



# Tema 1

---

## ECUACIONES DIFERENCIALES

---

**EJERCICIO 1** Comprobar que la función  $y(t) = ct^2 + t + 3$  es una solución del problema de valor inicial

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = 6, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1, \quad (1.1)$$

en  $-\infty < t < \infty$ , para cualquier valor del parámetro  $c$ .

- Derivando  $y(t)$ , sustituyendo en (1.1), y simplificando se obtiene

$$t^2(2c) - 2t(2ct + 1) + 2(ct^2 + t + 3) = 6.$$

Observemos que la solución de la ecuación diferencial (1.1) no es única (depende del valor de  $c$ ), aunque sus coeficientes y la función  $g(t) = 6$  son continuas para todo valor de  $t$ . La pérdida de la unicidad se debe a que el coeficiente  $a_2(t) = t^2$  se anula en  $t = 0$ .

**EJERCICIO 2** Comprobar que  $y(t) = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t$  es una solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y = 12t, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1. \quad (1.2)$$

- Derivando dos veces la función  $y(t)$ ,

$$y'(t) = 6e^{2t} - 2e^{-2t} - 3, \quad y''(t) = 12e^{2t} + 4e^{-2t}. \quad (1.3)$$

A continuación, sustituimos (1.3) en (1.2)

$$(12e^{2t} + 4e^{-2t}) - 4(3e^{2t} + e^{-2t} - 3t) = 12t.$$

Además, es inmediato comprobar que  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 1$ .

La ecuación diferencial (1.2) es lineal, los coeficientes  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -4$ , y la función  $g(t) = 12t$  son funciones continuas en cualquier intervalo que contenga al valor  $t = 0$ . Por lo tanto,  $y(t) = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t$  es solución única de (1.2).

**EJERCICIO 3** Demostrar que la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 9y = 0$$

tiene dos soluciones

$$y_1(t) = e^{3t} \quad , \quad y_2(t) = e^{-3t}$$

linealmente independientes.

- En primer lugar, es inmediato comprobar que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  son soluciones de la ecuación diferencial. Su Wronskiano vale

$$W[e^{3t}, e^{-3t}] = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-3t} \\ 3e^{3t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \forall t,$$

entonces  $y_1, y_2$  forman un conjunto fundamental de soluciones en  $-\infty < t < \infty$ .

La solución general de la ecuación diferencial en  $(-\infty, \infty)$  es

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

**EJERCICIO 4** Demostrar que la ecuación  $y'' - y' - 6y = 0$  tiene dos soluciones distintas de la forma  $y(t) = e^{at}$ .

- Si  $y = e^{at}$  es una solución para algunos valores de  $a$ , tenemos

$$y' = ae^{at} \quad , \quad y'' = a^2 e^{at},$$

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$(a^2 e^{at}) - (ae^{at}) - 6(e^{at}) = e^{at}(a^2 - a - 6) = 0,$$

que se satisface para  $a = 3$  y  $a = -2$ . Luego  $y(t) = e^{3t}$ ,  $y(t) = e^{-2t}$  son soluciones de la ecuación diferencial homogénea.

**EJERCICIO 5** Dada la ecuación diferencial

$$t^3 y''' - 6ty' + 12y = -4 + 12 \ln t. \quad (1.4)$$

- (a) Comprobar que  $y_p(t) = \ln t$  es una solución particular de la ecuación diferencial (1.4).
- (b) Comprobar que  $y_h(t) = c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3 t^{-2}$  es la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a (1.4).
- (c) Encontrar la solución general de (1.4).

- (a) Sustituyendo  $y_p(t)$  y sus derivadas en (1.4) se tiene

$$y_p'(t) = \frac{1}{t}, \quad y_p''(t) = -\frac{1}{t^2}, \quad y_p'''(t) = \frac{2}{t^3} \quad \Rightarrow \quad t^3 \frac{2}{t^3} - 6t \frac{1}{t} + 12 \ln t = -4 + 12 \ln t.$$

- (b) Por otro lado, es fácil comprobar que  $y_h(t) = c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3 t^{-2}$  es la solución general de la ecuación diferencial homogénea. Derivando

$$y_h'(t) = 2c_1 t + 3c_2 t^2 - 2c_3 t^{-3}, \quad y_h''(t) = 2c_1 + 6c_2 t + 6c_3 t^{-4}, \quad y_h'''(t) = 6c_2 - 24c_3 t^{-5},$$

y sustituyendo en  $t^3 y''' - 6ty' + 12y$  se obtiene,

$$t^3(6c_2 - 24c_3 t^{-5}) - 6t(2c_1 t + 3c_2 t^2 - 2c_3 t^{-3}) + 12(c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3 t^{-2}) = 0.$$

- (c) Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial (1.4) es

$$y(t) = c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3 t^{-2} + \ln t, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

**EJERCICIO 6** Resolver el problema de valores iniciales siguiente:

$$y' + y = y(te^{t^2} + 1), \quad y(0) = 1.$$

- La ecuación diferencial es del tipo de variables separables. En efecto, se puede escribir como

$$y' = y t e^{t^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y t e^{t^2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = t e^{t^2} dt, \quad (y \neq 0).$$

Integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int t e^{t^2} dt, \Rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2} e^{t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

o bien

$$y = k e^{\frac{1}{2} e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (k = \pm e^c). \quad (1.5)$$

La división por  $y$  al separar las variables nos obliga a considerar la función  $y = 0$ . por otra parte, dicha función es también solución de la ecuación diferencial. Dicha solución se obtiene de (1.5) si admitimos el valor  $k = 0$ . Por tanto, la solución general será

$$y = k e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Para determinar la solución particular que verifica la condición inicial  $y(0) = 1$ , sustituimos los valores  $t = 0$ ,  $y = 1$  en (1.6),

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = k e^{1/2} \Rightarrow k = e^{-1/2}.$$

Sustituyendo en (1.6) obtenemos la solución

$$y = e^{\frac{1}{2}(e^{t^2}-1)}$$

### EJERCICIO 7 Resolver la ecuación diferencial

$$(t^2 y^2 + 1)dt + 2t^2 dy = 0,$$

haciendo uso del cambio de variable  $ty = z$ .

- Empezamos calculando  $dz$ ,

$$ty = z \Rightarrow t dy + y dt = dz \Rightarrow dy = \frac{dz - y dt}{t} \quad (t \neq 0).$$

Sustituyendo en la ecuación inicial y simplificando

$$(z - 1)^2 dt + 2t dz = 0,$$

que es una ecuación diferencial de variables separables.

$$-\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dt}{2t}, \quad (t \neq 0, z \neq 1)$$

e integrando

$$-\int \frac{dz}{(z-1)^2} = \int \frac{dt}{2t} \Rightarrow \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \ln |t| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ahora, podemos deshacer el cambio

$$\frac{1}{ty-1} = \frac{1}{2} \ln |t| + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

La función  $t = 0$  (considerando  $t$  como variable dependiente) es también solución de la ecuación diferencial dada. Asimismo, el caso  $z = 1$  nos lleva a considerar la función  $y = 1/t$ . Sustituyendo en la ecuación diferencial se comprueba que también es solución. Ninguna de las soluciones anteriores se obtienen de (1.7) para ningún valor de la constante  $c$ . Se trata, por tanto, de dos soluciones singulares.

**EJERCICIO 8** Resolver la ecuación diferencial

$$(2ty + 3y^2)dt - (2ty + t^2)dy = 0,$$

- La ecuación diferencial es homogénea de grado dos y puede escribirse como,

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{2ty + 3y^2}{2ty + t^2},$$

donde estamos suponiendo que  $2ty + t^2 \neq 0$ . Dividiendo por  $t^2$ ,

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{2\left(\frac{y}{t}\right) + 3\left(\frac{y^2}{t^2}\right)}{2\left(\frac{y}{t}\right) + 1},$$

y haciendo el cambio  $z = y/t$ ,

$$z = \frac{y}{t} \Rightarrow y = tz \Rightarrow y' = z + tz'.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$z + tz' = \frac{2z + 3z^2}{2z + 1} \Rightarrow tz' = \frac{2z + 3z^2}{2z + 1} - z = \frac{z^2 + z}{2z + 1},$$

se llega a la ecuación de variables separables

$$t \frac{dz}{dt} = \frac{z^2 + z}{2z + 1} \Rightarrow \frac{(2z + 1)dz}{z^2 + z} = \frac{dt}{t}, \quad (z^2 + z \neq 0).$$

Integrando, se tiene,

$$\int \frac{(2z + 1)dz}{z^2 + z} = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|z^2 + z| = \ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

que puede expresarse en la forma

$$z^2 + z = kt, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (k = \pm e^c).$$

Deshaciendo el cambio de variable,

$$\left(\frac{y}{t}\right)^2 + \frac{y}{t} = kt \Rightarrow y^2 + ty = kt^3, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1.8)$$

Ahora estudiamos el caso  $z^2 + z = 0$ ,

$$z^2 + z = 0 \Rightarrow z(z+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \Rightarrow \frac{y}{t} = 0 \Rightarrow y = 0 \\ z+1=0 \Rightarrow \frac{y}{t} + 1 = 0 \Rightarrow y + t = 0 \Rightarrow y = -t \end{cases}$$

Se comprueba que ambas funciones,  $y = 0$  e  $y = -t$ , son también soluciones de la ecuación diferencial. Además, se observa que ambas soluciones se obtienen de (1.8), si admitimos el valor  $k = 0$ . Por tanto, la solución general vendrá dada por

$$y^2 + ty = k t^3, \quad k \in \mathbb{R}$$

Para concluir nos queda por estudiar el caso  $2ty + t^2 = 0$ ,

$$2ty + t^2 = 0 \Rightarrow t(2y + t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 2y + t = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}t \end{cases}$$

La recta  $t = 0$  satisface la ecuación diferencial original y podría admitirse como solución, si consideramos  $t$  como variable dependiente. En cambio, se comprueba sustituyendo en la ecuación diferencial original que la recta  $y = -t/2$  no es solución.

**EJERCICIO 9** Resolver la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dt} + y \operatorname{ctg} t = 2t \operatorname{cosec} t.$$

- Calculamos el factor integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp\left(\int p(t) dt\right) = \exp\left(\int \operatorname{ctg} t dt\right) = \exp\left(\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} dt\right) \\ &= e^{\ln(\operatorname{sen} t)} = \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante, se tiene,

$$y' \operatorname{sen} t + y \cos t = 2t \Rightarrow \frac{d}{dt}(y \operatorname{sen} t) = 2t \Rightarrow y \operatorname{sen} t = \int 2t dt = t^2 + c.$$

O bien,

$$y(t) = \frac{t^2 + c}{\operatorname{sen} t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

**EJERCICIO 10** Resolver la ecuación diferencial lineal

$$y' + y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 0.$$

- Calculamos el factor integrante,

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t) dt\right) = \exp\left(\int dt\right) = e^t.$$

Multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante,

$$e^t y' + e^t y = e^t \operatorname{sen} t.$$

El primer término de la igualdad anterior se corresponde con la derivada de la función  $e^t y$ ,

$$e^t y' + e^t y = \frac{d}{dt} (e^t y) = e^t \operatorname{sen} t.$$

Esta observación nos permite resolver la ecuación,

$$e^t y = \int e^t \operatorname{sen} t \, dt,$$

integración por partes

$$\frac{1}{2} e^t (\operatorname{sen} t - \cos t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Despejando la variable  $y$ , se obtiene la solución general

$$y = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} t - \cos t) + c e^{-t}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

- Para calcular la solución particular que satisface la condición  $y(0) = 0$ , sustituimos los valores  $t = 0$ ,  $y = 0$  en (1.9),

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 0 - \cos 0) + c e^0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

La solución del problema de valores iniciales vendrá dada por

$$y(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} t - \cos t + e^{-t})$$

### EJERCICIO 11 Resolver la ecuación diferencial

$$(6ty + 2y^2 - 5)dt + (3t^2 + 4ty - 6)dy = 0.$$

- Sean

$$M(t, y) = 6ty + 2y^2 - 5, \quad N(t, y) = 3t^2 + 4ty - 6.$$

La ecuación diferencial es exacta puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t + 4y = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Existe, por tanto, una función  $F(t, y)$  tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y).$$

Las igualdades anteriores nos permiten calcular la expresión de la función  $F(t, y)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y) &\Rightarrow F(t, y) = \int M(t, y) \, dt = \int (6ty + 2y^2 - 5) \, dt \\ &= 3t^2 y + 2ty^2 - 5t + g(y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y) \Rightarrow 3t^2 + 4ty + g'(y) = 3t^2 + 4ty - 6 \Rightarrow g'(y) = -6$$

Luego,

$$g(y) = \int -6 dy = -6y.$$

La función  $F(t, y)$  será

$$F(t, y) = 3t^2y + 2ty^2 - 5t - 6y,$$

y la solución general vendrá dada en forma implícita por

$$3t^2y + 2ty^2 - 5t - 6y = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### EJERCICIO 12 Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 0 \tag{1.10}$$

- (a) **Probar que  $y_1(t) = e^{2t}$  es una solución de (1.10).**
- (b) **Aplicar el método de reducción del orden para poder buscar otra solución particular de (1.10).**
- (c) **Encontrar la solución general de (1.10).**

- Es evidente que  $y_1(t) = e^{2t}$  es una solución de (1.10). Si buscamos otra solución de la forma  $y(t) = u(t)e^{2t}$ , debe cumplirse

$$y(t) = u'e^{2t} + 2ue^{2t}, \quad y'' = u''e^{2t} + 4u'e^{2t} + 4ue^{2t}. \tag{1.11}$$

Sustituyendo (1.11) en (1.10) se obtiene,

$$y'' - 4y = 0 \Rightarrow e^{2t}(u'' + 4u') = 0$$

al ser  $e^{2t} \neq 0, \forall t \in (-\infty, \infty)$ , entonces  $u'' + 4u' = 0$ .

Llamando  $w := u'$ , la ecuación diferencial anterior se transformará en

$$w' + 4w = 0 \Rightarrow \frac{w'}{w} = -4 \Rightarrow \ln |w(t)| = -4t + k \Rightarrow w(t) = c_1 e^{-4t}$$

Al ser  $w(t) = u'(t) = c_1 e^{-4t}$ , entonces

$$u(t) = -\frac{c_1}{4} e^{-4t} + c_2$$

y finalmente

$$y(t) = u(t)e^{2t} = -\frac{c_1}{4} e^{-2t} + c_2 e^{2t}$$

Si tomamos  $c_1 = -4$ ,  $c_2 = 0$ , obtenemos la segunda solución  $y_2(t) = e^{-2t}$ . Puesto que

$$W[e^{2t}, e^{-2t}] = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ 2e^{2t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \forall t \in (-\infty, \infty),$$

entonces, las soluciones son linealmente independientes en  $(-\infty, \infty)$  y en consecuencia

$$y(t) = -\frac{c_1}{4}e^{-2t} + c_2e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general de (1.10).

**EJERCICIO 13 Resolver por reducción del orden la siguiente ecuación diferencial**

$$(t^3 - 2t^2)y'' - (t^3 + 2t^2 - 6t)y' + (3t^2 - 6)y = 0, \quad t > 2, \quad (1.12)$$

sabiendo que admite una solución del tipo  $y(t) = t^k$ .

- Sustituimos la función  $y = t^k$  y sus derivadas en (1.12)

$$k(k-1)(t^{k+1} - 2t^k) - k(t^{k+2} + 2t^{k+1} - 6t^k) + (3t^{k+2} - 6t^k) = 0.$$

Simplificando, resulta

$$(3-k)t^2 + (k^2 - 3k)t + (-2k^2 + 8k - 6) = 0,$$

lo cual es cierto si  $k = 3$ .

Tenemos por tanto como solución de (1.12) la función  $y_1(t) = t^3$ .

- Sea  $y(t) = u(t)y_1(t) = u(t)t^3$ . Derivando y sustituyendo en la ecuación diferencial inicial (1.12)

$$(t^3 - 2t^2)(6tu + 6t^2u' + t^3u'') - (t^3 + 2t^2 - 6t)(3t^2u + t^3u') + (3t^2 - 6)(ut^3) = 0,$$

que una vez simplificada

$$t(t-2)u'' - (t^2 - 4t + 6)u' = 0$$

Reduciendo el orden,  $w(t) := u'(t)$  nos proporciona la ecuación

$$t(t-2)w' - (t^2 - 4t + 6)w = 0.$$

A continuación resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{w'}{w} = \frac{t^2 - 4t + 6}{t^2 - 2t},$$

de variables separadas

$$\begin{aligned}\ln |w| &= \int \left( 1 + \frac{-2t+6}{t(t-2)} \right) dt \\ &= t + \int \frac{-3}{t} dt + \int \frac{1}{t-2} dt \\ &= t - 3 \ln |t| + \ln |t-2| = t + \ln \frac{t-2}{t^3} + k\end{aligned}$$

Podemos expresar la solución anterior de la siguiente manera

$$|w| = e^t e^{\ln \left| \frac{t-2}{t^3} \right| + k} = c \left( \frac{t-2}{t^3} \right) e^t.$$

Finalmente, al ser  $u' = w$ , calculamos el valor de la función  $u(t)$

$$u = c \int e^t \left( \frac{t-2}{t^3} \right) dt = c \int \frac{e^t(t^2-2t)}{t^4} dt = c \left( \frac{e^t}{t^2} \right) + k.$$

Es decir,  $y(t) = u(t)y_1(t) = cte^t + kt^3$ . Si  $c = 1$ ,  $k = 0$  obtenemos  $y(t) = te^t$ .

- Las soluciones  $t^3, te^t$  forman un conjunto fundamental, ya que

$$W[t^3, te^t] = e^t t^3 (t-2) \neq 0, \quad \forall t > 2,$$

y entonces

$$y(t) = c_1 te^t + c_2 t^3, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general de la ecuación diferencial (1.12).

#### EJERCICIO 14 Resolver $y'' + 6y' + 8y = 0$ .

- El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4).$$

Las raíces son  $\lambda_1 = -2$  y  $\lambda_2 = -4$ . En consecuencia, la solución general de nuestro problema es de la forma

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

#### EJERCICIO 15 Resolver $y''' + y'' - 2y' = 0$

- El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

y sus raíces características son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -2$ . La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

### EJERCICIO 16 Resolver $(y'' - 2y' + 5)^2 = 0$

- Las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación diferencial son  $\lambda_1 = 1 + 2i$ ,  $\lambda_2 = 1 - 2i$ ,  $\lambda_3 = 1 + 2i$ ,  $\lambda_4 = 1 - 2i$ .

La solución general de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} y(t) &= e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) + t e^t(c_3 \cos 2t + c_4 \operatorname{sen} 2t) \\ &= e^t((c_1 + c_3 t) \cos 2t + (c_2 + c_4 t) \operatorname{sen} 2t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### EJERCICIO 17 Resolver

$$y'' - 3y' = 8e^{3t} + 4 \operatorname{sen} t. \quad (1.13)$$

- Paso 1.** La ecuación diferencial homogénea tiene como raíces del polinomio característico  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 3$ . En consecuencia

$$y_h(t) = c_1 + c_2 e^{3t}.$$

- Paso 2.** A continuación intentaremos encontrar a partir de (1.13) otra ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes pero homogénea. Para ello derivamos en (1.13)

$$\begin{aligned} y''' - 3y'' &= 24e^{3t} + 4 \cos t \\ y^{(4)} - 3y''' &= 72e^{3t} - 4 \operatorname{sen} t. \end{aligned} \quad (1.14)$$

sumando (1.13) y (1.14)

$$y^{(4)} - 3y''' + y'' - 3y' = 80e^{3t}, \quad (1.15)$$

derivando en la ecuación anterior

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + y''' - 3y'' = 240e^{3t}, \quad (1.16)$$

finalmente multiplicamos por  $-3$  la expresión (1.15) y sumamos con (1.16)

$$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 10y''' - 6y'' + 9y' = 0. \quad (1.17)$$

El polinomio característico

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 10\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda - 3)^2(\lambda^2 + 1),$$

nos permite obtener la solución general de la ecuación diferencial homogénea (1.17)

$$y(t) = (c_1 + c_2 e^{3t}) + (c_3 t e^{3t} + c_4 \cos t + c_5 \sin t).$$

Esta expresión anterior nos sugiere que  $y_p(t)$  es de la forma

$$y_p(t) = A t e^{3t} + B \cos t + C \sin t. \quad (1.18)$$

Si sustituimos (1.18) en (1.13) e identificamos coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} 3A = 8 \\ -B - 3C = 0 \\ 3B - C = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 8/3, \quad B = 6/5, \quad C = -2/5.$$

Por tanto,

$$y_p(t) = \frac{8}{3} t e^{3t} + \frac{6}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t.$$

- **Paso 3.** La solución general de (1.13) viene dada por

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 + c_2 e^{3t} + \frac{8}{3} t e^{3t} + \frac{6}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

**EJERCICIO 18** Resolver  $y'' - 2y' + y = (t - 1)e^t$  utilizando el método de variación de parámetros.

- El polinomio característico  $\lambda^2 - 2\lambda + 1$  tiene por raíces  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Por lo tanto,

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Si  $y_1 = e^t$ ,  $y_2 = t e^t$  su Wronskiano vale

$$W = W[e^t, t e^t] = \begin{vmatrix} e^t & t e^t \\ e^t & e^t + t e^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0, \quad \forall t \in (-\infty, \infty).$$

- Ahora se trata de encontrar una solución particular  $y_p(t)$  de la forma

$$y_p(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) = c_1(t) e^t + c_2(t) t e^t.$$

Como sabemos, las funciones  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  se obtienen de las igualdades

$$c_1'(t) = \frac{-y_2(t)g(t)}{W}, \quad c_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W}.$$

En nuestro caso,

$$c_1'(t) = \frac{-y_2 g(t)}{W} = \frac{-te^t(t-1)e^t}{e^{2t}} = -t^2 + t \Rightarrow c_1(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2},$$

y

$$c_2'(t) = \frac{y_1 g(t)}{W} = \frac{e^t(t-1)e^t}{e^{2t}} = t - 1 \Rightarrow c_2(t) = -\frac{t^2}{2} - t.$$

- Por consiguiente,  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$  siendo

$$y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)e^t + \left(\frac{t^2}{2} - t\right)te^t = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right)e^t$$



## EJERCICIOS PROPUESTOS

### EJERCICIO 19

1.- Dada la ecuación diferencial

$$t \frac{dy}{dt} + (1 + t^2)y = 27$$

- Calcular su solución general
- Calcular la solución particular para  $y(1) = 2$
- ¿Cuál es el comportamiento a largo plazo de la solución anterior?

2.- Suponiendo que la tasa de crecimiento de una población de bacterias  $y(t)$  es de,

$$\frac{dy}{dt} = (1 + t)y.$$

Encontrar el número de bacterias en un tiempo  $t = 5$  minutos, si la población inicial es de  $y(0) = 2$ .

3.- Las firmas farmacéuticas invierten mucho dinero con el fin de probar un nuevo medicamento. Sin embargo, lleva tiempo que los médicos acepten y hagan uso del medicamento. El uso tiende a un valor límite del 100 % o 1, después del tiempo  $t$ , en meses. Sea  $P(t)$  el porcentaje de médicos que utilizan un nuevo medicamento contra el cancer después de  $t$  meses. Es conocido que la razón de cambio de éste porcentaje es proporcional a la diferencia entre dicho porcentaje y su valor límite.

3.a.- Si  $P(0) = 0$ , encontrar el porcentaje de médicos que aceptan el medicamento después de 3 meses, sabiendo que después de 1 mes el porcentaje es del 33 %.

3.b.- Trazar una gráfica aproximada de la función  $P(t)$ .

---