# Tema 3

# SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

**EJERCICIO 80 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales**

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} y_1' & = & -y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & -6y_1 & + & 4y_2 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Los autovalores serán $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. A continuación encontramos el subespacio de autovectores asociado a cada autovalor

$$\begin{array}{l} S_1 = L(\lambda_1 = 1) = \{(t, 2t) : \forall t \in \mathbb{R}\} =< (1,2) > \\ S_2 = L(\lambda_2 = 2) = \{(\alpha, 3\alpha) : \forall \alpha \in \mathbb{R}\} =< (1,3) > \ . \end{array}$$

Como consecuencia de ello, las funciones

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes del sistema inicial.

La solución general tiene la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

que puede expresarse como,

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ \\ y_2(t) = 2c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} \end{array}}$$

**EJERCICIO 81 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales**

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & 2y_1 & - & 2y_2 & + & 3y_3 \\ y_2' & = & y_1 & + & y_2 & + & y_3 \\ y_3' & = & y_1 & + & 3y_2 & - & y_3 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \left( \begin{array}{rrr} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$.

Es fácil comprobar que los vectores

$$(-1, 1, 1), \quad (-11, -1, 4), \quad (1, 1, 1)\,.$$

son tres autovectores asociados a los tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente.

La solución general del sistema es

$$\left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right) = c_1 \left( \begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) e^t + c_2 \left( \begin{array}{r} -11 \\ -1 \\ 14 \end{array} \right) e^{-2t} + c_3 \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) e^{3t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,,$$

o lo que es equivalente,

$$\boxed{\begin{array}{rcrrr} y_1 & = & -c_1 e^t & -11c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{3t} \\ y_2 & = & c_1 e^t & -c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{3t} \\ y_3 & = & c_1 e^t & +14c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{3t} \end{array}}$$

**EJERCICIO 82 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales**

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & y_1 & - & 3y_2 & + & 3y_3 \\ y_2' & = & 3y_1 & - & 5y_2 & + & 3y_3 \\ y_3' & = & 6y_1 & - & 6y_2 & + & 4y_3 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2$.

Puede comprobarse que la matriz $A$ es diagonalizable siendo

$$(1,1,2), \quad (1,1,0), \quad (0,1,1)\,.$$

una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de $A$.

La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Es decir,

$$\boxed{\begin{array}{rcrrr} y_1 & = & c_1 e^{4t} & +c_2 e^{-2t} & \\ y_2 & = & c_1 e^{4t} & +c_2 e^{-2t} & +c_3 e^{-2t} \\ y_3 & = & 2c_1 e^{4t} & & +c_3 e^{-2t} \end{array}}$$

**EJERCICIO 83 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales**

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 2y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & -y_1 & + & 4y_2 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

es $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. La ecuación tiene la raíz doble $\lambda_1 = 3$, se trata de un autovalor doble y es inmediato comprobar que no existen dos autovectores de $A$ que sean linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz $A$ no es diagonalizable. En este caso, el sistema posee soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 t + c_2)e^{3t} \\ (c_3 t + c_4)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Si sustituimos en el sistema inicial

$$\begin{array}{c} c_1 e^{3t} + 3(c_1 t + c_2)e^{3t} = 2(c_1 t + c_2)e^{3t} + (c_3 t + c_4)e^{3t} \\ c_3 e^{3t} + 3(c_3 t + c_4)e^{3t} = -(c_1 t + c_2)e^{3t} + 4(c_3 t + c_4)e^{3t} \end{array}$$

que simplificando e identificando coeficientes nos proporciona el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} 3c_1 & = & 2c_1 + c_3 \\ 3c_2 + c_1 & = & 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 & = & 4c_3 - c_1 \\ c_3 + 3c_4 & = & -c_2 + 4c_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c_3 = c_1, \quad c_4 = c_1 + c_2$$

La expresión general de la solución general viene dada por

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y_1 & = & (c_1 t + c_2)e^{3t} \\ y_2 & = & (c_1 t + (c_1 + c_2))e^{3t} \end{array}}$$

**EJERCICIO 84** Resolver por eliminación,

$$\left\{\begin{array}{rcr} \dfrac{dx}{dt} & = & -y + t \\ \dfrac{dy}{dt} & = & x - t \end{array}\right.$$

- Si derivamos la segunda de las ecuaciones y le sumamos la primera obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden,

$$y'' + y = t - 1\,. \tag{3.1}$$

Para encontrar la solución general de (3.1) debemos comenzar localizando la solución general $y_h(t)$ de la ecuación diferencial homogénea $y'' + y = 0$.

Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, lo cual nos permite escribir

$$y_h(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} = (c_1 + c_2)\cos t + (ic_1 - ic_2)\operatorname{sen} t = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t$$

Para obtener la solución particular de (3.1), utilizamos el método de los coeficientes indeterminados. Derivamos dos veces en la ecuación diferencial inicial

$$y^{4)} + y'' = 0\,.$$

Al ser $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, las raíces características podemos escribir la solución general

$$y = (k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t) + (A + Bt)\,,$$

y observamos que la solución particular responde al tipo $y_p = A + Bt$. Para determinar $A$ y $B$ sustituimos $y_p(t)$ en (3.1)

$$y'' + y = t - 1 \;\Rightarrow\; (0) + (A + Bt) = t - 1 \;\Rightarrow\; A = -1,\, B = 1\,.$$

En conclusión

$$y(t) = -1 + t + k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t\,, \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{3.2}$$

Para encontrar el valor de $x(t)$ procedemos de forma similar. En primer lugar, derivamos la primera de las ecuaciones del sistema y sustituimos $y'$ de la segunda de las ecuaciones,

$$x'' = -y' + 1 \quad \Rightarrow \quad x'' = -(x-t)+1 \quad \Rightarrow \quad x'' + x = 1 + t\,.$$

La ecuación diferencial que obtenemos es parecida a la encontrada en el primer apartado y puede comprobarse fácilmente que

$$x(t) = 1 + t + M_1 \cos t + M_2 \operatorname{sen} t\,. \tag{3.3}$$

Pero al ser (3.2) y (3.3) las soluciones, deben de verificar el sistema. Es inmediato comprobar que para que esto sea posible las constantes $k_1, k_2, M_1, M_2$ deben de cumplir la siguiente relación:

$$M_1 = k_2 \quad , \quad M_2 = -k_1\,.$$

Es decir

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1 + t + k_2 \cos t - k_1 \operatorname{sen} t \\ y(t) & = & -1 + t + k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t \end{array}}$$

**EJERCICIO 85** Resolver

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 2y_1 + 2 \\ y_2' & = & y_1 + 3y_2 + e^t \end{array} \right. \tag{3.4}$$

- Los autovalores asociados a la matriz

$$\left( \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{array} \right)$$

son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Y los subespacios de autovalores asociados

$$L(\lambda_1 = 2) = \{(t, -t) \,:\, \forall t \in \mathbb{R}^*\}$$

$$L(\lambda_2 = 3) = \{(0, \beta) \,:\, \forall \beta \in \mathbb{R}^*\}$$

Estamos en condiciones de poder escribir la solución general del sistema homogéneo

$$\left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right) = c_1 \left( \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right) e^{2t} + c_2 \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) e^{3t}$$

o bien,

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & c_1 e^{2t} \\ y_2 & = & -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{array}$$

Un sistema fundamental de (3.4) viene dado por

$$\left( \begin{array}{c} y_{11} \\ y_{21} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{array} \right) \quad , \quad \left( \begin{array}{c} y_{12} \\ y_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ e^{3t} \end{array} \right)$$

lo cual nos permite escribir una solución particular de (3.4)

$$\alpha_1(t)\begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \alpha_2(t)\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

siendo $\alpha_1$ y $\alpha_2$ soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} \alpha_1'(t)e^{2t} + \alpha_2'(t).0 = 2 \\ -\alpha_1'(t)e^{2t} + \alpha_2(t)e^{3t} = e^t \end{array} \right.$$

Los valores de $\alpha_1$, $\alpha_2$ se obtienen de forma inmediata

$$\alpha_1(t) = -e^{-2t} \quad , \quad \alpha_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}$$

Una solución particular de (3.4) será

$$\begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix} = -e^{-2t}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Para finalizar escribamos la solución general del sistema (3.4) propuesto

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = c_1e^{2t} - 1 \\ y_2(t) = -c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{array} \right.$$

# EJERCICIOS PROPUESTOS

## EJERCICIO 86

1.- **Transformar en sistema de primer orden la siguiente ecuación diferencial**

$$e^t y''' - ty'' + y' - e^t y = 0$$

2.- **Transformar en ecuación diferencial lineal el siguiente sistema**

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = 2x' + 5y + 3 \\ y' = -x' - 2y \end{array} \right.$$

3.- **Comprobar que la función** $y(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2t$ **es una solución del problema de valor inicial**

$$\left. \begin{array}{rcl} y'' + 4y & = & 0 \\ y(0) = 0 & ; & y'(0) = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \tag{3.5}$$

4.- **Calcular la solución general de la ecuación**

$$ty'' + 2y' + ty = 0 \quad , \quad t > 0$$

**sabiendo que** $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ **es solución de la misma.**

5.- **Sabiendo que** $e^t$ **y** $te^t$ **forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea y utilizando el método de variación de las constantes, calcular la solución general de la ecuación**

$$y'' - 2y' + y = \frac{-e^t}{t} \quad , \quad t > 0$$

6.- **Resolver utilizando el método de coeficientes indeterminados, las siguientes ecuaciones diferenciales:**

6.a.- $y'' + 8y = 5t + 2e^{-t}$

6.b.- $y'' + y = t \cos t - \cos t$

6.c.- $y''' - 4y'' + 4y' = 5t^2 - 6t + 4t^2 e^{2t} + 3e^{5t}$

7.- **Utilizando el método de variación de parámetros, resolver la siguiente ecuación diferencial**

$$y'' - y = \frac{1}{t}$$

8.- **Resolver**

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t \end{cases}$$

9.- **Resolver**

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} - 5x + \dfrac{dy}{dt} = e^t \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} = 5e^t \end{cases}$$

10.- **Resolver**

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 + y_2 \\[2ex] y_2' = \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$