en la clase de menor edad.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 29

1.- **Se pretende realizar el estudio de la contaminación de cierta región en la que se están produciendo vertidos industriales. Se han clasificado los terrenos en tres niveles de contaminación:**

- **Terrenos limpios.**
- **Terrenos con nivel de contaminación medio.**
- **Terrenos con nivel de contaminación alto.**

Se comprueba que la evolución de la contaminación de un año para otro se ajusta a los siguientes datos:

- **Cada año se contamina un 30 % de los terrenos limpios de la siguiente manera: el 20 % con un nivel de contaminación medio y el 10 % con un nivel de contaminación alto.**
- **Anualmente el 30 % de los terrenos con nivel de contaminación media pasan a tener contaminación alta.**

Ante esta situación, las autoridades emprenden un plan de recuperación de las zonas contaminadas. El plan actúa directamente sobre los terrenos más contaminados consiguiendo, por un lado, limpiar totalmente el 70 % de los terrenos con contaminación alta, y por otro, reducir la contaminación de otro 10 % de zona de alta contaminación que pasa a contaminación media.

El territorio estudiado tiene una extensión de 1000 hectáreas e inicialmente todas ellas estaban limpias. Se trata de resolver las siguientes cuestiones:

1.a.- **Estudiar la distribución de terrenos contaminados pasada una cantidad concreta de años. Por ejemplo, intentemos estudiar lo que sucede a los diez años.**

1.b.- **Estudiar la tendencia pasado un número suficientemente grande de años.**

2.- **Supongamos que en una determinada ciudad tenemos tres estados climáticos posibles: soleado, nublado, y lluvioso. Supongamos, además, que si hoy está el día nublado, entonces la probabilidad de**

que mañana el día esté soleado es de 1/2, la probabilidad de que esté nublado es 1/4, y la probabilidad de que esté lluvioso es de 1/4. De forma similar, es posible considerar otras probabilidades de transición (ver tabla adjunta) en los casos en que el día de hoy haya estado lluvioso o soleado.

.	Hoy soleado	Hoy nublado	Hoy lluvioso
Mañana nublado	3/4	1/2	1/4
Mañana nublado	1/8	1/4	1/2
Mañana lluvioso	1/8	1/4	1/4

Supongamos que hoy existe la misma probabilidad de que el día sea nublado o lluvioso, ¿cuál será la probabilidad de que pasado mañana sea un día soleado?. Estudiar el comportamiento del clima a largo plazo.

3.- **Tras un estudio sobre las preferencias veraniegas (interior o costa) se sabe que el 80 % de los que un año optan por veranear en el interior lo vuelven a hacer al año siguiente,mientras que el 90 % de los que veranean en zonas de playa vuelven a la costa el año siguiente. Actualmente un millón veranea en el interior y 7 millones van a la costa.**

3.a.- **Plantear un modelo matricial que permita calcular los veraneantes en el interior y en la costa para cada año a partir de los datos actuales.**

3.b.- **¿Cuántos veraneantes elegirán cada opción pasados 10 años?**

4.- **Al realizar un estudio anual sobre el consumo de aceite de oliva en una población,se ha llegado a que el 80 % de los que consumen aceite de oliva un año continúan haciéndolo y que el 40 % de los que no lo consumían comienzan a hacerlo.**

4.a.- **Plantear un modelo matricial que permita saber cada año el porcentaje de la población que consume aceite de oliva.**

4.b.- **Plantear qué operaciones habría que realizar para obtener el porcentaje de la población que consume aceite de oliva cuando transcurren 10 y 20 años.**

4.c.- **Cuando se realizó este estudio había 14000 individuos que consumían aceite de oliva y 6000 individuos que no lo utilizaban. Utilizar el modelo anterior para determinar qué porcentaje de la población consume aceite de oliva cuando ha transcurrido 1 año desde el inicio de nuestro estudio.**

5.- **Al realizar un estudio de mercado,los directivos de una empresa llegan a la conclusión de que cuando transcurre cada año el 70 % de sus clientes siguen siendo fieles, el 30 % de sus clientes se pasan a la competencia, el 35 % de los clientes de la competencia se pasan a su empresa, el 65 % de los que no son clientes permanecen en la competencia. Plantear el modelo matricial pertinente y diagonalizar para resolver la siguientes cuestión: Si la empresa tiene 2123 clientes y la competencia 10302, calcular la cantidad de clientes de la empresa y la competencia tras 17 años.**

6.- **Cierta especie de aves se mueve entre tres asentamientos, A, B, y C, según la siguiente tabla de migraciones anuales:**

	Pasan a A	Pasan a B	Pasan a C
Las aves de A	80 %	10 %	10 %
Las aves de B	20 %	70 %	10 %
Las aves de C	30 %	10 %	60 %

- **¿Qué expresión matricial proporcionará el número de aves en cada asentamiento después de k años?**
- **Si inicialmente hay, en miles de aves, $A_0 = 2$, $B_0 = 3$ y $C_0 = 6$. Calcular el número de aves en cada asentamiento pasados dos años.**
- **En general, el esquema marcado por la tabla anterior hace que el número de aves en cada asentamiento cambie de un año a otro ¿Existe alguna configuración inicial de aves que permanezca constante año tras año? Calcular los porcentajes y comprobar el resultado.**

7.- **Una sala de cine decide programar las películas según el siguiente método: si una semana se proyectó una norteamericana, a la semana siguiente se programará una norteamericana. Si la película programada fue española, la semana siguiente una de cada dos será española y una de cada dos francesa. Finalmente, si la película programada fue francesa, la semana siguiente se programará norteamericana una de cada tres y dos de cada tres francesa. Si inicialmente las cuotas de pantalla son el 60 % para el cine norteamericano, el 30 % para el cine español, y el 10 % para el francés.**

- **¿Estamos ante una cadena de Markov regular? Justifica la respuesta.**
- **Analiza el comportamiento a largo plazo del modelo.**
- **¿Puedes deducir el resultado anterior analizando el diagrama de estados?**