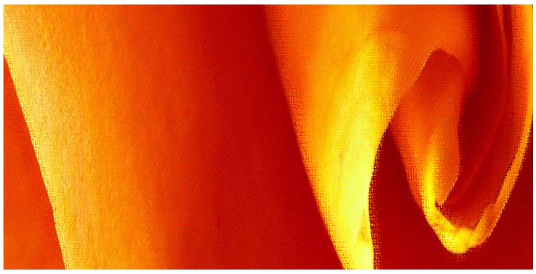


Capítulo 3

EL MODELO ECONÓMICO DE LEONTIEF

3.1. Modelo de Leontief de Entrada-Salida

El economista Wassily W. Leontief nació en San Petersburgo en 1906. Estudió en las Universidades de Moscú y Leningrado doctorándose en 1928 en Berlín y trabajó en la escuela de Kiel hasta su supresión por Hitler. En 1929 emigró a los Estados Unidos, se incorporó a la Oficina Nacional de Investigación Económica de New York, y fue profesor en la Universidad de Harvard. Obtuvo el Premio Nobel de Economía en 1973 por el desarrollo del método Entrada-Salida (input-output) y su aplicación a importantes problemas económicos. Los primeros pasos teóricos del modelo los desarrolló en Kiev, y en 1941 publicó su celebre libro *"The Structure of the American Economy",* donde por primera vez se presentó esta metodología de estudio.

El método es utilizado para analizar las relaciones existentes entre diferentes sectores de producción y consumo que forman parte de la economía de una nación aunque en la actualidad puede ser usado en contextos más limitados, como por ejemplo, grandes empresas.

El modelo supone que la economía a estudiar está formada por diferentes sectores de producción y de servicios. Existe una demanda interna que se tiene que atender y también una demanda externa que también hay que satisfacer.

Supongamos la tabla siguiente que representa a las necesidades de demanda interna:

producción/demanda	Agricultura	Manufactura	Servicios
Agricultura	0.4	0.03	0.02
Manufactura	0.06	0.37	0.1
Servicios	0.12	0.15	0.19

La primera columna se interpreta de la siguiente manera: el sector de la Agricultura necesita 0.4 del propio sector, 0.06 del sector de Manufactura y 0.12 del sector Servicios.

Generalizando, supongamos que una economía tiene n industrias $(I_1, I_2, \cdots, I_n)$ donde cada una de ellas tiene unas necesidades de entrada (electricidad, materias primas, etc.) y unas salidas (los productos acabados). Sea d_{ij} la cantidad de entrada que la industria I_j necesita de la industria I_i para producir una unidad. Con estos coeficientes confeccionamos la matriz de **entrada-salida**,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

donde las filas corresponden a los I_i provedores y las columnas a los usuarios I_j.

Si, por ejemplo, $d_{23} = 0.23$ está dado en euros, entonces debe utilizarse 0.23 euros del producto de la industria 2 para producir un valor de un euro del producto de la industria 3.

Es evidente que la cantidad total gastada por la industria I_j para producir un valor de un euro de salida está dada por la suma de los elementos de la columna j de la matriz D. En este caso, para que el modelo sea coherente tiene que ocurrir:

- **Los valores d_{ij} deben ser tales que** $0 \leq d_{ij} \leq 1$

- **La suma de los elementos de cualquier columna debe ser menor o igual que uno.**

- **Se cumple la condición de equilibrio: los gastos debidos al consumo deben ser iguales a los ingresos obtenidos de las ventas.**

Resumiendo, el objetico del modelo de Leontief es encontrar el equilibrio entre la oferta y la demanda en una economía. Para cada uno de los sectores industriales existe una ecuación que relaciona oferta y demanda, de tal manera que en cualquiera de estos modelos es usual encontrarse con sistemas de miles de ecuaciones lineales con miles de incógnitas.

EJERCICIO 10 Supongamos una economía que consta de dos industrias I_1 e I_2, siendo las interacciones entre ellas las dadas por la tabla siguiente:

	Entrad. I_1	Entrad. I_2	Demand. finales	Producc. total
Producción de I_1	60	64	76	200
Producción de I_2	100	48	12	160
Entradas totales	200	160		

También se supone que todo lo que se produce se consume. Es decir, la producción de cada industria debe ser igual a la suma de todas las entradas (en las mismas unidades)

- Observemos que de las 200 unidades producidas por I_1, 60 las utiliza la misma industria, 64 la I_2, y quedan 76 unidades diponibles para la demanda final (bienes no utilizadas por la propia industria).

- Supongamos que se ha realizado una investigación de mercado y se ha detectado que dentro de 5 años la demanda final para la industria I_1 decrecerá de 76 a 70 unidades, mientras que la I_2 pasará de 12 a 60 unidades. ¿Qué tanto debería cada industria ajustar su nivel de producción a fin de satisfacer estas estimaciones?

  De la tabla, deducimos que la industria I_1 necesita el uso de $(60/200)x_1$ unidades de su propio producto y $(100/200)x_1$ unidades del producto de I_2, para producir x_1 unidades. De manera semejante la industria I_2 debería usar $(64/160)x_2$ unidades del producto de I_1 y $(48/160)x_2$ unidades de su propio producto. De la tabla, observamos que: La industria I_1 requiere la utilizacin de $(60/200)x_1$ unidades de su propio producto y $(100/200)x_1$ unidades del producto de I_2, para producir x_1 unidades. En forma análoga, I_2 debería usar $(64/160)x_2$ unidades del producto de I_1 y $(48/160)x_2$ unidades de su propio producto. Al ser la producción total igual a las unidades consumidas por la industra I_1 mas las consumidas por la I_2 y además la demanda final, se obtiene:

  $$x_1 = \frac{60}{200}x_1 + \frac{64}{160}x_2 + 700$$

  Razonando de forma similar para la producción total de I_2,

  $$x_2 = \frac{100}{200}x_1 + \frac{48}{160}x_2 + 60$$

  Este sistema de ecuaciones lineales puede ser expresado matricialmente:

  $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60/200 & 64/160 \\ 100/200 & 48/160 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \end{pmatrix}$$

  o de forma simbólica:

  $$X = AX + D$$

ecuación conocida como de insumo-producto, siendo, X **la matriz de Producción,** A **la matriz Insumo-Producto y** D **la matriz de Demanda**.

Notemos:

1.- El elemento a_{ij} corresponde a la proporción de los insumos de la industria j que son producidos por la industria i.

2.- Cada elemento de la matriz A se encuentran entre cero y uno.

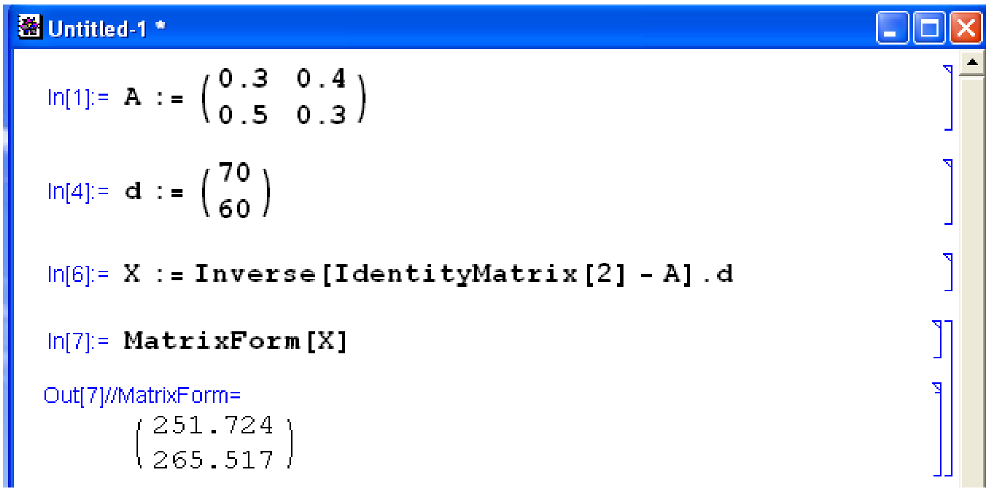
3.- La suma de los elementos de cualquier columna nunca es mayor que uno.

- Para hallar la matriz de producción X actuamos de la siguiente manera,

$$X = AX + D \quad \Rightarrow \quad X - AX = D \quad \Rightarrow \quad (I - A)X = D$$

si existe la matriz inversa $(I - A)^{-1}$ entonces:

$$X = (I - A)^{-1}D \tag{3.1}$$



Conclusión: La industria I_1 debe producir 251.7 unidades y la industria I_2 265 unidades de su producto con el fin de cumplir con las demandas finales de la proyección a 5 años.

EJERCICIO 11 Supongamos la tabla siguiente que representa a las necesidades de demanda interna:

producción/demanda	Agricultura	Manufactura	Servicios
Agricultura	0.4	0.03	0.02
Manufactura	0.06	0.37	0.1
Servicios	0.12	0.15	0.19

Supongamos que la matriz de demanda es $D = \begin{pmatrix} 80 \\ 140 \\ 200 \end{pmatrix}$. Determinar la producción total, que cumple la demanda interna y externa.

- Debemos aplicar la fórmula (3.1), $X = (I - A)^{-1}D$, siendo la matriz A de Insumo-Producto,

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.03 & 0.02 \\ 0.06 & 0.37 & 0.10 \\ 0.12 & 0.15 & 0.19 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 158.36 \\ 288.52 \\ 323.76 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 12 Una economía simple tiene tres industrias que son dependientes entre si, pero que no dependen de industrias externas (modelo cerrado de Leontief). Estas industrias son: agricultura, construcción y transporte. La fracción de cada producto que consume cada industria viene dado por:

	Agricultura	Construcción	Transporte
Agricultura	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{16}$
Construcción	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$
Transporte	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{8}{16}$

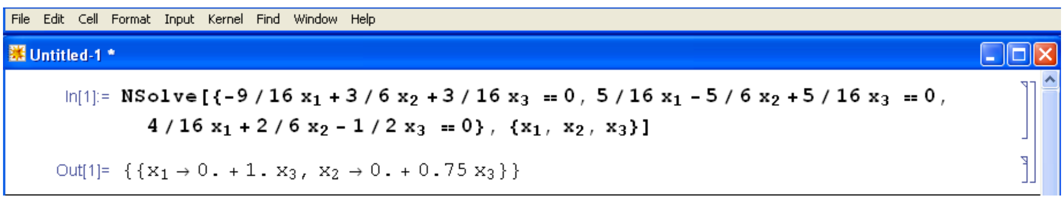
donde las filas representan al consumo y las columnas a la producción. Si x_1, x_2, x_3 representan a los ingresos de la industria de la agricultura, construcción y transporte, respectivamente. Determinar los ingresos de cada sector de la economía.

- Observemos que el elemento a_{ij} denota la fracción de bienes producidos por las personas que trabajan en la industria j y que es consumida por las personas que trabaja en la industria i. Por ejemplo, $d_{31} = 4/16$, significa que la industria del transporte consume $4/16$ del total de la producción agrícola.

  Del enunciado deducimos,

$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{7}{16}x_1 + \tfrac{3}{6}x_2 + \tfrac{3}{16}x_3 &= x_1 \\ \tfrac{5}{16}x_1 + \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{5}{16}x_3 &= x_2 \\ \tfrac{4}{16}x_1 + \tfrac{2}{6}x_2 + \tfrac{8}{16}x_3 &= x_3 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} -\tfrac{9}{16}x_1 + \tfrac{3}{6}x_2 + \tfrac{3}{16}x_3 &= 0 \\ \tfrac{5}{16}x_1 - \tfrac{5}{6}x_2 + \tfrac{5}{16}x_3 &= 0 \\ \tfrac{4}{16}x_1 + \tfrac{2}{6}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

  que puede ser resuelto con `Mathematica`®,



La solución general es,

$$\{(\alpha, 0.73\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Existen infinitas soluciones siendo una solución particular $(4, 3, 4)$, los ingreso de la industria de la agricultura, construcción y transporte están en la proporción 4:3:4.

EJERCICIO 13 Consideremos un modelo de Leontief con sólo tres sectores industriales: energía, construcción y transporte, interconectados de la manera que se expresa en la tabla siguiente:

	Energía	Construcción	Transporte	Demanda consumidor
Energía	0.4	0.2	0.1	100
Construcción	0.2	0.4	0.1	50
Transporte	0.15	0.2	0.2	100

¿Cuántas unidades, en euros, de cada factor (energía, construcción y transporte) se debe producir y ofertar) para asegurar que la demanda del consumidor está satisfecha?

- Estamos ante un modelo de Leontief cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} x_1 = 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 100 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 + 50 \\ x_3 = 0.15x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 100 \end{cases}$$

siendo x_1, x_2, x_3 las demandas total de la energía, construcción y transporte, respectivamente.

El lado izquierdo de cada una de las ecuaciones representa a la oferta existente de cada uno de los factores (energía construcción y transporte) expresada en euros. El lado derecho de las ecuaciones corresponden a las demandas, que son de dos tipos: las demandas (internas) de cada uno de los tres sectores y por otro lado la demanda en euros, de los consumidores (externa).

Si el sistema es compatible, entonces diremos que el **sistema se encuentra en equilibrio**, puesto que la oferta de cada uno de los factores coincide con su demanda.

La restricción que impone el modelo de Leontief, es que la suma de las unidades que son necesarias emplear de cada uno de los tres sectores (suma de los elementos de las columnas), debe ser inferior a uno. Observemos que $0.4+0.2+0.15 < 1$, por otro lado $0.2 + 0.4 + 0.2 < 1$ y $0.1 + 0.1 + 0.2 < 1$.

Usamos `Mathematica`® para resolver el sistema,

```
In[5]:= NSolve[{0.4 x1 + 0.2 x2 + 0.1 x3 + 100 == x1, 0.2 x1 + 0.4 x2 + 0.1 x3 + 50 == x2,
        0.15 x1 + 0.2 x2 + 0.2 x3 + 100 == x3}, {x1, x2, x3}]

Out[5]= {{x1 → 276.316, x2 → 213.816, x3 → 230.263}}
```

Como hemos comprobado el modelo de Leontief estudiado está en equilibrio siendo la solución: $x_1 = 276.31$, $x_2 = 213.81$, $x_3 = 230.26$.

Por último recordar que el modelo también puede ser resuelto de manera matricial tal y como se ha realizado en ejercicios anteriores $X = (I - A)^{-1}D$, o por iteración (repetición del proceso) de la manera siguiente.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

El método consiste en calcular $X(i+1) = AX(i) * D$ con $i = 1, 2, 3, \cdots$

In[11]:= $X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A := \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$

$d := \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$

```
In[23]:= For[i = 1; t = X, i < 15, i ++, t = A.t + d; Print[t]]

{{101.1}, {51.3}, {101.15}}
{{160.815}, {100.855}, {145.655}}
{{199.063}, {137.07}, {173.424}}
{{224.382}, {161.983}, {191.958}}
{{241.345}, {178.865}, {204.446}}
{{252.756}, {190.26}, {212.864}}
{{260.441}, {197.941}, {218.538}}
{{265.618}, {203.118}, {222.362}}
{{269.107}, {206.607}, {224.939}}
{{271.458}, {208.958}, {226.675}}
{{273.042}, {210.542}, {227.845}}
{{274.11}, {211.61}, {228.634}}
{{274.829}, {212.329}, {229.165}}
{{275.314}, {212.814}, {229.523}}
```

Tomando cualquier valor inicial para el vector X, observamos que después de 15 iteraciones el vector X tiende al resultado anteriormente encontrado.

Resumiendo, independientemente del método utilizado (resolución del sistema directamente, matricialmente, y por iteración) el modelo de Leontief está en equilibrio. Es decir, la oferta de cada uno de los tres sectores coincide con la demanda de ellos realizada por el consumidor. Las cantidades totales ofertadas en euros, necesarias para satisfacer la demanda del consumidor son: 276.31 euros de energía, 213.81 euros de construcción y 230.26 euros de transporte.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 14

1.- **Supongamos una economía que consta de dos industrias I_1 e I_2, siendo las interacciones entre ellas las dadas por la tabla siguiente:**

	Entrad. I_1	Entr. I_2	Demand. final	Producc. total
Producc. I_1	60	75	65	200
Producc. I_2	80	30	40	150
Entradas T.	200	150		

1.a.- **Encontrar la matriz insumo-producto A.**

1.b.- **Determinar la matriz de producción, si las demandas finales cambian a 104 en I_1 y a 172 en I_2. Encontrar las unidades que debe producir I_1 e I_2 a fin de cumplir las nuevas demandas finales.**

2.- **Un pueblo tienes tres industrias primarias: una mina de cobre, un ferrocarril, y una planta de energía eléctrica. Para producir una unidad (1 euro) de cobre, la mina gasta 0.20 euros de cobre, 0.1 euros de transporte y 0.2 de energía eléctrica. Para producir un euro de transporte, el ferrocarril requiere 0.1 euros de cobre, 0.1 de transporte y 0.4 de energía eléctrica. La planta eléctrica destina 0.2 de cobre, 0.2 de transporte, y 0.3 de energía eléctrica. Suponer que durante un año hay uja demanda externa de 1.2 millones de euros de cobre, 0.8 millones de euros de transporte y 1.5 millones de euros dd energía. ¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer la demanda total?**

3.- **En una compañia que produce, gasolina, aceite y gas, se sabe que para producir una unidad de gasolina utiliza 1 unidad de aceite y una de gas. Para producir una unidad de aceite, requiere de 1/5 unidades de aceite y 2/5 de gas. Finalmente para producir una unidad de gas requiere 1/5 de gasolina, 2/5 de aceite y 1/5 de gas. Si tiene una demanda del mercado de 100 unidades de cada producto. ¿Cuánto debe producir la empresa de cada producto para cumplir con su mercado?**

4.- **Una economía tiene dos sectores productivos A y B. El 40 % de la producción de A es consumida por A, mientras que las compras de**

insumos al sector B representa el 30 % de la producción de A. El 40 % de la producción de B es consumo proveniente del sector A y un 20 % de la producción de B es autoconsumida por B. La demanda final de los consumidores es de 1.000 euros de A y 2500 euros de B.

- **Hallar la matriz de Leontief en este problema.**
- **Hallar el vector de producción que satisface la demanda agregada total.**