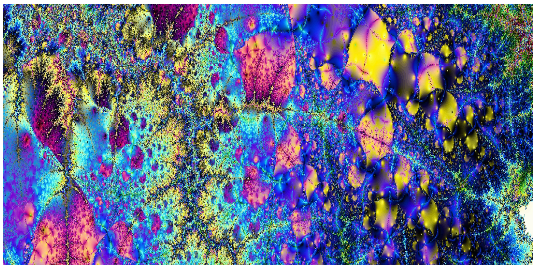
Capítulo 4



EL MODELO ECONÓMICO DE KEYNES

4.1. Descripción del modelo

El modelo Keynesiano más sencillo se puede resumir en dos ecuaciones, una que nos da el equilibrio en el mercado de bienes,

$$y = \alpha_1 + \alpha_2(1 - t_0)y + \alpha_3 r + G_0 \; ; \; 0 < t_0 < 1 \; ; \; 0 < \alpha_2(1 - t_0) < 1 \; ; \; \alpha_1 > 0 \; ; \; \alpha_3 < 0 \qquad (4.1)$$

y otra que corresponde a la curva de equilibrio en el mercado monetario,

$$M_0 = \beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 r \; ; \quad \beta_1 > 0 \; ; \quad \beta_2 > 0 \; ; \quad \beta_3 < 0 \qquad (4.2)$$

siendo y la renta, t_0 la propersión marginal a imponer, r el tipo de interés, G_0 el gasto público y M_0 la cantidad de dinero.

Las variables endógenas (dentro del sistema) son y y r, las variables exógenas (fuera del sistema) son G_0 y M_0, y los parámetros son α_i, β_i con $i = 1, 2, 3$ y t_0.

Supongamos un caso particular:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 10 + 0.8(1 - 0.2)y - 2r + G_0 \\ M_0 = 15 + 1.5y - r \end{array} \right. \qquad (4.3)$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, que puede escribirse matricialmente como,

$$\begin{pmatrix} 0.36 & 2 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + G_0 \\ M_0 - 15 \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

sistema que tiene más incógnitas que ecuaciones y por lo tanto, no posee solución única. Podemos reducir el sistema a uno cuadrado si tenemos en cuenta la distinción entre las variables exógenas (que controla el gobierno G_0 y M_0) y las variables endógenas (objeto de la política económica Y y r).

Supongamos que el gobierno fija los valores $M_0 = 20$ y $G_0 = 5$. Resolviendo el sistema,

$$\begin{pmatrix} 0.36 & 2 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

podemos encontrar los valores de equilibrio de la renta y, y del tipo de interés r.

```
A = {{0.36, 2}, {1.5, -1}};
b = {15, 5};
LinearSolve[A, b]
```

$\{7.44048\,,\ 6.16071\}$

La economía del país estará en equilibrio con una renta de 7.44 unidades monetarias y un tipo de interés del 6.16 %, desde elpunto de vista económico.

Si se escribe el sistema como $A\,X = B$, entonces $X = A^{-1}\,B$, siendo la matriz A^{-1} conocida como **matriz de multiplicadores del sistema**.

```
A = {{0.36, 2}, {1.5, -1}};

Inverse[A] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0.297619 & 0.595238 \\ 0.446429 & -0.107143 \end{pmatrix}$$

Observemos que si expresamos el sistema (4.4) como

$$\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 & 2 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_0 + 10 \\ M_0 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.297619 & 0.595238 \\ 0.446429 & -0.107143 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_0 + 10 \\ M_0 - 15 \end{pmatrix}$$

la matriz inversa A^{-1} hace de efecto multiplicador entre el vector de (inputs) entradas (que contiene a las variables exógenas), dando como (outputs) salidas a las variables endógenas.

Si se aumenta una unidad monetaria M_0, la correspondiente entrada de la matriz de multiplicadores, en nuestro caso, 0.595238 nos indica que la nueva renta de equilibrio será la anterior mas 0.595238 unidades monetarias.

4.2. Equilibrio a largo plazo y absorción de choques exógenos

4.2.1. Introducción

Las economías de Europa (E), Estados Unidos (A) y China (C) están muy preocupadas por las repercusiones que una nueva subida en los precios del petróleo pueden tener sobre sus economías.

Cada una de estas naciones han definido una renta que consideran "normal "(en ausencia de efectos exógenos extraños) y están interesadas en estudiar los efectos que sobre $y_t = Y_t - Y$ puede tener esta subida del precio del petróleo, siendo Y_t la renta del período t, Y la renta normal e y_t la desviación o distorsión de aquélla respecto de ésta, en dicho período.

El problema se complica debido a la gran interrelación que existe entre estas economías. Estas ideas han sido traducidas por los analistas en las siguientes relaciones (t está dado en trimestres) de la desviación o distorsión:

$$\begin{cases} y_{E,t+1} = 0.4y_{E,t} + 0.2y_{A,t} + 0.2y_{C,t} \\ y_{A,t+1} = 0.1y_{E,t} + 0.3y_{A,t} + 0.2y_{C,t} \\ y_{C,t+1} = 0.2y_{E,t} + 0.2y_{A,t} + 0.3y_{C,t} \end{cases}$$

Actualmente se sufre una distorsión cuantificada por los expertos en 2 u.m. para Europa, 2.5 u.m. para Estados Unidos y 0.9 u.m. para China (las unidades monetarias están expresadas en billones de euros).

4.2.2. Calcular la distorsión que habrá dentro de dos años

Empezamos escribiendo el sistema de manera matricial,

$$\begin{pmatrix} y_{E,t+1} \\ y_{A,t+1} \\ y_{C,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{E,t} \\ y_{A,t} \\ y_{C,t} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y(\vec{t+1}) = A.Y(\vec{t})\ ;\ t = 0, 1, 2, \cdots$$

En consecuencia, $Y(\vec{1}) = A.Y(\vec{0})$, del mismo modo

$$Y(\vec{2}) = A.Y(\vec{1}) = A.AY(\vec{0}) = A^2 Y(\vec{0})$$

y en general $Y(\vec{t}) = A^t Y(\vec{0})$ con $t = 0, 1, 2, \cdots$
Del enunciado deducimos que,

$$Y(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, dentro de dos años (t=8 trimestres) se tendrá $Y\vec{(8)} = A^8 Y\vec{(0)}$, que podemos hacerlo con `Mathematica`®

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {2, 2.5, 0.9};
MatrixPower[A, 8].b//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0.124519 \\ 0.0830136 \\ 0.103766 \end{pmatrix}$$

4.2.3. Estudiar si ante cualquier distorsión el sistema se comporta bien y tiende a volver al equilibrio a largo plazo.

Tenemos que comprobar si las distorsiones tienden a cero a largo plazo. Empezaremos viendo lo que ocurre entre los 10 y 12 años (40 y 48 trimestres).

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {2, 2.5, 0.9};
Table[MatrixPower[A, t].b, {t, 40, 48}]//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1.37523 * 10^{-6} & 9.1682 * 10^{-7} & 1.14603 * 10^{-6} \\ 9.62661 * 10^{-7} & 6.41774 * 10^{-7} & 8.02218 * 10^{-7} \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ 7.92793 * 10^{-8} & 5.28529 * 10^{-8} & 6.60661 * 10^{-8} \end{pmatrix}$$

podemos comprobar que las distorsiones, a largo plazo, tienden a cero.

A esta misma conclusión llegaríamos si partimos de una valor inicial cualquiera.

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {m, n, z};
At = MatrixPower[A, t];
Limit[At.b, t → Infinity]//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A continuación realizaremos el mismo ejercicio de otra manera. Calcularemos la matriz potencia A^t y calcularemos su límite cuando t tienda a infinito.

Empezamos comprobando que la matriz A es diagonalizable,

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
Eigenvalues[A]
```

$\{0.7\,,\ 0.2\,,\ 0.1\}$

lo cual es cierto ya que todos sus valores propios son diferentes. Por otro lado, es conocido que $A^t = P.D^t.P^{-1}$ siendo P la matriz de paso y D la matriz diagonal; como

$$D^t = \begin{pmatrix} 0.7^t & 0 & 0 \\ 0 & 0.2^t & 0 \\ 0 & 0 & 0.1^t \end{pmatrix}$$

ocurre que si t tiende a infinito la matriz D^t tiende a la matriz nula, y en consecuencia la matriz A^t también será nula, para valores de t suficientemente grandes.

Conclusión: las distorsiones, a largo plazo, desaparecerán por muy grandes que sean al principio.

4.2.4. Criterios para adoptar nuevas medidas económicas

Dentro de 2 años habrá elecciones europeas, y para ello la Presidencia Comunitaria actual quiere llegar a esa fecha con un distorsión que no supere el valor de 0.1 u.m.

EJERCICIO 15 ¿Se podrá conseguir con el ritmo actual o se deberán adoptar medidas económicas nuevas? En caso afirmativo ¿cuándo? Responder a la misma cuestión, pero con un objetivo más ambicioso de -0.1 u.m. ¿Qué sucede ahora?

- Empezamos calculando la distorsión para Europa en el trimestre t cualquiera.

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {2 , 2.5 , 0.9};
R = MatrixPower[At].b;
R[[1]]
```

$$2.5(-1.08885 * 10^{-17} 0.1^t - 0.4\,0.2^t + 0.4\,0.7^t) +$$
$$0.9(2.177771 * 10^{-17}\,0.1^t - .4\,0.2^t + 0.4\,0.7^t) +$$
$$2(-1.08885 * 10^{-17}\,0.1^t + 0.6\,0.2^t + 0.4\,0.7^t)$$

y debemos resolver la ecuación $R[[1]] = 0$ pero el `Mathematica`$_{®}$ no ofrece una buena respuesta. En lugar de ello representamos gráficamente $R[[1]]$ de la siguiente manera:

```
A = {{0.4, 0.2, 0.2}, {0.1, 0.3, 0.2}, {0.2, 0.2, 0.3}};
b = {2 , 2.5 , 0.9};
R = MatrixPower[At].b;
f[t_] := R[[1]];
f[8]
Plot[f[t], {t, 0, 10}]
```

*0.*124519

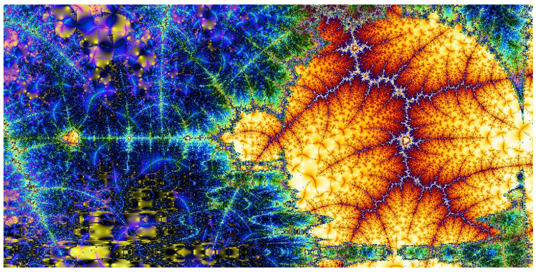
y comprobamos como nunca se podrá alcanzar el nivel de distorsión deseado antes de 2 años. Se alcanzará, aproximadamente, en $t = 9$ que corresponde a los 27 meses.

Como

```
Limit[f[t], t → Infinity]
```

0.

entonces no se podrá alcanzar el objetivo de obtener un nivel de distorsión negativo aunque se tomen medidas correctoras, ya que, la distorsión a largo plazo tiende a cero.



Capítulo 5

MODELOS MATRICIALES

5.1. Cadenas de Markov

A los dos resultados que podemos obtener al realizar el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire los designaremos por $E_1 = salir\ cara$ y $E_2 = salir\ cruz$. Si repetimos t veces este experimento la probabilidad de que en uno de ellos obtengamos E_1 no depende de lo que haya salido en el experimento anterior; ambos sucesos son independientes. Sin embargo, existen muchos otros fenómenos representados por variables aleatorias dependientes. En 1907 *Markov* estudió estas situaciones en las cuales la probabilidad de que ocurra un suceso depende del suceso inmediatamente anterior, y son estas las que estudiaremos en esta sección.

5.1.1. Resumen teórico

Sea la cadena de Markov $\vec{X}(t+1) = A\vec{X}(t)\,, t = 0,\, 1,\, \cdots$

- Si la matriz de transición A sólo tiene un autovalor de módulo 1, la cadena sólo tiene una clase final. Existe un único vector de estado permanente o estable que se corresponde con el autovector (normalizado) asociado al autovalor. Si este vector tiene todas sus componentes positivas, entonces la cadena es completamente ergódica, y si hay algún elemento nulo, será simplemente ergódica. A la larga, la distribución de la cadena, independientemente del valor inicial es el vector propio asociado al $\lambda = 1$

- Si además de $\lambda = 1$, existen otro m valores de módulo unidad, entonces la cadena es periódica de período m. Tiene una sola distribución estacionaria dada