Tema 4

MODELOS BASADOS EN SISTEMAS DE E.D.O

EJERCICIO 87 Dos poblaciones $x(t)$ e $y(t)$, compuestas inicialmente por $x(0) = 20$ e $y(0) = 185$ individuos, crecen de acuerdo con la ley logística de parámetros $r_1 = 0.3\,; K_1 = 3000$ la $x(t)$ y $r_2 = 0.2\,; K_2 = 3000$ la $y(t)$, respectivamente.

1.- **Hallar el instante en que coinciden los efectivos de las dos poblaciones.**

2.- **¿Coinciden en ese instante, en el que lo hacen los efectivos, las tasas instantáneas de crecimiento?.**

3.- **Calcular las coordenadas del punto en que la velocidad de crecimiento es máxima para cada una de las poblaciones.**

4.- **Si una tercera población $z(t)$ crece según la ley de *Malthus* y sus efectivos para $t = 0$ y $t = 4$ son, respectivamente, $z(0) = x(0) = 20$ y $z(4) = y(0) = 185$, ¿cuántos efectivos componen esta población en el instante t obtenido en el primero de los apartados?.**

5.- **Representar gráficamente $x(t)$ e $y(t)$.**

- Del enunciado deducimos

$$x(t) = \frac{K_1}{1 + A_1 e^{-r_1 t}} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{3000}{1 + A_1 e^{-0.3t}}\,, \quad x(0) = 20\,,$$

sustituyendo

$$20 = \frac{3000}{1 + A_1} \quad \Rightarrow \quad A_1 = 149\,.$$

La primera de las leyes es

$$x(t) = \frac{3000}{1 + 149 e^{-0.3t}}\,.$$

Razonando de la misma manera puede comprobarse que

$$y(t) = \frac{3000}{1 + 15.2e^{-0.2t}} \,.$$

- Si igualamos estas dos expresiones

$$\frac{3000}{1 + 149e^{-0.3t}} = \frac{3000}{1 + 15.2e^{-0.2t}} \quad \Rightarrow \quad 15.2e^{-0.2t} = 149e^{-0.3t} \quad \Rightarrow \quad \frac{15.2}{149} = e^{-0.1t} \,,$$

tomando logaritmos neperianos

$$t = -\frac{1}{0.1} \ln\left(\frac{15.2}{149}\right) \approx 23 \,.$$

En este momento ($t = 23$) las tasas instantáneas de crecimiento $T(t) = x'(t)/x(t)$, toman los valores

$$T_1(23) = 0.3\left(1 - \tfrac{x(23)}{3000}\right) = 0.3\left(1 - \tfrac{2608)}{3000}\right) \approx 0.0392$$

$$T_2(23) = 0.2\left(1 - \tfrac{y(23)}{3000}\right) = 0.2\left(1 - \tfrac{2602}{3000}\right) \approx 0.02653$$

- Para el tercero de los apartados necesitamos saber el valor de t tal que $x(t) = K/2 \,, y(t) = K/2$. Es decir,

$$x(t) = \frac{3000}{1 + 149e^{-0.3t}} = \frac{3000}{2} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0.3} \ln\left(\frac{1}{149}\right) \approx 16.67$$

$$y(t) = \frac{3000}{1 + 15.2e^{-0.2t}} = \frac{3000}{2} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0.2} \ln\left(\frac{1}{15.2}\right) \approx 13.6$$

Las coordenadas pedidas son (16.67, 1500) en el primer caso y (13.6, 1500) en el segundo.

- Para el siguiente apartado estamos ante el crecimiento exponencial

$$z(t) = z(0)e^{rt} = 20e^{rt} \,, \quad z(4) = y_0 = 185 \,.$$

El valor de la constante r de crecimiento es

$$185 = 20e^{4r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{185}{20}\right) \approx 0.556 \,.$$

El modelo propuesto es

$$z(t) = 20e^{0.556t}$$

- La Figura 4.1 corresponde a la representación gráfica de las funciones $x(t)$ e $y(t)$.

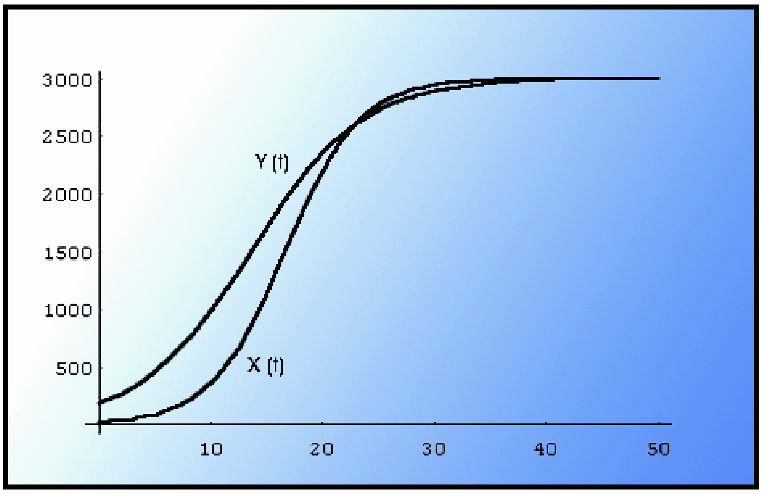


Figura 4.1.

EJERCICIO 88 Las funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ representan los efectivos de dos especies animales competitivas, inicialmente integradas por 200 y 100 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{ \begin{array}{rcr} y_1'(t) & = & 0.05y_1(t) - 0.02y_2(t) \\ y_2'(t) & = & -0.02y_1(t) + 0.03y_2(t) \end{array} \right.$$

medido el tiempo t en años.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos para $t = 30$ años.**

- Empezamos expresando el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = 10^{-2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores y vectores propios de la matriz,

```
A := {{5, -2}, {-2, 3}}
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
```

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 10^{-2}(4+\sqrt{5})\,, & \vec{v}_1 = (2, 1-\sqrt{5}) \\ \lambda_2 = 10^{-2}(4-\sqrt{5})\,, & \vec{v}_2 = (2, 1+\sqrt{5}) \end{array}$$

La solución general es

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})\,t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})\,t},$$

Al ser $y_1(0) = 200$, $y_2(0) = 100$, entonces si sustituimos y resolvemos el sistema obtenemos que $c_1 = c_2 = 50$. La solución particular es ahora

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = 50 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})\,t} + 50 \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})\,t}}$$

- La función $y_1(t)$ que nos da los efectivos de la primera de las especies es

$$y_1(t) = 100e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 100e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t}\,,$$

la cual es siempre creciente, lo que implica que para la primera especie, siempre aumentará el número de efectivos. Sin embargo,

$$y_2(t) = 50(1-\sqrt{5})e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 50(1+\sqrt{5})e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t}\,,$$

tiene un término negativo, que se anula cuando

$$50(1-\sqrt{5})e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 50(1+\sqrt{5})e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t \approx 21.5 \text{ años}\,.$$

Es decir, al cabo de los 21.5 años, la segunda de las especies desaparecerá y sólo quedará la primera de ellas. El sistema de ecuaciones diferenciales quedará en estos momentos reducida a la ecuación

$$y_1'(t) = 0.05y_1(t) \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = y_0e^{0.05t}\,,$$

y en consecuencia $y(30) = 896$ individuos.

EJERCICIO 89 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 10 y 5 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} = -3x(t) \\ \\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = 2y(t) \end{array} \right.$$

medido el tiempo t en meses.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de un año.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- En primer lugar, debemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\,,$$

y para ello, es necesario encontrar los valores propios de la matriz que define el sistema

```
A := {{−3, 0}, {0, 2}}
Eigenvalues[A]
```

{-3,2}. Es decir, dos valores propios reales con signos distintos. Siendo sus vectores propios asociados

```
Eigenvectors[A]
```

{{1,0},{0,1}}. En consecuencia, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = k_1 e^{-3t} \\ y(t) = k_2 e^{2t} \end{array} \right.$$

Las constantes $k_1 = 10$ y $k_2 = 5$ las determinamos de las condiciones iniciales $x(0) = 10$ e $y(0) = 5$. Por tanto,

$$x(t) = 10e^{-3t}, \quad y(t) = 5e^{2t}.$$

Observemos que si $t \to +\infty$, entonces $x(t) \to 0$, e $y(t) \to +\infty$. Por otro lado, si $t \to -\infty$, entonces $x(t) \to +\infty$, e $y(t) \to 0$.

- La población al cabo de un año será de

$$x(12) \approx 2.3 \times 10^{-15}, \quad y(12) \approx 1.3 \times 10^{11}$$

- El plano fase lo construimos haciendo uso del programa Mathematica®.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{−3x, 2y}, {x, −25, 25}, {y, −25, 25}]
```

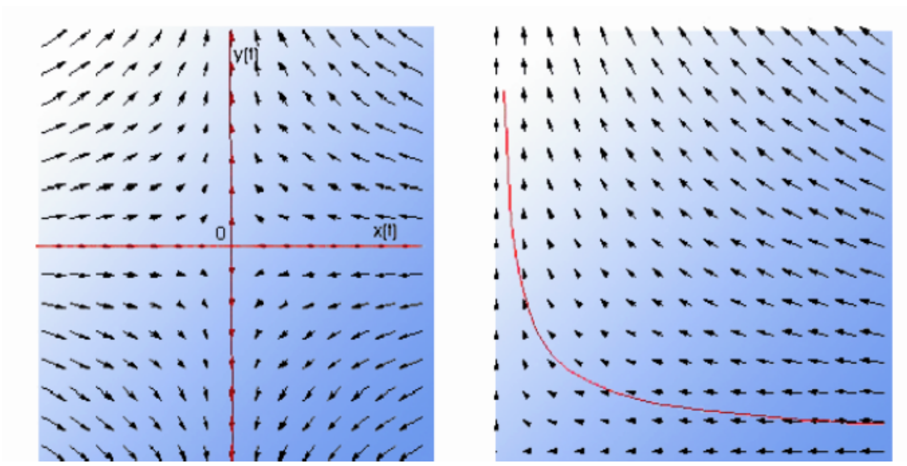


Figura 4.2. Plano fase y curva solución para el sistema.

- Es inmediato comprobar que las únicas soluciones constantes son $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Por tanto, el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema. En la Figura 4.2 podemos observar que en la dirección del eje de abscisas el origen es un sumidero. En cambio, según el eje de ordenadas el $(0,0)$ es una fuente. A este tipo de puntos de equilibrio se le conoce con el nombre de **punto de silla.** Además, el punto de equilibrio es **inestable**.

Como en este ejercicio

$$\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{-3x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{y}dy=\frac{2}{x}dx\,,$$

es una ecuación diferencial de variables separables, entonces es posible encontrar de forma explícita la ecuación de las trayectorias (las curvas solución del sistema).

$$-3\ln|y|=2\ln|x|+\ln|k| \quad \Rightarrow \quad y^{-3}=kx^2\,,$$

o bien,

$$y=c\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

De todas ellas, la solución particular $x(0)=10$, $y(0)=5$ corresponde a $c=5\sqrt[3]{100}$. Es decir

$$y(x)=5\sqrt[3]{\frac{100}{x^2}}\,.$$

EJERCICIO 90 Una población de zorros y otra de conejos conviven en un territorio. La velocidad de crecimiento de la población de conejos es proporcional al número de individuos, con constante de proporcionalidad de 5, menos una cantidad fija de 10 individuos que son cazados. La variación de la población de zorros es de 3 veces la población de conejos mas dos veces la de zorros. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, sabiendo que hay una cantidad inicial de 1000 conejos y 100 zorros.

- La situación planteada puede modelarse por el sistema,

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=5x(t)-10\\ y'(t)=3x(t)+2y(t)\end{array}\right.$$

La primera de las ecuaciones, que nos proporciona la evolución de los conejos, es de variables separables,

$$\frac{dx}{dt}=5x-10 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}\int\frac{5dx}{5x-10}=\int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}\ln(5x-10)=t+C_1$$

Despejando el valor de $x(t)$,

$$\ln(5x-10)=5t+C_2 \quad \Rightarrow \quad x(t)=2+Ke^{5t}$$

podemos determinar el valor de la constante k, a partir del valor inicial,

$$x(0)=1000=2+K \quad \Rightarrow \quad k=998.$$

La cantidad de conejos para un momento cualquiera t viene dada por la expresión,

$$\boxed{x(t) = 2 + 998e^{5t}\,.}$$

Si sustituimos este valor de $x(t)$ en la segunda de las ecuaciones diferenciales, obtenemos la ecuación lineal de primer orden,

$$y' = 6 + 2994e^{5t} + 2y \quad \Rightarrow \quad y' - 2y = 6 + 2994e^{5t}$$

que tiene como factor integrante a la función,

$$\mu(t) = e^{-2t}$$

Si multiplicamos la ecuación diferencial lineal por el factor integrante, tenemos

$$\left(y\,e^{-2t}\right)' = 6e^{-2t} + 2994e^{3t}$$

Integrando en los dos miembros,

$$ye^{-2t} = -3e^{-2t} + \frac{2994}{3}e^{3t} + C_3 \quad \Rightarrow \quad y(t) = -3 + 998e^{5t} + C_3e^{2t}$$

Por último, determinamos el valor de la constante C_3, para encontrar la cantidad de zorros existente en cualquier momento t,

$$y(0) = 100 = -3{+}998{+}C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = -895 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = -3 + 998e^{5t} - 895e^{2t}\,.}$$

EJERCICIO 91 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 5 y 10 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{\begin{array}{rcr} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} & = & -x(t) \\[2ex] y'(t) = \dfrac{dy}{dt} & = & -4y(t) \end{array}\right.$$

medido el tiempo t en años.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de un 5 año.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- El sistema anterior puede escribirse matricialmente

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz anterior son

```
A := {{−1, 0}, {0, −4}}
Eigenvalues[A]
```

{-1,-4}. Es decir, dos valores propios reales diferentes de signo negativo. Es de esperar dos soluciones en líneas rectas que tiendan a cero cuando $t \to \infty$.

Los vectores propios asociados son

```
Eigenvectors[A]
```

{{1,0},{0,1}}. En consecuencia, la solución general viene dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = k_1 e^{-t} \\ y(t) = k_2 e^{-4t} \end{cases}$$

Encontramos $k_1 = 5$ y $k_2 = 10$ a partir de las condiciones iniciales $x(0) = 5$ e $y(0) = 10$. Por tanto, $x(t) = 5e^{-3t}$ e $y(t) = 10e^{2t}$.

- La población al cabo de cinco años será de

$$x(5) = 5e^{-3t} \approx 0.0336897\,, \quad y(5) = 10e^{2t} \approx 2.06115 \times 10^{-8}$$

- A continuación construimos el plano fase

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{−x, −4y}, {x, −25, 25}, {y, −25, 25}]
```

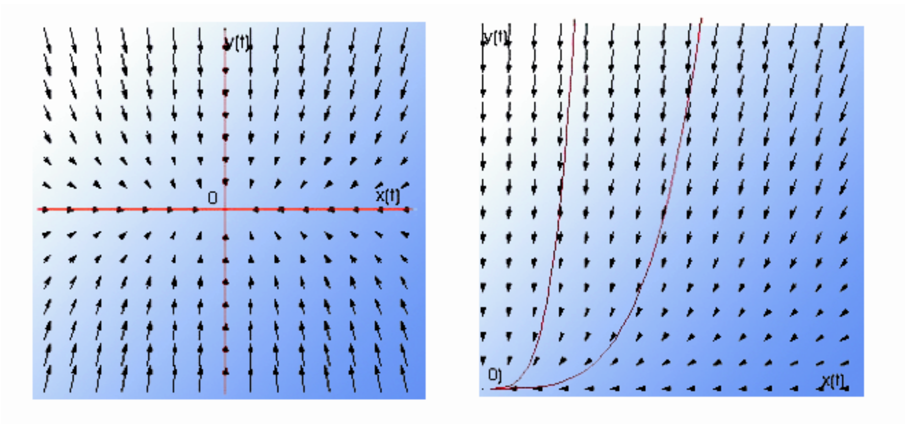


Figura 4.3. Plano fase y curva solución para el sistema.

- Es fácil comprobar que el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema. En la Figura 4.3 podemos observar que en la direcciones de los ejes, el origen es un sumidero. En este caso, el origen es un punto de equilibrio **estable**. A largo plazo, independientemente de las condiciones iniciales, las dos especies desaparecerán.

Como en el ejercicio anterior,

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{-4y}{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = \frac{4}{x}dx\,,$$

es una ecuación diferencial de variables separables. Podemos encontrar la ecuación de las trayectorias

$$\ln|y| = 4\ln|x| + \ln|k| \quad \Rightarrow \quad y = kx^4\,,$$

La solución particular $x(0)=5$, $y(0)=10$ corresponde a $k=10/5^4$. Es decir

$$y(x) = \frac{10}{5^4}x^4\,.$$

EJERCICIO 92 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 5 y 5 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} & = & 2x(t) + 2y(t) \\ \\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt} & = & x(t) + 3y(t) \end{array}\right.$$

medido el tiempo t en años.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de 3 años.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- Estamos ante el sistema de ecuaciones diferenciales lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Para resolverlo encontramos los valores propios de la matriz

```
A := {{2,2},{1,3}}
Eigenvalues[A]
```

{4,1}. Es decir, dos valores propios reales con signos positivos. Siendo sus vectores propios asociados

```
Eigenvectors[A]
```

{{1,1},{-2,1}}. En consecuencia, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x(t) = k_1e^{4t} - 2k_2e^t \\ y(t) = k_1e^{4t} + k_2e^t \end{array}\right.$$

Las soluciones en líneas rectas las obtendremos suponiendo que $k_1 = 0$ y a continuación $k_2 = 0$.

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } k_1 = 0 & \Rightarrow & y = -\frac{1}{2} \\ \text{Si } k_2 = 0 & \Rightarrow & y = x \end{array}$$

La solución particular pedida, la deducimos de las condiciones iniciales $x(0) = 10$ e $y(0) = 5$. Por tanto, $k_1 = 5$, $k_2 = 5$, y en consecuencia, $x(t) = 5e^{4t}$ e $y(t) = 5e^{4t}$.

- La población en el tercer año será $x(3) = y(3) = 813774$.
- El plano fase lo construimos haciendo uso del programa `Mathematica`®.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{2x + 2y, x + 3y}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25}]
```

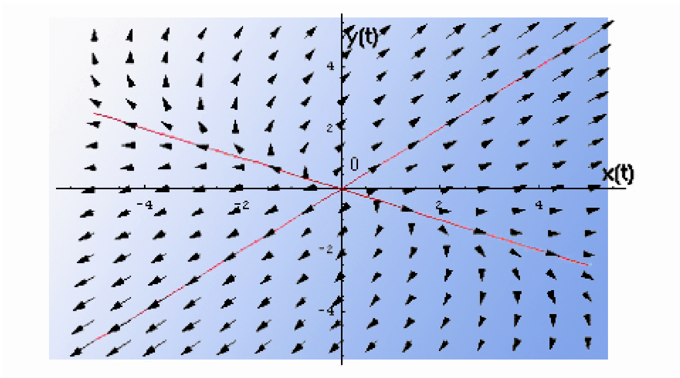


Figura 4.4. Plano fase y curvas solución $y = x$, $y = -0.5x$.

- Las únicas soluciones constantes son $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Por tanto, el $(0,0)$ es un punto de equilibrio del sistema. En la Figura 4.4 podemos observar que el origen es una **fuente**, todas las soluciones se alejan del origen cuando el tiempo crece. Además, el punto de equilibrio es **inestable**.

Veamos ahora que en este caso es imposible obtener una expresión explícita de las órbitas o trayectorias. Razonando de manera similar a los ejercicios anteriores,

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{2x+2y} \quad \Rightarrow \quad (2x+2y)dy = (x+3y)dx\,,$$

es una ecuación diferencial homogénea de grado uno. Para resolverla, es necesario dividir la ecuación diferencial por x y hacer posteriormente el cambio $y/x = z$, con lo cual $dy = xdz + zdx$. Sustituyendo

$$(1+3z)dx = (2+2z)(xdz + zdx) \quad \Rightarrow \quad (1+z-2z^2)dx = (2+2z)xdz\,,$$

se convierte en una ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{1}{x}\,dx = \frac{2+2z}{1+z-2z^2}\,dz\,.$$

Procedemos a descomponer la fracción que aparece en el segundo miembro, como suma de fracciones simples

$$\frac{2+2z}{1+z-2z^2} = -\frac{1+z}{(z-1)(z+0.5)} = -\frac{4/3}{z-1} + \frac{1/3}{z+0.5}\,.$$

Integrando

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{2+2z}{1+z-2z^2}\,dz \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ln|x| &= -\int \tfrac{4/3}{z-1}dz + \int \tfrac{1/3}{z+0.5}dz \\ &= -\tfrac{4}{3}\ln|z-1| + \tfrac{1}{3}\ln|z+0.5| \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio anterior

$$\ln|x| = -\frac{4}{3}\ln|\frac{y}{x}-1| + \frac{1}{3}\ln|\frac{y}{x}+0.5| + k\,,$$

donde puede apreciarse las dificultades de poder encontrar una expresión explícita del tipo $y=\varphi(x)$.

EJERCICIO 93 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 5 y 5 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{ \begin{array}{lcrr} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} & = & -2x(t) & -3y(t) \\ \\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt} & = & 3x(t) & -2y(t) \end{array} \right.$$

medido el tiempo t en meses.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de un año.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- Empezamos escribiendo el sistema matricialmente

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Para resolverlo es necesario encontrar los valores propios de la matriz

```
A := {{−2, −3}, {3, −2}}
Eigenvalues[A]
```

{-2+3i, -2-3i}. Es decir, dos números complejos conjugados. Siendo sus vectores propios asociados

```
Eigenvectors[A]
```

{{i,1},{-i,1}}. Para poder encontrar la solución general del sistema, necesitamos conocer dos soluciones particulares linealmente independientes. Para ello, procedemos de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-2+3i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t} \left(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t\right) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t} \left(-\operatorname{sen} 3t + i \cos 3t\right) \\ y(t) = e^{-2t} \left(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t\right) \end{cases}$$

La solución general vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

o bien

$$\begin{cases} x(t) = -k_1 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t + k_2 e^{-2t} \cos 3t \\ y(t) = k_1 e^{-2t} \cos 3t + k_2 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t \end{cases}$$

De todas ellas, la que pasa por el punto $(x(0), y(0)) = (5, 5)$ corresponde a $k_1 = 5$ y $k_2 = 5$.

- El número de animales al cabo de 1 año será,

$$\begin{cases} x(12) = -5e^{-24} \operatorname{sen} 36 + 5e^{-24} \cos 36 \\ y(12) = 5e^{-24} \cos 36 + 5e^{-24} \operatorname{sen} 36 \end{cases}$$

- Observemos que ahora no existen soluciones en línea recta, ya que si $k_1 = 0$, entonces

$$x(t) = k_2 e^{-2t} \cos 3t, \quad y(t) = k_2 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t,$$

y no podemos expresar $y = \text{cte } x$.

- Este hecho se observa fácilmente si dibujamos el plano fase.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{−2x − 3y, 3x − 2y}, {x, −25, 25}, {y, −25, 25}]
```

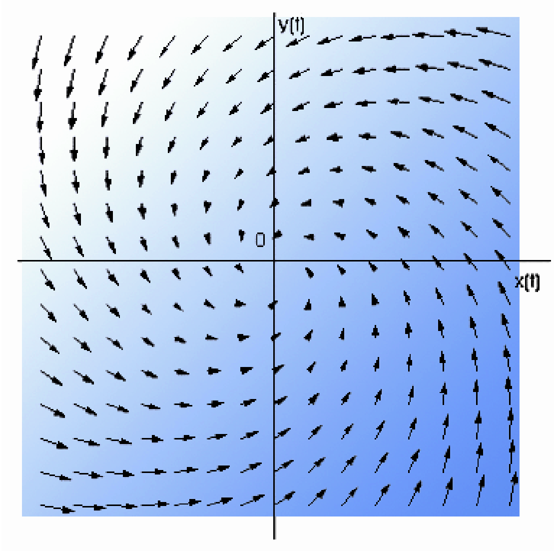


Figura 4.5. Plano fase.

La figura siguiente muestra la evolución a lo largo del tiempo de las soluciones $x(t) = 5e^{-2t}\cos 3t$ e $y(t) = 5e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$.

Las dos poblaciones se extinguen a largo plazo.

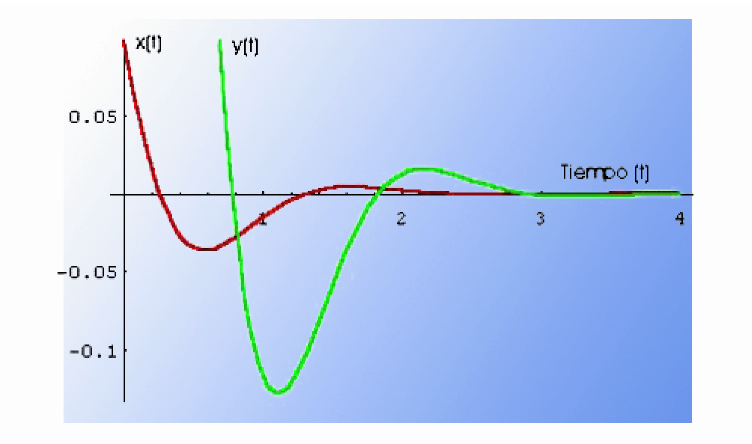


Figura 4.6. Curvas solución $x(t)\,,y(t)$.

En la Figura 4.5 se aprecia que el punto de equilibrio (0.0) es un **sumidero en espiral**.

EJERCICIO 94 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 6 y 9 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\left\{\begin{array}{rcll} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} & = & -2x(t) & +y(t) \\ \\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt} & = & -2y(t) & \end{array}\right. \tag{4.1}$$

medido el tiempo t en meses.

1.- **Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.**

2.- **Encontrar el número de individuos al cabo de un año.**

3.- **Encontrar y analizar el plano fase.**

4.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Si encontramos los valores propios de la matriz que define el sistema

```
A := {{−2, 1}, {0, −2}}
Eigenvalues[A]
```

{-2, -2}. En este caso, sólo existe un valor propio que es un número real positivo. Los vectores propios asociados son

```
Eigenvectors[A]
```

{{1,0},{0,0}}. Existe un único valor propio linealmente independiente. Ahora, sólo podemos encontrar la solución

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o bien

$$x(t) = e^{-2t}, \quad y(t) = 0\,.$$

Observemos que el eje de abscisas ($y = 0$) es una recta solución del sistema. Para el resto de las soluciones, no podemos encontrar la solución general, pero podemos analizar el sistema de manera cualitativa.

- Empezamos dibujando el plano fase.

```
<< Graphics‘PlotField‘
PlotVectorField[{−2x + y, −2y}, {x, −25, 25}, {y, −25, 25}]
```

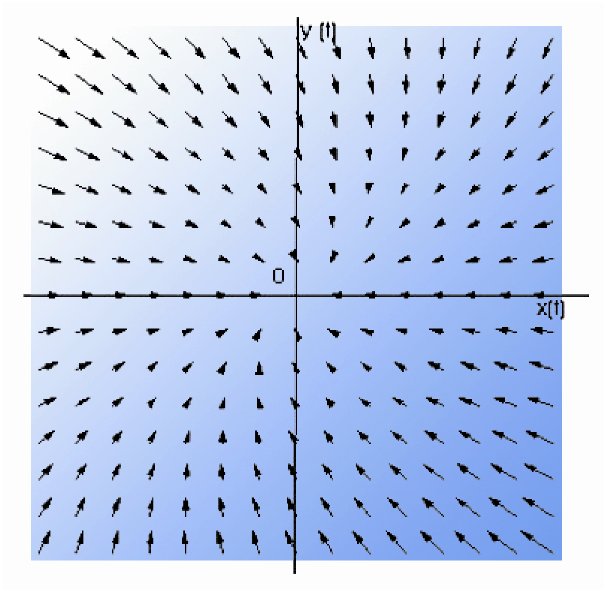


Figura 4.7. Plano fase.

- Podemos observar, que el origen es un sumidero. Si empezamos con unas condiciones iniciales $(x(0), y(0))$ que no se encuentren sobre uno de los ejes, entonces la órbita gira y llega al origen en dirección tangente a la solución en línea recta $(y = 0)$. El punto de equilibrio $(0, 0)$ en una **fuente en espiral**.

  Por último, encontremos la solución general del sistema (4.1). De la segunda ecuación deducimos
  $$y' = -2y \quad \Rightarrow \quad y(t) = k_1 e^{-2t}\,,$$
  sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones
  $$x' = -2x + k_1 e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad x' + 2x = k_1 e^{-2t}\,,$$
  que es una ecuación diferencial lineal.
  $$\mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}\,,$$
  multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(t)$,
  $$x'e^{2t} + 2xe^{2t} = k_1 \quad \Rightarrow \quad xe^{2t} = k_1 t + k_2 \quad \Rightarrow \quad x = k_1 t e^{-2t} + k_2 e^{-2t}$$
  En resumen, la solución general viene dada por
  $$x(t) = k_1 t e^{-2t} + k_2 e^{-2t}\,, \quad y(t) = k_1 e^{-2t}\,.$$
  La solución particular pedida $(x(0),\, y(0)) = (6,\, 9)$ corresponde a $k_2 = 6$, $k_1 = 9$.
  $$\boxed{x(t) = 9te^{-2t} + 6e^{-2t}, \qquad y(t) = 9e^{-2t}}$$

- Al cabo de un año, el número de animales será de
  $$x(12) \approx 4.30365 \times 10^{-9}\,, \quad y(12) \approx 3.39762 \times 10^{-10}$$

EJERCICIO 95 Sean $x(t)$, $y(t)$ las poblaciones de dos especies que compiten por recursos. Un incremento en cualquier especie tiene un efecto adverso sobre la razón de crecimiento de la otra. En concreto

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x'(t) = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y'(t) = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy \end{aligned} \right.$$

Analizar el comportamiento a largo plazo de ambas poblaciones.

- Supongamos en primer lugar que $y = 0$, entonces el sistema se reduce al modelo logístico $x'(t) = 2x(1 - x/2)$. La línea fase de esta ecuación coincidirá con el eje de abscisas del plano fase. Del mismo modo, si $x(t) = 0$, entonces estamos ante el modelo logístico $y'(t) = 3y(1 - y/3)$, y de nuevo su línea fase coincidirá con el eje de ordenadas del plano fase. En consecuencia, tenemos los puntos de equilibrio

$$P_1 = (0,\, 0)\,, \quad P_2 = (2,\, 0)\,, \quad P_3 = (0,\, 3)\,.$$

Existe otro punto de equilibrio $P_4 = (1,\, 1)$ que se obtiene resolviendo el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\left(1 - \frac{x}{2}\right) - y = 0 \\ 3\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2x = 0 \end{array} \right.$$

Por el teorema de unicidad de las soluciones, si partimos de condiciones iniciales situadas en el primer cuadrante (en el resto de los puntos no tiene sentido biológico), las órbitas deben de permanecer siempre en esta región.

De los cuatro puntos de equilibrio el P_4 presenta especial interés, ya que nos informa de que las dos especies pueden convivir.

Para realizar el estudio cualitativo del sistema, tenemos que representar $y = 2 - x$ e $y = 3 - 2x$. Estas rectas se cortan en el cuarto punto de equilibrio y divide al primer cuadrante en cuatro regiones.

El crecimiento o decrecimiento de las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ puede estudiarse fácilmente analizando el signo de sus primeras derivadas. Para ello, escribimos el sistema como

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x\,(2 - x - y) \\ y'(t) = y\,(3 - y - 2x) \end{array} \right. \tag{4.2}$$

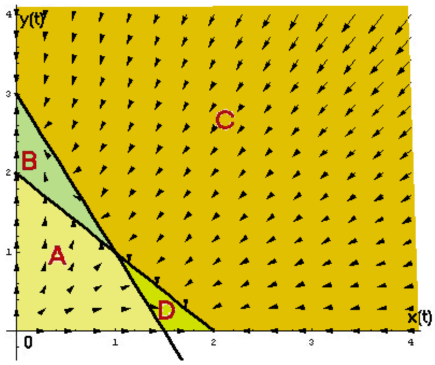


Figura 4.8. Plano fase del sistema.

Para puntos situados en la región A, tanto $x'(t)$ como $y'(t)$ son positivas, y por lo tanto, las dos poblaciones aumentan. Si nos trasladamos a la segunda de las regiones B, entonces $x(t)$ disminuye e $y(t)$ aumenta. Para puntos situados en C, disminuyen ambas poblaciones. Finalmente en D, la población $x(t)$ aumenta y disminuye $y(t)$. En la figura siguiente hemos dibujado en el plano fase algunas de las trayectorias.

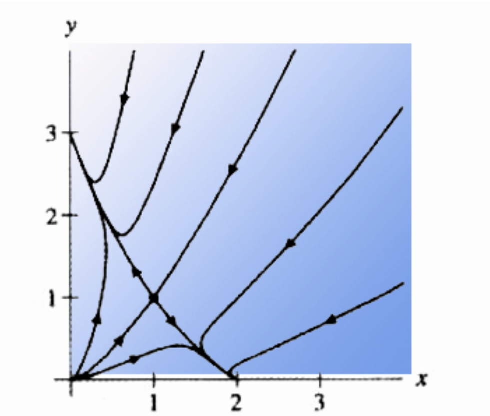


Figura 4.9. Órbitas del sistema.

Observemos como el punto de equilibrio (1, 1) es un punto de silla. Los dibujos sugieren que las soluciones que no tienden al (1, 1) lo hacen hacia (0, 3) o bien al (2, 0).

Conclusión: la mayor parte de las soluciones tienden a una población de equilibrio con una especie extinta y la otra en su capacidad de carga. La separatriz estable del punto de silla (1, 1) divide los dos comportamientos a largo plazo del modelo.

EJERCICIO 96 Supongamos una epidémia que se desarrolla sobre una población aislada sometida a las siguientes hipótesis:

- **Los individuos se infectan a una velocidad proporcional al producto del número de individuos infectados por el número de individuos susceptibles.**
- **La longitud del período de incubación es despreciable. Las personas infectadas se convierten inmediatamente en infecciosas.**
- **Por término medio, un individuo infectado muere o se recupera a los diez días.**
- **Nadie está enfermo inicialmente.**
- **Las personas infectadas no procrean pero los individuos susceptibles tienen una tasa de nacimiento de** 0.0003 **por individuo y año. Los recien nacidos son susceptibles.**

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ el número de personas susceptibles e infectadas, respectivamente, en el tiempo t. El sistema de ecuaciones diferenciales que representa a esta situación es:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx(t)}{dt} = x'(t) = -\lambda x\, y + 0.0003x \\ \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = y'(t) = \lambda x\, y - 0.1y \end{array}\right.$$

Supongamos que $\lambda = 0.05$, entonces podemos analizar el plano de fases del modelo,

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = f(x,y) = 0.0003x - 0.05xy = 0.05x(0.03 - y) \\ y'(t) = g(x,y) = 0.05x\, y - 0.1y = 0.05y(x-2) \end{array}\right. \tag{4.3}$$

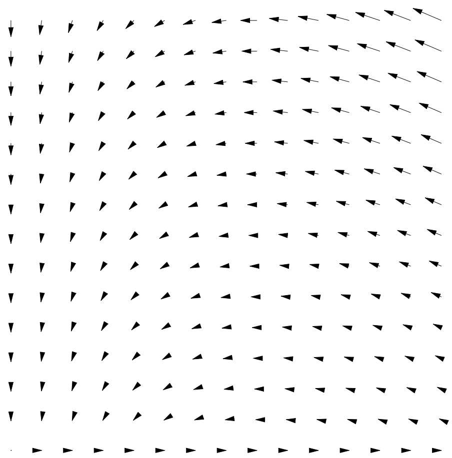
Los puntos de equilibrio del modelo, las soluciones constantes, se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones no lineal:

$$f(x,y) = 0\,; \qquad g(x,y) = 0\,,$$

cuyas soluciones son

$$P_1 = (0,0)\,; \quad P_2 = (2, 0.03)\,.$$

Las isoclinas nulas son aquellas donde $x'(t) = f(x,y) = 0$, cuando una de las trayectorias atraviesa una de estas líneas, entonces el valor de la derivada en ese punto es cero. En nuestro caso, la representación gráfica de estas isoclinas son rectas verticales. Por lo tanto, cuando una trayectoria atraviesa a una de estas isoclinas nulas, sólo puede hacerlo si se mueve en una dirección vertical en el momento de atraversarla. Un razonamiento similar puede hacerse respecto de la isoclina nula correspondiente a $y' = g(x,y) = 0$.



El punto de intersección de las isoclinas nulas son los puntos fijos o de equilibrio del modelo. Cuando se alcanza uno de estos puntos, entonces las trayectorias permanecerán en ese punto para el resto del tiempo. Las regiones del plano OXY donde $x'(t) < 0$ y donde $y'(t) > 0$, están siempre separadas por x-isoclinas nulas. Y evidentemente igual en el caso de la variable $y(t)$.

Si clasificamos los puntos de equilibrio a través de la matriz jacobiana:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0003 - 0.05y & -0.05x \\ 0.05y & 0.05x - 0.1 \end{pmatrix}$$

particularizamos para cada uno de los puntos de equilibrio,

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0.0003 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}$$

un valor propio es positivo y el otro es negativo. En consecuencia, el punto de equilibrio $(0,0)$ es un nodo inestable.

De manera similar,

$$J(2,0.03) = \begin{pmatrix} -0.0012 & -0.1 \\ 0.0015 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por valores propios los números complejos conjugados $-0.0006 \pm 0.0122327i$. El punto fijo $(2,0.03)$ es un foco estable, las soluciones se mueven en espiral alrededor del punto de equilibrio.

EJERCICIOS PROPUESTOS

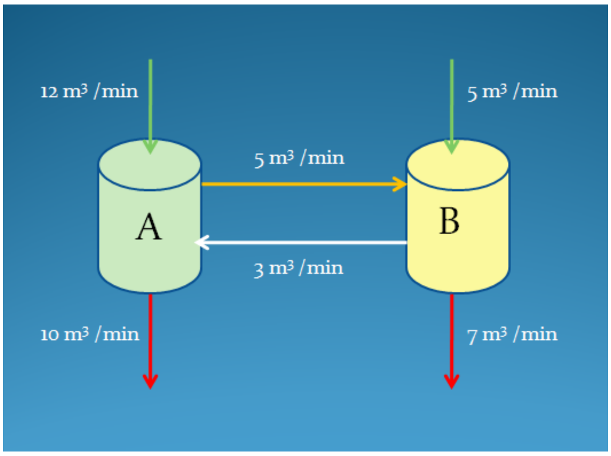
EJERCICIO 97

1.- **Encontrar todos los puntos de equilibrio para los sistemas siguientes. Explicar la importancia de estos puntos para las poblaciones de presa y depredadores.**

(a) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x\left(1 - \dfrac{x}{10}\right) - 20xy \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -5y + \dfrac{xy}{20} \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.3x - \dfrac{xy}{100} \\[2ex] \frac{dy}{dt} = 15y\left(1 - \dfrac{y}{15}\right) + 25xy \end{cases}$$

2.- **Dos depósitos A de 45 metros cúbicos de capacidad y el B de 24 metros cúbicos, están conectados entre sí tal y como indica la Figura**



Las velocidades representadas en la Figura son las del agua que fluye continuamente por el sistema. Si inicialmente se deposita 1 kilo de sal en el depósito B y en el A se están añadiendo de forma continua 3 kilos de sal por minuto desde el exterior.

- **Encontrar las cantidades de sal en los depósitos A y B en un minuto cualquiera t**
- **Estudiar el comportamiento a largo plazo del sistema**

3.- **Dos tanques se colocan en posición de cascada. El tanque 1 contiene inicialmente 20 libras de sal disuelta en 100 galones de salmuera y el tanque 2 contiene en un principio 150 galones de solución salina en la que se han disuelto 90 kilos de sal. Al tiempo cero, se agrega al tanque**

1 una solución salina que contiene 0.5 libra de sal por galón a razón de 5 galones/minuto. El tanque 1 tiene una salida que descarga solución salina en el tanque 2 a razón de 5 galones/minuto y el tanque 2 tiene también una salida de 5 galones/minuto. Determinar la cantidad de sal que hay en cada uno de los tanques para cualquier tiempo $t \geq 0$. Calcular cuándo será mínima la concentración de sal en el tanque 2, y cuánta sal hay en el tanque en ese momento.

4.- **Sean $x(t)$, $y(t)$ las poblaciones de dos especies que compiten por los recursos disponibles. Un incremento en cualquier especie tiene un efecto adverso sobre la razón de crecimiento de la otra. En concreto**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x'(t) = 2x - x^2 - xy \\ \\ \frac{dy}{dt} = y'(t) = 3y - y^2 - 2xy \end{array} \right.$$

Analizar el comportamiento a largo plazo de ambas poblaciones

5.- **Sean $x(t)$ $y(t)$ las poblaciones de dos especies que compiten por los recursos disponibles. El modelo que representa a estas dos poblaciones en competencia es:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = (4 - 2x(t))x(t) + x(t)y(t) \\ y'(t) = (4 - 2y(t))y(t) + x(t)y(t) \end{array} \right.$$

Realizar un estudio cualitativo del modelo para estudiar el comportamiento a largo plazo de las poblaciones.

6.- **En un acuario disponemos de una población de dos tipos de peces que compiten entre si. El modelo que representa a estas dos poblaciones en competencia es**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) - 0.5x^2(t) - 0.2x(t)y(t) \\ y'(t) = 1.2y(t) - 0.4y^2(t) - 0.3x(t)y(t) \end{array} \right. \tag{4.4}$$

donde $y(t)$ representa a una población de peces y $x(t)$ a otra población diferente de peces.

- **Explicar el significado "biológico"de las ecuaciones (4.4).**
- **Encontrar los puntos de equilibrio del modelo**
- **Si inicialmente las poblaciones son $x(0) = 2$, $y(0) = 1$, ¿aumentan o disminuyen ambas poblaciones?**

7.- **Dos poblaciones $x(t)$, $y(t)$ evolucionan según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x - 1 \\ y'(t) = y - 2x - 1\,. \end{array} \right.$$

- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

- **Si los valores iniciales son $x(0) = 1$, $y(0) = 3$, ¿cuál será el valor de $x(5)$ y de $y(10)$? Razona la respuesta.**

8.- **Las funciones $x(t); y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales inicialmente integradas por 20 y 10 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \qquad\qquad y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{array} \right.$$

medido el tiempo t en años. Encontrar el número de individuos para $t = 5$ años.

9.- **Se considera el siguiente modelo de interacción entre especies,**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = (8 - 2x - 3y)x \\ y'(t) = (4 - 2x - y)y \end{array} \right.$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ representan al número de individuos de cada especie medido en miles de unidades.

- **Determinar el comportamiento de cada una de las especies en ausencia de la otra.**
- **Calcular, caso de existir, los puntos de equilibrio.**
- **Si se dispone del siguiente dato inicial: $x(0) = 2$; $y(0) = 1$, encontrar la dirección de crecimiento o decrecimiento (estudio cualitativo del modelo).**
- **A la luz del apartado anterior, discutir de forma razonada si el estado de coexistencia es estable o inestable.**

10.- **Sea el modelo,**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 0.2x(t) - 0.05x(t)y(t) \\ y'(t) = -0.1y(t) + 0.2x(t)y(t) \end{array} \right. \tag{4.5}$$

donde $y(t)$ representa a una población de peces y $x(t)$ a otra población diferente de peces.

- **Explicar el significado “biológico”de las ecuaciones (4.5).**
- **Realizar el estudio cualitativo de (4.4), para analizar el comportamiento “a largo plazo”de ambas poblaciones.**