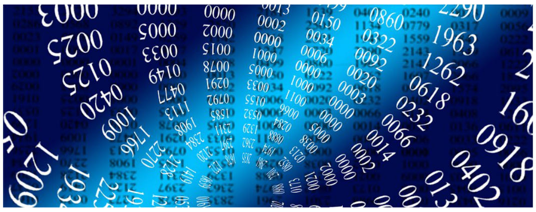


Capítulo 2

MODELOS BASADOS EN SISTEMAS DE ECUACIONES

2.1. Introducción

Para resolver un problema que involucra sistemas de ecuaciones lineales se debe tener en cuenta lo siguiente:

1.- Entender el problema.

2.- Determinar los datos conocidos.

3.- Nombrar adecuadamente las incógnitas de acuerdo a lo que se pida.

4.- Establecer las relaciones existentes entre los datos conocidos y las incógnitas.

5.- Determinar el sistema de ecuaciones lineales asociado a las relaciones en (d).

6.- Resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante en (e).

7.- Verificar que las respuestas obtenidas si están de acuerdo al problema.

8.- Interpretar el resultado si es posible.

EJERCICIO 6 Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por la siguiente tabla:

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1 la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encontrar el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas.

- Sea x_i el número de unidades que se deben producir del producto i que se fabrican durante las 8 horas con $i = 1, 2, 3$ y 4. Entonces:

  - $1x_1$: es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 1.
  - $2x_2$: es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 2.
  - $1x_3$: es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 3.
  - $2x_4$: es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 4.

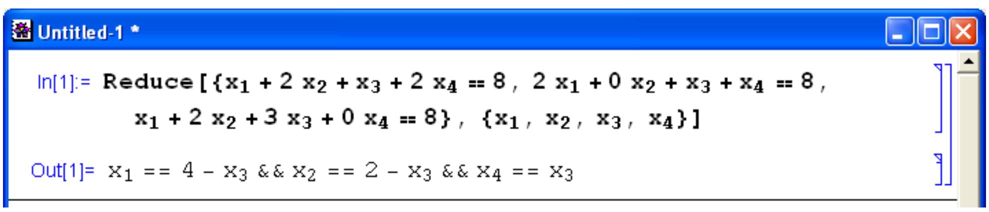
  Como la máquina 1 debe ser usada 8 horas diarias, entonces tenemos que

  $$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 8\,.$$

  Procediendo de forma similar para las máquinas 2 y 3 obtenemos el sistemas de ecuaciones lineales siguiente:

  $$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 8 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8 \end{cases}$$

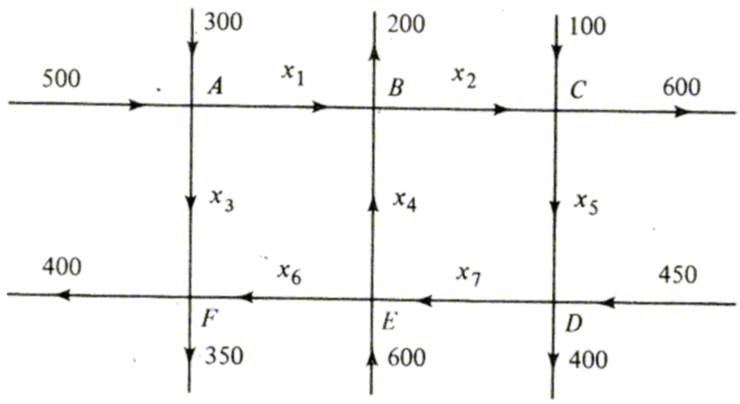
  El sistema puede ser analizado y resuelto con `Mathematica`®,



El sistema tiene infinitas soluciones. Cada variable x_i es no negativa por representar la cantidad de unidades fabricadas del producto i cada día, por lo tanto $x_i \geq 0$. Si asumimos que se produce un número completo de unidades, entonces x_i debe ser además un número entero para que todos los x_i sean no negativos. En consecuencia, x_4 debe ser un entero menor o igual que 2, siendo las posible soluciones las que aparecen en la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4
Producto 1	4	2	0	0
Producto 2	3	1	1	1
Producto 3	2	0	2	2

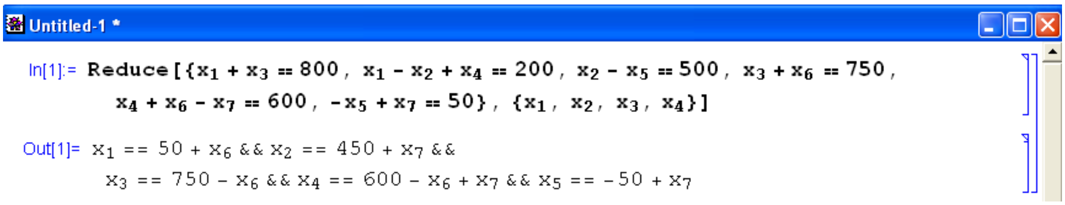
EJERCICIO 7 Supongamos que tenemos una red de calles en una sola dirección en una ciudad. Se quiere analizar el flujo de tráfico en cada una de las calles. La dirección del tráfico en cada una de las calles está dado en la figura. En varios sitios se han colocado contadores, y el número promedio de coches que pasan por cada uno de ellos en el período de 1 hora, aparece también en la figura. Las variables x_i , $i = 1, 2 \cdots , 7$ representan el número de coches por hora que pasan de la intersección A a la intersección B, de la intersección B a la intersección C, etc.



- En primer lugar determinaremos los posible valores para las variables x_i. **Asumimos que el número de coches que llegan a una intersección debe ser igual a los que salen**. Por lo tanto, teniendo en cuenta este hecho deducimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 800 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 200 \\ x_2 - x_5 = 500 \\ x_3 + x_6 = 750 \\ x_4 + x_6 - x_7 = 600 \\ -x_5 + x_7 = 50 \end{cases}$$

El sistema tiene 6 ecuaciones lineales y 7 incógnitas que puedes ser analizado y resuelto con `Mathematica`®,



Es evidente que las variables x_i, que representan al número de coches por hora en una intersección, tiene que ser mayores o iguales a cero (valores negativos representarían coches en dirección contraria). Aplicando esta restricción tenemos,

$$x_6 \leq 750\,, \quad x_7 \geq 50$$

Si suponemos que la calle que une los puntos D y E tiene que ser reparada, entonces es necesario que el tráfico que circule por esta calle sea mínimo, esto es $x_7 = 50$. Pero si $x_5 = 0$, entonces $x_7 = 50$. Es decir, si se cierra la calle que une los puntos C y D conseguiremos que el flujo entre D y E sea el mínimo. Los flujos x_1, x_3, x_4 y x_6 no están determinados de forma única.

EJERCICIO 8 Un inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones son de tres compañías: BBVA, Banesto y Vodafone, y que hace dos días su valor bajó 350 euros pero que ayer aumentó 600 euros. El corredor recuerda que hace dos días las acciones de BBVA bajó 1 euro por acción y las de Banesto 1.50 euros, pero que el precio de las acciones de Vodafone subió 0.50 euros. También recuerda que ayer el precio de las acciones de BBVA subió 1.50 euros por acción, las de Banesto bajó otros 0.5 euros por acción y las de Vodafone subi 1.0 euro por acción. Demostrar que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee el inversionista en cada compañía, pero que si sabemos que tiene 200 acciones de Vodafone, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en BBVA y en Banesto.

- Llamemos x_1 al número de acciones del BBVA, x_2 al número de acciones en Banesto y x_3 el número de acciones de Vodafone. Por el enunciado deducimos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 - 1.5x_2 + 0.5x_3 & = & -350 \\ 1.5x_1 - 0.5x_2 + x_3 & = & 600 \end{array} \right.$$

Al ser mayor el número de incógnitas que el de ecuaciones, el corredor de bolsa no tiene información suficiente para determinar el número de acciones de cada una de las compañías.

Si añadimos la condición $x_3 = 200$ entonces el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 - 1.5x_2 + 0.5x_3 & = & -350 \\ 1.5x_1 - 0.5x_2 + x_3 & = & 600 \\ x_3 & = & 200 \end{array} \right.$$

es compatible determinado, que puede ser resulto con `Mathematica`$_{®}$, obteniéndose: $x_1 = 300$, $x_2 = 100$ y $x_3 = 200$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

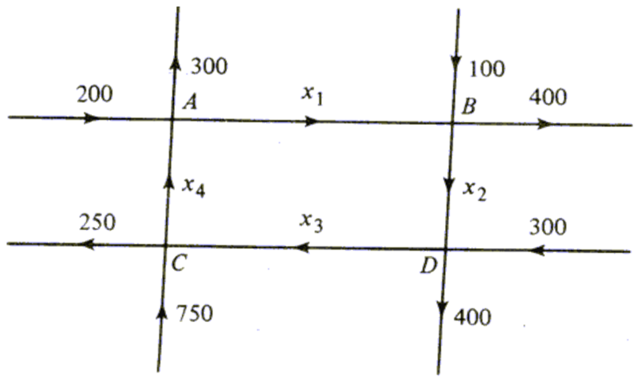
EJERCICIO 9

1.- Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó 30 euros diarios en Inglaterra, 20 euros diarios en Francia y 20 euros diarios en Grecia por concepto de hospedaje. En comida gastó 20 euros diarios en Inglaterra, 30 euros diarios en Francia y 20 euros diarios en Grecia. Sus gastos adicionales fueron de 10 euros diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de 340 euros en hospedaje, 320 euros en comida y 140 euros en gastos adicionales. Calcular el número de días que pasó el viajero en cada país o comprobar que los registros deben estar incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con otra.

2.- Una encuesta dirigida a 250 personas se realizó para conocer sus preferencias entre G.A.D.E. y F.I.C.O. Entre las que contestaron, el 55 % prefirió G.A.D.E. Si los que prefirieron F.I.C.O. fueron 90, +cu+ntos no contestaron a la encuesta?

3.- Para el control de cierta enfermedad de una planta, se usan tres productos químicos en las siguientes proporciones: 10 unidades del producto A, 12 unidades del producto B, y 8 unidades del producto C. Las marcas X, Y y Z son atomizadores comerciales que se venden en el mercado. Un litro de la marca X contiene los productos A, B y C, en la cantidad de 1, 2 y 1 unidades respectivamente. Un litro de la marca Y contiene los productos en la cantidad de 2, 1 y 3 unidades respectivamente; y un litro de la marca Z los contiene en la cantidad 3, 2 y 1 unidades respectivamente. ¿Qué cantidad de cada marca debe emplearse para fumigar la planta con las cantidades exactas de los productos requeridos para el control de la enfermedad?

4.- El siguiente diagrama reproduce una red de calles de una sola dirección con el flujo de tráfico en las direcciones indicadas. El número de coches está dado como promedio de coches por hora. Suponiendo que el flujo que llega a una intersección es igual al flujo que sale de ella, construir un modelo matemático del flujo de tráfico. Si la calle que va de C a A estuviera en reparación, ¿cuál sería el mínimo tráfico que se podría permitir?. ¿Cómo podría obtenerse este mínimo?



5.- **Una refinería produce gasolina con y sin azufre. Cada tonelada de gasolina sin azufre requiere 5 minutos en la planta A y 4 en la planta B. Por su parte, cada tonelada de gasolina con azufre requiere 4 minutos en la planta A y 2 en la planta B. Si la planta A tiene 3 horas disponibles y la B 2 horas, ¿cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo?**

6.- **Un médico está preparando una dieta que consta de los alimentos A, B y C. Cada gramo del alimento A contiene 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada gramo del alimento B contiene 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada gramo del alimento C contiene 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidades de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántos gramos de cada comida se necesitan?**

7.- **Una compañía representa a tres refiner+as de petróleo. Llamémoslas Refinería 1, Refinería 2 y Refinería 3. Cada refinería produce tres productos basados en el crudo: alquitrán, gasóleo y gasolina. Supongamos que, de un barril de petróleo, se sabe que:**

- **La primera refinería produce 4 litros de alquitrán, 2 de gasóleo, y 1 de gasolina.**
- **La segunda refinería produce 2 litros de alquitrán, 5 de gasóleo y 2.5 de gasolina.**
- **La tercera refinería produce 2 litros de alquitrán, 2 de gasóleo y 5 de gasolina.**

Supongamos que hay una demanda de estos productos de la siguiente manera: 600 litros de alquitrán, 800 litros de gasóleo, y 1000 litros de gasolina. ¿Cuántos barriles de crudo necesitará cada refinería para satisfacer la demanda?

Solución: ***La Refinería 1 necesitaría 31.25 barriles de crudo. La Refinería 2 necesitará 87.5 barriles de crudo y la Refinería 3 necesitará 150 barriles de crudo.***