UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MODELOS MATEMÁTICOS DISCRETOS EN LA EMPRESA GRADO EN ESTADÍSTICA Y EMPRESA EJERCICIOS DE MODELOS CONTINUOS

Juan Navas Ureña

Jaén, 19 de octubre de 2017

Presentación

La colección de Ejercicios Resueltos y Propuestos que presentamos se enmarca dentro de los Modelos Matemáticos en la Empresa y está dedicado al caso continuo, cuyas herramientas matemáticas básicas son las ecuaciones diferenciales.

Cuando un determinado fenómeno económico podemos representarlo por medio de un conjunto de ecuaciones (modelo matemático) se plantean varios problemas respecto al modelo utilizado, como son:

- Ver si el problema tiene solución.
- En caso de que ésta exista, demostrar si es única.
- Calcular de forma explícita esta solución.
- Analizar de manera cualitativa la solución del modelo.
- Utilizar técnicas numéricas para encontrar un valor aproximado de la solución.
- Estudiar la posibilidad de simular el modelo.

Gran parte de los ejercicios se han diseñado teniendo en cuenta el comentario anterior. De esta manera, el objetivo básico que se persigue es el de construir y resolver un mismo modelo haciendo uso de técnicas diferentes. En primer lugar, buscaremos la solución explícita del modelo, posteriormente la estudiaremos cualitativamente y a continuación encontraremos una aproximación numérica de dicha solución. Por último, mostraremos que la mayoría de los modelos continuos pueden ser simulados con `Vensim`® en el Laboratorio de Matemáticas.

Los primeros temas están dedicados al estudio de los modelos continuos. Muchos problemas económicos pueden ser representados a través de ecuaciones diferenciales, por ejemplo: modelos dinámicos, modelos poblacionales, difusión de epidemias, ..., etc. En general, se trata de buscar una función $y(t)$ definida en $[0,\, a]$ tal que

$$y'(t) = f(t)\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad t \in [0,\, a]\,.$$

En ocasiones se puede encontrar la solución de este problema

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(x)dx\,,$$

pero es bastante frecuente que dicha solución no pueda determinarse de forma elemental. Por ejemplo, no es fácil resolver

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx\,,$$

pero éste es un problema elemental para cualquier ordenador. Es importante, antes de aplicar técnicas numéricas, analizar detenidamente nuestro problema para saber si existe solución y en caso de que exista ver si ésta es única.

Estudiaremos modelos poblacionales relacionados con dos especies que compiten en un determinado territorio. Su dinámica podemos representarla por medio del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{dx}{dt} = f(t,\, x,\, y) \\[2ex] y' = \dfrac{dy}{dt} = g(t,\, x,\, y)\,, \end{array}\right.$$

siendo $x(t)$, $y(t)$ las cantidades de animales de cada una de las especies. El plano fase será la representación de los valores $(x(t),\, y(t))$, y su construcción tiene un interés especial para estudiar de forma cualitativa el modelo y analizar su estabilidad.

Es posible ver el comportamiento de las soluciones (órbitas) en el plano fase, calculando previamente las soluciones constantes (puntos de equilibrio), ya que éstas aportan información valiosa del resto de las soluciones del sistema. A continuación se debe hacer un estudio completo de la estabilidad, ya que es muy frecuente en ciencias experimentales que al tomar los datos (condiciones iniciales) se cometan pequeños errores, y esto puede obligar a que la solución buscada se encuentre muy lejos de la solución verdadera o de la solución de equilibrio. En este caso, diremos que existe inestabilidad. En caso contrario, estaríamos hablando de estabilidad.

Acabaremos los modelos continuos con una breve colección de ejercicios de métodos numéricos aplicados a la resolución de problemas de valores iniciales. Recordemos que un método de resolución numérica es un algoritmo que nos permite obtener un resultado aproximado de la solución de un determinado problema por medio de un número finito de pasos. Los métodos que utilizaremos serán los más usuales, como son *Euler, Taylor* y *Runge-Kutta.*

Tema 1

ECUACIONES DIFERENCIALES

EJERCICIO 1 Comprobar que la función $y(t) = ct^2 + t + 3$ es una solución del problema de valor inicial

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = 6\,, \qquad y(0) = 3\,, \qquad y'(0) = 1\,, \tag{1.1}$$

en $-\infty < t < \infty$, para cualquier valor del parámetro c.

- Derivando $y(t)$, sustituyendo en (1.1), y simplificando se obtiene

  $$t^2(2c) - 2t(2ct + 1) + 2(ct^2 + t + 3) = 6\,.$$

  Observemos que la solución de la ecuación diferencial (1.1) no es única (depende del valor de c), aunque sus coeficientes y la función $g(t) = 6$ son continuas para todo valor de t. La pérdida de la unicidad se debe a que el coeficiente $a_2(t) = t^2$ se anula en $t = 0$.

EJERCICIO 2 Comprobar que $y(t) = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t$ es una solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y = 12t\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 1\,. \tag{1.2}$$

- Derivando dos veces la función $y(t)$,

  $$y'(t) = 6e^{2t} - 2e^{-2t} - 3\,, \quad y''(t) = 12e^{2t} + 4e^{-2t}\,. \tag{1.3}$$

  A continuación, sustituimos (1.3) en (1.2)

  $$(12e^{2t} + 4e^{-2t}) - 4(3e^{2t} + e^{-2t} - 3t) = 12t\,.$$

Además, es inmediato comprobar que $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.

La ecuación diferencial (1.2) es lineal, los coeficientes $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -4$, y la función $g(t) = 12t$ son funciones continuas en cualquier intervalo que contenga al valor $t = 0$. Por lo tanto, $y(t) = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t$ es solución única de (1.2).

EJERCICIO 3 Demostrar que la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 9y = 0$$

tiene dos soluciones

$$y_1(t) = e^{3t} \quad , \quad y_2(t) = e^{-3t}$$

linealmente independientes.

- En primer lugar, es inmediato comprobar que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial. Su Wronskiano vale

$$W[e^{3t}, e^{-3t}] = \begin{vmatrix} e^{3t} & , & e^{-3t} \\ 3e^{3t} & , & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -6 \neq 0\,,\ \forall t\,,$$

entonces y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en $-\infty < t < \infty$.

La solución general de la ecuación diferencial en $(-\infty, \infty)$ es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 4 Demostrar que la ecuación $y'' - y' - 6y = 0$ tiene dos soluciones distintas de la forma $y(t) = e^{at}$.

- Si $y = e^{at}$ es una solución para algunos valores de a, tenemos

$$y' = ae^{at} \quad , \quad y'' = a^2 e^{at}\,,$$

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$(a^2 e^{at}) - (ae^{at}) - 6(e^{at}) = e^{at}(a^2 - a - 6) = 0\,,$$

que se satisface para $a = 3$ y $a = -2$. Luego $y(t) = e^{3t}$, $y(t) = e^{-2t}$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea.

EJERCICIO 5 Dada la ecuación diferencial

$$t^3 y''' - 6ty' + 12y = -4 + 12\ln t\,. \tag{1.4}$$

(a) **Comprobar que $y_p(t) = \ln t$ es una solución particular de la ecuación diferencial (1.4).**

(b) **Comprobar que $y_h(t) = c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3 t^{-2}$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a (1.4).**

(c) **Encontrar la solución general de (1.4).**

(a) Sustituyendo $y_p(t)$ y sus derivadas en (1.4) se tiene

$$y_p'(t) = \frac{1}{t},\ y_p''(t) = -\frac{1}{t^2},\ y_p'''(t) = \frac{2}{t^3} \quad \Rightarrow \quad t^3\frac{2}{t^3} - 6t\frac{1}{t} + 12\ln t = -4 + 12\ln t\,.$$

(b) Por otro lado, es fácil comprobar que $y_h(t) = c_1t^2 + c_2t^3 + c_3t^{-2}$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea. Derivando

$$y_h'(t) = 2c_1t + 3c_2t^2 - 2c_3t^{-3},\ y_h''(t) = 2c_1 + 6c_2t + 6c_3t^{-4},\ y_h'''(t) = 6c_2 - 24c_3t^{-5}\,,$$

y sustituyendo en $t^3y''' - 6ty' + 12y$ se obtiene,

$$t^3(6c_2 - 24c_3t^{-5}) - 6t(2c_1t + 3c_2t^2 - 2c_3t^{-3}) + 12(c_1t^2 + c_2t^3 + c_3t^{-2}) = 0\,.$$

(c) Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial (1.4) es

$$\boxed{y(t) = c_1t^2 + c_2t^3 + c_3t^{-2} + \ln t\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 6 Resolver el problema de valores iniciales siguiente:

$$y' + y = y(te^{t^2} + 1)\,, \quad y(0) = 1\,.$$

- La ecuación diferencial es del tipo de variables separables. En efecto, se puede escribir como

$$y' = y\,t\,e^{t^2} \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dt} = y\,t\,e^{t^2} \ \Rightarrow\ \frac{dy}{y} = t\,e^{t^2}\,dt, \quad (y \neq 0).$$

Integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int t\,e^{t^2}\,dt, \Rightarrow\ \ln|y| = \frac{1}{2}e^{t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

o bien

$$y = k\,e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad (k = \pm\,e^c). \tag{1.5}$$

La división por y al separar las variables nos obliga a considerar la función $y = 0$. por otra parte, dicha función es también solución de la ecuación diferencial. Dicha solución se obtiene de (1.5) si admitimos el valor $k = 0$. Por tanto, la solución general será

$$y = k\, e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Para determinar la solución particular que verifica la condición inicial $y(0) = 1$, sustituimos los valores $t = 0$, $y = 1$ en (1.6),

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = k\, e^{1/2} \quad \Rightarrow \quad k = e^{-1/2}.$$

Sustituyendo en (1.6) obtenemos la solución

$$\boxed{y = e^{\frac{1}{2}\left(e^{t^2}-1\right)}}$$

EJERCICIO 7 Resolver la ecuación diferencial

$$(t^2y^2 + 1)dt + 2t^2dy = 0\,,$$

haciendo uso del cambio de variable $ty = z$.

- Empezamos calculando dz,

$$t\,y = z \;\Rightarrow\; t\,dy + y\,dt = dz \;\Rightarrow\; dy = \frac{dz - y\,dt}{t} \qquad (t \neq 0).$$

Sustituyendo en la ecuación inicial y simplificando

$$(z-1)^2dt + 2t\,dz = 0\,,$$

que es una ecuación diferencial de variables separables.

$$-\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dt}{2t}, \quad (t \neq 0,\ z \neq 1)$$

e integrando

$$-\int \frac{dz}{(z-1)^2} = \int \frac{dt}{2t} \;\Rightarrow\; \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2}\ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ahora, podemos deshacer el cambio

$$\frac{1}{ty-1} = \frac{1}{2}\ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

La función $t = 0$ (considerando t como variable dependiente) es también solución de la ecuación diferencial dada. Asimismo, el caso $z = 1$ nos lleva a considerar la función $y = 1/t$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se comprueba que también es solución. Ninguna de las soluciones anteriores se obtienen de (1.7) para ningún valor de la constante c. Se trata, por tanto, de dos soluciones singulares.

EJERCICIO 8 Resolver la ecuación diferencial

$$(2ty + 3y^2)dt - (2ty + t^2)dy = 0\,,$$

- La ecuación diferencial es homogénea de grado dos y puede escribirse como,

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{2ty + 3y^2}{2ty + t^2}\,,$$

donde estamos suponiendo que $2ty + t^2 \neq 0$. Dividiendo por t^2,

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{2\left(\dfrac{y}{t}\right) + 3\left(\dfrac{y^2}{t^2}\right)}{2\left(\dfrac{y}{t}\right) + 1}\,,$$

y haciendo el cambio $z = y/t$,

$$z = \frac{y}{t} \;\Rightarrow\; y = t\,z \;\Rightarrow\; y' = z + t\,z'\,.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$z + t\,z' = \frac{2z + 3z^2}{2z + 1} \;\Rightarrow\; t\,z' = \frac{2z + 3z^2}{2z + 1} - z = \frac{z^2 + z}{2z + 1},$$

se llega a la ecuación de variables separables

$$t\,\frac{dz}{dt} = \frac{z^2 + z}{2z + 1} \;\Rightarrow\; \frac{(2z + 1)dz}{z^2 + z} = \frac{dt}{t}, \quad (z^2 + z \neq 0).$$

Integrando, se tiene,

$$\int \frac{(2z + 1)dz}{z^2 + z} = \int \frac{dt}{t} \;\Rightarrow\; \ln|z^2 + z| = \ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

que puede expresarse en la forma

$$z^2 + z = k\,t, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad (k = \pm e^c).$$

Deshaciendo el cambio de variable,

$$\left(\frac{y}{t}\right)^2 + \frac{y}{t} = k\,t \;\Rightarrow\; y^2 + ty = k\,t^3, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1.8}$$

Ahora estudiamos el caso $z^2 + z = 0$,

$$z^2 + z = 0 \Rightarrow z(z+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow \dfrac{y}{t} = 0 \Rightarrow y = 0 \\[2ex] z+1 = 0 \Rightarrow \dfrac{y}{t} + 1 = 0 \Rightarrow y + t = 0 \Rightarrow y = -t \end{cases}$$

Se comprueba que ambas funciones, $y = 0$ e $y = -t$, son también soluciones de la ecuación diferencial. Además, se observa que ambas soluciones se obtienen de (1.8), si admitimos el valor $k = 0$. Por tanto, la solución general vendrá dada por

$$y^2 + ty = k\,t^3, \quad k \in \mathbb{R}$$

Para concluir nos queda por estudiar el caso $2ty + t^2 = 0$,

$$2t\,y + t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t(2y+t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 0 \\ 2y + t = 0 \;\Rightarrow\; y = -\dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

La recta $t = 0$ satisface la ecuación diferencial original y podría admitirse como solución, si consideramos t como variable dependiente. En cambio, se comprueba sustituyendo en la ecuación diferencial original que la recta $y = -t/2$ no es solución.

EJERCICIO 9 Resolver la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dt} + y\,\mathrm{ctg}\,t = 2t\,\mathrm{cosec}\,t\,.$$

- Calculamos el factor integrante

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \exp\left(\int p(t)\,dt\right) = \exp\left(\int \mathrm{ctg}\,t\,dt\right) = \exp\left(\int \frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t}\,dt\right) \\ &= e^{\ln(\mathrm{sen}\,t)} = \mathrm{sen}\,t.\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante, se tiene,

$$y'\,\mathrm{sen}\,t + y\cos t = 2t \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(y\,\mathrm{sen}\,t) = 2t \;\Rightarrow\; y\,\mathrm{sen}\,t = \int 2t\,dt = t^2 + c.$$

O bien,

$$\boxed{y(t) = \frac{t^2 + c}{\mathrm{sen}\,t}\,, \quad c \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 10 Resolver la ecuación diferencial lineal

$$y' + y = \mathrm{sen}\,t\,, \quad y(0) = 0\,.$$

- Calculamos el factor integrante,

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t)\,dt\right) = \exp\left(\int dt\right) = e^t.$$

Multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante,

$$e^t y' + e^t y = e^t\,\mathrm{sen}\,t.$$

El primer término de la igualdad anterior se corresponde con la derivada de la función $e^t y$,

$$e^t y' + e^t y = \frac{d}{dt}\left(e^t y\right) = e^t \operatorname{sen} t.$$

Esta observación nos permite resolver la ecuación,

$$e^t y = \int e^t \operatorname{sen} t\, dt\,,$$

integración por partes

$$\frac{1}{2} e^t (\operatorname{sen} t - \cos t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Despejando la variable y, se obtiene la solución general

$$y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t) + c\, e^{-t}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

- Para calcular la solución particular que satisface la condición $y(0) = 0$, sustituimos los valores $t = 0$, $y = 0$ en (1.9),

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 0 - \cos 0) + c\, e^0 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2}.$$

La solución del problema de valores iniciales vendrá dada por

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t + e^{-t})}$$

EJERCICIO 11 Resolver la ecuación diferencial

$$(6ty + 2y^2 - 5)dt + (3t^2 + 4ty - 6)dy = 0\,.$$

- Sean

$$M(t, y) = 6ty + 2y^2 - 5, \quad N(t, y) = 3t^2 + 4ty - 6\,.$$

La ecuación diferencial es exacta puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t + 4y = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Existe, por tanto, una función $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y).$$

Las igualdades anteriores nos permiten calcular la expresión de la función $F(t, y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y) \;\Rightarrow\; F(t, y) &= \int M(t, y)\, dt = \int (6ty + 2y^2 - 5)dt \\
&= 3t^2 y + 2ty^2 - 5t + g(y), \\
\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y) \;\Rightarrow\; 3t^2 + 4ty + g'(y) &= 3t^2 + 4ty - 6 \;\Rightarrow\; g'(y) = -6
\end{aligned}$$

Luego,

$$g(y) = \int -6\, dy = -6\, y.$$

La función $F(t, y)$ será

$$F(t, y) = 3t^2y + 2ty^2 - 5t - 6y,$$

y la solución general vendrá dada en forma implícita por

$$\boxed{3t^2y + 2ty^2 - 5t - 6y = c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 12 Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 0 \tag{1.10}$$

(a) **Probar que $y_1(t) = e^{2t}$ es una solución de (1.10).**

(b) **Aplicar el método de reducción del orden para poder buscar otra solución particular de (1.10).**

(c) **Encontrar la solución general de (1.10).**

- Es evidente que $y_1(t) = e^{2t}$ es una solución de (1.10). Si buscamos otra solución de la forma $y(t) = u(t)e^{2t}$, debe cumplirse

$$y(t) = u'e^{2t} + 2ue^{2t}\,, \quad y'' = u''e^{2t} + 4u'e^{2t} + 4ue^{2t}\,. \tag{1.11}$$

Sustituyendo (1.11) en (1.10) se obtiene,

$$y'' - 4y = 0 \Rightarrow e^{2t}(u'' + 4u') = 0$$

al ser $e^{2t} \neq 0$, $\forall t \in (-\infty, \infty)$, entonces $u'' + 4u' = 0$.

Llamando $w := u'$, la ecuación diferencial anterior se transformará en

$$w' + 4w = 0 \Rightarrow \frac{w'}{w} = -4 \Rightarrow \ln|w(t)| = -4t + k \Rightarrow w(t) = c_1e^{-4t}$$

Al ser $w(t) = u'(t) = c_1e^{-4t}$, entonces

$$u(t) = -\frac{c_1}{4}e^{-4t} + c_2$$

y finalmente

$$y(t) = u(t)e^{2t} = -\frac{c_1}{4}e^{-2t} + c_2e^{2t}$$

Si tomamos $c_1 = -4$, $c_2 = 0$, obtenemos la segunda solución $y_2(t) = e^{-2t}$. Puesto que

$$W[e^{2t}, e^{-2t}] = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ 2e^{2t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \forall t \in (-\infty, \infty)\,,$$

entonces, las soluciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ y en consecuencia

$$\boxed{y(t) = -\frac{c_1}{4}e^{-2t} + c_2 e^{2t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

es la solución general de (1.10).

EJERCICIO 13 Resolver por reducción del orden la siguiente ecuación diferencial

$$(t^3 - 2t^2)y'' - (t^3 + 2t^2 - 6t)y' + (3t^2 - 6)y = 0\,, \quad t > 2\,, \tag{1.12}$$

sabiendo que admite una solución del tipo $y(t) = t^k$**.**

- Sustituimos la función $y = t^k$ y sus derivadas en (1.12)

  $$k(k-1)(t^{k+1} - 2t^k) - k(t^{k+2} + 2t^{k+1} - 6t^k) + (3t^{k+2} - 6t^k) = 0\,.$$

  Simplificando, resulta

  $$(3-k)t^2 + (k^2 - 3k)t + (-2k^2 + 8k - 6) = 0\,,$$

  lo cual es cierto si $k = 3$.

  Tenemos por tanto como solución de (1.12) la función $y_1(t) = t^3$.

- Sea $y(t) = u(t)y_1(t) = u(t)t^3$. Derivando y sustituyendo en la ecuación diferencial inicial (1.12)

  $$(t^3 - 2t^2)(6tu + 6t^2u' + t^3u'') - (t^3 + 2t^2 - 6t)(3t^2u + t^3u') + (3t^2 - 6)(ut^3) = 0\,,$$

  que una vez simplificada

  $$t(t-2)u'' - (t^2 - 4t + 6)u' = 0$$

  Reduciendo el orden, $w(t) := u'(t)$ nos proporciona la ecuación

  $$t(t-2)w' - (t^2 - 4t + 6)w = 0\,.$$

  A continuación resolvemos la ecuación diferencial

  $$\frac{w'}{w} = \frac{t^2 - 4t + 6}{t^2 - 2t}\,,$$

de variables separadas

$$\begin{aligned}\ln|w| &= \int \left(1+\frac{-2t+6}{t(t-2)}\right)dt \\ &= t+\int \tfrac{-3}{t}dt+\int \tfrac{1}{t-2}dt \\ &= t-3\ln|t|+\ln|t-2| = t+\ln\tfrac{t-2}{t^3}+k\end{aligned}$$

Podemos expresar la solución anterior de la siguiente manera

$$|w| = e^t e^{\ln\left|\frac{t-2}{t^3}\right|+k} = c\left(\frac{t-2}{t^3}\right)e^t\,.$$

Finalmente, al ser $u' = w$, calculamos el valor de la función $u(t)$

$$u = c\int e^t\left(\frac{t-2}{t^3}\right)dt = c\int \frac{e^t(t^2-2t)}{t^4}dt = c\left(\frac{e^t}{t^2}\right)+k\,.$$

Es decir, $y(t) = u(t)y_1(t) = cte^t + kt^3$. Si $c = 1$, $k = 0$ obtenemos $y(t) = te^t$.

- Las soluciones t^3, te^t forman un conjunto fundamental, ya que

  $$W[t^3, te^t] = e^t t^3(t-2) \neq 0\,, \quad \forall t > 2\,,$$

  y entonces

  $$\boxed{y(t) = c_1te^t + c_2t^3\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

  es la solución general de la ecuación diferencial (1.12).

EJERCICIO 14 **Resolver** $y'' + 6y' + 8y = 0$.

- El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

  $$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda+4)\,.$$

  Las raíces son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$. En consecuencia, la solución general de nuestro problema es de la forma

  $$\boxed{y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 15 **Resolver** $y''' + y'' - 2y' = 0$

- El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2)\,,$$

y sus raíces características son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. La solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-2t}\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 16 Resolver $(y'' - 2y' + 5)^2 = 0$

- Las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación diferencial son $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$, $\lambda_3 = 1 + 2i$, $\lambda_4 = 1 - 2i$.

  La solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) + te^t(c_3 \cos 2t + c_4 \operatorname{sen} 2t) \\ &= e^t((c_1 + c_3 t)\cos 2t + (c_2 + c_4 t)\operatorname{sen} 2t)\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

EJERCICIO 17 Resolver

$$y'' - 3y' = 8e^{3t} + 4 \operatorname{sen} t\,. \tag{1.13}$$

- **Paso 1.** La ecuación diferencial homogénea tiene cómo raíces del polinomio característico $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. En consecuencia

$$y_h(t) = c_1 + c_2 e^{3t}\,.$$

- **Paso 2.** A continuación intentaremos encontrar a partir de (1.13) otra ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes pero homogénea. Para ello derivamos en (1.13)

$$\begin{aligned} y''' - 3y'' &= 24e^{3t} + 4\cos t \\ y^{4)} - 3y''' &= 72e^{3t} - 4 \operatorname{sen} t\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

  sumando (1.13) y (1.14)

$$y^{4)} - 3y''' + y'' - 3y' = 80e^{3t}\,, \tag{1.15}$$

  derivando en la ecuación anterior

$$y^{5)} - 3y^{4)} + y''' - 3y'' = 240e^{3t}\,, \tag{1.16}$$

  finalmente multiplicamos por -3 la expresión (1.15) y sumamos con (1.16)

$$y^{5)} - 6y^{4)} + 10y''' - 6y'' + 9y' = 0\,. \tag{1.17}$$

El polinomio característico

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 10\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda - 3)^2(\lambda^2 + 1)\,,$$

nos permite obtener la solución general de la ecuación diferencial homogénea (1.17)

$$y(t) = (c_1 + c_2 e^{3t}) + (c_3 t e^{3t} + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t)\,.$$

Esta expresión anterior nos sugiere que $y_p(t)$ es de la forma

$$y_p(t) = Ate^{3t} + B\cos t + C \operatorname{sen} t\,. \tag{1.18}$$

Si sustituimos (1.18) en (1.13) e identificamos coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} 3A & = & 8 \\ -B - 3C & = & 0 \\ 3B - C2C & = & 4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = 8/3, \quad B = 6/5, \quad C = -2/5\,.$$

Por tanto,

$$y_p(t) = \frac{8}{3} t e^{3t} + \frac{6}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t\,.$$

- **Paso 3.** La solución general de (1.13) viene dada por

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 + c_2 e^{3t} + \frac{8}{3} t e^{3t} + \frac{6}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t\,, \quad c_1\ c_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 18 Resolver $y'' - 2y' + y = (t-1)e^t$ utilizando el método de variación de parámetros.

- El polinomio característico $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ tiene por raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto,

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t\,.$$

Si $y_1 = e^t$, $y_2 = te^t$ su Wronskiano vale

$$W = W[e^t, te^t] = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0,\ \forall t \in (-\infty, \infty)\,.$$

- Ahora se trata de encontrar una solución particular $y_p(t)$ de la forma

$$y_p(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) = c_1(t) e^t + c_2(t) t e^t\,.$$

Como sabemos, las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ se obtienen de las igualdades

$$c_1'(t) = \frac{-y_2(t) g(t)}{W}\,, \quad c_2'(t) = \frac{y_1(t) g(t)}{W}\,.$$

En nuestro caso,

$$c_1'(t) = \frac{-y_2 g(t)}{W} = \frac{-te^t(t-1)e^t}{e^{2t}} = -t^2 + t \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\,,$$

y

$$c_2'(t) = \frac{y_1 g(t)}{W} = \frac{e^t(t-1)e^t}{e^{2t}} = t - 1 \qquad \Rightarrow \quad c_2(t) = -\frac{t^2}{2} - t\,.$$

- Por consiguiente, $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ siendo

$$\boxed{y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)e^t + \left(\frac{t^2}{2} - t\right)te^t = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right)e^t}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 19

1.- **Dada la ecuación diferencial**

$$t\frac{dy}{dt} + (1+t^2)y = 27$$

- **Calcular su solución general**
- **Calcular la solución particular para** $y(1) = 2$
- **¿Cuál es el comportamiento a largo plazo de la solución anterior?**

2.- **Suponiendo que la tasa de crecimiento de una población de bacterias** $y(t)$ **es de,**

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)\,y\,.$$

Encontrar el número de bacterias en un tiempo $t = 5$ **minutos, si la población inicial es de** $y(0) = 2$**.**

3.- **Las firmas farmacéuticas invierten mucho dinero con el fin de probar un nuevo medicamento. Sin embargo, lleva tiempo que los médicos acepten y hagan uso del medicamento. El uso tiende a un valor límite del 100 % o 1, después del tiempo** t**, en meses. Sea** $P(t)$ **el porcentaje de médicos que utilizan un nuevo medicamento contra el cancer después de** t **meses. Es conocido que la razón de cambio de éste porcentaje es proporcional a la diferencia entre dicho porcentaje y su valor límite.**

3.a.- **Si** $P(0) = 0$**, encontrar el porcentaje de médicos que aceptan el medicamento después de 3 meses, sabiendo que después de 1 mes el porcentaje es del 33 %.**

3.b.- **Trazar una gráfica aproximada de la función** $P(t)$**.**

Tema 2

MODELOS BASADOS EN E.D.O

EJERCICIO 20 Los siguientes datos fueron reunidos por un investigador durante los primeros 10 minutos de un experimento destinado a estudiar el aumento de bacterias.

Número de minutos	0	10
Número de bacterias	5.000	8.000

Suponiendo que el número de bacterias crece exponencialmente, ¿cuántas bacterias habrá después de 30 minutos?.

- Sea $y(t)$ el número de bacterias presentes en el cultivo después de t minutos. Como el número de bacterias crece exponencialmente, y puesto que al comienzo había 5.000 bacterias, $y(t)$ será una función de la forma

$$y(t) = y(0)e^{rt} = 5.000e^{rt}\,.$$

Ya que pasados 10 minutos hay 8.000, se obtiene

$$8.000 = 5.000e^{10r} \quad \Rightarrow \quad r = 0.047\,.$$

En consecuencia, al cabo de 30 minutos el número de bacterias será

$$y(30) = 5.000e^{0.047\times 30} = 20.479$$

EJERCICIO 21 **Una curva de** *Gompertz* **es la gráfica de una función de la forma $y(t) = c\,a^{r^t}$ donde $0 < r < 1$ es la tasa de crecimiento y a y c son constantes positivas. Los psicólogos y otros investigadores utilizan este tipo de curvas para describir aspectos como crecimiento y aprendizaje.**

Con base en diversas proyecciones, una compañía predice que el número de empleados que tendrá en t años será $y(t) = 500(0.03)^{(0.4)^t}$.

1.- **¿Cuántos empleados tiene ahora la compañía (t=0)?.**

2.- **¿Cuántos empleados tendrá en 5 años?**

(a) 15 (b) 482

EJERCICIO 22 **Consideremos las dos siguientes ecuaciones diferenciales que modelan las tasas de memorización de un poema por dos estudiantes. La tasa de Juan es proporcional a la cantidad por aprender. La tasa de Carmen es proporcional al cuadrado de la cantidad por aprender.**

$$\frac{dL_J}{dt} = 2(1 - L_J)\,, \qquad \frac{dL_C}{dt} = 3(1 - L_C)^2\,,$$

donde $L_J(t)$ y $L_C(t)$ son las fracciones del poema memorizadas en el tiempo t por Juan y Carmen, respectivamente.

1.- **¿Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en $t = 0$, si ambos empiezan la memorización juntos y nunca antes han visto el poema?**

2.- **¿Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en $t = 0$, si ambos comienzan a memorizar juntos habiendo aprendido la mitad del poema?**

3.- **¿Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en $t = 0$, si ambos comienzan a memorizar juntos habiendo aprendido un tercio del poema?**

- En el primero de los casos, sustituimos en las ecuaciones diferenciales los valores $L_J(0) = L_C(0) = 0$. En consecuencia, $L'_J(0) = 2$ y $L'_C(0) = 3$, y por tanto la respuesta es Carmen.

- En el caso siguiente es Juan quien tiene una tasa más rápida de aprendizaje en $t = 0$, ya que $L'_J(0) = 1$ y $L'_C(0) = 0.75$.

- Por último, es inmediato comprobar que en el tercero de los casos las tasas son iguales.

EJERCICIO 23 Se estima que dentro de t meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de $4+5t^{\frac{2}{3}}$ personas por mes. Si la población actual es de 10.000 personas, ¿cuál será la población dentro de 8 meses.?

- Si $y(t)$ es el número de habitantes del pueblo en el mes t, entonces la ecuación diferencial que modeliza la situación planteada es

$$y'(t) = 4 + 5t^{2/3} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 4t + 3t^{5/3} + y(0) = 4t + 3t^{5/3} + 10000\,.$$

Por tanto,

$$y(8) = 10.128 \text{ personas}\,.$$

EJERCICIO 24 Una proyección a 5 años de las tendencias de la población señala que dentro de t años la población de cierta comunidad será $y(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 50$ miles.

1.- **¿En qué momento, durante el período de 5 años, crecerá la población con mayor rapidez?.**

2.- **¿En que momento, durante el período de 5 años, crecerá la población con menor rapidez?.**

- La función que nos da el crecimiento de $y(t)$ es su derivada

$$\varphi(t) = y'(t) = -3t^2 + 18t + 48.$$

Esta función es creciente desde $t = 0$ hasta $t = 3$ y decreciente en $[3, 5]$. Por tanto, la población crecerá con mayor rapidez en $t = 3$ (que coincide con el punto de inflexión de la función $y(t)$).

- Por otro lado, como $\varphi(0) < \varphi(5)$ el momento en el que la población crecerá con menor rapidez será ahora $(t = 0)$.

EJERCICIO 25 Se estima que dentro de t años el valor de cierta parcela se incrementará a una razón de $r(t)$ euros por año. Hallar una expresión para la cantidad que aumentará el valor de la tierra durante los próximos 5 años.

- La ecuación diferencial que modeliza a la situación planteada es

$$y'(t) = r(t)\,,$$

cuya solución es

$$y(t) = \int r(t)dt + y(0)\,,$$

y el valor de la tierra en euros durante los próximos 5 años será

$$y(5) = \left(\int r(t)dt\right)_{t=5} + y(0)\,.$$

EJERCICIO 26 Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad a la orilla de un lago cambiará a una razón de $0.6t^2+0.2t+0.5$ miles de personas por año. Los especialistas en medio ambiente han encontrado que el nivel de contaminación en el lago aumenta a una razón aproximada de 5 unidades por cada 1.000 personas. Si en la actualidad el nivel de polución del lago es de 60 unidades. ¿En cuánto se incrementará la contaminación en el lago durante los próximos 2 años.?

- Si $y(t)$ es el número de miles de personas en la comunidad en el año t, sabemos que

$$y'(t) = 0.6t^2 + 0.2t + 0.5 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0.2t^3 + 0.1t^2 + 0.5t + y(0)\,.$$

Como inicialmente existen 60 unidades de contaminación, esto equivale a $y(0) = 60 \times 200 = 12000$ habitantes. Si calculamos la población al cabo de dos años $y(2) = 12 + 1.6 + 0.4 + 1 + 12$ mil. El incremento ha sido de 3000 personas, o lo que es equivalente $3000/200 = 15$ unidades.

EJERCICIO 27 Supongamos que dentro de t meses un pozo petrolífero producirá crudo a razón de $r(t)$ barriles por mes y que el precio será $p(t)$ euros por barril. Suponiendo que el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, hallar una expresión para los ingresos totales obtenidos del pozo en los próximos dos años.

- El número de barriles al cabo de t meses vendrá dado por

$$B(t) = \int r(t)d(t) + B(0),$$

con $B(0) = 0$. En consecuencia, los ingresos para t meses serán $I(t) = p(t) \times B(t)$ y la solución del ejercicio será

$$I(2) = p(t) \int r(t)dt\,,$$

evaluada en $t = 2$.

EJERCICIO 28 Cierto pozo petrolífero que produce 400 barriles de petróleo crudo al mes se secará en 2 años. En la actualidad el precio del petróleo crudo es 18 euros por barril y se espera que aumente a una razón constante de 3 céntimos de euro mensuales por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuales serán los ingresos futuros totales obtenidos por el pozo.?

- El ritmo con el que aumentarán los ingresos es

$$y'(t) = 400(18 + 0.03t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = 7200t + 6t^2 + k\,.$$

Como $y(0) = 0$ entonces $k = 0$. Los ingresos futuros serán $y(24) = 7200 \times 24 + 6 \times 24^2 = 176256$ euros.

EJERCICIO 29 Un pozo de petróleo que produce 300 barriles de petróleo crudo al mes se secará en 3 años. Se estima que dentro de t meses el precio del petróleo crudo será $p(t) = 18 + 0.3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso futuro total obtenido por el pozo?.

- La ecuación diferencial que describe el proceso es

$$\frac{dy}{dt} = 300p(t) = 300(18 + 0.3\sqrt{t}) = 5.400 + 90\sqrt{t}\,,$$

siendo $y(t)$ el ingreso generado durante los próximos t meses.

Resolviendo la ecuación diferencial

$$y(t) = 5.400t + 60t^{\frac{3}{2}} + c\,,$$

como $y(0) = 0$, se obtiene que $c = 0$, y así la solución particular buscada es

$$y(t) = 5.400t + 60t^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad y(36) = 207.360\,.$$

EJERCICIO 30 Los promotores de una feria estiman que si las puertas se abren a las $9:00$ a.m., t horas después, los visitantes entran a la feria a una razón de $-4(t+2)^3+54(t+2)^2$ personas por hora. ¿Cuántas personas entrarán a la feria entre las $10:00$ a.m. y el mediodía.?

- Si $y(t)$ el número de personas que han entrado en la feria en la hora t, entonces

$$y'(t) = -4(t+2)^3 + 54(t+2)^2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = -(t+2)^4 + 18(t+2)^3 + y(0)\,.$$

El número de personas que han entrado a la feria entre las 10 y las 12 horas será

$$y(12) - y(10) = 608\,\text{personas}\,.$$

EJERCICIO 31 **Se estima que dentro de t años cierta central nuclear producirá residuos radiactivos a una razón de $r(t) = 400t$ kilos por año. Los residuos se desintegran exponencialmente a una razón del $2\,\%$ por año. ¿Qué le sucederá a la acumulación de residuos radiactivos de la central a largo plazo?**

- La cantidad de residuos presentes después de N años será

$$\int_0^N 400te^{-0.02(N-t)}dt = 400e^{-0.02N}\int_0^N te^{0.02t}dt\,.$$

- La cantidad de residuos radiactivos presentes a largo plazo es el límite de esta expresión cuando N tiende a infinito. Es decir

$$\lim_{N\to\infty} 400e^{-0.02N}\int_0^N te^{0.02t}dt =$$

$$\lim_{N\to\infty} 400e^{-0.02N}(50te^{0.02t} - 2.500e^{0.02t})\Big|_0^N = \infty$$

EJERCICIO 32 **La cantidad de bacterias presentes en cierto cultivo después de t minutos de un experimento era $y(t) = 2000e^{0.05t}$. ¿Cuál fue la cantidad media de bacterias presentes durante los primeros 5 minutos del experimento?**

$$\frac{1}{5}\int_0^5 200e^{0.05\,t}dt = 2272.2$$

EJERCICIO 33 **El ritmo al que cierto medicamento se absorbe en el sistema circulatorio está dado por $dy/dt = r - sy$, donde $y(t)$ es la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en el tiempo $t; r$ y s son constantes positivas. Supongamos que al comienzo no había indicios del medicamento en la sangre.**

1.- **Hallar $y(t)$.**

2.- **¿Qué le sucede a $y(t)$ a “largo plazo”?**

- Al ser la ecuación diferencial autónoma, será por tanto de variables separadas.

$$-\frac{1}{s}\int\frac{-sdy}{r-sy} = \int dt \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{s}\ln|r-sy| = t + c\,.$$

Si despejamos el valor de $y(t)$ obtenemos

$$y(t) = \frac{1}{s}\left(r - e^{-sc}e^{-st}\right)\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Como $y(0) = 0$

$$0 = \frac{1}{s}\left(r - e^{-sc}\right) \quad \Rightarrow \quad r = e^{-sc}\,,$$

y finalmente

$$\boxed{y(t) = \frac{r}{s}(1 - e^{-st})\,.}$$

Observemos que si hacemos $t \to \infty$, entonces $y(t) \to r/s$.

EJERCICIO 34 Escribir una ecuación diferencial que describa el hecho de que la razón a la que las personas oyen hablar sobre un nuevo aumento en las tarifas postales es proporcional al número de personas en el país que no ha oído hablar al respecto.

- Sea $y(t)$ la cantidad de personas que han oído hablar sobre el aumento de los precios en el tiempo t. Entonces, $y'(t)$ será la razón a la que las personas oyen hablar acerca del aumento. El número de personas que no han oído hablar sobre el asunto es $B - y(t)$. Por tanto, la ecuación diferencial pedida es

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = k(B - y)\,,$$

siendo k la constante de proporcionalidad, que evidentemente debe ser positiva ya que $y'(t) > 0$.

EJERCICIO 35 En ciertas situaciones se plantea determinar la relación entre algún estímulo físico y la relación correspondiente que se produce en el sujeto. Supongamos que la fuerza de un estímulo es s y que la intensidad de la reacción es una función de s, $\varphi(s)$. Algunos datos experimentales sugieren que la razón de cambio de la intensidad de la reacción con respecto al estímulo es directamente proporcional a la intensidad de la reacción e inversamente proporcional a la fuerza del estímulo. Resolver esta ecuación diferencial.

- La ecuación diferencial que modela a la situación planteada es

$$\varphi'(s) = k\varphi(s)\frac{1}{s}\,.$$

En este caso no estamos ante una ecuación diferencial autónoma, pero permite ser resuelta separando las variables

$$\int \frac{d\varphi(s)}{\varphi(s)} = \int \frac{k}{s}\, ds \quad \Rightarrow \quad \ln|\varphi(s)| = k\ln|s| + c\,.$$

Si despejamos el valor de la intensidad de la reacción

$$\ln\left|\frac{\varphi(s)}{s^k}\right| = c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(s) = s^k e^c\,, \quad c \in \mathbb{R}\ .}$$

EJERCICIO 36 Resolver la ecuación diferencial planteada en el Ejercicio 34.

- La ecuación diferencial es
$$\frac{dy}{dt} = k(B - y)\,,$$
donde k es la constante de proporcionalidad. Separando las variables
$$\frac{1}{B-y}dy = kdt\,,$$
e integrando
$$-\ln|B-y| = kt + c\,,$$
al ser $B - y > 0$, entonces podemos eliminar el valor absoluto. Por tanto
$$-\ln(B-y) = kt + c \quad \Rightarrow \quad \ln(B-y) = -kt - c$$
$$B - y = e^{-kt-c} = e^{-kt}e^{-c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = B - e^{-c}e^{-kt}}$$

EJERCICIO 37 Plantear y resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1.- **Una muestra de radio se desintegra a un ritmo que es proporcional a su tamaño.**

2.- **La razón a la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la del medio que lo rodea.**

- Sea $y(t)$ la cantidad de radio presente en el tiempo t. Según el enunciado
$$y'(t) = -rt\,,$$

con la constante r positiva. Una vez resuelta nos proporciona la solución $y(t) = e^{-rt+c}$. Si $y(0) = e^c$, entonces

$$\boxed{y(t) = y(0)e^{-rt}\,,}$$

que es la conocida fórmula de la desintegración radiactiva.

Para el segundo apartado, supondremos que $T(t)$ es la temperatura de un cuerpo en el tiempo t y M corresponde a la temperatura del medio. El enunciado nos permite escribir

$$T'(t) = k(T(t) - M)\,, \quad k > 0\,.$$

La ecuación diferencial anterior tiene por solución

$$\boxed{T(t) = M + e^{kt+c}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.}$$

EJERCICIO 38 Con base a la estimación de que hay 10.000 **millones de acres cultivables en la Tierra y que cada acre puede producir suficiente comida para alimentar a** 4 **personas, algunos demógrafos creen que la Tierra puede soportar una población de no más de** 40.000 **millones de personas. La población de la Tierra era aproximadamente de** 3.000 **millones en 1960 y de** 4.000 **millones en 1975. Si la población de la Tierra crece exponencialmente, ¿cuándo alcanzaría el límite teórico de** 40.000 **millones?.**

- Si $y(t)$ es el número de personas t años después del 1960, entonces $y(t) = y(0)e^{rt}$. Si tenemos en cuenta que $y(0) = 3000$ millones e $y(15) = 4000$ millones, entonces

$$4000 = 3000e^{15r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{15}\ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.01917\,.$$

Por tanto,

$$y(t) = 3000e^{0.01917t}\,,$$

y en consecuencia, el tiempo buscado lo encontramos resolviendo la ecuación $y(t) = 40000$. Es decir

$$40000 = 3000e^{0.0191788t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 135 \text{ años}\,.$$

EJERCICIO 39 Si unas vacas lecheras comen heno que contenga mucho yodo 131, su leche no se podrá beber. Supongamos que cierta cantidad de heno contiene 10 veces la cantidad máxima permitida de yodo 131. ¿Cuántos días deberá estar almacenado el heno antes de que se les pueda dar a comer a las vacas.? La vida media del yodo 131 es de 8 días.

- Sea $y(0)$ la cantidad de yodo 131 presente en el heno. Entonces la cantidad al tiempo t es $y(t) = y(0)e^{-rt}$ (t en días). La vida media del yodo 131 es de 8 días, entonces

$$y(0)e^{-8r} = 0.5y(0) \quad \Rightarrow \quad e^{-8r} = 0.5\,,$$

despejando, obtenemos $r \approx 0.087$. En consecuencia

$$y(t) = y(0)e^{-0.087t}\,.$$

A continuación buscamos el valor de t tal que $y(t) = 0.1y(0)$

$$y(0)e^{-0.087t} = 0.1y(0) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.1}{-0.087} \approx 26\,.$$

El heno debe estar almacenado 26 días para que la cantidad de yodo se reduzca a la décima parte.

EJERCICIO 40 Se encontró que un fragmento de pergamino tenía alrededor del $80\,\%$ del nivel de C-14 que se encuentra hoy en día en la materia viva. Estimar la edad del pergamino, sabiendo que la k del carbono vale 0.00012.

- Aplicando la fórmula de la desintegración radiactiva,

$$y(t) = y(0)e^{-rt} = y(0)e^{-0.00012t}\,,$$

como $y(t) = 0.8y(0)$

$$0.8y(0) = y(0)e^{-0.00012t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 1.900 \text{ años}\,.$$

EJERCICIO 41 Una sustancia radiactiva A se descompone según la ley $x(t) = x(0)e^{-\alpha t}$, transformándose en una nueva sustancia B, la cual, a su vez, se descompone a una velocidad $v_b = v_a - \alpha_1 y = \alpha x(t) - \alpha_1 y(t)$, ya que en cada instante los αx átomos que se descomponen de la primera sustancia se transforman en átomos de la segunda, la cuál pierde un número de átomos igual a $\alpha_1 y$. Suponiendo que en el instante inicial existiesen y_0 átomos de la segunda sustancia, expresar y en función del tiempo t. Como aplicación, determinar el número de átomos de "emanación de radio"que se forman en un día, si al empezar la transformación estuvieran en presencia de 5×10^5 átomos de radio y otros tantos de emanación de (radon), sabiendo que $\alpha = 1.26 \times 10^{-11}$ y $\alpha_1 = 2.1 \times 10^{-6}$.

- Del enunciado deducimos

$$v_B = \frac{dy}{dt} = \alpha x(t) - \alpha_1 y(t) = \alpha x(0)e^{-\alpha t} - \alpha_1 y(t)\,,$$

o bien

$$y'(t) + \alpha_1 y(t) = \alpha x(0) e^{-\alpha t} \,,$$

que es una ecuación lineal que tiene por factor integrante,

$$\mu(t) = e^{\int \alpha_1 dt} = e^{\alpha_1 t} \,.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante encontrado

$$e^{\alpha_1 t} y'(t) + \alpha_1 e^{\alpha_1 t} y(t) = e^{\alpha_1 t} \alpha x(0) e^{-\alpha t} \,,$$

que corresponde a

$$\left(y(t) e^{\alpha_1 t}\right)' = \alpha x(0) e^{(\alpha_1 - \alpha)t} \,.$$

La solución es

$$y(t) e^{\alpha_1 t} = \alpha x(0) \int e^{(\alpha_1 - \alpha)t} = \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha} e^{(\alpha_1 - \alpha)t} \,,$$

y despejando

$$y(t) = \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha} e^{-\alpha t} + k e^{-\alpha_1 t} \,.$$

- Ahora tenemos que calcular k a partir de la condición inicial.

$$y_0 = \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha} + k \quad \Rightarrow \quad k = y_0 - \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha} \,,$$

quedando la solución

$$\boxed{y(t) = \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha_1 t}\right) + y_0 e^{-\alpha_1 t} \,.}$$

- Por último, en el caso particular $x_0 = y_0 = 5$ y $\alpha = 1.26 \times 10^{-11}$, $\alpha_1 = 2.1 \times 10^{-6}$, se obtiene

$$y(24) \approx 400.000 \text{ átomos de emanación de radio}$$

EJERCICIO 42 La población de gaviotas en Norteamérica se ha estado duplicando cada trece años desde 1900. Proporcionar una ecuación diferencial que satisfaga $y(t)$, la población t años después de 1900. ¿Cuántas veces más gaviotas hay en 1993 que en 1900?.

- Supongamos que $y(t)$ sea la población de gaviotas en períodos de 13 años, y que $t = 0$ en 1900. Del enunciado deducimos

$$y(1) = 2y(0),\; y(2) = 2y(1) = 2^2 y(0),\; y(3) = 2y(2) = 2^3 y(0),\; ...,\; y(t) = 2^t y(0) \,.$$

Estamos ante el crecimiento exponencial

$$y(t) = 2^t y(0) = y(0) e^{\ln 2t} \,.$$

Si derivamos la expresión anterior obtenemos la respuesta a la primera de las preguntas

$$y'(t) = y(0) \ln 2 e^{\ln 2t} = \ln 2 y(t) \,.$$

- La población en 1993 será $y(t_1)$ con $t_1 = (1993 - 1990)/13 = 7.15$. Por tanto $y(7.15) = y(0)2^{7.15}$, la población de palomas en 1993 será $2^{7.15}$ veces la población en 1990.

EJERCICIO 43 Muchos científicos creen que han ocurrido cuatro glaciaciones en el último millón de años. Antes de que se conociera la técnica de fechado con carbono, los geólogos creían que el deshielo de la Cuarta Glaciación empezó hace 25000 años. En 1950, se encontraron troncos de antiguos abetos debajo de restos glaciares cercanos a Two Creeks, Wiscosin. Los geólogos determinaron que esos árboles habían caído por el avance de hielo durante la Cuarta Glaciación. La madera de los abetos derrumbados contenían el 27 % del nivel de C-14 que se encuentra en los árboles vivos. ¿Cuántos años hace que ocurrió la Cuarta Glaciación?.

- El modelo que debemos utilizar es el que describe la desintegración radiactiva del carbono 14. Si $y(t)$ es la cantidad de carbono 14 en el tiempo t, entonces

$$y(t) = y(0)e^{-0.00012t}\,.$$

Haciendo uso del enunciado sabemos que $y(t) = 0.27y(0)$, entonces

$$0.27y(0) = y(0)e^{-0.00012t}\,, \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\ln 0.27}{0.00012} \approx 10911\,\text{años}\,.$$

EJERCICIO 44 Cuando se ingiere estroncio-90 (^{90}Sr,) éste puede desplazar al calcio que se encuentra en los huesos. Después de desintegrarse, se convierte en un isótopo de kriptón (un gas inerte), y se difunde abandonando el hueso dejándolo poroso.

Supongamos que un hueso determinado contiene 20 mg. de ^{90}Sr, el cual tiene una vida media de 28 años. Escribir una ecuación que nos de la cantidad de ^{90}Sr que permanece en cualquier tiempo, y determinar su cantidad después de diez años. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la cantidad de ^{90}Sr sea de 7 mg.?

- Si $y(t)$ es la cantidad de ^{90}Sr para el año t, entonces $y(t) = 20e^{-rt}$. La constante de desintegración r la calculamos haciendo uso de la vida media de la sustancia,

$$\frac{y(0)}{2} = y(0)e^{-rt} = y(0)e^{-28r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\ln 2}{28} \approx 0.02476\,.$$

Por tanto, $y(t) = 20e^{-0.02476t}$. Después de diez años $y(10) = 15.6$ miligramos.

- Para terminar el ejercicio resolvemos la ecuación $y(t) = 7$,

$$7 = 20e^{-0.02476t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 42.4 \text{ años.}$$

EJERCICIO 45 Una infección común en el tracto urinario en los humanos es producido por la bacteria *Escherichia coli*. Generalmente la infección se hace patente cuando la colonia de bacterias alcanza una población alrededor de 10^8. La colonia duplica su tamaño cada 20 minutos. Cuando se vacía una vejiga llena (alrededor de un litro) se elimina alrededor del 90 % de las bacterias. Supongamos que al inicio de cierto período de tiempo, la vejiga y tracto urinario de una persona contiene 10^8 bacterias de *E. coli*. Durante un intervalo de T minutos la persona ingiere suficiente líquido para llenar la vejiga. Encontrar el valor de T tal que si se vacía la vejiga después de T minutos, alrededor de 10^8 bacterias permanecerán dentro del organismo. (Nota: Raras veces es posible eliminar una infección de *E. coli* por diuresis, sin utilizar medicamentos, bebiendo grandes cantidades de agua).

- Sea $y(t)$ la población de bacterias *E. coli* en el tiempo t (en minutos). Si suponemos que la población sigue la distribución exponencial $y(t) = y(0)e^{rt}$, entonces al ser $y(20) = 2y(0)$ implica que $r = \ln 2/20$. Por tanto,

$$y(t) = y(0)e^{\frac{\ln 2}{20}t} = y(0)2^{t/20}\,.$$

Teniendo en cuenta el enunciado, el número de bacterias que quedan en el tracto urinario después de T minutos viene dada por

$$y(T) = 10^8 \times 2^{T/20} \times 0.1\,.$$

y este número debe ser 10^8. En consecuencia

$$10^8 \times 2^{T/20} \times 0.1 = 10^8 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{20\ln 10}{\ln 2} \approx 66 \text{ minutos}\,.$$

EJERCICIO 46 En 1974 Estados Unidos tenía alrededor de 80 millones de litros de productos radiactivos de plantas nucleares y otros reactores nucleares. Los desechos fueron almacenados en distintos tipos de contenedores, y los contenedores fueron enterrados en el suelo o sumergidos en el océano. Los científicos piensan que se debe evitar que los desechos contaminen el resto del planeta hasta que más del 99.99 % de la radiactividad haya desaparecido. Si un cilindro de almacenamiento contiene productos de desecho cuya vida media es de 1500 años, ¿cuántos años debe sobrevivir el contenedor sin fugas.?

- Sea $y(t)$ la cantidad de residuos radiactivos en el tiempo t (en años). El modelo que debemos utilizar viene dado por $y(t) = y(0)e^{-rt}$, donde la constante de desintegración r se obtiene a partir del dato de la vida media.

$$y(t) = \frac{y(0)}{2} = y(0)e^{-1500r} \quad \Rightarrow \quad r \approx 0.001073.$$

Tenemos entonces que $y(t) = y(0)e^{-0.001073\,t}$, y deseamos encontrar el tiempo t que ha de transcurrir para que $y(t) = 0.0001y(0)$. Planteando la ecuación

$$0.0001y(0) = y(0)e^{-0.001073\,t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 8583 \text{ años}.$$

EJERCICIO 47 En 1981 se pescó un cierto número de percas de un año en Nueva Jersey, y se llevaron al otro lado del continente en vagones tanque de ferrocarril, para ser liberadas en la bahía de San Francisco. Solamente un total de 435 percas sobrevivieron a la dureza del viaje. Sin embargo, en 1989, la sola pesca comercial capturó 1.234.000 kilos de percas. Dado que el crecimiento de la población fue tan acelerado, es razonable suponer que obedeció a la ley de *Malthus* $dy(t)/dt = ay(t)$. Suponiendo que el peso promedio de una perca es de 3 kilos, y que en 1989 se capturó una de cada diez percas, determinar un límite inferior para la constante de crecimiento a.

- El número de percas después de t años vendrá dado por $y(t) = y(0)e^{rt}$. En primer lugar, el número de percas existentes en 1989 será de $1234000 \times 10/3 = 4113330$. Llevando este valor en $y(t)$ con $t = 8$ y $y(0) = 435$, obtenemos

$$4113330 = 435e^{8r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{4113330}{435}\right) = 1.1443\,.$$

EJERCICIO 48 Sea $y(t)$ la población de un cierto país en un tiempo t. Supongamos que la tasa de natalidad r y la de mortalidad s del país son constantes y que hay una tasa constante de inmigración m.

1.- **Explicar por qué la población satisface la ecuación diferencial**

$$\frac{dy}{dt} = (r-s)y(t) + m$$

2.- **Hallar $y(t)$.**

3.- **Si la población del país era 100 millones en 1990, con una tasa de crecimiento (tasa de natalidad menos tasa de mortalidad) del 2 %, y si se permite la inmigración a la tasa de 300.000 personas por año, ¿cuál será la población en el año 2000?.**

- El ritmo con el que se modifica la población en cada momento es igual a los que se incorporan $ry(t)+m$ menos los que abandonan $sy(t)$ la población. Es decir,

$$y'(t) = ry(t) + m - sy(t) = (r-s)y(t) + m = ky(t) + m\,,$$

siendo $k>0$ si la población aumenta y $k<0$ en caso contrario. Estamos ante una ecuación diferencial lineal

$$y'(t) - ky(t) = m\,,$$

que posee a $\mu(t) = e^{-kt}$ como factor integrante. Por tanto

$$\Big(y(t)\,e^{-kt}\Big)' = me^{-kt} \quad \Rightarrow \quad y(t)e^{-kt} = -\frac{m}{k}e^{-kt} + c\,,$$

o bien

$$\boxed{y(t) = -\frac{m}{k} + ce^{kt}\,, \quad c \in \mathbb{R}} \tag{2.1}$$

- Para la segunda parte del ejercicio supondremos $t=0$ en 1990, y en consecuencia es necesario conocer $y(10)$. Si sustituimos $k=0.02$, $m=0.3$ millones en (2.1)

$$y(t) = ce^{0.02t} - 15\,,$$

podemos encontrar el valor de $c=115$ haciendo uso del dato $y(0)=100$. Ahora

$$y(t) = 115e^{kt} - 15 \quad \Rightarrow \quad y(10) = 115e^{0.2} - 15 \approx 125\,.$$

EJERCICIO 49 El suministro de glucosa al torrente sanguíneo es una técnica médica importante. Para estudiar este proceso, definimos $y(t)$ como la cantidad de glucosa presente en la sangre de un paciente en el tiempo t. Supongamos que la glucosa se suministra al sistema sanguíneo a una tasa constante de k gramos por minuto. Al mismo tiempo la glucosa se transforma y se separa de la sangre a una tasa proporcional a la cantidad de glucosa presente.

- La función $y(t)$ satisface la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = k - ay\,,$$

donde a es una constante positiva. Resolviendo esta ecuación diferencial

$$\boxed{y(t) = \frac{k}{a} + \left(y(0) - \frac{k}{a}\right)e^{-at}\,.}$$

Cuando $t \to \infty$, la concentración de glucosa tiende al valor de equilibrio k/a.

EJERCICIO 50 Una familia de salmones que habita en las costas de Alaska se rige por la ley malthusiana de crecimiento de población

$$dy(t)/dt = 0.003y(t) \ ,$$

donde t se mide en minutos. En el tiempo $t = 0$ un grupo de tiburones se establece en esas aguas y empieza a atacar a los peces. La tasa a la cual el tiburón mata a los salmones es de $0.001y^2(t)$, donde $y(t)$ es la población de salmones en el tiempo t. Más aún, dado que un elemento indeseable se incorporó a su hábitat 0.002 salmones por minuto abandonan las aguas en Alaska.

1.- **Modificar la ley de Malthus de crecimiento de población para tener en cuenta estos factores.**

2.- **Supongamos que en el tiempo $t = 0$ hay un millón de salmones. Calcular la población $y(t)$. ¿Qué pasa cuando $t \to \infty$?.**

- Si consideramos $y'(t) = 0.003y(t)$, entonces $y(t) = y(0)e^{0.003t}$. La modificación supone que
$$y'(t) = 0.003y(t) - 0.001y^2(t) - 0.002\,.$$

- Para resolver la ecuación diferencial anterior, descomponemos
$$\frac{dy(t)}{0.003y(t) - 0.001y^2(t) - 0.002} = dt\,,$$
$$\frac{dy(t)}{(y(t)-2)(y(t)-1)} = \frac{1}{y(t)-2} + \frac{-1}{y(t)-1}\,,$$
integrando
$$\ln\left|\frac{y(t)-2}{y(t)-1}\right| = -0.001t + \ln c\,,$$
despejando
$$y(t) = \frac{2 - ce^{-0.001t}}{1 - ce^{-0.001t}}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

- Para $t = 0$ tenemos
$$c = \frac{y(0)-2}{y(0)-1} = \frac{999.998}{999.999}\,,$$
por lo tanto
$$\boxed{y(t) = \frac{1.999.998 - 999.998e^{-0.001t}}{999.999 - 999.998e^{-0.001t}}\,,}$$
si hacemos tender $t \to \infty$, entonces $y(t) \to 2$.

EJERCICIO 51 Supongamos que el precio $p(t)$ de una determinada especie animal, varía de modo que su razón de cambio con respecto al tiempo es proporcional a la escasez $D - S$ donde $D(p)$ y $S(p)$ son las funciones de demanda y de oferta,

$$D(p) = 8 - 2p \qquad S(p) = 2 + p\,,$$

1.- **Si el precio es de 1000 euros cuando $t = 0$ y 600 euros cuando $t = 2$, calcular $p(t)$**

2.- **Determinar que le sucede a $p(t)$ a "largo plazo"**

- Es inmediato deducir que

$$p'(t) = k(D - S) = 6 - 3p\,, \quad p(0) = 1000\,, \quad p(2) = 600\,,$$

que es una ecuación diferencial de variables separables

$$\int \frac{dp}{3(2-p)} = \int k\,dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3}\ln|2-p| = kt + c_1\,,$$

o bien

$$\ln|2-p| = -3kt + c_2 \quad \Rightarrow \quad p(t) = 2 - e^{c_2}e^{-3kt}\,.$$

Ahora, teniendo en cuenta $p(0) = 1000$, entonces $e^{c_2} = -998$. Por otro lado, $p(2) = 600$ obliga a que $k \approx 0.085$. Por tanto, la ecuación buscada es

$$\boxed{p(t) = 2 + 998e^{-0.255\,t}\,.}$$

Es evidente, que $p(t) \to 2$ cuando $t \to \infty$.

EJERCICIO 52 El ritmo al que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional a la cantidad de residentes que han sido infectados y al número de residentes propensos a la enfermedad que no han sido infectados. Expresar el número de residentes que han sido infectados como una función del tiempo.

- Sea $y(t)$ el número de residentes que han sido infectados en el tiempo t, y K la cantidad total de residentes propensos a la enfermedad. Entonces, la cantidad de residentes propensos que no han sido infectados es $K - y$, y la ecuación diferencial que describe la propagación de la epidemia es

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(K - y) = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)\,, \quad r = \alpha K\,.$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separadas cuya solución es

$$\int \frac{1}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)}\,dy = \int r dt\,,$$

que integrando obtenemos

$$\ln|y| - \ln|1-y/K| = rt + C\,,$$

o bien

$$\ln\left(\frac{Ky}{K-y}\right) = rt + C \qquad \text{ya que } y>0\,,\quad K>y\,,$$

despejando y

$$\frac{Ky}{K-y} = e^{rt+C} = A_1 e^{rt}\,,$$

siendo $A_1 = e^C$. Simplificando

$$y(t) = \frac{KA_1e^{rt}}{K + A_1e^{rt}}$$

Dividimos numerador y denominador por A_1e^{rt} y llamamos $A = K/A_1$.

$$\boxed{y(t) = \frac{K}{1+Ae^{-rt}}\,,}$$

que corresponde a la ecuación general de una curva logística.

EJERCICIO 53 Los psicólogos creen que cuando a una persona se le pide que recuerde una serie de hechos, el número de hechos recordados después de t minutos está dado por una función de la forma

$$y(t) = A(1-e^{-rt})$$

donde r es una constante positiva y A es el número total de hechos importantes almacenados en la memoria de la persona.

1.- **Trazar la gráfica de $y(t)$.**

2.- **¿Qué le sucede a la gráfica cuando t crece sin límite?. Interpretar el resultado.**

- La función $y(t)$ vale cero para $t=0$ y tiende al valor A cuando t tiende hacia infinito. Además, al ser $y'(t) = rAe^{-rt}$, para valores de $t>0$ siempre será creciente. a continuación utilizamos el programa Mathematica® para hacer la representación gráfica.

```
A := 100
r := 0.75
y[t_] := A * (1 − Exp[−r × t])
Plot[y[t], {t, 0, 15}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]]
```

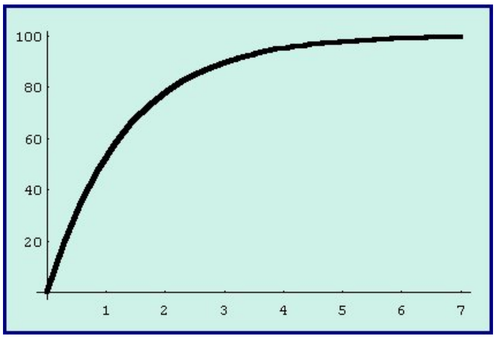


Figura 2.1. Representación gráfica de $y(t) = 100(1 - e^{-0.75t})$.

La altura de la gráfica tiende al valor A porque el número de hechos recordados se aproxima al número total de hechos relevantes en la memoria de la persona.

EJERCICIO 54 Los registros de salud pública indican que t semanas después del brote de cierta clase de gripe, aproximadamente

$$y(t) = \frac{2}{1 + 3e^{-0.8t}}$$

miles de personas han contraído la enfermedad.

1.- **Trazar una gráfica de $y(t)$.**

2.- **¿Cuántas personas tenían la enfermedad al comienzo?.**

3.- **¿Cuántas habían contraído la enfermedad al final de la tercera semana?.**

4.- **Si la tendencia continúa, aproximadamente ¿cuántas personas en total contraerán la enfermedad?.**

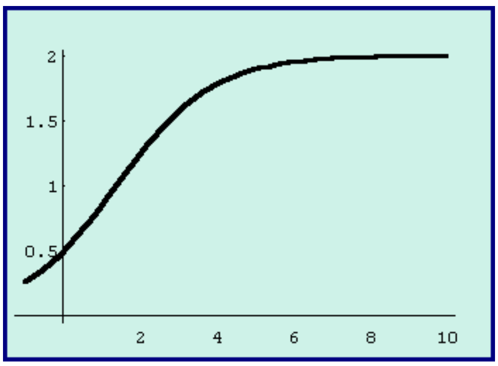


Figura 2.2. Representación gráfica de $y(t) = \frac{2}{1+3e^{-0.8t}}$

- Es inmediato comprobar que $y(0) = 0.5$, $y(3) = 1.572$ y que $y(t)$ tiende hacia 2 cuando t tiende hacia infinito.

EJERCICIO 55 Una epidemia se propaga en una comunidad de manera que t semanas después del brote, el número de personas infectadas está dado por una función de la forma:

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}, \tag{2.2}$$

donde K es el número de residentes en la comunidad que son propensos a contraer la enfermedad. Si $1/5$ de los residentes propensos estaban infectados al principio y $1/2$ de ellos habían sido infectados al final de la cuarta semana, ¿qué fracción de residentes propensos a la enfermedad habrá sido infectada al final de la octava semana.?

- Sustituimos en (2.2)) los valores $y(0) = K/5$, $y(4) = K/2$, y deducimos que $A = 4$ y $r = (\ln 4)/4$. El número de personas infectadas t semanas después viene dado por

$$y(t) = \frac{K}{1 + 4e^{-\frac{\ln 4}{4}t}} \quad .$$

Al cabo de 8 semanas la fracción de residentes propensos a la enfermedad será $\frac{4K}{5}$.

EJERCICIO 56 Supóngase que un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Si se supone que la rapidez con que el virus se propaga es proporcional no sólo al número y de estudiantes contagiados, sino también, al número de alumnos no contagiados. Determinar el número de estudiantes contagiados después de 6 días, si además se observa que después de 4 días $y(4) = 50$.

- Suponiendo que nadie sale del campus durante el transcurso de la enfermedad, se debe resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1000 - y) = ry\left(1 - \frac{y}{1000}\right)\,, \qquad y(0) = 1\,.$$

que tiene por solución:

$$y(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-rt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-rt}}\,,$$

donde el valor $A = 999$ se ha obtenido de la condición $y(0) = 1$. Ahora bien, usando el hecho $y(4) = 50$ determinamos el valor de r en la expresión anterior

$$50 == \frac{1000}{1 + 999e^{-4r}} \quad \Rightarrow \quad r = 0.9906\,,\,,$$

con lo cual

$$y(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}\,,$$

finalmente

$$y(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9436}} = 276 \quad \text{estudiantes}\,.$$

EJERCICIO 57 Una población de bacterias $y(t)$ crece en función del tiempo, medido en horas, siguiendo la ley logística. Es conocido que, inicialmente, el número de individuos es 100, que el máximo que puede soportar el medio es 10^5 individuos y que al final de la primera hora la población alcanzó unos efectivos de 120.

Se desea conocer la población al cabo de las 4 horas y cuanto tiempo tendrá que transcurrir para que se alcance la mitad del número de individuos que forman la capacidad máxima.

- Sabemos que si la población sigue un modelo logístico, el número de bacterias al cabo de t horas viene dado por

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}\,,$$

donde K es la capacidad de carga del sistema. En nuestro caso $K = 10^5$. Los parámetros A y r los obtenemos de

$$y(0) = 100 = \frac{10^5}{1 + A} \quad \Rightarrow \quad A = 999\,.$$

y de la ecuación,

$$y(1) = 120 = \frac{10^5}{1 + 999e^{-r}} \quad \Rightarrow \quad r = 0.18\,.$$

En consecuencia

$$\boxed{y(t) = \frac{10^5}{1 + 999e^{-0.18t}}\,.} \tag{2.3}$$

La respuesta a la primera de las preguntas es inmediata, ya que $y(4) \approx 205$ bacterias.

- Ahora, necesitamos conocer el tiempo que ha de transcurrir para que $y(t) = K/2 = 10^5/2$. Sustituyendo en (2.3)

$$\frac{10^5}{2} = \frac{10^5}{1 + 999e^{-0.18t}} \quad \Rightarrow \quad t \approx 38 \text{ horas.}$$

EJERCICIO 58 Se observa que en un medio de cultivo apropiado, el crecimiento de la *Escherichia Coli* sigue el modelo logístico (t en días),

$$y(t) = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}} = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}},$$

alcanzando la saturación en 6×10^6 células/ml. En modelos de este tipo la tasa de crecimiento instantánea viene dada por $\alpha(t) = y'(t)/y(t)$, y disminuye a medida que aumentan los efectivos de la población. Suponiendo que se parte de un hipotético número y_0 de efectivos y que

$$\alpha(4) = 0.325, \quad \alpha(6) = 0.054 .$$

1.- **Determinar el valor de r, sabiendo que $y(6) = 5.5 \times 10^6$ células/ml.**

2.- **Calcular el tamaño de la población al cabo de 4 días y al iniciar la experiencia.**

- Del enunciado deducimos que

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{1}{K}y(t)\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = r\left(1 - \frac{1}{K}y(t)\right).$$

Sustituyendo

$$\alpha(6) = 0.054 = r\left(1 - \frac{5.5 \times 10^6}{6 \times 10^6})\right) \quad \Rightarrow \quad r \approx 0.65 .$$

- Por otro lado,

$$\alpha(4) = 0.325 = 0.65\left(1 - \frac{1}{6 \times 10^6}y(4)\right) \quad \Rightarrow \quad y(4) \approx 3 \times 10^6 .$$

Finalmente

$$y(t) = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}} \quad \Rightarrow \quad y(4) = 3 \times 10^6 = \frac{6 \times 10^6 y_0}{y_0 + (6 \times 10^6 - y_0)e^{-0.65\times4}},$$

que da un valor de $y_0 \approx 414831$ células/ml.

EJERCICIO 59 **El número de células que componen un tumor es, inicialmente, 10^4. El crecimiento de dicho tumor puede responder a una de las dos leyes siguientes:**

$$\begin{array}{ll} y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{1}{k}y(t)\right)\,, & \textbf{Logística} \\ y'(t) = re^{-at}y(t)\,, & \textbf{de Gompertz}\ , \end{array}$$

siendo $y(t)$ el número de células para t medido en días; $r = 0.2$, $k = 22\times 10^7$ y $a = 0.02$ una constante que retrasa el crecimiento en el segundo modelo.

1.- **Calcular la expresión de $y(t)$ en los dos modelos, siendo el instante inicial $t_0 = 0$.**

2.- **Comprobar que existe un tope poblacional para el segundo modelo, cuyo valor numérico coincide con el del primero de ellos.**

3.- **Es conocido que para este tipo de tumores la velocidad de crecimiento es máxima cuando $t = 50$ días. Calcular en los dos modelos los efectivos en dicho instante. Establecer cuál de los dos modelos, y por qué, describe el comportamiento previsto.**

- En primer lugar resolvemos el problema de valores iniciales

$$y'(t) = 0.2y(t)\left(1 - \frac{1}{22\times 10^7}\,y(t)\right)\,,\quad y(0) = 10^4\,.$$

Esta ecuación diferencial es de variables separables

$$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{1}{22\times 10^7}y\right)} = \int 0.2dt \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{y} + \int\frac{\frac{1}{22\times 10^7}}{1 - \frac{1}{22\times 10^7}y}\,dy = 0.2t + c\,.$$

Integrando

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{1}{22\times 10^7}y\right| = 0.2t + c \quad\Rightarrow\quad \ln\left|\frac{y}{1 - \frac{1}{22\times 10^7}y}\right| = 0.2t + c\,,$$

despejando

$$y = e^{0.2t+c}\left(1 - \frac{1}{22\times 10^7}y\right) \quad\Rightarrow\quad y\left(1 + \frac{1}{22\times 10^7}e^{0.2t+c}\right) = e^{0.2t+c}\,.$$

Es decir,

$$y(t) = \frac{e^{0.2t+c}}{1 + \frac{1}{22\times 10^7}e^{0.2t+c}} = \frac{22\times 10^7}{1 + 22\times 10^7\,e^{-(0.2t+c)}}\,.$$

Al ser $y(0) = 10^4$, sustituimos en la expresión anterior

$$10^4 = \frac{22\times 10^7}{1 + 22\times 10^7\,e^{-c}} \quad\Rightarrow\quad e^{-c} = 9999\times 10^{-8}\,.$$

La respuesta a nuestro problema será el modelo logístico:

$$\boxed{y(t)=\frac{22\times 10^7}{1+22\times 10^7\times 9999\times 10^{-8}e^{-0.2t}}=\frac{22\times 10^7}{1+21998e^{-0.2t}}\,.} \tag{2.4}$$

Ahora necesitamos resolver el segundo de los problemas de valores iniciales

$$y'(t)=0.2e^{-0.02t}y(t)\,,\quad y(0)=10^4\,.$$

Separando las variables, e integrando

$$\frac{y'}{y}=0.2e^{-0.02t}\quad\Rightarrow\quad \ln|y|=\int 0.2e^{-0.02t}dt=-10e^{-0.02t}+k\,,$$

despejando el valor de la población de células

$$y(t)=e^{-10e^{-0.02t}+k}\,.$$

Para determinar el valor de k tenemos en cuenta que $y(0)=10^4$.

$$10^4=e^{-10}e^k\quad\Rightarrow\quad e^k=10^4\,e^{10}\,.$$

Finalmente

$$\boxed{y(t)=10^4e^{10(1-e^{-0.02t})}\,.} \tag{2.5}$$

- La respuesta al segundo de los apartados es inmediata

$$\lim_{t\to\infty}10^4e^{10(1-e^{-0.02t})}=10^4\times e^{10}\approx 22\times 10^7\,.$$

Es decir, existe un límite poblacional que coincide con la capacidad de carga del modelo logístico.

- En cuanto al tercero de los apartados,

$$y_1(50)=\frac{22\times 10^7}{1+21998e^{-10}}\approx 11\times 10^7=\frac{k}{2}$$

$$y_2(50)=10^4e^{10(1-e^{-1})}=10^4\times 556.6\,.$$

Por último, calculamos para el segundo de los modelos el momento en el que la velocidad de crecimiento del tumor es máxima. Sabemos que la velocidad viene dada por

$$v(t)=y'(t)=re^{-at}y\,,$$

y el máximo se alcanza en el punto que anula su derivada (que coincide con el punto de inflexión de $y(t)$),

$$v'=-are^{-at}y+re^{-at}y'=-are^{-at}y+re^{-at}(re^{-at}y)=rye^{-at}(-a+re^{-at})=0$$

Es decir,

$$re^{-at}=a\quad\Rightarrow\quad t=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{r}\right)\approx 115\quad\text{días}\,.$$

Luego, para la segunda de las leyes el máximo se alcanza a los 115 días (puede verse que $v''(115)<0$).

EJERCICIO 60 Sea $y(t)$ el número de individuos de cierta especie animal. Supongamos que $y(t)$ cumple la siguiente ecuación logística de crecimiento,

$$\frac{dy}{dt} = 0.2y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{200}\right), \quad y(0) = 150\,. \tag{2.6}$$

1.- **¿Es la ecuación diferencial (2.6) de variables separables?. ¿Es (2.6) autónoma?. ¿Es (2.6) lineal.?**

2.- **Sin resolver la ecuación diferencial, dibujar de forma aproximada $y(t)$.**

3.- **Estudiar el comportamiento a largo plazo de la población.**

4.- **Comprobar que la solución es de la forma**

$$y(t) = \frac{e^{0.2t}}{A + Be^{0.2t}}\,,$$

y encontrar los valores de A y B.

5.- **¿Donde se encuentra el punto de inflexión de $y(t)$?.**

- Es evidente que esta ecuación diferencial es autónoma ya que la variable tiempo t no se encuentra en el segundo miembro de (2.6). Además, se trata de una ecuación de variables separables (toda ecuación autónoma lo es). Sin embargo, (2.6) no es lineal debido a la presencia del término $y^2(t)$. La función $y(t)$ es aproximadamente de la forma que indica la Figura 2.3.

- En el gráfico puede verse que la población tiende a estabilizarse en $y(t) = 200$, que es la capacidad de carga del sistema.

  Para resolver (2.6), separamos las variables

$$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{200}\right)} = \int 0.2dt\,. \tag{2.7}$$

  La primera de las integrales es racional con raíces reales simples en el denominador. Podemos descomponerla en

$$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{200}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{200 - y}\right) dy\,,$$

  cuya solución es

$$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{200}\right)} = \ln\left|\frac{y}{200 - y}\right| + C_1\,. \tag{2.8}$$

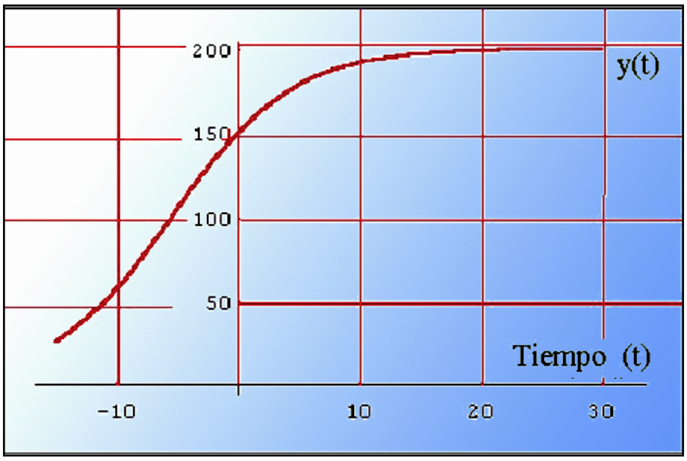


Figura 2.3.

La segunda de las integrales vale

$$\int 0.2dt = 0.2t + C_2 \,. \tag{2.9}$$

Llevando (2.8) y (2.9) en (2.7)

$$\ln\left|\frac{y}{200-y}\right| = 0.2t + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{200Ke^{0.2t}}{1+Ke^{0.2t}}\,,$$

con $K = e^C$.

Para calcular la constante K hacemos uso del dato $y(0) = 150$

$$150 = \frac{200K}{1+K} \quad \Rightarrow \quad K = 3\,.$$

- Finalmente

$$y(t) = \frac{600e^{0.2t}}{1+2e^{0.2t}} = \frac{e^{0.2t}}{\frac{1}{600}+\frac{1}{200}e^{0.2t}} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{600}\,,\, B = \frac{1}{200}\,.$$

- Para encontrar el punto de inflexión de $y(t)$ encontramos su derivada segunda,

$$y''(t) = \left(0.2\left(1-\frac{y}{200}\right) + 0.2y\left(-\frac{1}{200}\right)\right) y'(t)\,,$$

la cual se anula cuando

$$0.2\left(1-\frac{y}{200}\right) + 0.2y\left(-\frac{1}{200}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.2 - 0.4\frac{y}{200} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 100\,.$$

Observemos que el valor obtenido corresponde a la mitad de la capacidad de carga encontrada.

EJERCICIO 61 Supongamos que los recursos mundiales sólo proporcionan alimento suficiente para seis mil millones de seres humanos. La población mundial fue de 1.6 mil millones en 1900 y de 2.4 mil millones en 1950. Usando la ecuación logística, averiguar cual será la población mundial en el año 2000.

- Si $y(t)$ es el número de personas en el año t, entonces

$$y(t) = \frac{6 \times 10^9}{1 + Ae^{-rt}}\,.$$

Como conocemos la población en 1900 que corresponde al tiempo $t = 0$, y en 1950

$$\begin{array}{lll} y(0) = 1.6 \times 10^6 = \frac{6\times 10^9}{1+A} & \Rightarrow & A = 624 \\ y(50) = 2.4 \times 10^6 = \frac{6\times 10^9}{1+624e^{-50r}} & \Rightarrow & r \approx 0.0038\,. \end{array}$$

Es decir

$$\boxed{y(t) = \frac{6 \times 10^9}{1 + 624e^{-0.038t}}\,,}$$

que nos permite encontrar el valor deseado. La población en el año 2000 será de $y(100) \approx 4.01 \times 10^8$ personas.

EJERCICIO 62 En la ecuación logística, si la capacidad de carga es $K = 10^5$, $y(0) = 100$, $y(1) = 120$, calcular las coordenadas del punto de inflexión de la curva de efectivos de la población.

- Es conocido que si $y(t)$ sigue una ley logística, entonces

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}} = \frac{10^5}{1 + Ae^{-rt}}\,.$$

Si sustituimos los valores $y(0) = 100$, $y(1) = 120$, obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 = \frac{10^5}{1+A} \\ \\ 120 = \frac{10^5}{1+Ae^{-r}}\,. \end{array} \right.$$

De la primera de las ecuaciones deducimos $A = 999$. Llevando este valor en la segunda ecuación, podemos despejar el valor de $r \approx 0.1825$. El modelo logístico vendrá dado por

$$y(t) = \frac{10^5}{1 + 999e^{-0.1825t}}\,.$$

- Por otro lado, sabemos que la población crece con mayor rapidez en el punto de inflexión de la curva que representa a $y(t)$. Sabemos que dicho punto tiene de coordenadas $(t_1, y(t_1)) = (t_1, K/2)$. Llevando estos valores en $y(t)$

$$\frac{10^5}{2} = \frac{10^5}{1 + 999e^{-0.1825t_1}} \quad \Rightarrow \quad e^{-0.1825t} = \frac{1}{999}\,,$$

  y despejando

$$t_1 = -\frac{1}{0.1825}\ln\left(\frac{1}{999}\right) \approx 37.8\,.$$

  Las coordenadas pedidas son $(37.8,\ 10^5/2)$.

EJERCICIO 63 Para describir el crecimiento de ciertas poblaciones se utiliza en biología la ecuación de crecimiento de Gompertz

$$y' = -ay\ln(\frac{y}{b})\,, \tag{2.10}$$

donde a y b son constantes positivas. Encontrar la forma general de las soluciones de esta ecuación.

- La ecuación diferencial (2.10) se simplifica con el cambio

$$\ln(\frac{y}{b}) = z \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = e^z \quad \Rightarrow \quad y = be^z\,. \tag{2.11}$$

  Si sustituimos (2.11) en (2.10) y simplificamos

$$z' = -az \quad \Rightarrow \quad z = e^{-at+k}\,,$$

  o bien

$$\ln(\frac{y}{b}) = e^{-at+k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = be^{e^{-at+k}}\,.}$$

EJERCICIO 64 Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire. Si la temperatura del aire es de 20^0 C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100^0 C hasta 60^0 C, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30^0 C?.

- Si $T(t)$ representa la temperatura en grados centígrados del cuerpo en el minuto t, entonces la ecuación diferencial que modela a la situación planteada es

$$T'(t) = k(T(t) - T_0) = k(T(t) - 20)\,.$$

Es fácil comprobar que la solución de esta ecuación es de la forma

$$T(t) = 20 + e^c e^{kt}\,.$$

Si tenemos en cuenta que $T(0) = 100$, entonces $e^c = 80$ y en este caso

$$T(t) = 20 + 80e^{kt}\,.$$

Por otro lado, $T(20) = 60$, sustituyendo

$$60 = 20 + 80e^{kt} \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\ln 2}{20} \approx -0.03465\,.$$

Finalmente

$$T(t) = 20 + 80e^{-0.03465t}\,.$$

La respuesta a la pregunta planteada se obtiene resolviendo la ecuación $30 = T(t)$. En efecto,

$$30 = 20 + 80e^{-0.03465t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 8}{0.03465} \approx 60 \ \text{minutos.}$$

EJERCICIO 65 Supongamos que estamos calentando un cultivo de *E. coli* a 100^{o}C, en una habitación que se encuentra a una temperatura de 22^{o}C, y comprobamos que a los 5 minutos la temperatura del cultivo es de 93^{o}C. Queremos inocular el cultivo cuando se alcancen los 40^{o}C.

Sea $T(t)$ la temperatura del cultivo. Si suponemos que se cumple la ley de enfriamiento de Newton, encontrar la ecuación diferencial que modeliza la situación anterior y resolverla.

Encontrar cuanto tiempo es necesario que transcurra para inocular el cultivo. Dibujar la gráfica de $T(t)$ para la primera hora.

- La ecuación diferencial pedida es

$$T'(t) = k(T(t) - 22), \quad k < 0\,,$$

que es de variables separables

$$\int \frac{dT(t)}{T(t) - 22} = \int k dt \quad \Rightarrow \quad T(t) = 22 + e^{kt+c}\,.$$

Al ser $T(0) = 100$, entonces $e^c = 78$ y en consecuencia

$$T(t) = 22 + 78e^{kt}\,, \quad k < 0\,.$$

Como una vez transcurrido 5 minutos la temperatura es de 93 grados

$$93 = 22 + 78e^{5k} \quad \Rightarrow \quad k = -0.0188\,,$$

y finalmente

$$\boxed{T(t) = 22 + 78e^{-0.0188t}\,.}$$

- El tiempo que ha de pasar para que la temperatura sea de 40^{o}C es

$$40 = 22 + 78e^{-0.0188t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 78 \text{ minutos.}$$

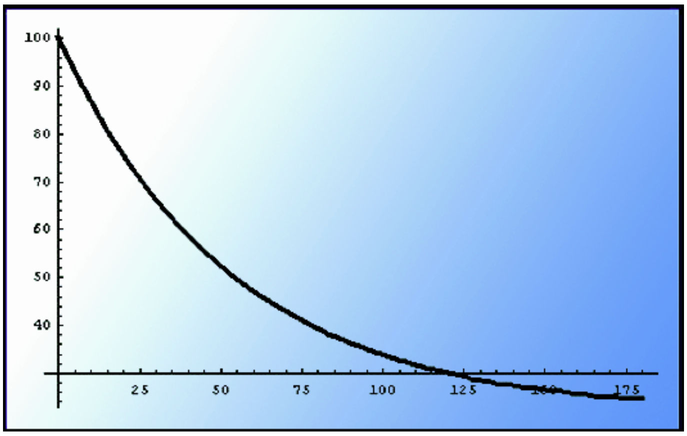


Figura 2.4.

Como podemos apreciar hacen falta aproximadamente 78 minutos para que la temperatura sea de 40^{o}C, mientras que al cabo de una hora $T(60) \approx 47^o$C.

EJERCICIO 66 Los residentes en cierto pueblo han votado para acabar con la fluorización de su reserva de agua. La presa local tiene actualmente 200 millones de litros de agua fluorada, que contiene 1.600 kilos de fluoruro. El agua fluorada fluye de la presa a un ritmo de 4 millones de litros por día y se reemplaza al mismo ritmo por agua no fluorada. En todo momento, el fluoruro restante está distribuido de manera uniforme en la presa. Expresar la cantidad de fluoruro existente en la presa como una función del tiempo.

- El ritmo de cambio del fluoruro con respecto al tiempo es igual a la concentración de fluoruro en el agua multiplicada por el ritmo de flujo de agua fluorada. Si $y(t)$ es el número de kilos de fluoruro en la represa después de t días, entonces $y'(t)$ será el ritmo de cambio del fluoruro con respecto al tiempo. La concentración de fluoruro en el agua, vale el número de kilos de fluoruro en la presa (y), dividido por el número de millones de litros de agua en la presa (200). Por último, el ritmo de agua fluorada es de -4 millones de litros por día.

  Como el ritmo de cambio del fluoruro en la presa es igual al ritmo de entrada menos el ritmo de salida, se obtiene que

$$\frac{dy}{dt} = 0 - \frac{y}{200}(4) = -\frac{y}{50}\,.$$

  Resolviendo esta ecuación de variables separadas obtenemos

$$y(t) = y(0)\, e^{-\frac{t}{50}} \quad \text{donde} \quad y(0) = e^{c}\,,$$

finalmente

$$\boxed{y(t) = 1600e^{-\frac{t}{50}}}\,,$$

es decir, la cantidad de fluoruro en la presa decrece exponencialmente.

EJERCICIO 67 Un tanque contiene 20 kilos de sal disueltas en 50 litros de agua. Supongamos que 3 litros de salmuera que contiene 2 kilos de sal disuelta por litro fluyen hacia el tanque cada minuto y que la mezcla (que se mantiene uniforme al agitarla) sale del tanque al ritmo de 2 litros por minuto. Hallar una ecuación para saber la cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.

- Sea $y(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en el minuto t. Como 3 litros de salmuera fluyen hacia el tanque cada minuto y cada litro contiene 2 kilos de sal, entonces $3 \times 2 = 6$ kilos de sal fluyen hacia el tanque cada minuto. Para hallar el número de kilos de sal que fluyen desde el tanque cada minuto, observemos que, en el tiempo t, hay $y(t)$ kilos de sal y $50 + (3 - 2)t = 50 + t$ litros de solución en el tanque (porque hay un incremento de sal en la solución 1 litro de solución cada minuto). Así, la concentración de sal en la solución en el momento es $y(t)/(50 + t)$ kilos por litro, y la sal sale del tanque al ritmo

  $$\left(\frac{y(t)}{50+t} \text{ kilos/litro}\right)(2 \text{ litros /minuto}) = \frac{2y(t)}{50+t} \text{ kilos/minuto}\,.$$

  Se concluye que el ritmo de cambio neto $y'(t)$ de sal en el tanque está dado por

  $$\frac{dy}{dt} = 6 - \frac{2y}{50+t}\,,$$

  que podemos escribirla como

  $$y'(t) + \frac{2}{50+t}y(t) = 6\,,$$

  que es una ecuación diferencial lineal de primer orden con

  $$p(t) = \frac{2}{50+t}\,, \qquad g(t) = 6\,,$$

  cuya solución general es

  $$y(t) = 2(50+t) + \frac{c}{(50+t)^2}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

  Para calcular c, observemos que en principio hay 20 kilos de sal en el tanque

  $$20 = y(0) = 2(50+0) + \frac{c}{(50+0)^2} \Rightarrow c = -80(50)^2$$

  $$\boxed{y(t) = 2(50+t) - \frac{80(50)^2}{(50+t)^2}}$$

- Ahora veremos que también puede ser simulado utilizando `Vensim`®. La Figura 2.5 muestra el diagrama causal del modelo.

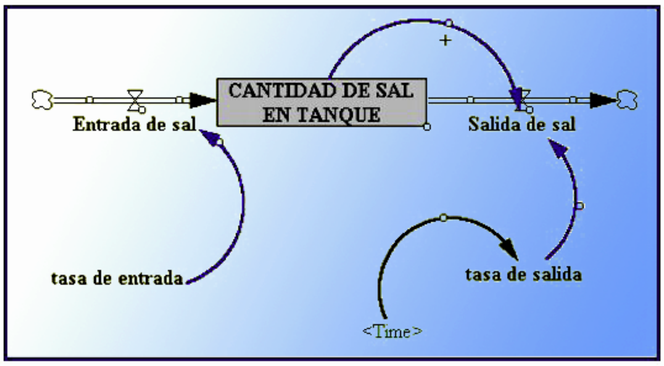


Figura 2.5.

Las ecuaciones que definen el modelo son:

```
CANTIDAD DE SAL EN TANQUE = INTEG(Entrada de sal − Salida de sal)
Valor inicial = 20
Unidades : Kilos

Entrada de sal = tasa de entrada
Unidades : Kilos/Minute

Salida de sal = CANTIDAD DE SAL EN TANQUE × tasa de salida
Unidades : Kilos/Minute

tasa de entrada = 6
Unidades : 1/Minute

tasa de salida = 2/(50 + Time)
Unidades = 1/Minute
```

t	$S(t)$	t	$S(t)$	t	$S(t)$	t	$S(t)$
1	25.2	25	115.16	50	180.6	75	237.66
5	44.25	30	129.46	55	192.43	80	248.6
10	65.01	35	143.01	60	204.01	85	259.44
15	83.33	40	155.97	65	215.39	90	270.19
20	99.89	45	168.47	70	226.60	95	280.86

Tabla 2.1

Una vez que ejecutamos el programa podemos ver la simulación en forma numérica (Tabla 2.1), o bien gráficamente (Figura 2.6)

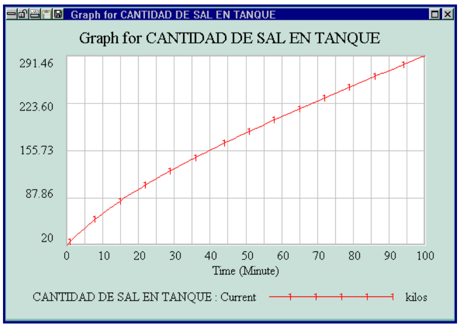


Figura 2.6

Puede comprobarse que dicha gráfica corresponde a la función solución

$$S(t) = 2(50+t) - \frac{80 \times 50^2}{(50+t)^2}$$

EJERCICIO 68 Un depósito de 50 litros contiene una solución compuesta por un 90 % de agua y 10 % de alcohol. Mediante un tubo se introduce en el depósito una segunda solución que contiene agua y alcohol a partes iguales, a un ritmo de 4 litros/minuto. Al mismo tiempo se vacía el tanque a una velocidad de 5 litros/minuto. Suponiendo que la solución del depósito se agita constantemente, hallar el alcohol que queda en él después de 10 minutos.

- Sea $y(t)$ el número de litros de alcohol que hay en el depósito en el instante t (en minutos). Del enunciado se desprende que el ritmo con el que cambia $y(t)$ viene dado por la cantidad de alcohol que entra menos el que sale. Es decir,

$$y'(t) = 2 - \frac{5}{50-t}y(t)\,, \quad y(0) = 50 \times 0.10 = 5\,.$$

Esta ecuación puede ser escrita

$$y'(t) + \frac{5}{50-t}y(t) = 2\,, \tag{2.12}$$

que es una ecuación lineal de primer orden. Para resolverla, encontramos su factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{5}{50-t}dt} = e^{-5\ln(50-t)} = e^{\ln(50-t)^{-5}} = \frac{1}{(50-t)^5}\,.$$

Multiplicamos (2.12) por $\mu(t)$ y obtenemos

$$\frac{1}{(50-t)^5}y'(t)+\frac{5}{(50-t)^6}y(t)=\frac{2}{(50-t)^5}\,,$$

o bien

$$\left(y(t)\frac{1}{(50-t)^5}\right)'=\frac{2}{(50-t)^5}\,.$$

Integrando en los dos miembros

$$y(t)\frac{1}{(50-t)^5}=\int\frac{2}{(50-t)^5}=\frac{1}{2(50-t)^4}+c\,.$$

Despejando

$$y(t)=c(50-t)^5+\frac{50-t}{2}\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Para determinar el valor de c hacemos uso del valor inicial $y(0)=5$.

$$5=25+c(50)^5\quad\Rightarrow\quad c=-\frac{20}{50^5}\,.$$

La función $y(t)$ vale

$$\boxed{y(t)=\frac{50-t}{2}(50-t)^5+\frac{50-t}{2}}$$

El valor pedido $y(10)=20-20(0.8)^5\approx 13.45$ litros de alcohol.

EJERCICIO 69 Un tanque de 400 litros de capacidad contiene inicialmente una solución salina de 150 litros de agua y 25 gramos de sal. Una solución salina de 2 gramos por litro de sal entra en el tanque a 10 litros por minuto, mientras que la mezcla resultante sale por un sumidero a 5 litros por minuto. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en el momento en que éste empieza a rebosar?.

- Si $y(t)$ es la cantidad de gramos de sal que hay en el tanque después de t minutos, entonces

$$y'(t)=20-\frac{5}{150+5t}y(t)\,,$$

o bien

$$y'(t)+\frac{1}{30+t}\,y(t)=20\,.$$

Esta ecuación diferencial es lineal de primer orden. Para resolverla necesitamos el factor integrante

$$\mu(t)=e^{\int\frac{1}{30+t}dt}=30+t\,.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$(30+t)y'(t)+y(t)=20(30+t)\,,$$

que puede escribirse

$$((30+t)y(t))' = 600 + 20t \quad \Rightarrow \quad (30+t)y(t) = 600t + 10t^2 + c\,,$$

despejando

$$y(t) = \frac{600t + 10t^2 + c}{30+t}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar el valor de la constante c tendremos en cuenta $y(0) = 25$, obteniéndose $c = 750$. Por tanto,

$$\boxed{y(t) = \frac{600t + 10t^2 + 750}{30+t}\,.}$$

A continuación es necesario saber el tiempo necesario para que el tanque se llene

$$400 = 150 + 5t \quad \Rightarrow \quad t = 50 \text{ minutos}\,.$$

Finalmente, la respuesta al ejercicio será $y(50) = 696.8$ gramos de sal.

EJERCICIO 70 Sea el modelo de población

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.3\left(1 - \frac{y(t)}{200}\right)\left(\frac{y(t)}{50} - 1\right)y(t)\,, \tag{2.13}$$

donde $y(t)$ es el número de individuos en tiempo t.

1.- **¿Para qué valores de $y(t)$ está en equilibrio la población?.**

2.- **¿Para qué valores de $y(t)$ está creciendo la población?.**

3.- **¿Para qué valores de $y(t)$ está decreciendo la población?.**

- Los puntos de equilibrio corresponden a las soluciones constantes y se encuentran anulando $y'(t)$.

$$y'(t) = 0.3\left(1 - \frac{y(t)}{200}\right)\left(\frac{y(t)}{50} - 1\right)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0,\ y(t) = 200,\ y(t) = 50\,.$$

- Por otro lado, la población crecerá cuando $y'(t)$ sea positiva. De (2.13) se tiene

$$y'(t) = 0.3\left(1 - \frac{y(t)}{200}\right)\left(\frac{y(t)}{50} - 1\right)y(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) \in (-\infty,\, 0) \cup (50,\, 200)\,.$$

- Del mismo modo, la población decrecerá cuando

$$y'(t) = 0.3\left(1 - \frac{y(t)}{200}\right)\left(\frac{y(t)}{50} - 1\right)y(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) \in (0,\, 50) \cup (200,\, \infty)\,.$$

EJERCICIO 71 El modelo

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \left(\frac{y(t)}{K}\right)^{\alpha}\right),$$

donde α es un número positivo que depende del organismos, ha sido propuesto como un modelo alternativo al logístico. Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

- Los valores de $y(t)$ que anulan a su primera derivada $y'(t)$ son los puntos de equilibrio $y_1 = 0$ e $y_2 = K$. Para valores $0 < y(t) < K$ es fácil comprobar que $y'(t) > 0$ y la población crecerá. Por el contrario, si $y(t) > K$, la población decrece debido a que $y'(t) < 0$.

  En conclusión, el punto $y_2(t) = K$ es un sumidero, o un punto asintóticamente estable.

EJERCICIO 72 Existe un tipo de ardillas que son muy territoriales, las cuales cumplen:

- **Si la población es grande, su tasa de crecimiento decrece y puede llegar a ser negativa.**
- **Si la población es demasiado pequeña, los adultos fértiles corren el riesgo de no poder encontrar compañeros adecuados y de nuevo la tasa de crecimiento es negativa.**

Si la capacidad de carga N indica cuando la población es demasiado grande, y el parámetro M representa cuando la población es demasiado pequeña, podemos modificar el modelo logístico para que tenga en cuenta las hipótesis anteriores

$$\frac{dy}{dt} = Ky\left(1 - \frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M} - 1\right).$$

1.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

2.- **Construir el campo de direcciones.**

3.- **Suponiendo que $N = 100$, $M = 1$ y $k = 1$, encontrar la solución que cumple con la condición inicial $y(0) = 20$.**

- Los puntos de equilibrio son las soluciones constantes y en consecuencia $y'(t) = 0$. En nuestro caso

$$Ky\left(1 - \frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, \qquad y = N, \qquad y = M.$$

La Figura 2.7 corresponde a la gráfica de la función

$$\varphi(y) = Ky\left(1 - \frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M} - 1\right),$$

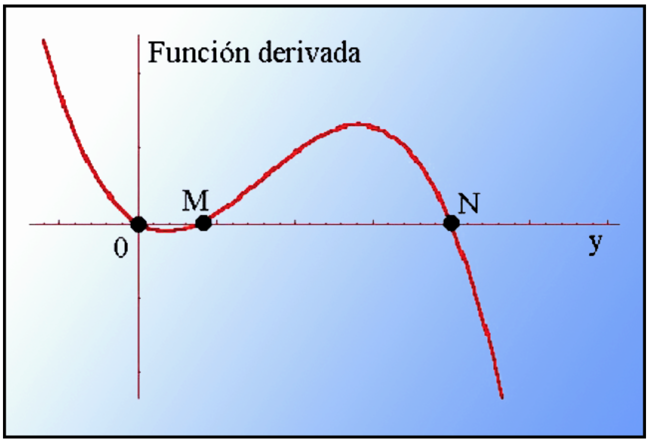


Figura 2.7

Teniendo en cuenta la función $\varphi(y)$ podemos construir la línea fase de de los puntos de equilibrio, y el campo de direcciones

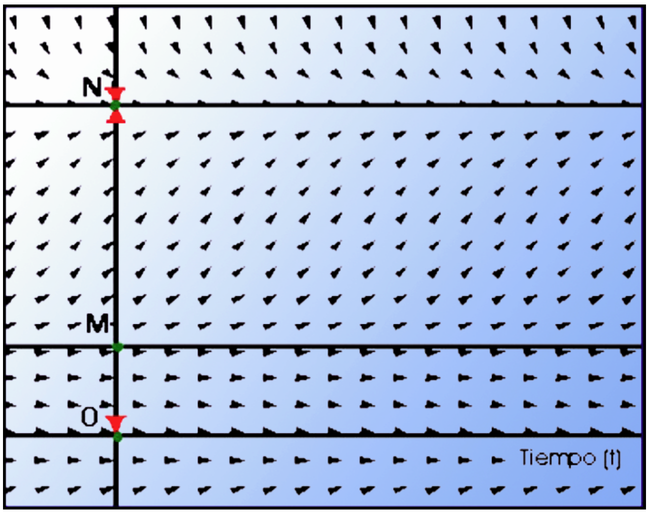


Figura 2.8.

que nos permite afirmar que $y = 0$ e $y = N$ son sumideros e $y = M$ es una fuente.

- Para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y\left(1 - \frac{y}{100}\right)(y - 1),$$

separamos las variables,

$$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{100}\right)(y - 1)} = \int dt\,.$$

La primera integral es racional con raíces reales simples en el denominador. Por lo tanto, permite ser descompuesta en suma de tres integrales racionales simples.

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{100}\right)(y-1)} = -\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{0.0001}{1-0.01y}dy + \int \frac{1.01}{y-1}dy\,.$$

La solución de nuestra ecuación diferencial será

$$\ln\left(\frac{(y-1)^{1.01}}{y(1-0.01y)^{0.01}}\right) = t + C\,,$$

y la solución particular pedida que cumple $y(0)=20$, obliga a

$$\ln\left(\frac{(20-1)^{1.01}}{20(1-0.01\times 20)^{0.01}}\right) = C \quad \Rightarrow \quad C \approx 0.98057\,.,$$

Por tanto,

$$\boxed{\ln\left(\frac{(y-1)^{0.99}}{y(1-0.01y)^{100}}\right) = t + 0.98057\,.}$$

Observemos la imposibilidad de despejar el valor de $y(t)$ de la expresión anterior. Sin embargo, podemos representar de forma aproximada la solución, para ello tendríamos que estudiar el campo de direcciones.

EJERCICIO 73 *Choristoneura fumiferana* **es un insecto que daña considerablemente a los bosques. Los investigadores actuales modelan su dinámica a través de la siguiente ecuación diferencial**

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1-\frac{y(t)}{k}\right) - \frac{\alpha y(t)^2}{1+\beta y(t)^2}\,,$$

donde se observa una primera parte que corresponde a un modelo logístico y una segunda consistente en el efecto de depredación, basada en la ecuación del disco de ***Holling*****.**

Realizar un análisis cualitativo del modelo, para $r=1$, $k=1000$, $\alpha=0.5$, $\beta=0.04$**.**

- Debemos comenzar encontrando los puntos de equilibrio del modelo,

$$y(t) = \text{ constante } \quad \Rightarrow \quad y\left(1-\frac{y}{1000}\right) - \frac{0.5y^2}{1+0.04y^2} = 0\,.$$

Simplificando

$$y\left(1-\frac{y}{1000}-\frac{0.5y}{1+0.04y^2}\right) = 0\,.$$

Una de las soluciones es la trivial $y_1(t)=0$ y además

$$1 = \frac{y+0.04y^3+500y}{1000+40y^2} \quad \Rightarrow \quad 0.04y^3 - 40y^2 + 501y - 1000 = 0$$

Las raíces podemos encontrarlas con el programa `Mathematica`®,

$$\texttt{NSolve}[0.04\mathtt{y}^3 - 40\mathtt{y}^2 + 501\mathtt{y} - 1000 == 0, \mathtt{y}]$$

$\{\{y \to 2.48966\}, \{y \to 10.1703\}, \{y \to 987.34\}\}$

A continuación clasificaremos cada uno de estos puntos.

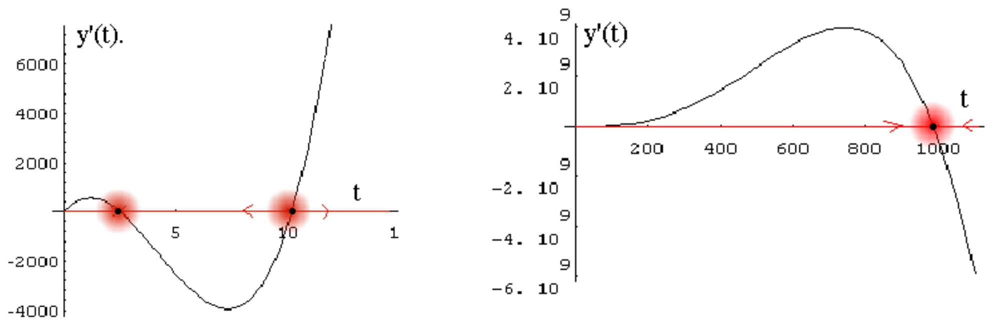


Figura 2.9.

Observemos en las gráficas anteriores que $y'(t)$ es positiva en

$$(0,\ 2.48966) \cup (10.1703,\ 987.34)$$

y negativa en el resto. Por tanto la población $y(t)$ crecerá en

$$(0,\ 2.48966) \cup (10.1703,\ 987.34)$$

y decrecerá en $(2.48966,\ 10.1703) \cup (987.34,\ +\infty)$.

Los puntos de equilibrio 2.48966 y 987.34 serán asintóticamente estables (sumideros) y el 10.1703 un punto de equilibrio inestable (fuente).

EJERCICIO 74 Consideremos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 2\,\mathrm{sen}(\pi y)$. Encontrar todos los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad. Dibujar el diagrama fase y dibujar algunas de las soluciones en el plano Oty.

- Al ser los puntos de equilibrio las soluciones constantes $y(t) = k$, entonces $y'(t) = 0$. Por tanto

$$2\,\mathrm{sen}(\pi y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = n\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

En la Figura 2.10 se muestra el diagrama fase, donde puede apreciarse que en cada número entero par existe un punto de equilibrio inestable y en el resto (los impares) son puntos de equilibrio estables.

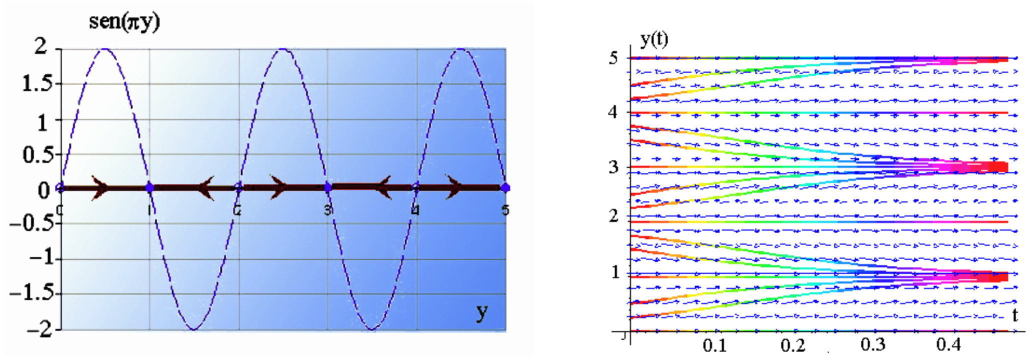


Figura 2.10.

EJERCICIO 75 Este ejercicio pone de manifiesto un hecho importante en el análisis cualitativo conocido con el nombre de bifurcación del comportamiento de la ecuación diferencial. La ecuación diferencial tiene un número de puntos de equilibrio dependientes de un parámetro α.

Consideremos la ecuación diferencial $dy/dt = \alpha y - y^3$, donde α puede ser positivo, negativo o cero. Encontrar todos los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad para los diferentes valores posibles de α. Para los valores $\alpha = \pm 1$, trazar el diagrama de fase y algunas de las soluciones en el plano Oyt.

- Para encontrar los puntos de equilibrio resolvemos $y(\alpha - y^2) = 0$. Por tanto, en $y = 0$ siempre existe un punto de equilibrio. Además, si $\alpha < 0$, entonces $y = 0$ es el único punto de equilibrio. Si $\alpha > 0$ existen tres puntos de equilibrio

$$y = 0\,, \quad y = -\sqrt{\alpha}\,, \quad y = +\sqrt{\alpha}\,.$$

- La Figura 2.11 muestra que si $\alpha = -1$, entonces $y = 0$ es un punto de equilibrio estable. Cuando existen tres puntos de equilibrio, entonces $y = 0$ es inestable, mientras que $y = \pm\sqrt{\alpha}$, los dos son estables. Además, como el parámetro α cambia de negativo a positivo, el comportamiento cualitativo de la ecuación diferencial cambia pasando de un único punto de equilibrio estable en $y = 0$, a una ecuación diferencial con tres puntos de equilibrio con $y = 0$ inestable y otros dos estables.

- Para el caso $\alpha = -1$, la función $\phi(y) = -y - y^3$ es siempre decreciente y corta al eje de abscisas en $y = 0$. Para valores $y < 0$ la función es positiva, lo cual implica que la solución de la ecuación diferencial es creciente hacia el punto de equilibrio. Si $y > 0$ la función es negativa y en consecuencia la solución de la ecuación diferencial es decreciente hacia el punto de equilibrio.

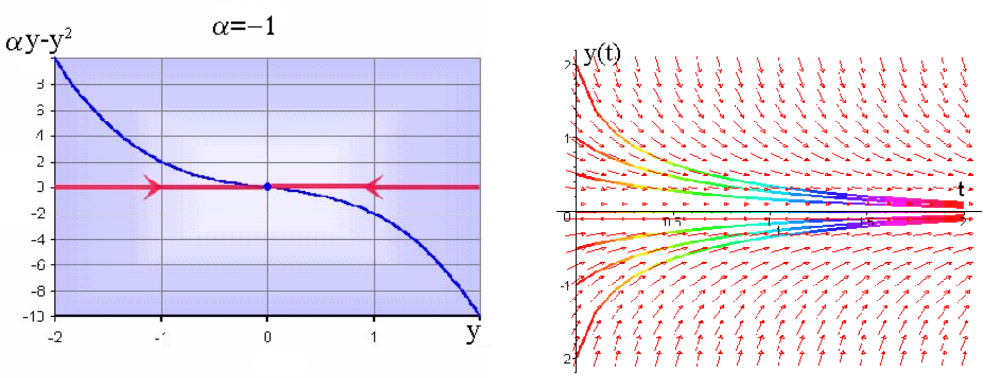


Figura 2.11.: Estudio cualitativo de $y' = -y - y^3$.

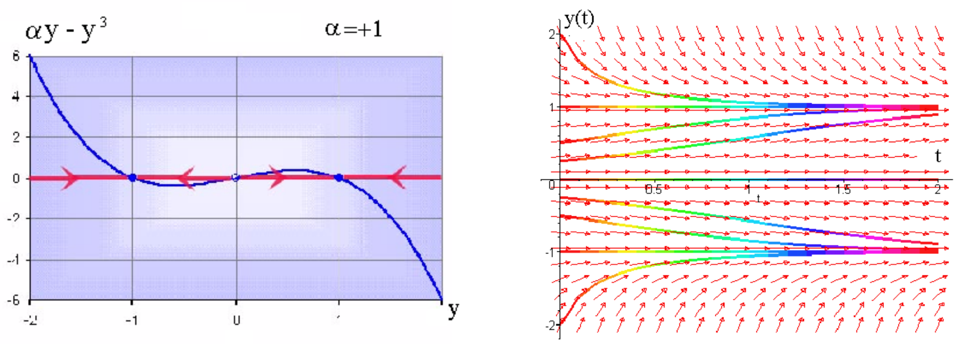


Figura 2.12. Estudio cualitativo de $y' = y - y^3$.

EJERCICIO 76 Supongamos que en un tiempo t la población de loros viene expresada por $y(t)$, y que cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y(r - a(y-b)^2)\,,$$

donde $r = 0.04\,, a = 10^{-8}$ y $b = 2200$. Encontrar los puntos de equilibrio de esta ecuación diferencial y estudiar su estabilidad. Dibujar su diagrama de fase y algunas de sus soluciones para diferentes valores iniciales.

- Es inmediato comprobar que los puntos de equilibrio son

$$y = 0\,, \quad y = b + \sqrt{\frac{r}{a}}\,, \quad y = b - \sqrt{\frac{r}{a}}\,.$$

El primero de ellos es la solución trivial, lo cual significa, desde el punto de vista del modelado, que si no existe población presente, entonces no habrá población en el futuro (extinción).

Particularizando los valores de los parámetros obtenemos los puntos de equilibrio, $y = 0$, $y = 200$ e $y = 4200$.

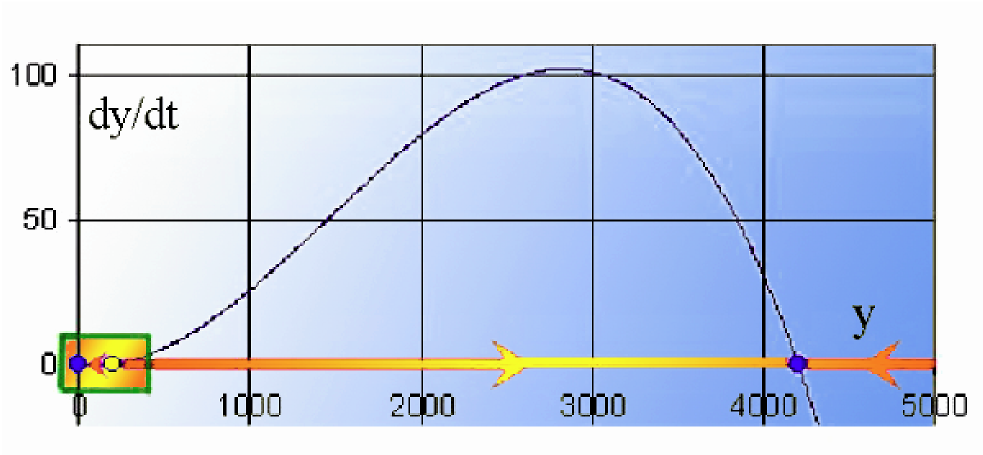


Figura 2.13 Diagrama fase de $dy/dt = y(0.04 - 10^{-8}(y - 2200))$.

En la Figura 2.13 se ha dibujado la función $\phi(y) = y(0.04 - 10^{-8}(y - 2200))$ y en la Figura 2.14 puede verse una ampliación de la misma correspondiente a los valores de y pertenecientes al intervalo $[0, 300]$.

- Observemos que los puntos de equilibrio $y = 0$ e $y = 4200$ son estables, mientras que el $y = 200$ es inestable. De acuerdo con la interpretación del modelo, si la población de loros supera los 200 individuos, entonces al cabo de "mucho tiempo"su número tiende a la capacidad de carga del sistema y llega a estabilizarse en el punto de equilibrio 4200. Por el contrario, si el número inicial es inferior a los 200, entonces el modelo predice la extinción de la especie. Observemos también, que si el número inicial de loros supera los 4200 entonces el modelo predice que la población se reducirá hasta alcanzar el valor de la capacidad de carga 4200.

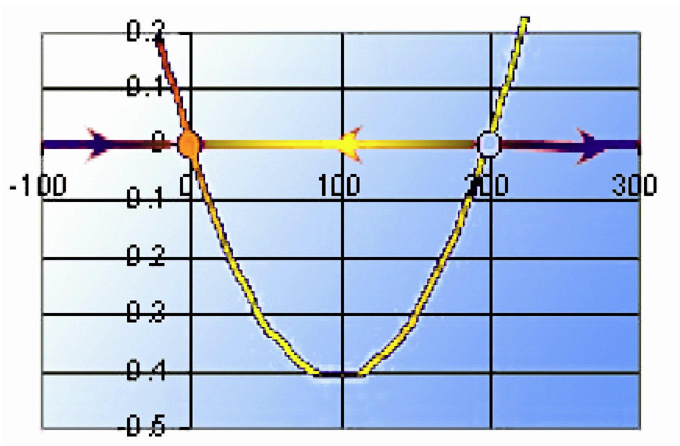


Figura 2.14. Diagrama fase de $dy/dt = y(0.04 - 10^{-8}(y - 2200))$.

EJERCICIO 77 Supongamos el modelo poblacional

$$\frac{dy(t)}{dt} = my(t)(1-y(t)) - \alpha y^2(t)\,, \tag{2.14}$$

donde $y(t)$ es el número de individuos en el tiempo t y las constantes m y α son positivas.

1.- **Encontrar el punto de equilibrio del modelo**

2.- **Estudiar la estabilidad del punto de equilibrio encontrado**

3.- **Relacionar el modelo propuesto con el logístico**

- Empezamos el ejercicio encontrando los puntos de equilibrio

  $$y'(t) = my(t)(1-y(t)) - \alpha y^2(t) = y(t)\,(m - y(t)(m+\alpha)) = 0\,,$$

  que corresponde a

  $$y_1(t) = 0\,, \quad y_2(t) = \frac{m}{m+\alpha}\,.$$

- Para clasificar estos puntos de equilibrio, reescribimos la ecuación diferencial (2.14) como,

  $$y'(t) = (m+\alpha)y(t)\left(\frac{m}{m+\alpha} - y(t)\right)\,. \tag{2.15}$$

  Ahora, es inmediato ver que,

  - si $y(t) < 0$, entonces $y'(t) < 0$ y la población decrece (aunque evidentemente no tiene sentido biológico),
  - si $0 < y(t) < m/(m+\alpha)$, la población aumenta al ser $y'(t) > 0$,
  - si $y(t) > m/(m+\alpha)$, entonces $y'(t) < 0$, volviendo la población a decrecer.

  En conclusión, el punto $y_2(t) = m/(m+\alpha)$ es un sumidero.

- La ecuación diferencial (2.15) puede expresarse

  $$(m+\alpha)y(t)\left(\frac{m}{m+\alpha} - y(t)\right) = a\,y(t)\,(K - y(t))\,,$$

  donde $a = (m+\alpha)$ y $K = m/(m+\alpha)$. Esta última ecuación diferencial corresponde a un modelo logístico que tiene a K como capacidad de carga del sistema.

EJERCICIO 78 La ley de crecimiento de una población viene dada por la ecuación diferencial

$$y'(t) = at^2 y(t)\left(1 - \frac{1}{b}y(t)\right)\ ; \qquad a\,,b \ \ \textbf{positivos}\,.$$

1.- **Calcular $y(t)$, con la condición inicial** $y(0) = 100$

2.- **Estudiar el comportamiento de $y(t)$ a largo plazo.**

3.- **Si $a = 0.2$, $b = 10^4$ y el tiempo se mide en horas; calcular $y(t)$ al cabo de 4 y 6 horas.**

- Si escribimos la ecuación diferencial como

$$y' = at^2 y - \frac{a}{b}t^2 y^2 \quad \Rightarrow \quad y' - at^2 y = -\frac{a}{b}t^2 y^2\,,$$

podemos observar que estamos ante una ecuación diferencial de *Bernouilli*. Dicha ecuación se convierte en lineal dividiendo por y^2 y haciendo el cambio

$$z = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad z' = -\frac{1}{y^2}y'\,.$$

En efecto,

$$\frac{1}{y^2}y' - at^2\frac{1}{y} = -\frac{a}{b}t^2 \quad \Rightarrow \quad z' + at^2 z = \frac{a}{b}t^2\,. \tag{2.16}$$

Ahora necesitamos un factor integrante para esta última ecuación

$$\mu(t) = e^{\int at^2 dt} = e^{\frac{at^3}{3}}\,. \tag{2.17}$$

Multiplicando (2.16) por (2.17)

$$z'e^{\frac{at^3}{3}} + at^2 z e^{\frac{at^3}{3}} = \frac{a}{b}t^2 e^{\frac{at^3}{3}} \quad \Rightarrow \quad \left(z.e^{\frac{at^3}{3}}\right)' = \frac{a}{b}t^2 e^{\frac{at^3}{3}}\,,$$

e integrando

$$ze^{\frac{at^3}{3}} = \frac{1}{b}\int at^2 e^{\frac{at^3}{3}}dt = \frac{1}{b}e^{\frac{at^3}{3}} + c\,.$$

Despejando

$$z = \frac{1}{b} + ce^{-\frac{at^3}{3}} = \frac{1 + bce^{-\frac{at^3}{3}}}{b}\,,$$

o bien

$$z = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{b}{1 + bce^{-\frac{at^3}{3}}}\,.$$

Si $y(0) = 100$, entonces

$$100 = \frac{b}{1 + bc} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b - 100}{100b}\,,$$

y por lo tanto

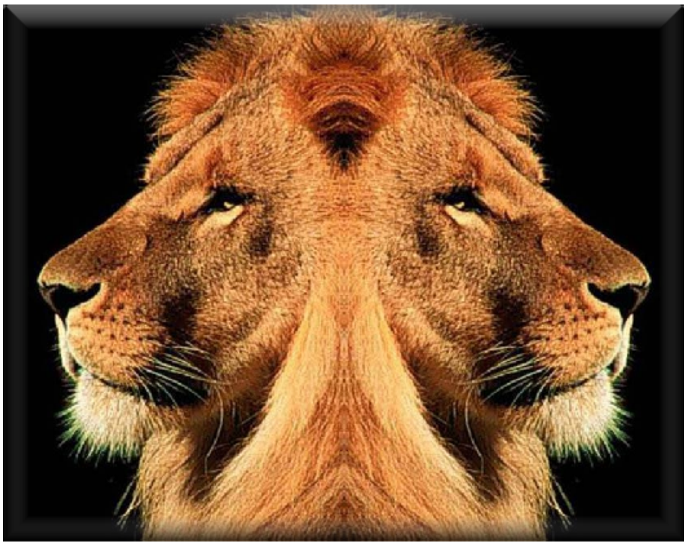
$$\boxed{y(t) = \frac{b}{1 + (b - 100)10^{-2}e^{-\frac{at^3}{3}}}\,.}$$

- Par conocer el comportamiento asintótico de la población hacemos que $t \to \infty$, y obtenemos $y(t) \to b$.

- Si suponemos que $a = 0.2$ y $b = 10^4$, se cumple

$$y(t) = \frac{10^4}{1 + 99e^{-\frac{0.2t^3}{3}}}\,,$$

y en consecuencia $y(4) \approx 4186$, $y(6) \approx 9999$.



EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 79

1.- **Escribir una ecuación diferencial que describa el hecho de que cuando los factores ambientales imponen un límite superior sobre su tamaño, la población crece a un ritmo que es conjuntamente proporcional a su tamaño actual y a la diferencia entre su límite superior y su tamaño actual.**

2.- **La población de cierto país está creciendo exponencialmente. La población total (en millones) en t años está dada por la función $y(t)$. Relacionar cada una de las siguientes respuestas con su correspondiente pregunta:**

2.a.- **Resolver $y(t) = 2$ para t.**

2.b.- $y(2)$.

2.c.- $y'(2)$.

2.d.- **Resolver $y'(t) = 2$ para t.**

2.e.- $y' = ky$.

2.f.- **Resolver $y(t) = 2y(0)$ para t.**

2.g.- $y_0 e^{kt}$, $k > 0$.

2.h.- $y(0)$.

Preguntas:

2.a.- **Cómo de rápido estará creciendo la población dentro de 2 años.**

2.b.- **Dar la forma general de la función $y(t)$.**

2.c.- **Cuánto tiempo tardará en duplicarse la población actual.**

2.d.- **Cuál será el tamaño inicial de la población.**

2.e.- **Cuándo será el tamaño de la población de 2 millones.**

2.f.- **Cuándo estará creciendo la población a una tasa de 2 millones de personas al año.**

2.g.- **Dar una ecuación diferencial que satisfaga $y(t)$.**

3.- *Paramecia* **con suficiente comida y sin limitaciones de espacio, crece exponencialmente. Inicialmente, hay 1500. Cuatro horas más tarde, la población es de 2000 individuos. Encontrar la población de** *Paramecia* **en función del tiempo, y determinar el tiempo que ha de trascurrir para que se duplique la población.**

4.- **Las matemáticas del crecimiento incontrolado son terroríficas. Una simple célula de bacterias** *E. Coli* **podría bajo condiciones ideales, dividirse cada 25 minutos. Esto no es particularmente desconcertante hasta que no pensamos detenidamente sobre ello, pero el hecho es que la bacteria se multiplica geométricamente. De una obtenemos dos, cuatro, ocho, dieciséis, ... De esta manera, puede probarse que en un día, una célula de** *E. Coli* **puede producir una supercolonia igual en tamaño y peso al planeta tierra. Probar que esta afirmación es cierta, sabiendo que la masa media de una bacteria de** *E. Coli* **es** 10^{-12} **gramos y que la masa de la tierra es aproximadamente** 5.9763×10^{24} **kilos.**

5.- **Una gran población de 5000 individuos se traslada a una lugar donde la comida es limitada, lo cual afecta a la dinámica de su crecimiento, que viene dada por la ecuación diferencial**

$$y'(t) = -0.1y(t) + 100\,.$$

Resolver la ecuación diferencial anterior y encontrar lo que le sucede a la población a largo plazo.

6.- **La constante de decaimiento para el estroncio 90 es 0.0244, donde el tiempo está medido en años. ¿Cuánto tiempo le llevará a una cantidad** $y(0)$ **de estroncio 90 reducirse a la mitad de su tamaño original?**

7.- **En 1947 se descubrió en Lascaux, Francia, una cueva con bellas pinturas murales prehistóricas. Se encontró allí mismo un trozo de carbón de madera que contenía el 20 % de** C^{14} **que se esperaba encontrar en los árboles vivos. ¿Cuántos años tienen las pinturas de Lascaux?**

8.- **Un pedazo de carbón de leña encontrado en Stonehenge contenía el 63 % del nivel de C-14 que se encuentra en los árboles vivos.**

9.- **Sea** $y(t)$ **la longitud de un determinado pez en el tiempo** t **y supongamos que crece de acuerdo a la ley de** *von Bertalafnfly*

$$y'(t) = k(34 - y(t))\,, \quad y(0) = 2\,.$$

- **Resolver la ecuación diferencial.**
- **Utilizar la solución anterior para determinar el valor de** k **suponiendo que** $y(4) = 10$**. Representar gráficamente** $y(t)$**.**
- **Encontrar la longitud del pez cuando** $t = 10$**. ¿Cuál será su longitud a largo plazo?.**

10.- **Al sacar un pastel de un horno su temperatura es de** 148^0 **C. tres minutos después, su temperatura es de** 93^0 **C. ¿Cuánto tardará en enfriarse hasta una temperatura ambiente de** 21^0 **C?**

11.- **En el estudio de los efectos de la selección natural sobre una población, aparece la siguiente ecuación diferencial**

$$y'(t) = -0.0001y(t)^2(1 - y(t))$$

donde $y(t)$ es la frecuencia de un gen a. ¿Contra quién va la presión selectiva? Trazar la solución de esta ecuación cuando $y(0)$ está cerca, pero es ligeramente menor de 1. Trazar las soluciones representativas de las ecuaciones

$$y' = y(1-y)(0.15-0.5y)$$
$$y' = 0.05y(1-y)(2y-1)$$

Considerar distintas condiciones iniciales con $y(0)$ entre 0 y 1 y discutir posibles interpretaciones genéticas para esas curvas, es decir, describir los efectos de la selección sobre la frecuencia genética y en términos de las distintas condiciones iniciales.

12.- **Sea $y(t)$ el número de individuos de una población en el tiempo t. La evolución de esta población viene determinada por una ecuación diferencial autónoma $y'(t) = f(y)$ que tiene a $y(t) = 5$ como un único punto de equilibrio, el cual es asintóticamente estable.**

- **Encontrar una ecuación diferencial que cumpla los requisitos anteriores para modelizar a esta población.**
- **Resolver la ecuación diferencial del apartado anterior y comprobar que cuando t tiende hacia infinito $y(t)$ tiende hacia 5.**

13.- **Un depósito contiene 100 litros de agua contaminada en los que están disueltos 10 kilos de contaminante. El agua contaminada empieza a fluir al depósito a una velocidad de 10 litros por minuto. La concentración del contaminante en esta corriente de entrada en el instante t es $c(t) = 0.3+e^{0.2t}$ kilos por litro. La solución del depósito se mezcla uniformemente y el agua contaminada fluye hacia el exterior a una velocidad de 10 litros por minuto. Obtener un modelo matemático para esta situación y encontrar la cantidad de contaminante $y(t)$ en el depósito en un minuto cualquiera t. Con el paso del tiempo, ¿aumenta o disminuye la cantidad de contaminante en el depósito?**

14.- **Un cultivo de bacterias sigue la siguiente ley: $y'(t) = y^3-5y^2+6y$, siendo $y(t)$ la cantidad de bacterias en el momento t. ¿Cuál debería ser el número inicial de bacterias para que la población creciese sin límites? ¿Existe algún valor inicial para el cual la población desaparecerá? Justifica las respuestas.**

15.- **Una lámina de plata se calienta a 100^0C para esterilizarla. Supongamos que la plata se coloca en una habitación que se encuentra a 20^0C y que la plata se enfría de acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton. Después de 10 minutos la temperatura de la plata es de 80^0C.**

- **Escribir una ecuación diferencial que describa la evolución de la temperatura $T(t)$ de la plata y resolverla para cualquier tiempo $t \geq 0$**
- **Encontrar el momento en el que la temperatura de la plata es de 30^0 y pueda ser inoculada con un cultivo de células.**

16.- **Un depósito contiene inicialmente 3 kilos de sal disuelta en 100 litros de agua. Supongamos que se comienza a introducir en el depósito por un grifo salmunera que contiene α kilos de sal por litro a una velocidad de 2 litros/minuto. Simultáneamente, se sacan del depósito 2 litros/minuto de la mezcla resultante.**

- **Encuentra el valor de la concentración α para que "a largo plazo"la cantidad de sal en el depósito sea de 10 kilos**

17.- **Sea $y(t)$ el número de peces de una población en el instante t. La población está está modelada por el problema de valor inicial:**

$$y'(t) = y(t) - y^2(t)/9 - 8/9, \qquad y(0) = y_0$$

donde y_0 es una constante positiva.

- **¿Cuál es el coeficiente de sobrepoblación?, ¿Cuál es la tasa de captura?**
- **Resolver la ecuación diferencial.**
- **Realizar un análisis cualitativo de la ecuación diferencial, e interpretar el resultado obtenido en términos del futuro de la población de peces.**

18.- **Obtener las soluciones de equilibrio de las ecuaciones diferenciales siguientes y trazar sus gráficas. Dibujar las curvas solución representativas arriba, abajo y entre las curvas de equilibrio. Para cada solución acotada $y(t)$, estudiar $y(t)$ cuando $t \to \infty$.**

(a)	$y' = (1-y)(y+1)^2$	**(b)**	$y' = \operatorname{sen}(y/2)$
(c)	$y' = y(y-1)8y-2)$	**(a)**	$y' = y^3 - 2y^2 - y + 2$

19.- **Una solución que contiene 2 libras de sal por galón empieza a fluir a un depósito de 50 galones de agua pura a razón de 3 galones/minuto. Después de 3 minutos la mezcla empieza a salir a 3 galones/minuto.**

- **¿Cuánta sal hay en el depósito cuando t=2 minutos? ¿Y cuando t=25 minutos?**
- **¿Cuánta sal hay en el deposito cuando $t \to +\infty$.**

20.- **Una población crece exponencialmente durante T meses con una constante de crecimiento de 0.03 por mes. Luego, la constante aumenta de manera repentina a 0.05 por mes. Después de 20 meses, la población se duplica. ¿En qué momento T cambió la constante de crecimiento?**

21.- **De acuerdo con la *ley de Newton del enfriamiento*, la tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea.**

- **Escribir una ecuación diferencial que sirva de modelo para la temperatura del cuerpo, dada la temperatura del medio.**
- **Un veterinario desea saber la temperatura de un caballo enfermo. Las lecturas del termómetro siguen la ley de Newton. Al momento de insertar el termómetro marca $82\,^0$F. Después de tres minutos la lectura es de $90\,^0$F y tres minutos más tarde es de $94\,^0$F. Una convulsión repentina destruye el termómetro antes de la lectura final. ¿Cuál es la temperatura del caballo?.**
- **Un huevo duro se saca de una cacerola con agua caliente y se pone a enfriar en una mesa. Al principio, la temperatura del huevo es de $180\,^0$F. Después de una hora es de $140\,^0$F. Si la temperatura de la habitación es de $65\,^0$F, ¿en qué momento tendrá el huevo una temperatura de $120\,^0$F.**

22.- **Completar la tabla siguiente, y encontrar las soluciones de las distintas ecuaciones diferenciales para comprobar que las soluciones que aparecen son las correctas.**

$y' = 1 - y$	$y(t) = ce^{2t}$	$y' = 2ty$	$y(t) = 1 - ce^{t}$
$y' = -y$	$y(t) = ce^{-t} + 1$	-	$y(t) = ce^{t^2}$
$y' = 1 - 2t$	$y(t) = ce^{-2t} + t$	-	$y(t) = t - t^2 + c$
$y' = 2y$	ce^{-t}	$y' = k(100 - y)$	-

23.- **Utilizar los siguientes datos para hacer estimaciones de la población de España en los próximos años.**

AÑO	POBLACIÓN	AÑO	POBLACIÓN	AÑO	POBLACIÓN
1789	10268150	1860	15655467	1920	21303162
1797	10541221	1877	16631869	1930	23563867
1833	12286941	1887	17560352	1940	25877971
1846	12162872	1897	18065635	1970	34041531
1850	10942280	1900	18594405	1981	37682355
1857	15495212	1910	19927150	1991	38872279

24.- **Realizar el estudio cualitativo de las siguientes ecuaciones diferenciales. Dibujar sus líneas de fase y sus campos de direcciones.**

(a) $\dfrac{dy}{dt} = y' = 3y(1-y)$

(b) $\frac{dy}{dt} = y' = y^2 - 6y - 16$

(c) $\frac{dy}{dt} = y' = (y-2)\operatorname{sen} y$

25.- **Dada la ecuación difirencial**

$$\frac{dy}{dt} = \left(y - \frac{y^2}{5}\right) / (y-2)^2$$

donde $y(t)$ representa al tamaño de una población en el mes t.

- **Encontrar los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad.**
- **describir la evolución de la población según los diferentes valores de $y(0)$**

26.- **Un depósito de 100 litros contiene inicialmente 100 litros de agua azucarada con una concentración de 25 gramos/litro. Se añade azúcar al depósito a razón de α gramos/minuto. El agua bien mezclada se retira del depósito a una velocidad de 1 litro/minuto.**

- **¿Cuál debe ser el valor de α para que cuando queden 5 litros de agua azucarada en el tanque, la concentración sea de 50 gramos de azúcar por cada litro de agua?**
- **¿Es posible elegir el valor del α de manera que la última gota de agua en el depósito tenga una concentración de 75 gramos de azúcar por cada litro de agua?**

27.- **Dada la ecuación diferencial**

$$y'(t) = (y-\alpha)(y+3)(y-3)$$

- **Construir sus diferentes líneas de fase en función de los distintos valores del parámetro α**
- **Estudiar el comportamiento a largo plazo de las soluciones**
- **Encontrar el campo de pendientes para el valor de $\alpha = 0$**

28.- **La sangre conteniendo cierta droga entra en un órgano a razón de 3 cm^3/sg y sale a la misma velocidad. El órgano tiene una capacidad de 125 cm^3 y se encuentra lleno de sangre. Además conocemos que inicialmente no hay droga en el cuerpo. Si la concentración de la droga en la sangre que entra es de 0.2 $gramos/cm^3$,**

- **Calcular la concentración de droga en el órgano en el tiempo $t = 10$ segundos.**
- **Calcular el tiempo que debe transcurrir hasta alcanzar una concentración de droga en la sangre de 0.1 $gramos/cm^3$.**

29.- **Si el agua de un pantano está contaminada con una substancia radiactiva, ésta no se podrá beber. Supongamos que el agua contiene 20 veces la cantidad máxima permitida de este producto. ¿Cuántos días tendremos que esperar antes de que podamos beber el agua del pantano, sabiendo que la vida media del producto radiactivo es de 10 días?**

30.- **Un depósito contiene inicialmente 3 kilos de sal disuelta en 100 litros de agua. Supongamos que se comienza a introducir en el depósito por un grifo salmunera que contiene α kilos de sal por litro a una velocidad de 2 litros/minuto. Simultáneamente, se sacan del depósito 2 litros/minuto de la mezcla resultante.**

- **Encuentra el valor de la concentración α para que "a largo plazo"la cantidad de sal en el depósito sea de 10 kilos**

31.- **En una habitación que contiene $300m^3$ de aire limpio se va a celebrar una fiesta. En un instante dado $t = 0$ algunas personas comienzan a fumar, de modo que el humo empieza a invadir la habitación a una velocidad de $3m^3/h$, conteniendo una concentración de $0.04gr/m^3$ de monóxido de carbono. Al mismo tiempo, abrimos una ventana por la que sale el humo a una velocidad de $4m^3/h$.**

- **Establecer y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de humo y(t) en la habitación.**
- **¿Cuándo debería abandonar una persona prudente la fiesta considerando que el monóxido de carbono comienza a ser peligroso con una concentración superior a $0.0002gr/m^3$?**

Tema 3

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

EJERCICIO 80 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & -y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & -6y_1 & + & 4y_2 \end{array}\right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Los autovalores serán $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. A continuación encontramos el subespacio de autovectores asociado a cada autovalor

$$\begin{array}{l} S_1 = L(\lambda_1 = 1) = \{(t, 2t) : \forall t \in \mathbb{R}\} =< (1,2) > \\ S_2 = L(\lambda_2 = 2) = \{(\alpha, 3\alpha) : \forall \alpha \in \mathbb{R}\} =< (1,3) > \ . \end{array}$$

Como consecuencia de ello, las funciones

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes del sistema inicial.

La solución general tiene la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

que puede expresarse como,

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ \\ y_2(t) = 2c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} \end{array}}$$

EJERCICIO 81 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& 2y_1 &-& 2y_2 &+& 3y_3 \\ y_2' &=& y_1 &+& y_2 &+& y_3 \\ y_3' &=& y_1 &+& 3y_2 &-& y_3 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$.

Es fácil comprobar que los vectores

$$(-1, 1, 1), \quad (-11, -1, 4), \quad (1, 1, 1)\,.$$

son tres autovectores asociados a los tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente.

La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,,$$

o lo que es equivalente,

$$\boxed{\begin{array}{lcrrr} y_1 &=& -c_1 e^t & -11c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{3t} \\ y_2 &=& c_1 e^t & -c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{3t} \\ y_3 &=& c_1 e^t & +14c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{3t} \end{array}}$$

EJERCICIO 82 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& y_1 &-& 3y_2 &+& 3y_3 \\ y_2' &=& 3y_1 &-& 5y_2 &+& 3y_3 \\ y_3' &=& 6y_1 &-& 6y_2 &+& 4y_3 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2$.

Puede comprobarse que la matriz A es diagonalizable siendo

$$(1,1,2), \quad (1,1,0), \quad (0,1,1)\,.$$

una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Es decir,

$$\boxed{\begin{array}{lcrrr} y_1 & = & c_1e^{4t} & +c_2e^{-2t} & \\ y_2 & = & c_1e^{4t} & +c_2e^{-2t} & +c_3e^{-2t} \\ y_3 & = & 2c_1e^{4t} & & +c_3e^{-2t} \end{array}}$$

EJERCICIO 83 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{lcrcr} y_1' & = & 2y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & -y_1 & + & 4y_2 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

es $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. La ecuación tiene la raíz doble $\lambda_1 = 3$, se trata de un autovalor doble y es inmediato comprobar que no existen dos autovectores de A que sean linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz A no es diagonalizable. En este caso, el sistema posee soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1t + c_2)e^{3t} \\ (c_3t + c_4)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Si sustituimos en el sistema inicial

$$\begin{array}{c} c_1e^{3t} + 3(c_1t + c_2)e^{3t} = 2(c_1t + c_2)e^{3t} + (c_3t + c_4)e^{3t} \\ c_3e^{3t} + 3(c_3t + c_4)e^{3t} = -(c_1t + c_2)e^{3t} + 4(c_3t + c_4)e^{3t} \end{array}$$

que simplificando e identificando coeficientes nos proporciona el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} 3c_1 & = & 2c_1 + c_3 \\ 3c_2 + c_1 & = & 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 & = & 4c_3 - c_1 \\ c_3 + 3c_4 & = & -c_2 + 4c_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c_3 = c_1, \quad c_4 = c_1 + c_2$$

La expresión general de la solución general viene dada por

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y_1 & = & (c_1 t + c_2)e^{3t} \\ y_2 & = & (c_1 t + (c_1 + c_2))e^{3t} \end{array}}$$

EJERCICIO 84 Resolver por eliminación,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & -y + t \\ \dfrac{dy}{dt} & = & x - t \end{array}\right.$$

- Si derivamos la segunda de las ecuaciones y le sumamos la primera obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden,

$$y'' + y = t - 1\,. \tag{3.1}$$

Para encontrar la solución general de (3.1) debemos comenzar localizando la solución general $y_h(t)$ de la ecuación diferencial homogénea $y'' + y = 0$.

Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, lo cual nos permite escribir

$$y_h(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} = (c_1 + c_2)\cos t + (ic_1 - ic_2)\,\mathrm{sen}\, t = k_1 \cos t + k_2\, \mathrm{sen}\, t$$

Para obtener la solución particular de (3.1), utilizamos el método de los coeficientes indeterminados. Derivamos dos veces en la ecuación diferencial inicial

$$y^{4)} + y'' = 0\,.$$

Al ser $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, las raíces características podemos escribir la solución general

$$y = (k_1 \cos t + k_2\, \mathrm{sen}\, t) + (A + Bt)\,,$$

y observamos que la solución particular responde al tipo $y_p = A + Bt$. Para determinar A y B sustituimos $y_p(t)$ en (3.1)

$$y'' + y = t - 1 \;\Rightarrow\; (0) + (A + Bt) = t - 1 \;\Rightarrow\; A = -1,\, B = 1\,.$$

En conclusión

$$y(t) = -1 + t + k_1 \cos t + k_2\, \mathrm{sen}\, t\,, \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{3.2}$$

Para encontrar el valor de $x(t)$ procedemos de forma similar. En primer lugar, derivamos la primera de las ecuaciones del sistema y sustituimos y' de la segunda de las ecuaciones,

$$x'' = -y' + 1 \quad \Rightarrow \quad x'' = -(x - t) + 1 \quad \Rightarrow \quad x'' + x = 1 + t\,.$$

La ecuación diferencial que obtenemos es parecida a la encontrada en el primer apartado y puede comprobarse fácilmente que

$$x(t) = 1 + t + M_1 \cos t + M_2 \operatorname{sen} t\,. \tag{3.3}$$

Pero al ser (3.2) y (3.3) las soluciones, deben de verificar el sistema. Es inmediato comprobar que para que esto sea posible las constantes k_1, k_2, M_1, M_2 deben de cumplir la siguiente relación:

$$M_1 = k_2 \quad , \quad M_2 = -k_1\,.$$

Es decir

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1 + t + k_2 \cos t - k_1 \operatorname{sen} t \\ y(t) & = & -1 + t + k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t \end{array}}$$

EJERCICIO 85 Resolver

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 2y_1 + 2 \\ y_2' & = & y_1 + 3y_2 + e^t \end{array} \right. \tag{3.4}$$

- Los autovalores asociados a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Y los subespacios de autovalores asociados

$$L(\lambda_1 = 2) = \{(t, -t) \,:\, \forall t \in \mathbb{R}^*\}$$

$$L(\lambda_2 = 3) = \{(0, \beta) \,:\, \forall \beta \in \mathbb{R}^*\}$$

Estamos en condiciones de poder escribir la solución general del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

o bien,

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & c_1 e^{2t} \\ y_2 & = & -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{array}$$

Un sistema fundamental de (3.4) viene dado por

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

lo cual nos permite escribir una solución particular de (3.4)

$$\alpha_1(t)\begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \alpha_2(t)\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

siendo α_1 y α_2 soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} \alpha_1'(t)e^{2t} + \alpha_2'(t).0 = 2 \\ -\alpha_1'(t)e^{2t} + \alpha_2(t)e^{3t} = e^t \end{array} \right.$$

Los valores de α_1, α_2 se obtienen de forma inmediata

$$\alpha_1(t) = -e^{-2t} \quad , \quad \alpha_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}$$

Una solución particular de (3.4) será

$$\begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix} = -e^{-2t}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Para finalizar escribamos la solución general del sistema (3.4) propuesto

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = c_1e^{2t} - 1 \\ y_2(t) = -c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{array} \right.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 86

1.- **Transformar en sistema de primer orden la siguiente ecuación diferencial**

$$e^t y''' - ty'' + y' - e^t y = 0$$

2.- **Transformar en ecuación diferencial lineal el siguiente sistema**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = 2x' + 5y + 3 \\ y' = -x' - 2y \end{array} \right.$$

3.- **Comprobar que la función** $y(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2t$ **es una solución del problema de valor inicial**

$$\left. \begin{array}{rcl} y'' + 4y & = & 0 \\ y(0) = 0 & ; & y'(0) = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \tag{3.5}$$

4.- **Calcular la solución general de la ecuación**

$$ty'' + 2y' + ty = 0 \quad , \quad t > 0$$

sabiendo que $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ **es solución de la misma.**

5.- **Sabiendo que** e^t **y** te^t **forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea y utilizando el método de variación de las constantes, calcular la solución general de la ecuación**

$$y'' - 2y' + y = \frac{-e^t}{t} \quad , \quad t > 0$$

6.- **Resolver utilizando el método de coeficientes indeterminados, las siguientes ecuaciones diferenciales:**

6.a.- $y'' + 8y = 5t + 2e^{-t}$

6.b.- $y'' + y = t\cos t - \cos t$

6.c.- $y''' - 4y'' + 4y' = 5t^2 - 6t + 4t^2e^{2t} + 3e^{5t}$

7.- **Utilizando el método de variación de parámetros, resolver la siguiente ecuación diferencial**

$$y'' - y = \frac{1}{t}$$

8.- **Resolver**

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d^2x}{dt^2} & = & 4y + e^t \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} & = & 4x - e^t \end{array}\right.$$

9.- **Resolver**

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\dfrac{dx}{dt} - 5x + \dfrac{dy}{dt} & = & e^t \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} & = & 5e^t \end{array}\right.$$

10.- **Resolver**

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' = \dfrac{dy_1}{dt} & = & 2y_1 + y_2 \\[2ex] y_2' = \dfrac{dy_2}{dt} & = & y_1 + 2y_2 \end{array}\right.$$

Tema 4

MODELOS BASADOS EN SISTEMAS DE E.D.O

EJERCICIO 87 Dos poblaciones $x(t)$ e $y(t)$, compuestas inicialmente por $x(0) = 20$ e $y(0) = 185$ individuos, crecen de acuerdo con la ley logística de parámetros $r_1 = 0.3\,; K_1 = 3000$ la $x(t)$ y $r_2 = 0.2\,; K_2 = 3000$ la $y(t)$, respectivamente.

1.- **Hallar el instante en que coinciden los efectivos de las dos poblaciones.**

2.- **¿Coinciden en ese instante, en el que lo hacen los efectivos, las tasas instantáneas de crecimiento?.**

3.- **Calcular las coordenadas del punto en que la velocidad de crecimiento es máxima para cada una de las poblaciones.**

4.- **Si una tercera población $z(t)$ crece según la ley de *Malthus* y sus efectivos para $t = 0$ y $t = 4$ son, respectivamente, $z(0) = x(0) = 20$ y $z(4) = y(0) = 185$, ¿cuántos efectivos componen esta población en el instante t obtenido en el primero de los apartados?.**

5.- **Representar gráficamente $x(t)$ e $y(t)$.**

- Del enunciado deducimos

$$x(t) = \frac{K_1}{1 + A_1 e^{-r_1 t}} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{3000}{1 + A_1 e^{-0.3t}}\,, \quad x(0) = 20\,,$$

sustituyendo

$$20 = \frac{3000}{1 + A_1} \quad \Rightarrow \quad A_1 = 149\,.$$

La primera de las leyes es

$$x(t) = \frac{3000}{1 + 149 e^{-0.3t}}\,.$$

Razonando de la misma manera puede comprobarse que

$$y(t) = \frac{3000}{1 + 15.2e^{-0.2t}}\,.$$

- Si igualamos estas dos expresiones

$$\frac{3000}{1 + 149e^{-0.3t}} = \frac{3000}{1 + 15.2e^{-0.2t}} \quad \Rightarrow \quad 15.2e^{-0.2t} = 149e^{-0.3t} \quad \Rightarrow \quad \frac{15.2}{149} = e^{-0.1t}\,,$$

tomando logaritmos neperianos

$$t = -\frac{1}{0.1}\ln\left(\frac{15.2}{149}\right) \approx 23\,.$$

En este momento ($t = 23$) las tasas instantáneas de crecimiento $T(t) = x'(t)/x(t)$, toman los valores

$$T_1(23) = 0.3\left(1 - \tfrac{x(23)}{3000}\right) = 0.3\left(1 - \tfrac{2608)}{3000}\right) \approx 0.0392$$

$$T_2(23) = 0.2\left(1 - \tfrac{y(23)}{3000}\right) = 0.2\left(1 - \tfrac{2602}{3000}\right) \approx 0.02653$$

- Para el tercero de los apartados necesitamos saber el valor de t tal que $x(t) = K/2\,, y(t) = K/2$. Es decir,

$$x(t) = \frac{3000}{1 + 149e^{-0.3t}} = \frac{3000}{2} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0.3}\ln\left(\frac{1}{149}\right) \approx 16.67$$

$$y(t) = \frac{3000}{1 + 15.2e^{-0.2t}} = \frac{3000}{2} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0.2}\ln\left(\frac{1}{15.2}\right) \approx 13.6$$

Las coordenadas pedidas son (16.67, 1500) en el primer caso y (13.6, 1500) en el segundo.

- Para el siguiente apartado estamos ante el crecimiento exponencial

$$z(t) = z(0)e^{rt} = 20e^{rt}\,, \quad z(4) = y_0 = 185\,.$$

El valor de la constante r de crecimiento es

$$185 = 20e^{4r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{185}{20}\right) \approx 0.556\,.$$

El modelo propuesto es

$$z(t) = 20e^{0.556t}$$

- La Figura 4.1 corresponde a la representación gráfica de las funciones $x(t)$ e $y(t)$.

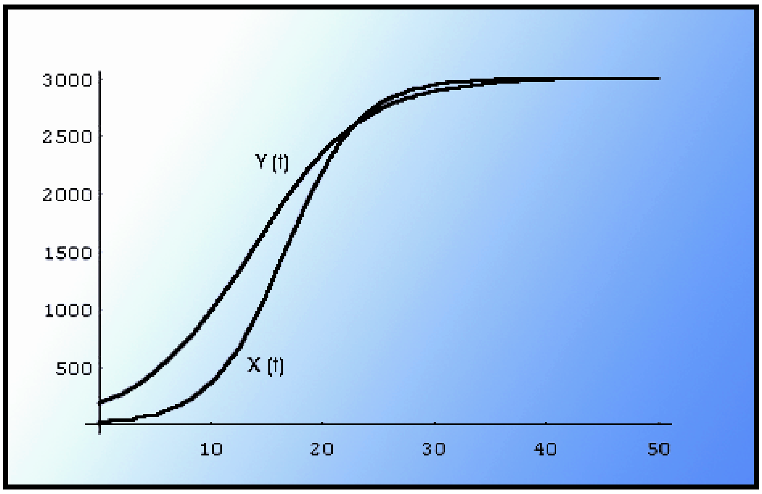


Figura 4.1.

EJERCICIO 88 Las funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ representan los efectivos de dos especies animales competitivas, inicialmente integradas por 200 y 100 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) &=& 0.05y_1(t) - 0.02y_2(t) \\ y_2'(t) &=& -0.02y_1(t) + 0.03y_2(t) \end{array}\right.$$

medido el tiempo t en años.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos para $t = 30$ años.**

- Empezamos expresando el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = 10^{-2}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores y vectores propios de la matriz,

```
A := {{5, -2}, {-2, 3}}
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
```

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 10^{-2}(4+\sqrt{5}), & \vec{v}_1 = (2, 1-\sqrt{5}) \\ \lambda_2 = 10^{-2}(4-\sqrt{5}), & \vec{v}_2 = (2, 1+\sqrt{5}) \end{array}$$

La solución general es

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})\,t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})\,t},$$

Al ser $y_1(0) = 200$, $y_2(0) = 100$, entonces si sustituimos y resolvemos el sistema obtenemos que $c_1 = c_2 = 50$. La solución particular es ahora

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = 50 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})\,t} + 50 \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})\,t}}$$

- La función $y_1(t)$ que nos da los efectivos de la primera de las especies es

$$y_1(t) = 100e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 100e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t},$$

la cual es siempre creciente, lo que implica que para la primera especie, siempre aumentará el número de efectivos. Sin embargo,

$$y_2(t) = 50(1-\sqrt{5})e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 50(1+\sqrt{5})e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t},$$

tiene un término negativo, que se anula cuando

$$50(1-\sqrt{5})e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 50(1+\sqrt{5})e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t \approx 21.5 \text{ años}.$$

Es decir, al cabo de los 21.5 años, la segunda de las especies desaparecerá y sólo quedará la primera de ellas. El sistema de ecuaciones diferenciales quedará en estos momentos reducida a la ecuación

$$y_1'(t) = 0.05y_1(t) \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = y_0e^{0.05t},$$

y en consecuencia $y(30) = 896$ individuos.

EJERCICIO 89 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 10 y 5 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} & = & -3x(t) \\ \\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt} & = & 2y(t) \end{array} \right.$$

medido el tiempo t en meses.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de un año.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- En primer lugar, debemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

y para ello, es necesario encontrar los valores propios de la matriz que define el sistema

```
A := {{−3, 0}, {0, 2}}
Eigenvalues[A]
```

{-3,2}. Es decir, dos valores propios reales con signos distintos. Siendo sus vectores propios asociados

```
Eigenvectors[A]
```

{{1,0},{0,1}}. En consecuencia, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = k_1 e^{-3t} \\ y(t) = k_2 e^{2t} \end{cases}$$

Las constantes $k_1 = 10$ y $k_2 = 5$ las determinamos de las condiciones iniciales $x(0) = 10$ e $y(0) = 5$. Por tanto,

$$x(t) = 10e^{-3t}\,, \quad y(t) = 5e^{2t}\,.$$

Observemos que si $t \to +\infty$, entonces $x(t) \to 0$, e $y(t) \to +\infty$. Por otro lado, si $t \to -\infty$, entonces $x(t) \to +\infty$, e $y(t) \to 0$.

- La población al cabo de un año será de

$$x(12) \approx 2.3 \times 10^{-15}\,, \quad y(12) \approx 1.3 \times 10^{11}$$

- El plano fase lo construimos haciendo uso del programa Mathematica®.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{−3x, 2y}, {x, −25, 25}, {y, −25, 25}]
```

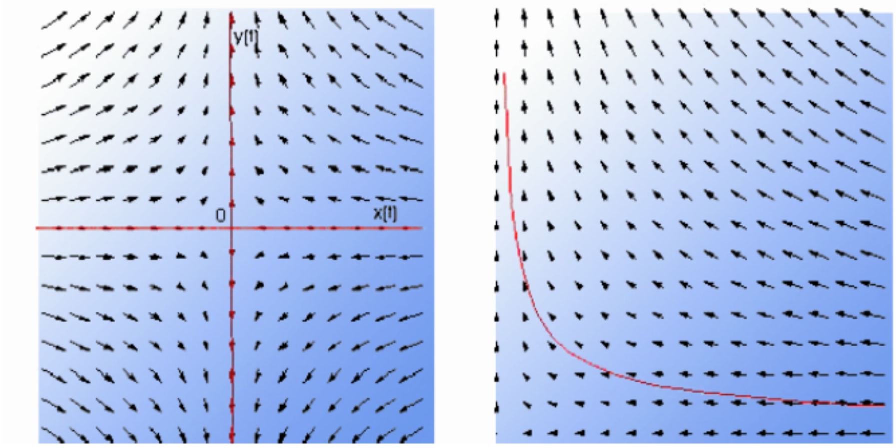


Figura 4.2. Plano fase y curva solución para el sistema.

- Es inmediato comprobar que las únicas soluciones constantes son $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Por tanto, el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema. En la Figura 4.2 podemos observar que en la dirección del eje de abscisas el origen es un sumidero. En cambio, según el eje de ordenadas el $(0,0)$ es una fuente. A este tipo de puntos de equilibrio se le conoce con el nombre de **punto de silla.** Además, el punto de equilibrio es **inestable**.

Como en este ejercicio

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{-3x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{y}dy = \frac{2}{x}dx\,,$$

es una ecuación diferencial de variables separables, entonces es posible encontrar de forma explícita la ecuación de las trayectorias (las curvas solución del sistema).

$$-3\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|k| \quad \Rightarrow \quad y^{-3} = kx^2\,,$$

o bien,

$$y = c\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

De todas ellas, la solución particular $x(0) = 10$, $y(0) = 5$ corresponde a $c = 5\sqrt[3]{100}$. Es decir

$$y(x) = 5\sqrt[3]{\frac{100}{x^2}}\,.$$

EJERCICIO 90 Una población de zorros y otra de conejos conviven en un territorio. La velocidad de crecimiento de la población de conejos es proporcional al número de individuos, con constante de proporcionalidad de 5, menos una cantidad fija de 10 individuos que son cazados. La variación de la población de zorros es de 3 veces la población de conejos mas dos veces la de zorros. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, sabiendo que hay una cantidad inicial de 1000 conejos y 100 zorros.

- La situación planteada puede modelarse por el sistema,

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 5x(t) - 10 \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{array} \right.$$

La primera de las ecuaciones, que nos proporciona la evolución de los conejos, es de variables separables,

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{5x-10} = \int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}\ln(5x-10) = t + C_1$$

Despejando el valor de $x(t)$,

$$\ln(5x-10) = 5t + C_2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 2 + Ke^{5t}$$

podemos determinar el valor de la constante k, a partir del valor inicial,

$$x(0) = 1000 = 2 + K \quad \Rightarrow \quad k = 998.$$

La cantidad de conejos para un momento cualquiera t viene dada por la expresión,

$$\boxed{x(t) = 2 + 998e^{5t}\,.}$$

Si sustituimos este valor de $x(t)$ en la segunda de las ecuaciones diferenciales, obtenemos la ecuación lineal de primer orden,

$$y' = 6 + 2994e^{5t} + 2y \quad \Rightarrow \quad y' - 2y = 6 + 2994e^{5t}$$

que tiene como factor integrante a la función,

$$\mu(t) = e^{-2t}$$

Si multiplicamos la ecuación diferencial lineal por el factor integrante, tenemos

$$\left(y\,e^{-2t}\right)' = 6e^{-2t} + 2994e^{3t}$$

Integrando en los dos miembros,

$$ye^{-2t} = -3e^{-2t} + \frac{2994}{3}e^{3t} + C_3 \quad \Rightarrow \quad y(t) = -3 + 998e^{5t} + C_3e^{2t}$$

Por último, determinamos el valor de la constante C_3, para encontrar la cantidad de zorros existente en cualquier momento t,

$$y(0) = 100 = -3+998+C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = -895 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = -3 + 998e^{5t} - 895e^{2t}\,.}$$

EJERCICIO 91 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 5 y 10 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{\begin{array}{rcr} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} & = & -x(t) \\[2ex] y'(t) = \dfrac{dy}{dt} & = & -4y(t) \end{array}\right.$$

medido el tiempo t en años.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de un 5 año.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- El sistema anterior puede escribirse matricialmente

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz anterior son

```
A := {{−1, 0}, {0, −4}}
Eigenvalues[A]
```

{-1,-4}. Es decir, dos valores propios reales diferentes de signo negativo. Es de esperar dos soluciones en líneas rectas que tiendan a cero cuando $t \to \infty$.

Los vectores propios asociados son

```
Eigenvectors[A]
```

{{1,0},{0,1}}. En consecuencia, la solución general viene dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = k_1 e^{-t} \\ y(t) = k_2 e^{-4t} \end{cases}$$

Encontramos $k_1 = 5$ y $k_2 = 10$ a partir de las condiciones iniciales $x(0) = 5$ e $y(0) = 10$. Por tanto, $x(t) = 5e^{-3t}$ e $y(t) = 10e^{2t}$.

- La población al cabo de cinco años será de

$$x(5) = 5e^{-3t} \approx 0.0336897\,, \quad y(5) = 10e^{2t} \approx 2.06115 \times 10^{-8}$$

- A continuación construimos el plano fase

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{−x, −4y}, {x, −25, 25}, {y, −25, 25}]
```

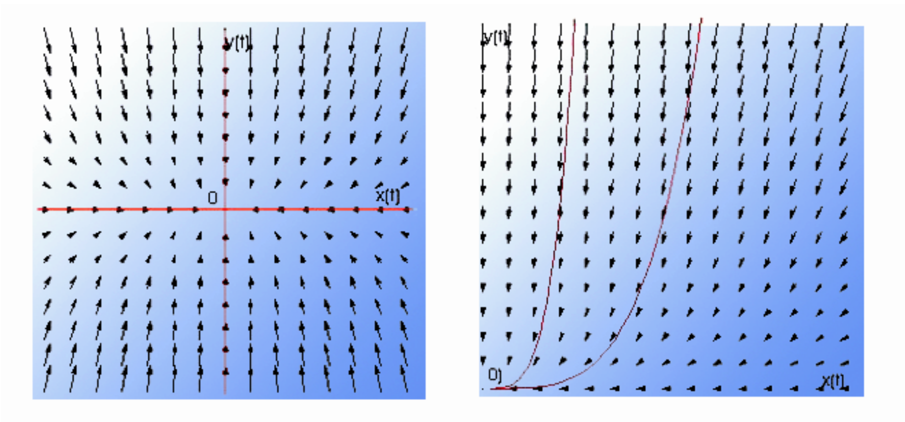


Figura 4.3. Plano fase y curva solución para el sistema.

- Es fácil comprobar que el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema. En la Figura 4.3 podemos observar que en la direcciones de los ejes, el origen es un sumidero. En este caso, el origen es un punto de equilibrio **estable**. A largo plazo, independientemente de las condiciones iniciales, las dos especies desaparecerán.

Como en el ejercicio anterior,

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{-4y}{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = \frac{4}{x}dx\,,$$

es una ecuación diferencial de variables separables. Podemos encontrar la ecuación de las trayectorias

$$\ln|y| = 4\ln|x| + \ln|k| \quad \Rightarrow \quad y = kx^4\,,$$

La solución particular $x(0) = 5$, $y(0) = 10$ corresponde a $k = 10/5^4$. Es decir

$$y(x) = \frac{10}{5^4}x^4\,.$$

EJERCICIO 92 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 5 y 5 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} & = & 2x(t) + 2y(t) \\[2ex] y'(t) = \dfrac{dy}{dt} & = & x(t) + 3y(t) \end{array}\right.$$

medido el tiempo t en años.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de 3 años.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- Estamos ante el sistema de ecuaciones diferenciales lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\,.$$

Para resolverlo encontramos los valores propios de la matriz

```
A := {{2,2},{1,3}}
Eigenvalues[A]
```

{4,1}. Es decir, dos valores propios reales con signos positivos. Siendo sus vectores propios asociados

```
Eigenvectors[A]
```

{{1,1},{-2,1}}. En consecuencia, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x(t) = k_1 e^{4t} - 2k_2 e^{t} \\ y(t) = k_1 e^{4t} + k_2 e^{t} \end{array}\right.$$

Las soluciones en líneas rectas las obtendremos suponiendo que $k_1 = 0$ y a continuación $k_2 = 0$.

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } k_1 = 0 & \Rightarrow & y = -\frac{1}{2} \\ \text{Si } k_2 = 0 & \Rightarrow & y = x \end{array}$$

La solución particular pedida, la deducimos de las condiciones iniciales $x(0) = 10$ e $y(0) = 5$. Por tanto, $k_1 = 5$, $k_2 = 5$, y en consecuencia, $x(t) = 5e^{4t}$ e $y(t) = 5e^{4t}$.

- La población en el tercer año será $x(3) = y(3) = 813774$.
- El plano fase lo construimos haciendo uso del programa Mathematica®.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{2x + 2y, x + 3y}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25}]
```

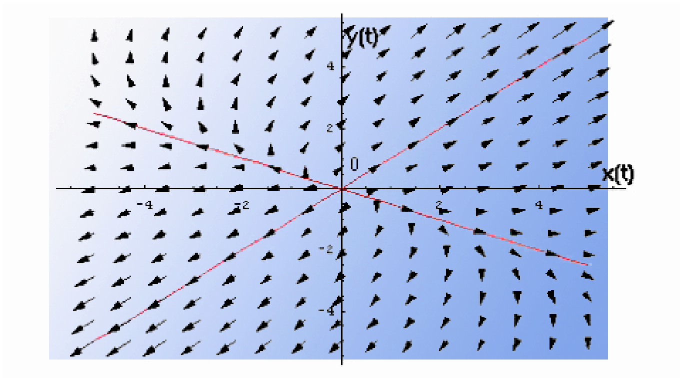


Figura 4.4. Plano fase y curvas solución $y = x$, $y = -0.5x$.

- Las únicas soluciones constantes son $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Por tanto, el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema. En la Figura 4.4 podemos observar que el origen es una **fuente**, todas las soluciones se alejan del origen cuando el tiempo crece. Además, el punto de equilibrio es **inestable**.

  Veamos ahora que en este caso es imposible obtener una expresión explícita de las órbitas o trayectorias. Razonando de manera similar a los ejercicios anteriores,

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{2x+2y} \quad \Rightarrow \quad (2x+2y)dy = (x+3y)dx\,,$$

  es una ecuación diferencial homogénea de grado uno. Para resolverla, es necesario dividir la ecuación diferencial por x y hacer posteriormente el cambio $y/x = z$, con lo cual $dy = xdz + zdx$. Sustituyendo

$$(1+3z)dx = (2+2z)(xdz + zdx) \quad \Rightarrow \quad (1+z-2z^2)dx = (2+2z)xdz\,,$$

  se convierte en una ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{1}{x}\,dx = \frac{2+2z}{1+z-2z^2}\,dz\,.$$

Procedemos a descomponer la fracción que aparece en el segundo miembro, como suma de fracciones simples

$$\frac{2+2z}{1+z-2z^2} = -\frac{1+z}{(z-1)(z+0.5)} = -\frac{4/3}{z-1} + \frac{1/3}{z+0.5}\,.$$

Integrando

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{2+2z}{1+z-2z^2}\,dz \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ln|x| &= -\int \tfrac{4/3}{z-1}dz + \int \tfrac{1/3}{z+0.5}dz \\ &= -\tfrac{4}{3}\ln|z-1| + \tfrac{1}{3}\ln|z+0.5| \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio anterior

$$\ln|x| = -\frac{4}{3}\ln|\frac{y}{x}-1| + \frac{1}{3}\ln|\frac{y}{x}+0.5| + k\,,$$

donde puede apreciarse las dificultades de poder encontrar una expresión explícita del tipo $y = \varphi(x)$.

EJERCICIO 93 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 5 y 5 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{\begin{array}{lcrr} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} & = & -2x(t) & -3y(t) \\ \\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt} & = & 3x(t) & -2y(t) \end{array}\right.$$

medido el tiempo t en meses.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de un año.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- Empezamos escribiendo el sistema matricialmente

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Para resolverlo es necesario encontrar los valores propios de la matriz

```
A := {{-2, -3}, {3, -2}}
Eigenvalues[A]
```

{-2+3i, -2-3i}. Es decir, dos números complejos conjugados. Siendo sus vectores propios asociados

```
Eigenvectors[A]
```

{{i,1},{-i,1}}. Para poder encontrar la solución general del sistema, necesitamos conocer dos soluciones particulares linealmente independientes. Para ello, procedemos de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-2+3i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t} \left(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t\right) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Multiplicando

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t} \left(-\operatorname{sen} 3t + i \cos 3t\right) \\ y(t) = e^{-2t} \left(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t\right) \end{cases}$$

La solución general vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} , \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R} ,$$

o bien

$$\begin{cases} x(t) = -k_1 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t + k_2 e^{-2t} \cos 3t \\ y(t) = \quad k_1 e^{-2t} \cos 3t + k_2 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t \end{cases}$$

De todas ellas, la que pasa por el punto $(x(0), y(0)) = (5, 5)$ corresponde a $k_1 = 5$ y $k_2 = 5$.

- El número de animales al cabo de 1 año será,

$$\begin{cases} x(12) = -5e^{-24} \operatorname{sen} 36 + 5e^{-24} \cos 36 \\ y(12) = 5e^{-24} \cos 36 + 5e^{-24} \operatorname{sen} 36 \end{cases}$$

- Observemos que ahora no existen soluciones en línea recta, ya que si $k_1 = 0$, entonces

$$x(t) = k_2 e^{-2t} \cos 3t\,, \quad y(t) = k_2 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t\,,$$

y no podemos expresar $y = \text{cte}\ x$.

- Este hecho se observa fácilmente si dibujamos el plano fase.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{−2x − 3y, 3x − 2y}, {x, −25, 25}, {y, −25, 25}]
```

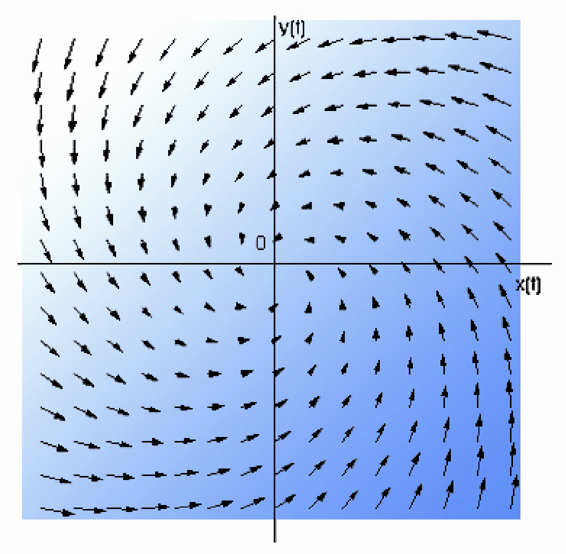


Figura 4.5. Plano fase.

La figura siguiente muestra la evolución a lo largo del tiempo de las soluciones $x(t) = 5e^{-2t}\cos 3t$ e $y(t) = 5e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,3t$.

Las dos poblaciones se extinguen a largo plazo.

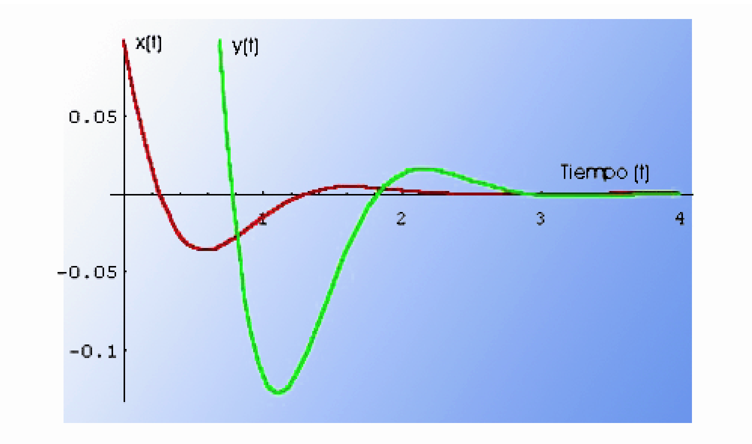


Figura 4.6. Curvas solución $x(t)\,, y(t)$.

En la Figura 4.5 se aprecia que el punto de equilibrio (0.0) es un **sumidero en espiral**.

EJERCICIO 94 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 6 y 9 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{\begin{array}{rcll} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} & = & -2x(t) & +y(t) \\ \\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt} & = & -2y(t) & \end{array}\right. \tag{4.1}$$

medido el tiempo t en meses.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de un año.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Si encontramos los valores propios de la matriz que define el sistema

```
A := {{−2, 1}, {0, −2}}
Eigenvalues[A]
```

{-2, -2}. En este caso, sólo existe un valor propio que es un número real positivo. Los vectores propios asociados son

```
Eigenvectors[A]
```

{{1,0},{0,0}}. Existe un único valor propio linealmente independiente. Ahora, sólo podemos encontrar la solución

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o bien

$$x(t) = e^{-2t}, \quad y(t) = 0\,.$$

Observemos que el eje de abscisas ($y = 0$) es una recta solución del sistema. Para el resto de las soluciones, no podemos encontrar la solución general, pero podemos analizar el sistema de manera cualitativa.

- Empezamos dibujando el plano fase.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{−2x + y, −2y}, {x, −25, 25}, {y, −25, 25}]
```

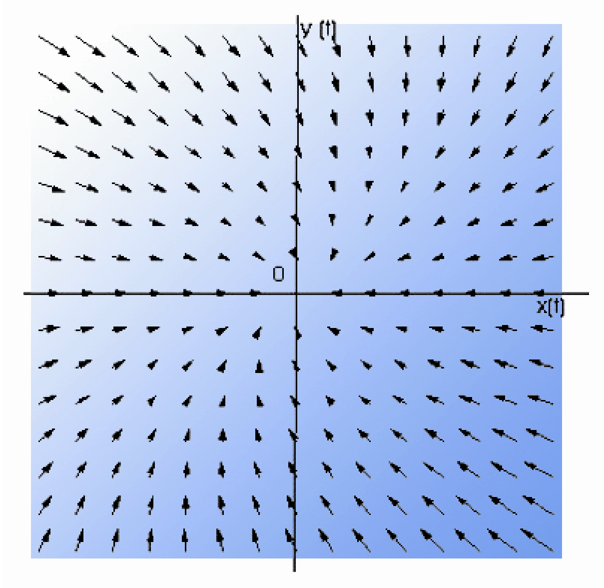


Figura 4.7. Plano fase.

- Podemos observar, que el origen es un sumidero. Si empezamos con unas condiciones iniciales $(x(0), y(0))$ que no se encuentren sobre uno de los ejes, entonces la órbita gira y llega al origen en dirección tangente a la solución en línea recta $(y = 0)$. El punto de equilibrio $(0, 0)$ en una **fuente en espiral**.

  Por último, encontremos la solución general del sistema (4.1). De la segunda ecuación deducimos
  $$y' = -2y \quad \Rightarrow \quad y(t) = k_1 e^{-2t}\,,$$
  sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones
  $$x' = -2x + k_1 e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad x' + 2x = k_1 e^{-2t}\,,$$
  que es una ecuación diferencial lineal.
  $$\mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}\,,$$
  multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(t)$,
  $$x'e^{2t} + 2xe^{2t} = k_1 \quad \Rightarrow \quad xe^{2t} = k_1 t + k_2 \quad \Rightarrow \quad x = k_1 te^{-2t} + k_2 e^{-2t}$$
  En resumen, la solución general viene dada por
  $$x(t) = k_1 te^{-2t} + k_2 e^{-2t}\,, \quad y(t) = k_1 e^{-2t}\,.$$
  La solución particular pedida $(x(0),\, y(0)) = (6,\, 9)$ corresponde a $k_2 = 6$, $k_1 = 9$.
  $$\boxed{x(t) = 9te^{-2t} + 6e^{-2t}, \qquad y(t) = 9e^{-2t}}$$

- Al cabo de un año, el número de animales será de
  $$x(12) \approx 4.30365 \times 10^{-9}\,, \quad y(12) \approx 3.39762 \times 10^{-10}$$

EJERCICIO 95 Sean $x(t)$, $y(t)$ las poblaciones de dos especies que compiten por recursos. Un incremento en cualquier especie tiene un efecto adverso sobre la razón de crecimiento de la otra. En concreto

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x'(t) = 2x\left(1-\frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y'(t) = 3y\left(1-\frac{y}{3}\right) - 2xy \end{aligned}\right.$$

Analizar el comportamiento a largo plazo de ambas poblaciones.

- Supongamos en primer lugar que $y = 0$, entonces el sistema se reduce al modelo logístico $x'(t) = 2x(1 - x/2)$. La línea fase de esta ecuación coincidirá con el eje de abscisas del plano fase. Del mismo modo, si $x(t) = 0$, entonces estamos ante el modelo logístico $y'(t) = 3y(1 - y/3)$, y de nuevo su línea fase coincidirá con el eje de ordenadas del plano fase. En consecuencia, tenemos los puntos de equilibrio

  $$P_1 = (0,\,0)\,, \quad P_2 = (2,\,0)\,, \quad P_3 = (0,\,3)\,.$$

  Existe otro punto de equilibrio $P_4 = (1,\,1)$ que se obtiene resolviendo el sistema:

  $$\left\{\begin{array}{l} 2\left(1-\frac{x}{2}\right) - y = 0 \\ 3\left(1-\frac{y}{3}\right) - 2x = 0 \end{array}\right.$$

  Por el teorema de unicidad de las soluciones, si partimos de condiciones iniciales situadas en el primer cuadrante (en el resto de los puntos no tiene sentido biológico), las órbitas deben de permanecer siempre en esta región.

  De los cuatro puntos de equilibrio el P_4 presenta especial interés, ya que nos informa de que las dos especies pueden convivir.

  Para realizar el estudio cualitativo del sistema, tenemos que representar $y = 2 - x$ e $y = 3 - 2x$. Estas rectas se cortan en el cuarto punto de equilibrio y divide al primer cuadrante en cuatro regiones.

  El crecimiento o decrecimiento de las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ puede estudiarse fácilmente analizando el signo de sus primeras derivadas. Para ello, escribimos el sistema como

  $$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x\,(2-x-y) \\ y'(t) = y\,(3-y-2x) \end{array}\right. \tag{4.2}$$

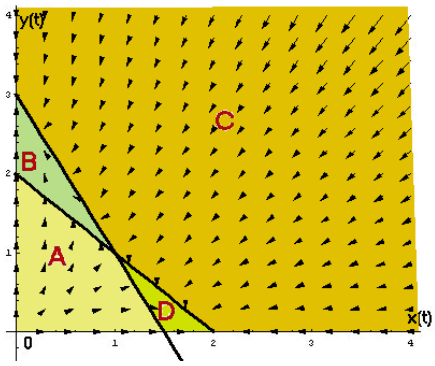


Figura 4.8. Plano fase del sistema.

Para puntos situados en la región A, tanto $x'(t)$ como $y'(t)$ son positivas, y por lo tanto, las dos poblaciones aumentan. Si nos trasladamos a la segunda de las regiones B, entonces $x(t)$ disminuye e $y(t)$ aumenta. Para puntos situados en C, disminuyen ambas poblaciones. Finalmente en D, la población $x(t)$ aumenta y disminuye $y(t)$. En la figura siguiente hemos dibujado en el plano fase algunas de las trayectorias.

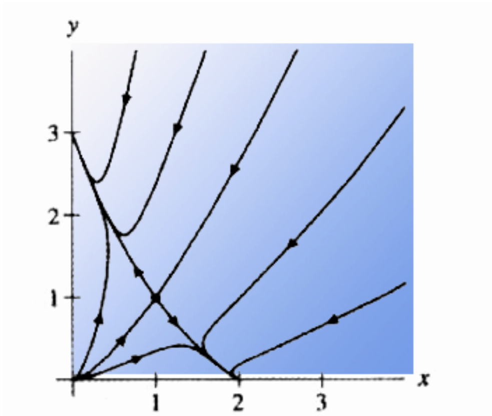


Figura 4.9. Órbitas del sistema.

Observemos como el punto de equilibrio (1, 1) es un punto de silla. Los dibujos sugieren que las soluciones que no tienden al (1, 1) lo hacen hacia (0, 3) o bien al (2, 0).

Conclusión: la mayor parte de las soluciones tienden a una población de equilibrio con una especie extinta y la otra en su capacidad de carga. La separatriz estable del punto de silla (1, 1) divide los dos comportamientos a largo plazo del modelo.

EJERCICIO 96 Supongamos una epidémia que se desarrolla sobre una población aislada sometida a las siguientes hipótesis:

- **Los individuos se infectan a una velocidad proporcional al producto del número de individuos infectados por el número de individuos susceptibles.**
- **La longitud del período de incubación es despreciable. Las personas infectadas se convierten inmediatamente en infecciosas.**
- **Por término medio, un individuo infectado muere o se recupera a los diez días.**
- **Nadie está enfermo inicialmente.**
- **Las personas infectadas no procrean pero los individuos susceptibles tienen una tasa de nacimiento de 0.0003 por individuo y año. Los recien nacidos son susceptibles.**

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ el número de personas susceptibles e infectadas, respectivamente, en el tiempo t. El sistema de ecuaciones diferenciales que representa a esta situación es:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x'(t) = -\lambda x\, y + 0.0003x \\ \frac{dy(t)}{dt} &= y'(t) = \lambda x\, y - 0.1y \end{aligned}\right.$$

Supongamos que $\lambda = 0.05$, entonces podemos analizar el plano de fases del modelo,

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = f(x,y) = 0.0003x - 0.05xy = 0.05x(0.03 - y) \\ y'(t) = g(x,y) = 0.05x\, y - 0.1y = 0.05y(x-2) \end{array}\right. \tag{4.3}$$

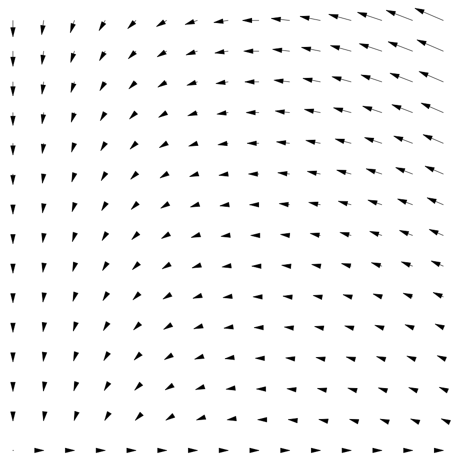
Los puntos de equilibrio del modelo, las soluciones constantes, se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones no lineal:

$$f(x,y) = 0\,; \qquad g(x,y) = 0\,,$$

cuyas soluciones son

$$P_1 = (0,0)\,; \quad P_2 = (2, 0.03)\,.$$

Las isoclinas nulas son aquellas donde $x'(t) = f(x,y) = 0$, cuando una de las trayectorias atraviesa una de estas líneas, entonces el valor de la derivada en ese punto es cero. En nuestro caso, la representación gráfica de estas isoclinas son rectas verticales. Por lo tanto, cuando una trayectoria atraviesa a una de estas isoclinas nulas, sólo puede hacerlo si se mueve en una dirección vertical en el momento de atraversarla. Un razonamiento similar puede hacerse respecto de la isoclina nula correspondiente a $y' = g(x,y) = 0$.



El punto de intersección de las isoclinas nulas son los puntos fijos o de equilibrio del modelo. Cuando se alcanza uno de estos puntos, entonces las trayectorias permanecerán en ese punto para el resto del tiempo. Las regiones del plano OXY donde $x'(t) < 0$ y donde $y'(t) > 0$, están siempre separadas por x-isoclinas nulas. Y evidentemente igual en el caso de la variable $y(t)$.

Si clasificamos los puntos de equilibrio a través de la matriz jacobiana:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0003 - 0.05y & -0.05x \\ 0.05y & 0.05x - 0.1 \end{pmatrix}$$

particularizamos para cada uno de los puntos de equilibrio,

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0.0003 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}$$

un valor propio es positivo y el otro es negativo. En consecuencia, el punto de equilibrio $(0,0)$ es un nodo inestable.

De manera similar,

$$J(2,0.03) = \begin{pmatrix} -0.0012 & -0.1 \\ 0.0015 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por valores propios los números complejos conjugados $-0.0006 \pm 0.0122327i$. El punto fijo $(2, 0.03)$ es un foco estable, las soluciones se mueven en espiral alrededor del punto de equilibrio.

EJERCICIOS PROPUESTOS

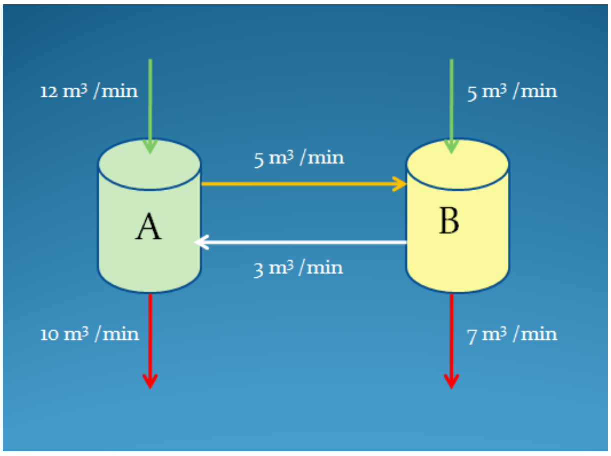
EJERCICIO 97

1.- **Encontrar todos los puntos de equilibrio para los sistemas siguientes. Explicar la importancia de estos puntos para las poblaciones de presa y depredadores.**

(a) $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 10x\left(1 - \dfrac{x}{10}\right) - 20xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -5y + \dfrac{xy}{20} \end{array} \right.$$

(b) $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 0.3x - \dfrac{xy}{100} \\ \\ \frac{dy}{dt} = 15y\left(1 - \dfrac{y}{15}\right) + 25xy \end{array} \right.$$

2.- **Dos depósitos A de 45 metros cúbicos de capacidad y el B de 24 metros cúbicos, están conectados entre sí tal y como indica la Figura**



Las velocidades representadas en la Figura son las del agua que fluye continuamente por el sistema. Si inicialmente se deposita 1 kilo de sal en el depósito B y en el A se están añadiendo de forma continua 3 kilos de sal por minuto desde el exterior.

- **Encontrar las cantidades de sal en los depósitos A y B en un minuto cualquiera** t
- **Estudiar el comportamiento a largo plazo del sistema**

3.- **Dos tanques se colocan en posición de cascada. El tanque 1 contiene inicialmente 20 libras de sal disuelta en 100 galones de salmuera y el tanque 2 contiene en un principio 150 galones de solución salina en la que se han disuelto 90 kilos de sal. Al tiempo cero, se agrega al tanque**

1 una solución salina que contiene 0.5 libra de sal por galón a razón de 5 galones/minuto. El tanque 1 tiene una salida que descarga solución salina en el tanque 2 a razón de 5 galones/minuto y el tanque 2 tiene también una salida de 5 galones/minuto. Determinar la cantidad de sal que hay en cada uno de los tanques para cualquier tiempo $t \geq 0$. Calcular cuándo será mínima la concentración de sal en el tanque 2, y cuánta sal hay en el tanque en ese momento.

4.- **Sean $x(t)$, $y(t)$ las poblaciones de dos especies que compiten por los recursos disponibles. Un incremento en cualquier especie tiene un efecto adverso sobre la razón de crecimiento de la otra. En concreto**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x'(t) = 2x - x^2 - xy \\ \\ \frac{dy}{dt} = y'(t) = 3y - y^2 - 2xy \end{cases}$$

Analizar el comportamiento a largo plazo de ambas poblaciones

5.- **Sean $x(t)$ $y(t)$ las poblaciones de dos especies que compiten por los recursos disponibles. El modelo que representa a estas dos poblaciones en competencia es:**

$$\begin{cases} x'(t) = (4 - 2x(t))x(t) + x(t)y(t) \\ y'(t) = (4 - 2y(t))y(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

Realizar un estudio cualitativo del modelo para estudiar el comportamiento a largo plazo de las poblaciones.

6.- **En un acuario disponemos de una población de dos tipos de peces que compiten entre si. El modelo que representa a estas dos poblaciones en competencia es**

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 0.5x^2(t) - 0.2x(t)y(t) \\ y'(t) = 1.2y(t) - 0.4y^2(t) - 0.3x(t)y(t) \end{cases} \tag{4.4}$$

donde $y(t)$ representa a una población de peces y $x(t)$ a otra población diferente de peces.

- **Explicar el significado "biológico"de las ecuaciones (4.4).**
- **Encontrar los puntos de equilibrio del modelo**
- **Si inicialmente las poblaciones son $x(0) = 2$, $y(0) = 1$, ¿aumentan o disminuyen ambas poblaciones?**

7.- **Dos poblaciones $x(t)$, $y(t)$ evolucionan según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:**

$$\begin{cases} x'(t) = x - 1 \\ y'(t) = y - 2x - 1\,. \end{cases}$$

- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- **Si los valores iniciales son $x(0) = 1$, $y(0) = 3$, ¿cuál será el valor de $x(5)$ y de $y(10)$? Razona la respuesta.**

8.- **Las funciones $x(t); y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales inicialmente integradas por 20 y 10 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \qquad\qquad y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{array} \right.$$

medido el tiempo t en años. Encontrar el número de individuos para $t = 5$ años.

9.- **Se considera el siguiente modelo de interacción entre especies,**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = (8 - 2x - 3y)x \\ y'(t) = (4 - 2x - y)y \end{array} \right.$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ representan al número de individuos de cada especie medido en miles de unidades.

- **Determinar el comportamiento de cada una de las especies en ausencia de la otra.**
- **Calcular, caso de existir, los puntos de equilibrio.**
- **Si se dispone del siguiente dato inicial: $x(0) = 2$; $y(0) = 1$, encontrar la dirección de crecimiento o decrecimiento (estudio cualitativo del modelo).**
- **A la luz del apartado anterior, discutir de forma razonada si el estado de coexistencia es estable o inestable.**

10.- **Sea el modelo,**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 0.2x(t) - 0.05x(t)y(t) \\ y'(t) = -0.1y(t) + 0.2x(t)y(t) \end{array} \right. \tag{4.5}$$

donde $y(t)$ representa a una población de peces y $x(t)$ a otra población diferente de peces.

- **Explicar el significado "biológico"de las ecuaciones (4.5).**
- **Realizar el estudio cualitativo de (4.4), para analizar el comportamiento "a largo plazo"de ambas poblaciones.**

Tema 5

MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 98 Sea el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = (t - y)\,, \qquad y(0) = 2\,.$$

Encontrar $y(1)$ utilizando el método de *Euler* de paso $h = 0.2$

- La ecuación diferencial permite ser resuelta por diversos métodos de integración, siendo su solución general

  $$y(t) = t - 1 + ce^{-t}\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

  La solución particular que pasa por $y(0) = 2$ es

  $$y(t) = t - 1 + 3e^{-t}\,.$$

  En consecuencia

  $$\boxed{y(1) = 1.10364}$$

- A continuación vamos a utilizar el método de *Euler*

  $$y_{k+1} = y_k + h\,f(t_k, y_k)\,, \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots, n-1$$

  para encontrar un valor aproximado de $y(1)$. En este ejercicio,

  $$h = 0.2, \qquad n = 5\,, \qquad f(t,y) = t - y, \qquad (t_0, y_0) = (0, 2)\,.$$

  De esta manera:

  $$\begin{array}{l}
  y(0.2) = y_1 = y_0 + h\,f(t_0, y_0) = 2 + 0.2\,(0.0 - 2) = 1.6 \\
  y(0.4) = y_2 = y_1 + h\,f(t_1, y_1) = 1.6 + 0.2\,(0.2 - 1.6) = 1.32 \\
  y(0.6) = y_3 = y_2 + h\,f(t_2, y_2) = 1.32 + 0.2\,(0.4 - 1.32) = 1.136 \\
  y(0.8) = y_4 = y_3 + h\,f(t_3, y_3) = 1.136 + 0.2\,(0.6 - 1.136) = 1.0288 \\
  y(1.0) = y_5 = y_4 + h\,f(t_4, y_4) = 1.0288 + 0.2\,(0.8 - 1.0288) = \boxed{0.98304}
  \end{array}$$

El error que se comete será de $1.10364 - 0.98304 = 0.1206$, o en forma de porcentaje

$$\frac{|1.10364 - 0.98304|}{1.10364} = 0.1092 \quad \Rightarrow \quad 10.92\,\%\,.$$

- El ejercicio también puede ser resuelto haciendo uso del `Mathematica`®. Empezamos introduciendo los datos,

```
f[t_, y_] := t - y;
a = 0.;
b = 1.;
datos = {2.};
n = 5;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
```

A continuación aplicamos el método de *Euler* y guardamos los resultados en la lista que tiene por nombre `datos`.

```
For[i = 2, i <= n + 1, i + +, AppendTo[datos, datos[[i - 1]]+
hf[nodo[[i - 1]], datos[[i - 1]]]]];
```

La respuesta a nuestro ejercicio será

```
Table[{nodo[[i]], datos[[i]]}, {i, n + 1}]
```

$$\boxed{\{\{0., 2.\}, \{0.2, 1.6\}, \{0.4, 1.32\}, \{0.6, 1.136\}, \{0.8, 1.0288\}, \{1., 0.98304\}\}\,.}$$

Estos datos podemos representarlos a través de la siguiente instrucción:

```
aproximada = ListPlot[Table[{nodo[[i]], datos[[i]]}, {i, n + 1}],
PlotJoined- > True]
```

El resultado puede verse en la Figura 5.1.

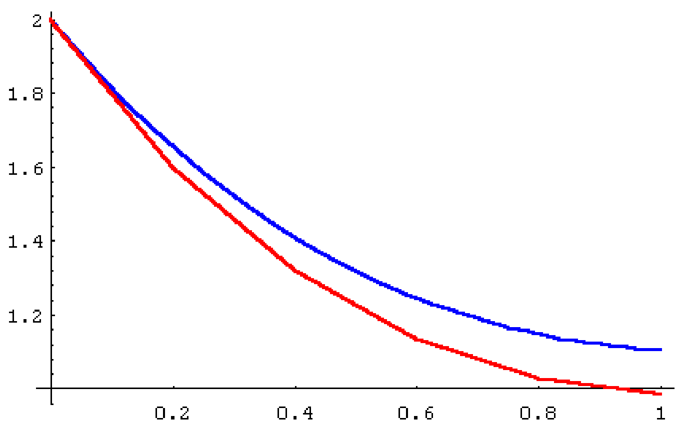


Figura 5.1. Rojo: solución aproximada. Azul: solución exacta.

- También podemos resolver el problema de valores iniciales con las siguientes instrucciones.

$$\begin{array}{l}\texttt{solucion} = \texttt{DSolve}[\texttt{y}'[\texttt{t}] == \texttt{t} - \texttt{y}[\texttt{t}], \texttt{y}[\texttt{t}], \texttt{t}] \\ \texttt{solecuacion} = \texttt{y}[\texttt{t}]/.\texttt{solucion}[[1]] \\ \texttt{constante} = \texttt{Solve}[(\texttt{solecuacion}/.\texttt{t} \to 0) == 1, \texttt{C}[1]] \\ \texttt{solucionexacta} = \texttt{solecuacion}/.\texttt{constante}[[1]]\end{array}$$

Finalmente dibujamos la solución exacta (ver Figura 5.1.)

$$\begin{array}{l}\texttt{graficaexacta} = \texttt{Plot}[\texttt{solucionexacta}, \{\texttt{t}, \texttt{a}, \texttt{b}\}, \\ \texttt{PlotStyle} \to \{\texttt{Dashing}[\{0.02, 0.02\}]\}];\end{array}$$

y superponemos las dos gráficas:

$$\texttt{Show}[\texttt{aproximada}, \texttt{graficaexacta}];$$

EJERCICIO 99 Utilizar el método de *Euler* para aproximar la solución del problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = y' = y - t^2 + 1\,, \quad 0 \leq t \leq 2\,, \quad y(0) = 0.5\,,$$

con $n = 10$.

- La ecuación diferencial es lineal de primer orden. La solución exacta del ejercicio viene dada por

$$y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(2) = 5.3054720\,.}$$

- Si utilizamos el método de *Euler* con

$$h = 0.2, \quad n = 10\,, \quad f(t,y) = y - t^2 + 1, \quad (t_0, y_0) = (0, 0.5)\,,$$

obtenemos los valores reflejados en la Tabla 5.1.

t_k	y_k	$y(0)$	$ERROR$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.15200000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	**4.8657845**	**5.3054720**	**0.4396874**

Tabla 5.1.

Observemos como los errores crecen a medida que aumentamos los valores de t_k. Esto es consecuencia de la poca estabilidad del método de *Euler*.

EJERCICIO 100 Aplicar el método de *Euler* con $h = 0.1$, para calcular un valor aproximado de $y(1)$ del problema,

$$y' = -2ty\,, \quad y(0) = 1\,.$$

- Es fácil comprobar que $y = e^{-t^2}$, es la solución del problema de valor inicial. Por tanto
$$\boxed{y(1) = 0.3678794412}$$

- Tomamos el intervalo $[0,\, 1]$ y lo dividimos en diez partes. Obtenemos de esta manera la partición t_j con $j = 0, 1, 2, \cdots, 10$. Si aplicamos el método de *Euler*
$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k,\, y_k) = y_k - 2ht_k y_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, 9\,,$$
con $y_0 = y(0) = 1$, entonces obtenemos los valores que aparecen en la Tabla 5.2.

t_k	y_k	$ERROR$	t_k	y_k	$ERROR$
0.0	1.00000	0.00000	0.6	0.73224	0.03456
0.1	1.00000	0.00995	0.7	0.64437	0.03174
0.2	0.98000	0.01921	0.8	0.55416	0.02686
0.3	0.94080	0.02686	0.9	0.46549	0.020637
0.4	0.88435	0.03220	**1.0**	**0.38170**	**0.01382**
0.5	0.81360	0.03480	–	–	–

Tabla 5.2.

- Podemos comprobar como el error crece cuando aumentamos el valor de k. Utilizando el software adecuado es fácil ver que $y_{100} = 0.3691201$ es un valor aproximado de $y(1)$. Ahora, el error cometido es $|0.3691201 - 0.3678794| = 0.0012406$, que es mucho menor que cuando el paso era $h = 0.1$

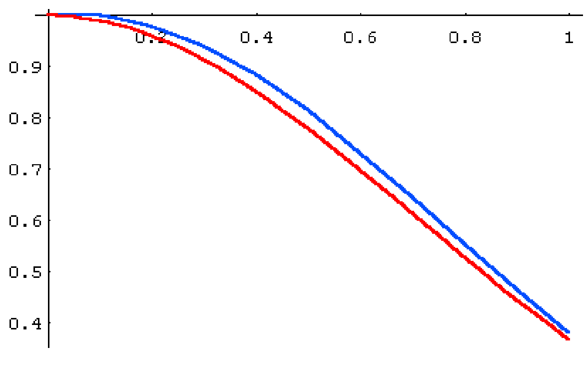


Figura 5.2. Rojo: valor exacto. Azul: valor. aproximado.

EJERCICIO 101 Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t - y\,, \quad y(0) = 2\,,$$

utilizando el método de *Taylor* **de segundo orden y con un paso $h = 0.2$.**

- Sabemos que para este método

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k,\, y_k) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t,y)}{dt}\right)_{(t_k,y_k)}\,, \quad k = 0,\, 1,\, \cdots, n\,,$$

donde

$$\frac{df(t,\, y)}{dt} = \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}\,.$$

En nuestro caso,

$$\frac{df(t,\, y)}{dt} = 1 - t + y\,,$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} y_1 = y(0.2) \quad &= y_0 + hf(t_0,y_0) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t,y)}{dt}\right)_{(t_0,y_0)} \\ &= y_0 + h(t_0 - y_0) + \frac{h^2}{2!}(1 - t_0 + y_0) \\ &= 2 + 0.2(0-2) + \frac{0.2^2}{2}(1 - 0 + 2) = 1.66\,. \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned} y_2 = y(0.4) \quad &= y_1 + hf(t_1,y_1) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t,y)}{dt}\right)_{(t_1,y_1)} \\ &= y_1 + h(t_1 - y_1) + \frac{h^2}{2!}(1 - t_1 + y_1) \\ &= 1.66 + 0.2(0.2 - 1.66) + \frac{0.2^2}{2}(1 - 0.2 + 1.66) = 1.4172\,. \end{aligned}$$

Aplicando de forma reiterativa este proceso obtenemos

$$y_3 = y(0.6) = 1.254\,, \quad y_4 = y(0.8) = 1.15637,\,, \quad \boxed{y_5 = y(1) = 1.11222}$$

El error absoluto que cometemos es $1.11222 - 1.10364 = 0.00858$, y un error porcentual del $0.78\,\%$.

- A continuación resolveremos este mismo ejercicio con `Mathematica`®. Las primeras instrucciones corresponden a la introducción de los datos.

```
y'[t] = t - y[t];
a = 0.;
b = 1.;
n = 5;
datos = {2.};h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
```

Ahora, tenemos que construir las funciones que nos dan las derivadas primera y segunda de cualquier solución de la ecuación diferencial asociada a nuestro problema.

```
dy1 = y'[t];
dy2 = D[y'[t], t];
s1[u_, v_] := dy1/.{y[t]- > v, t- > u}
s2[u_, v_] := dy2/.{y[t]- > v, t- > u}
```

Posteriormente construimos las aproximaciones, programando el método de *Taylor*

```
For[i = 2, i <= n + 1, i + +, aux = datos[[i - 1]]+
h * s1[nodo[[i - 1]], datos[[i - 1]]]+
(h^2/2)s2[nodo[[i - 1]], datos[[i - 1]]];
AppendTo[datos, aux]];
```

El resultado puede visualizarse a través de la instrucción

```
Print[Table[{nodo[[i]], datos[[i]]}, {i, n + 1}]]
```

$$\boxed{\{\{0., 2.\}, \{0.2, 1.66\}, \{0.4, 1.4172\}, \{0.6, 1.2541\}, \{0.8, 1.15637\}, \{1., 1.11222\}\}}$$

EJERCICIO 102 Aplicar el método de *Taylor* de órdenes dos y cuatro al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y' = y - t^2 + 1\,, \quad 0 \leq t \leq 2\,, \quad y(0) = 0.5\,,$$

con $n = 10$.

- Empezamos analizando el caso de orden dos. Para ello necesitamos conocer

$$\frac{df(t, y(t))}{dt} = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1) = y' - 2t = y - t^2 + 1 - 2t\,, \tag{5.1}$$

con lo cual podemos aplicar

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k,\, y_k) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t, y)}{dt}\right)_{(t_k, y_k)}\,, \quad k = 0,\, 2,\, \cdots, n\,,$$

y obtenemos los valores que aparecen en la Tabla 5.3.

t_k	y_k	$ERROR$	t_k	y_k	$ERROR$
0.0	0.5000000	0	1.2	3.1913480	0.011465
0.2	0.8300000	0.0007014	1.4	3.7486446	0.0162446
0.4	1.2158000	0.0017123	1.6	4.3061464	0.0226626
0.6	1.6520760	0.0031354	1.8	4.8462986	0.0311223
0.8	2.13233327	0.0051032	**2.0**	**5.3476843**	**0.0422123**
1.0	2.6486459	0.0077868	-	-	

Tabla 5.3.

- Para aplicar el método de *Taylor* de orden cuatro previamente necesitamos conocer las siguientes derivadas,

$$\frac{d^2 f(t,y(t))}{dt^2} = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1 - 2t) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

$$\frac{d^3 f(t,y(t))}{dt^3} = \frac{d}{dt}(y - t^2 - 2t - 1) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

y sustituir en la expresión

$$\begin{aligned} y_{k+1} = \quad & y_k + hf(t_k,\, y_k) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t,y)}{dt}\right)_{(t_k,y_k)} + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{d^2 f(t,y)}{dt^2}\right)_{(t_k,y_k)} \\ & + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{d^3 f(t,y)}{dt^3}\right)_{(t_k,y_k)} . \end{aligned}$$

Un valor aproximado de $y(0.2)$ lo calculamos como

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.5 + 0.1 f(0,0.5) + \tfrac{0.1^2}{2} f'(0,0.5) + \tfrac{0.1^3}{6} f''(0,0.5) + \tfrac{0.1^4}{2} f'''(0,0.5) \\ &= 0.82930\,. \end{aligned}$$

Aplicando de forma reiterada la fórmula anterior, obtenemos los valores que aparecen en la Tabla 5.4.

t_k	y_k	$ERROR$	t_k	y_k	$ERROR$
0.0	0.5000000	0	1.2	3.1799640	0.0000225
0.2	0.8293000	0.0000014	1.4	3.7324321	0 .0000321
0.4	1.2140910	0.0000034	1.6	4.2835285	0.0000447
0.6	1.6489468	0.0000062	1.8	4.8152377	0.0000615
0.8	2.1272396	0.0000101	**2.0**	**5.3055554**	**0.0000834**
1.0	2.6408744	0.0000153	-	-	

Tabla 5.4.

EJERCICIO 103 Aplicar el método de *Taylor* de orden dos para calcular el valor aproximado de $y(1)$ en el problema de valores iniciales

$$y' = -2ty\,, \quad y(0) = 1\,,$$

tomando $h = 0.1$.

- Calculamos la derivada de la función $y' = f(t,\, y) = -2ty$, respecto de t.

$$\frac{df(t,y)}{dt} = y''(t) = -2y - 2ty' = -2y - 2t(-2ty) = -2y + 4t^2 y\,.$$

En consecuencia,

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\frac{df(t_k, y_k)}{dt} = y_k - 2ht_k y_k + \frac{h^2}{2}(-2y_k + 4t_k^2 y_k)$$

Los resultados que se obtienen pueden verse en la tabla siguiente.

t_k	y_k	$ERROR$	t_k	y_k	$ERROR$
0	1	0	0.6	0.69550	2.17608927 $\times 10^{-3}$
0.1	0.99	4.98337491$\times 10^{-5}$	0.7	0.61009	2.53358646$\times 10^{-3}$
0.2	0.96049	2.91439152$\times 10^{-4}$	0.8	0.52455	2.73462797$\times 10^{-3}$
0.3	0.91324	6.89686871$\times 10^{-4}$	0.9	0.44209	2.76075569$\times 10^{-3}$
0.4	0.85095	1.18536075$\times 10^{-4}$	**1.0**	**0.36526**	**2.61864321** $\times 10^{-3}$
0.5	0.77709	1.70555464 $\times 10^{-3}$			

EJERCICIO 104 Encontrar un valor aproximado de $y(1)$, por el método de Runga-Kutta de cuarto orden, del siguiente problema de valores iniciales

$$y' = f(t,y) = t - y\,, \quad y(0) = 2\ ,$$

con $h = 0.2$

- En primer lugar debemos encontrar las constantes

$$k_1 = f(t_0,\, y_0) = f(0,\, 2) = 0 - 2 = -2$$

$$k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2},\, y_0 + \frac{hk_1}{2}) = f(0 + \frac{0.2}{2},\, 2 + \frac{0.2(-2)}{2}) = -1.7$$

$$k_3 = f(t_0 + \frac{h}{2},\, y_0 + \frac{hk_2}{2}) = f(0 + \frac{0.2}{2},\, 2 + \frac{0.2(-1.7)}{2}) = -1.73$$

$$k_4 = f(t_0 + h,\, y_0 + hk_3) = f(0 + 0.2,\, 2 + 0.2 \times (-1.73)) = -1.454$$

y a continuación aplicar la fórmula

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

para saber un valor aproximado de $y(0.2)$.

$$\begin{aligned} y_1 = \quad & y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\ & 2 + \frac{0.2}{6}(-2 + 2(-1.7) + 2(-1.73) - 1.454) = 1.6562 \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso, obtenemos las aproximaciones

$$\begin{array}{ll} y_2 = y(0.4) = 1.41097\,, & y_3 = y(0.6) = 1.24645 \\ y_4 = y(0.8) = 1.14801\,, & y_5 = y(1.0) = 1.10366\,. \end{array}$$

El error que se comete es de 0.00001 y un error porcentual del 0.0009 %.

- A continuación utilizaremos el programa `Mathematica`®.

```
f[t_, y_] := t - y;
a = 0.;
b = 1.;
datos = {2.};
n = 5;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
For[i = 2, i <= n + 1, i + +,
k1 = f[nodo[[i - 1]], datos[[i - 1]]];
k2 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, datos[[i - 1]] + (h/2)k1];
k3 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, datos[[i - 1]] + (h/2)k2];
k4 = f[nodo[[i - 1]] + h, datos[[i - 1]] + hk3];
AppendTo[datos, datos[[i - 1]] + (h/6)(k1 + 2k2 + 2k3 + k4)]];
```

e imprimimos los resultados

```
Print[Table[{nodo[[i]], datos[[i]]}, {i, n + 1}]]
```

$$\boxed{\{\{0., 2.\}, \{0.2, 1.6562\}, \{0.4, 1.41097\}, \{0.6, 1.24645\}, \{0.8, 1.148\}, \{1., 1.10366\}\}}$$

EJERCICIO 105 Aplicar el método de *Runge-Kutta* de orden cuatro con $h = 0.1$ para obtener un valor aproximado de $y(1)$ en el siguiente problema de valor inicial,

$$y' = -2ty\,, \quad y(0) = 1\,.$$

- Utilizando el mismo procedimiento del ejercicio anterior se llega a la tabla:

t_k	y_k	$ERROR$	t_k	y_k	$ERROR$
0.0	1.00000	0.00000	0.6	0.69767	6.11067×10^{-8}
0.1	0.99004	4.15834×10^{-10}	0.7	0.61262	2.15806×10^{-7}
0.2	0.96078	3.91674×10^{-9}	0.8	0.52729	5.06502×10^{-7}
0.3	0.91393	1.12525×10^{-8}	0.9	0.44485	9.70467×10^{-7}
0.4	0.85214	1.64987×10^{-8}	**1.0**	**0.36788**	**1.62525**$\times 10^{-6}$
0.5	0.77880	2.52770×10^{-9}	-	-	

EJERCICIO 106 Aplicar el método de *Runge-Kutta* de orden cuatro para calcular el valor aproximado de $x(1)$ e $y(1)$ en el problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) = f(t,x,y) = -4y + \cos t & ; & x(0) = 0 \\ y'(t) = g(t,x,y) = x & ; & y(0) = 0 \end{array} \right.$$

tomando $h = 0.1$.

- Tenemos que utilizar

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(\alpha_{k1} + 2\alpha_{k2} + 2\alpha_{k3} + \alpha_{k4})$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(\beta_{k1} + 2\beta_{k2} + 2\beta_{k3} + \beta_{k4})$$

donde

$$\alpha_{k1} = f(t_k, x_k, y_k) \qquad \beta_{k1} = g(t_k, x_k, y_k)$$

$$\alpha_{k2} = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h\alpha_{k1}}{2}, y_k + \frac{h\beta_{k1}}{2}) \qquad \beta_{k2} = g(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h\alpha_{k1}}{2}, y_k + \frac{h\beta_{k1}}{2})$$

$$\alpha_{k3} = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h\alpha_{k2}}{2}, y_k + \frac{h\beta_{k2}}{2}) \qquad \beta_{k3} = g(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h\alpha_{k2}}{2}, y_k + \frac{h\beta_{k2}}{2})$$

$$\alpha_{k4} = f(t_k + h, x_k + h\alpha_{k3}, y_k + h\beta_{k3}) \qquad \beta_{k4} = g(t_k + h, x_k + h\alpha_{k3}, y_k + h\beta_{k3})$$

La tabla de las soluciones con $h = 0.1$ es la siguiente

t_k	x_k	y_k	t_k	x_k	y_k
0.0	0.00000	0.00000	0.6	0.43314	0.15432
0.1	0.09917	0.00498	0.7	0.44223	0.19829
0.2	0.19339	0.01967	0.8	0.42726	0.24196
0.3	0.27792	0.04333	0.9	0.38813	0.28293
0.4	0.34843	0.07478	**1.0**	**0.32571**	**0.31881**
0.5	0.40117	0.11242	–	–	–

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 107

1.- **Considerar el problema de valor inicial:**

$$y' = f(t,\, y) = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8.5\,, \quad t \in [0,\, 4]\,, \quad y(0) = 1\,.$$

1.a.- **Encontrar la solución exacta** $y(t)$**.**

1.b.- **Supongamos que** $h = 0.1$**. Encontrar la solución por el método de** *Euler* **en los puntos** 1, 2, 3 **y** 4**.**

1.c.- **Representar en un mismo gráfico, la solución exacta y la solución aproximada.**

2.- **Usar el método de** *Euler* **para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas:**

$$\begin{array}{llllll} \textbf{(a)} & y' = te^{3t} - 2y & , & t \in [0\,,\, 1]\,, & y(0) = 0\,, & h = 0.2 \\ \textbf{(b)} & y' = 1 + (t-y)^2 & , & t \in [2\,,\, 3]\,, & y(2) = 1\,, & h = 0.1 \end{array}$$

3.- **Resolver el ejercicio anterior haciendo uso del método de** *Taylor* **de orden dos y de orden cuatro.**

4.- **Usar el método de** *Taylor* **de orden dos para aproximar las solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial:**

$$\begin{array}{llllll} \textbf{(a)} & y' = \left(\dfrac{y}{t}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{t}\right) & , & t \in [1\,,\, 1.4]\,, & y(1) = 1\,, & h = 0.1 \\ \textbf{(b)} & y' = \operatorname{sen} t + e^{-t} & , & t \in [0\,,\, 1.0]\,, & y(0) = 0\,, & h = 0.25 \end{array}$$

5.- **Considerar el problema de valor inicial:**

$$y' = f(t,\, y) = 4e^{0.8t} - 0.5y\,, \quad t \in [0\,,\, 4]\,, \quad y(0) = 2$$

5.a.- **Encontrar la solución exacta** $y(t)$**.**

5.b.- **Supongamos que** $h = 0.1$**. Encontrar la solución por el método de** *Runge-Kutta* **de orden cuatro, en el punto** 4**.**

5.c.- **Representar en un mismo gráfico, la solución exacta y la solución aproximada.**

BIBLIOGRAFÍA

[1] ACERO, I.; LÓPEZ, M. *Ecuaciones Diferenciales. Teoría y Problemas.* Ed. Tebar Flores, Madrid, (1997).

[2] ALLMAN, E.S.; RHODES, J.A. *Mathematical Models in Biology: An Introduction.*

[3] ANTON, H. *Introducción al Álgebra Lineal.* 4^a, Ed., limusa, México, (1990).

[4] ANTON, H.; RORRES, C. *Elementary Linear Algebra. Applications version.* Ed. John Wiley and Sons, Inc. New York, (2000).

[5] BEGON, M.; MORTIMER, M.; THOMPSON, D.J. *Population Ecology. A unified study of animals and plants.* 3^a Ed. Blackwell Science, (2000).

[6] BERMUDEZ, L.; POCIELLO, E.; RUÍZ, M.E.; VAREA, J. *Ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas*, Ediciones Media, Sant Cugat del Vallés, (1995).

[7] BLANCHARD, P.; DEVANEY, R.L.; HALL, G.R. *Ecuaciones Diferenciales*, International Thomson Editores, S.A. de C.V., (1999).

[8] BURDEN, R.L.; FAIRES, J.D. *Análisis Numérico,* 2^a, Grupo Editorial Iberoamericano S.A., (1996).

[9] BRAUN, M. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamericano, (1990).

[10] CASWELL, H. *Matrix Population Models (construction, analysis, and interpretation)*, 2^a. Sinauer Associates Inc. Publishers, Sunderland, Massachusetts, (1995).

[11] GONZÁLEZ MANTEIGA, M.T. *Modelos matemáticos discretos en las Ciencias de la Naturaleza. Teoría y Problemas*, Editorial Díaz de Santos. Madrid.

[12] GOTELLI, N.J. *A primer of ecology*, Sinauer Associates, Inc. Publishers, Sunderland, Massachusetts, (1995).

[13] GROSSMAN, S.I. *Álgebra Lineal con aplicaciones*, 4^a. McGrawHill, México, (1991).

[14] HANNON, B.; RUTH, M. *Modeling dynamic biological systems.* Springer - Verlag, New York, Inc., (1997).

[15] HASTINGS, A. *Population Biology (Concepts and Models).* Springer - Verlag, New York, Inc., (1997).

[16] HIRSCH, M.W.; SMALE, S. *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Álgebra Lineal.* Alianza Universidad, (1974).

[17] HOLMGREN, R.A. *A first course in discrete dynamical systems.* Springer - Verlag, New York, (1996).

[18] KENT, N.R.; SAFF, E.B. *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales*, Addison Wesley, (1998).

[19] LOMEN, D.; LOVELOCK, D. *Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos.* Compañia Editorial Continental S.A. de C.V., México, (2000).

[20] MAHAFFY, J.M. *Modeling Mathematical*, San Diego State University, USA, (2001).

[21] MARTINEZ, C.; PÉREZ DE VARGAS, A. *Métodos matemáticos en Biología.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A., Madrid, (1993).

[22] MARTINEZ, C.; PÉREZ DE VARGAS, A. *Problemas de Biomatemática.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A., Madrid, (1995).

[23] MORALES, M.D.; BARRERA, D.; CAMPOS J.; FERNÁNDEZ, J.; GONZÁLEZ, P.; LÓPEZ, A.J.; PASADAS, M.; RAMÍREZ, V. *Matemáticas para Económica y Empresariales con Mathematica.* Proyecto Sur, Granada, , (1998).

[24] NIEVES, A.; DOMINGUEZ, F.C. *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería.* CECSA, México, (1995).

[25] PÉREZ-CACHO, S.; GÓMEZ CUBILLO, F.; MARBÁN PRIETO, J.M. *Modelos matemáticos y procesos dinámicos. Un primer contacto.* Universidad de Valladolid, (2002).

[26] QUESADA, J.M.; MOLINA, M.F.; SÁNCHEZ, F.T.; NAVAS, J. *Problemas resueltos de Matemáticas II. Ecuaciones diferenciales.* Jaén, Ed. Jabalcuz (2001).

[27] QUESADA, J.M.; MOLINA, M.F.; SÁNCHEZ, F.T. *Matemáticas II para Ingeniería Técnica Industrial.* Los autores, Jaén, (2000).

[28] QUESADA, J.J. *Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico y Métodos Matemáticos.* Ed. Santa Rita, Monachil (Granada), (1996).

[29] RAMÍREZ, V.; GONZÁLEZ, P.; PASADAS M.; BARRERA, D. *Matemáticas con Mathematica: Introducción y Primeras Aplicaciones.* Ed. Proyecto Sur, Granada, (1997).

[30] RODRÍGUEZ, J. *Ecología*, Pirámide, Madrid, (1999).

[31] ROMERO, J.L.; GARCÍA, C. *Modelos y Sistemas Dinámicos.* Servicio de Publicaciones, Universidad de Cádiz, (1998).

[32] SIMMONS, G.F. *Ecuaciones Diferenciales: con Aplicaciones y Notas Históricas*, 2^a. Ed. McGraw-Hill, Madrid, (2000).

[33] SPIEGEL, M.R. *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* Prentice - Hall - Hispanoamericana, (1997).

[34] VANDERMEER, J. *Elementary Mathematical Ecology.* Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, (1990).

[35] ZILL, D.G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, 6^a. Grupo Editorial Iberoamericana, México, (1998).