

PRÁCTICA 8



EL MODELO PRESA DEPREDADOR Y LA DINÁMICA DE SISTEMAS

8.1. Objetivo

En esta práctica utilizaremos la Dinámica de Sistemas para simular y analizar diversos modelos del tipo Lotka-Volterra, a través del programa **Vensim PLE®**, y ha sido extraída del Trabajo Fin de Grado de la alumna *Runjie Wu*¹, tutorizado por el profesor *Juan Navas Ureña*.

8.2. Antecedentes

Uno de los modelos matemáticos más clásico, y más utilizado, es el sistema dinámico constituido por dos elementos (en general dos especies de animales) que interactúan de tal manera que una de la especie (depredadora) se alimenta de la otra (presa). Ejemplo típico es el sistema formado por zorros y conejos, pero que puede ser trasladado, sin pérdida de generalidad, a cualquier otro contexto, como por ejemplo, el formado por vendedores (depredadores) y compradores (presas).

Los zorros se alimentan de conejos y los conejos de hierba que supondremos que nunca se agota. Cuando hay muchos conejos, la población de zorros aumentará puesto que el alimento es abundante, pero llegará un momento en el que la población de conejos disminuirá al ser los zorros demasiados. Al no tener, los zorros, comida suficiente su población disminuirá, lo que favorecerá de nuevo a la población de conejos. Es decir, se producen ciclos de crecimiento y decrecimiento de ambas poblaciones. ¿Existe algún modelo matemático que explique este comportamiento periódico?

¹*El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la economía*

Por otro lado, en la segunda década del siglo XX el biólogo italiano *Umberto D'Ancona* estudió y recopiló datos de capturas de dos tipos de peces en algunos puertos del Mediterráneo, por un lado selacios (tiburones, pez raya, etc.), y por otro peces que eran comidos por los anteriores (sardinias, boquerones, etc.). Es decir, unas presas (los peces comestibles) y otros depredadores (selacios). En la tabla 8.1 aparece el porcentaje de tiburones capturados, en el puerto de *Fiume*, en el período 1914-1923 respecto a la cantidad total de peces.

Año	1914	1915	1916	1917	1918
Porcentaje	11.9	21.4	22.1	21.1	36.4
Año	1919	1920	1921	1922	1923
Porcentaje	27.3	16	15.9	14.8	10.7

Tabla 8.1 Porcentaje de capturas 1914-1923.

El porcentaje aumenta de manera significativa entre los años 1915 y 1919 y *D'Ancona* se preguntó cuál era el motivo de este incremento.

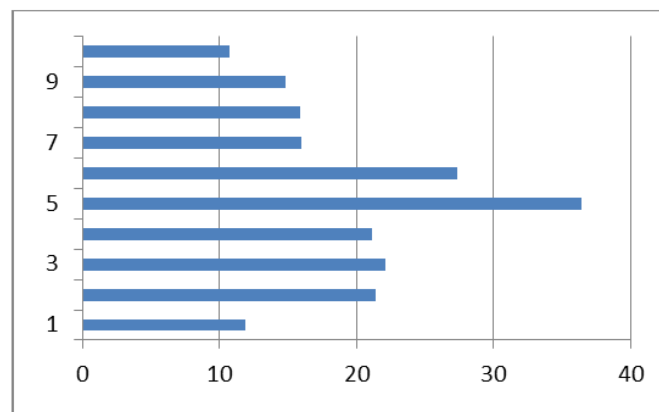


Figura 8.1: Porcentajes de capturas de selacios.

Una de las primeras razones en que pensó estaba relacionada con la Primera Guerra Mundial. En efecto, en estas fechas se desarrolló la primera gran guerra y esto obligaba a que menos barcos salieran a pescar, y por lo tanto, al disminuir la intensidad de la pesca, esto provocaba el aumento en el número de peces depredadores (selacios). Sin embargo, este argumento tenía un problema y era que también habían aumentado el número de peces comestibles. De hecho, si la intensidad de pesca es pequeña, entonces este hecho beneficia más a los depredadores que a las presas. La pregunta pertinente era, ¿por qué?

De manera resumida, se planteaban dos cuestiones:

- ¿Cómo explicar el comportamiento cíclico de la evolución de dos poblaciones, donde una especie se alimenta de la otra?

- ¿Por qué una intensidad baja de captura favorece más a los depredadores que a las presas?

8.3. La construcción del modelo

Para encontrar las respuestas a estas preguntas *D'Ancona* pidió ayuda al matemático *Vito Volterra*, quien elaboró el siguiente modelo. Llamaremos $x(t)$, $y(t)$ al número de presas y depredadores, respectivamente, existentes en el tiempo t . En ausencia de los depredadores las presas aumentarían de manera exponencial (puesto que su alimento es inagotable y no hay depredadores). Por otro lado, sin presas los depredadores morirán de forma exponencial (por falta de comida). Es decir, el modelo que describiría esta situación sería:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx}{dt} = ax(t) & ; & a > 0 \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} = -cy(t) & ; & c > 0 \end{cases}$$

En el momento en el que entran en contacto los depredadores con las presas, el ritmo de crecimiento de las presas disminuye a una tasa proporcional al encuentro de una presa con un depredador ($bx(t)y(t)$); mientras que los depredadores aumentarían de la misma manera ($dx(t)y(t)$). En consecuencia, ahora el modelo sería:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) & ; & a > 0, b > 0 \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) & ; & c > 0, d > 0 \end{cases}$$

Sistema que puede ser reescrito como:

$$\begin{cases} x'(t) = bx(t) \left(\frac{a}{b} - y(t) \right) & ; & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = dy(t) \left(x(t) - \frac{c}{d} \right) & ; & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

El modelo fue descubierto de forma independiente por *Lotka* y por *Volterra*, y por este motivo se le conoce como modelo presa-depredador o bien modelo *Lotka-Volterra* y describe bastante bien la evolución de presas y depredadores cuando se encuentran en un ecosistema aislado.

No obstante, tenemos que aclarar que dos poblaciones distintas en un mismo medio ambiente tienen varias maneras de sobrevivir, por ejemplo:

- La **competencia mutua**, es decir compiten por la misma fuente alimentaria, tienden a provocar la extinción de una población de ellos, y la otra tiende a aprovechar la máxima capacidad de los recursos ambientales.
- La **interdependencia**, es decir las dos poblaciones proporcionan algunos recursos alimenticios, viven pacíficamente entre ellos, y tienden a un estado de equilibrio.

- La **ley de la selva**, es decir una población sobrevive dependiendo de la abundancia de recursos naturales, llamada la presa; mientras que la otra población vive dependiendo de las poblaciones de presas, llamada el depredador. Los dos elementos están compuestos por el modelo presa-depredador. Por ejemplo, Los peces comestibles y los peces selacios, los conejos y los linces, las cochinillas y los pulgones, son típicos ejemplos de esta forma de convivencia.

8.4. Simulación del modelo con Vensim

Para situar el modelo a estudiar en un contexto económico apropiado consideraremos que las presas $x(t)$ representan al número de compradores de un artículo en el día t , mientras que los depredadores $y(t)$ coinciden con el número de vendedores de este artículo en el día t . En esta situación la evolución del número de compradores y el de vendedores está modelada por el sistema presa-depredador cuyo Diagrama de *Forrester* es el del tipo que aparece en la figura 8.2.

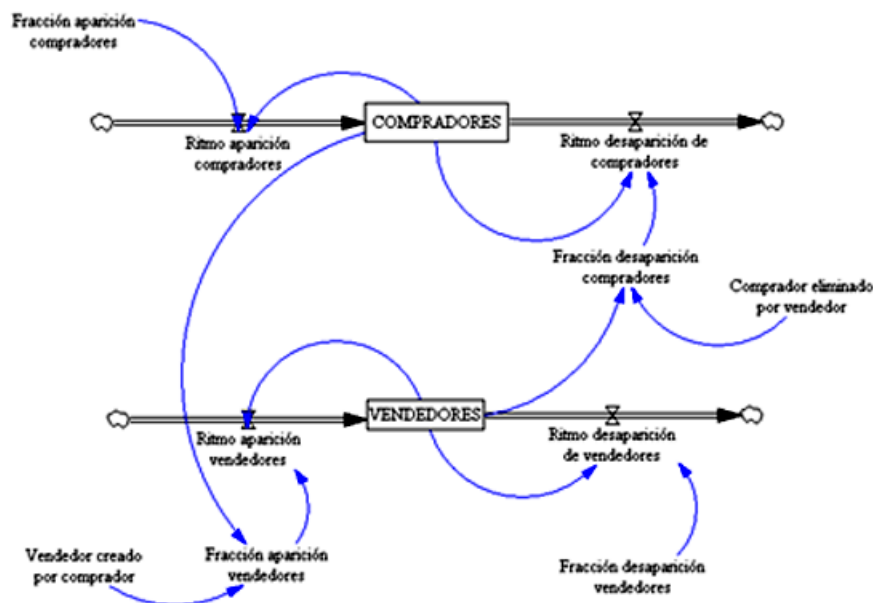


Figura 8.2: Diagrama de Forrester del modelo presa-depredador.

Las ecuaciones de este modelo junto con los valores de los parámetros son:

$$\begin{aligned}
 \text{Fracción aparición compradores} &= 3.3 \\
 \text{Fracción aparición vendedores} &= \text{COMPRADORES} * \text{Vendedor creado por comprador} \\
 \text{Fracción desaparición compradores} &= \text{VENDEDORES} * \text{Comprador eliminado por vendedor} \\
 \text{Fracción desaparición vendedores} &= 0.5 \\
 \text{Comprador eliminado por vendedor} &= 0.08 \\
 \text{Vendedor creado por comprador} &= 0.2
 \end{aligned}$$

<i>Ritmo aparición compradores</i>	=	<i>COMPRADORES</i> * <i>Fraccion aparición compradores</i>
<i>Ritmo desaparición de compradores</i>	=	<i>COMPRADORES</i> * <i>Fraccion desaparición compradores</i>
<i>Ritmo aparición vendedores</i>	=	<i>Fraccion aparición vendedores</i> * <i>VENDEDORES</i>
<i>Ritmo desaparición vendedores</i>	=	<i>Fraccion desaparición vendedores</i> * <i>VENDEDORES</i>
<i>COMPRADORES</i>	=	<i>INT(Ritmo aparición compradores – Ritmo desaparición de compradores, 150)</i>
<i>VENDEDORES</i>	=	<i>INT(Ritmo aparición vendedores – Ritmo desaparición de vendedores, 25)</i>

El modelo se ha simulado entre $t = 0$ y $t = 100$, utilizando como método de aproximación numérica el de *Runge-Kutta* de cuarto orden y con un paso de $h = 0.015625$. Como se aprecia en la figura 8.3, el comportamiento de ambas poblaciones es cíclico, siendo su período de aproximadamente 25 días. Con lo que queda explicada la primera de las preguntas planteadas.

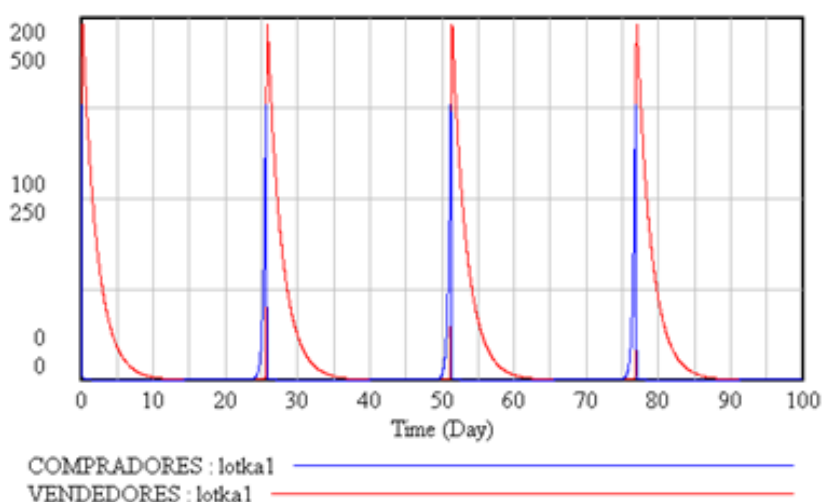


Figura 8.3: Resultado simulación del modelo presa-depredador.

Los puntos de equilibrio del modelo,

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 0.08x(t)y(t) \\ y'(t) = -0.5y(t) + 0.2x(t)y(t) \end{cases}$$

son las soluciones constantes, es decir aquellos valores obtenidos al resolver el sistema $x'(t) = 0, y'(t) = 0$, que son $x(t) = 0.2/0.5 = 0.4$; $y(t) = 3.3/0.08 = 41.25$.

Se puede construir de una manera muy simple el plano fase del sistema, para ello, con el botón de **Panel de Control** seleccionamos la pestaña **Graph** y posteriormente el icono **new** y aparecerá la ventana de la figura 8.4.

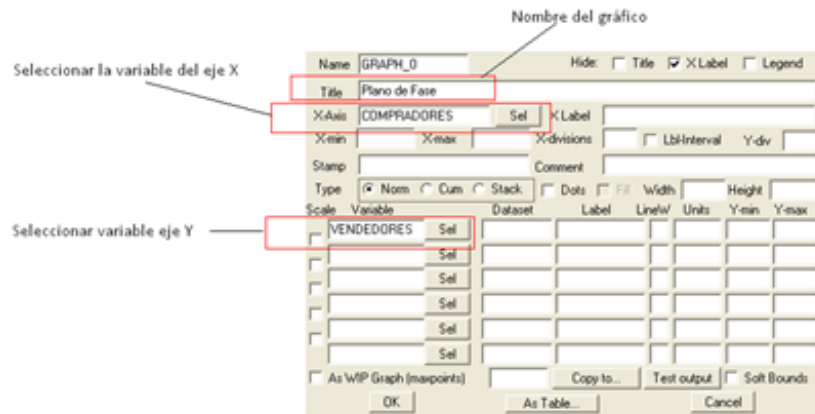


Figura 8.4: Construcción del Plano fase.

La figura 8.5 muestra la órbita del sistema dinámico,

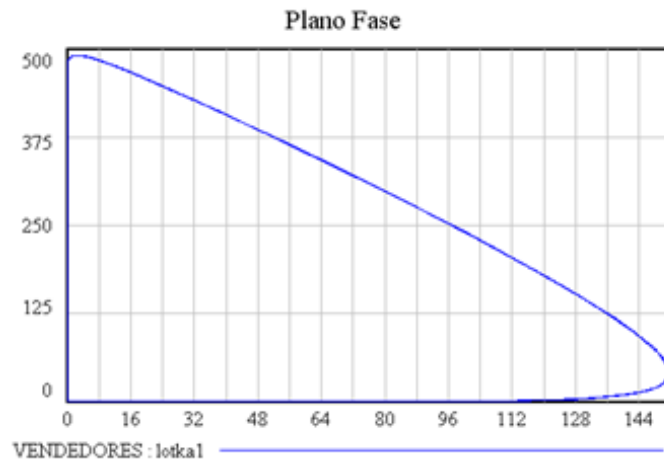


Figura 8.5: Plano fase del modelo presa-depredador.

que cómo puede verse se trata de una curva cerrada que gira en torno al centro que es el punto de equilibrio $(0.4, 41.25)$ donde las poblaciones se mantendrían indefinidamente si los valores iniciales se correspondiesen con $x(0) = 0.4; y(0) = 41.25$

Para poder dar respuesta a la segunda de las preguntas que motivaron el modelo, es necesario hablar de valores promedios. Se puede encontrar el promedio de depredadores $y(t)$ en el intervalo $[0, T]$ siendo T el período correspondiente a la curva solución, mediante la integral:

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt,$$

cuyo valor es a/b , el mismo que el obtenido para el punto de equilibrio. Del mismo modo el promedio de las presas es c/d . Obtenemos una propiedad importante que es: *no importa cuál sea el tamaño de las poblaciones iniciales, su promedio será siempre el mismo*. Esta propiedad suele recibir el nombre de **ley de conservación de la naturaleza**.

Si introducimos en el modelo inicial el efecto extra de la pesca, con una intensidad α , entonces ahora el modelo adoptaría la forma,

$$\begin{cases} x'(t) = a x(t) - b x(t)y(t) - \alpha x(t) \\ y'(t) = -c y(t) + d x(t)y(t) \alpha y(t) \end{cases}$$

que puede reescribirse como,

$$\begin{cases} x'(t) = (a - \alpha) x(t) - b x(t)y(t) \\ y'(t) = -(c + \alpha) y(t) + d x(t)y(t) \alpha y(t) \end{cases}$$

es decir, es otro modelo del tipo presa-depredador idéntico al primero, donde el coeficiente a se ha transformado en $a - \alpha$, y el c en $c + \alpha$. Por lo tanto si $\alpha < a$, para este nuevo modelo los valores promedios serán para los depredadores $(a - \alpha)/b$, y para las presas $(c + \alpha)/d$. Para un valor de $a > \alpha$, en promedio, al incluir la pesca, las presas aumentan y disminuyen los depredadores.

Veamos este efecto modificando nuestro modelo con Vensim PLE[®] con objeto de introducir el efecto de la pesca. En nuestro caso sería incorporar una nueva variable auxiliar Fracción de retirada de compradores y vendedores y los dos flujos de salida Retirada de compradores y Retirada de vendedores, que aparecen en la figura 8.6

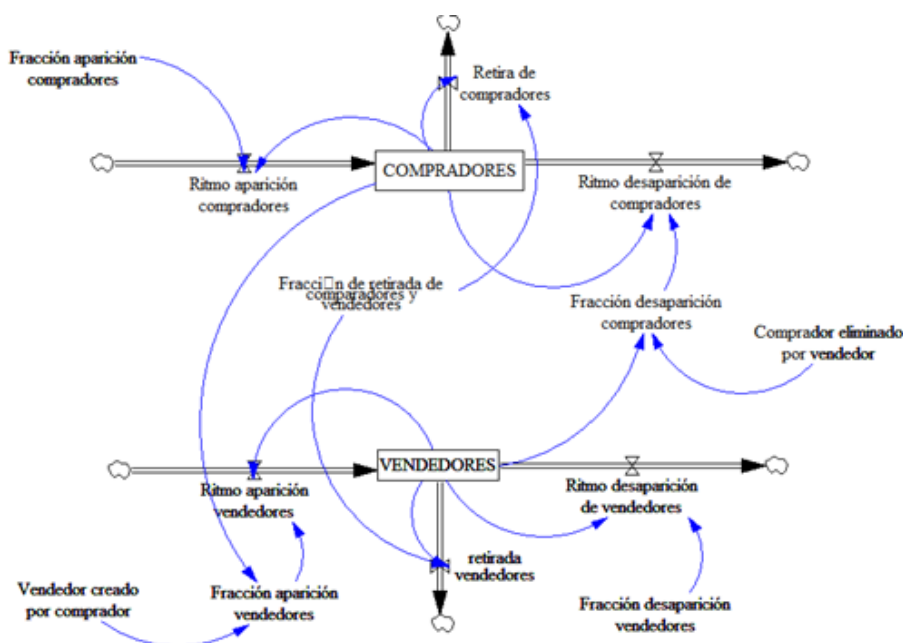


Figura 8.6: Diagrama de Forrester del modelo presa-depredador con efecto de pesca.

Las nuevas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \text{Fracción de retirada de compradores y vendedores} &= 2 \\ \text{Fracción de retirada de compradores y vendedores} &= 2 \\ \text{Retirada de compradores} &= \text{COMPRADORES} * \text{Fracción de} \\ &\quad \text{retirada de comparadores y vendedores} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Retirada de vendedores} &= \text{VENDEDORES} * \text{Fraccion de} \\
 &\quad \text{retirada de comparadores y vendedores} \\
 \text{COMPRADORES} &= \text{INT}(\text{Ritmo aparicion compradores} - \text{Retira} \\
 &\quad \text{de compradores} - \text{Ritmo desaparicion de compradores}, 150) \\
 \text{VENDEDORES} &= \text{INT}(\text{Ritmo aparicion vendedores} - \text{retirada} \\
 &\quad \text{vendedores} - \text{Ritmo desaparicion de vendedores}, 25)
 \end{aligned}$$

La simulación se ha realizado con el nombre Lotka2 y aparece en azul en las gráficas de la figura 8.7, y en rojo se han mantenido los resultados de la simulación sin el efecto de la pesca.

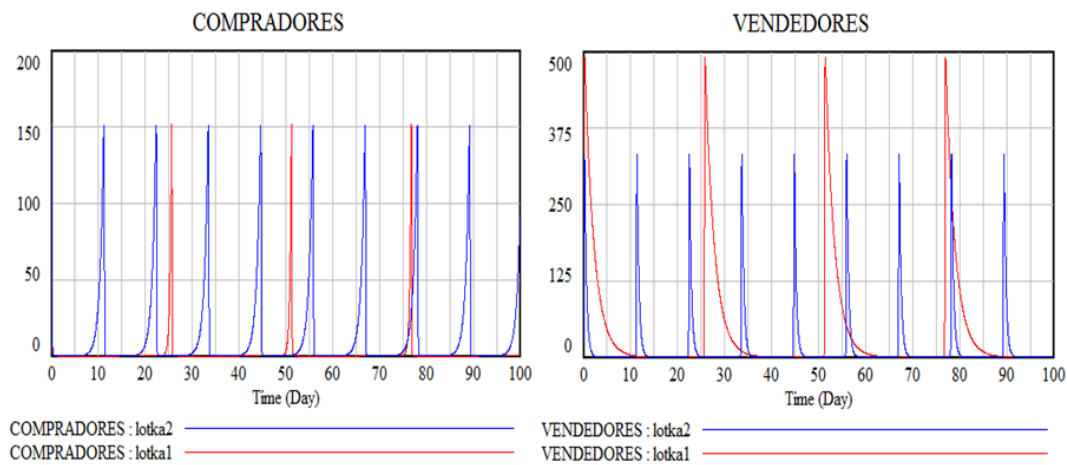


Figura 8.7: Comparación de las simulaciones.

Nótese como, en efecto, en promedio los depredadores disminuyen y las presas aumentan, y que además se ha modificado la duración del período.

Por último, estamos en condición de explicar la respuesta de la segunda pregunta planteada. Observemos que si en la expresión $(a - \alpha)/b$ disminuimos la intensidad de la pesca (el valor del α), entonces todo el cociente aumentará, y que por el contrario la expresión $(c + \alpha)/d$ disminuirá. Este principio hoy se conoce con el nombre de **efecto Volterra**. Cuando se disminuye la intensidad de captura entonces, en promedio, salen más favorecidos los depredadores que las presas.

Para poner de manifiesto el efecto *Volterra* en el modelo presa-depredador, se tiene que incluir el tiempo en el Diagrama de *Forrester* como **Shadow variable**, conectarla con la variable auxiliar **Fraccion de retirada de compradores y vendedores** y definir su ecuación como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Fraccion de retirada de compradores y vendedores} = \\
 &\text{IF THEN ELSE}(\text{Time} < 50, 2, 0.75)
 \end{aligned}$$

Es decir, la intensidad de captura es de 2 desde el momento inicial hasta $t = 50$, y partir de aquí desciende al valor 0.75. En la figura 8.8 se aprecia como a partir de $t = 50$ se modifica el comportamiento del modelo en el sentido que se ha comentado.

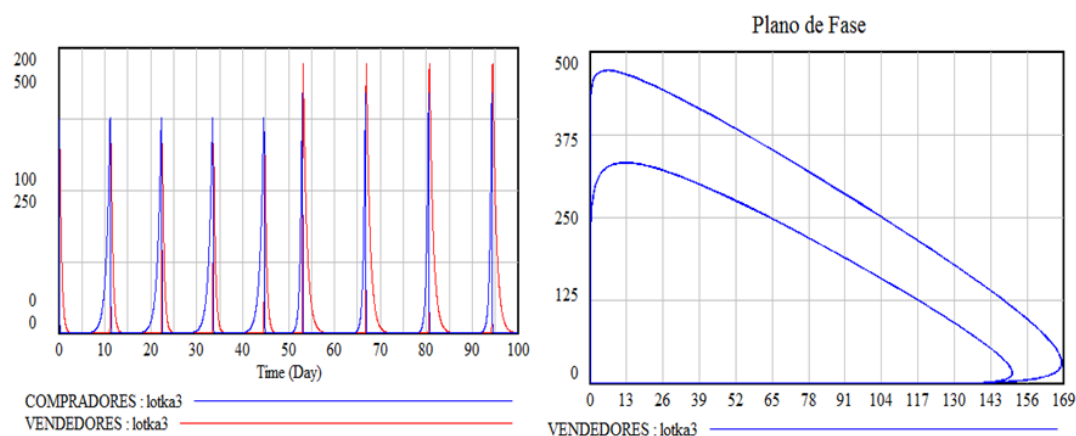


Figura 8.8: Efecto *Volterra*.

El modelo *Lotka-Volterra* es muy interesante a nivel teórico pero adolece de ciertos problemas que en la realidad hacen que su aplicación sea muy limitada. Entre los problemas más importantes que el modelo no incorpora podemos destacar:

- Los ecosistemas no están aislados.
- No se tiene en cuenta la interacción entre las presas y entre los depredadores. Sería preferible añadir al modelo un crecimiento del tipo logístico.
- El modelo no es estructuralmente estable, de tal forma que las órbitas de su plano fase no son curvas cerradas perfectas.
- En los experimentos en laboratorio siempre los depredadores eliminan a las presas.

8.5. Modificaciones del modelo presa-depredador.

8.5.1. Primera versión

Existe un gran número de variaciones del modelo *Lotka-Volterra*, y de todas ellas presentaremos algunas que consideramos más interesantes. En 1926 *Leslie* propuso una primera modificación, suponiendo que el crecimiento de las presas no es exponencial sino del tipo logístico, con una capacidad de carga K . Además se supone que el ritmo de evolución de los depredadores (vendedores) es otro modelo logístico donde ahora su capacidad de carga depende de los compradores disponibles tal y como se expresa en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

$$\begin{cases} x'(t) = ax - \frac{ax^2}{K} - bxy \\ y'(t) = dy(1 - \frac{y}{nx}) \end{cases}$$

Con todos los parámetros positivos y donde $x(t)$ representa al número de compradores (presas) de un artículo en el día t , mientras que los $y(t)$ coinciden con el número de vendedores (depredadores) de este artículo en el día t . Para poder simular este sistema con Vensim PLE[®], analizaremos un caso concreto:

$$\begin{cases} x'(t) = 3.3x - \frac{3.3x^2}{30000} - 0.08xy \\ y'(t) = 0.2y - \frac{0.2y^2}{60000x} \end{cases}$$

En esta situación la evolución del número de compradores y el de vendedores está modelada por el sistema presa-depredador modificado cuyo Diagrama de *Forrester* es como el que aparece en la siguiente figura.

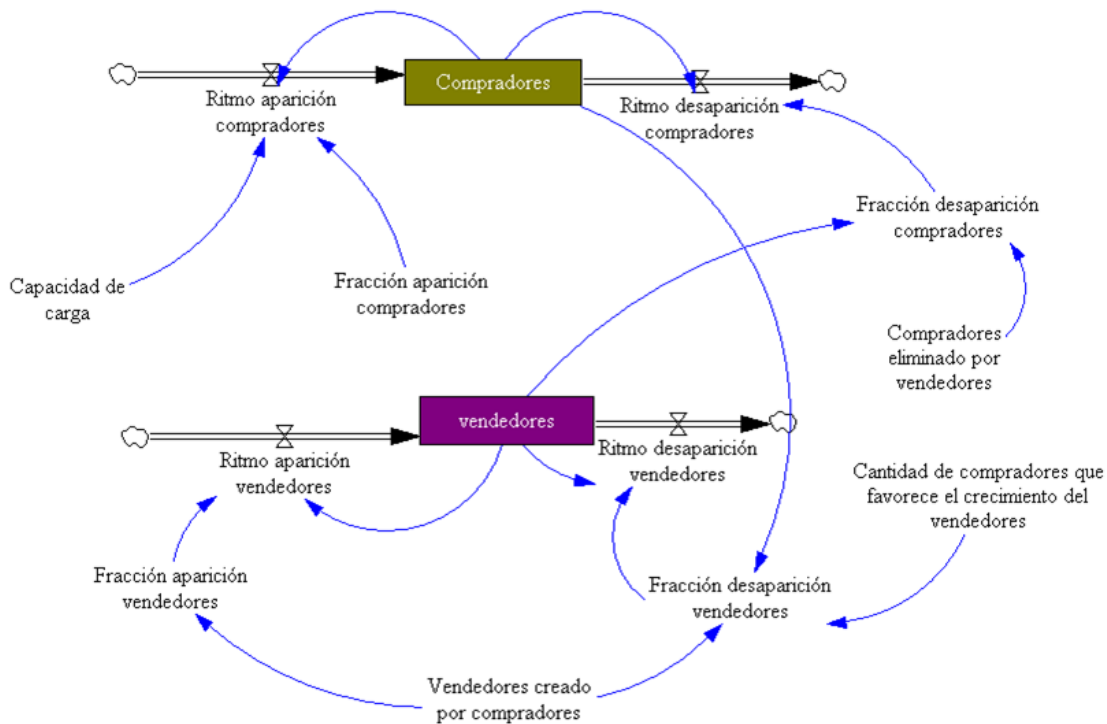


Figura 8.9: Diagrama de *Forrester* del modelo presa-depredador modificado.

Las ecuaciones de este modelo junto con los valores de los parámetros vienen dado por:

Capacidad de carga = 30000

Cantidad de compradores que favorece el crecimiento del vendedores = 60000

Fraccion aparición compradores = 3.3

Fraccion aparición vendedores = *Vendedor creado por comprador*

Fraccion desaparicion compradores = *VENDEDORES* * *Comprador eliminado por vendedor*

Fraccion desaparicion vendedores = *vendedores creado por comprador* / (*Compradores* * *Cantidad de compradores que favorece el crecimiento del vendedores*)

$$\begin{aligned}
 \text{Comprador eliminado por vendedor} &= 0.08 \\
 \text{Vendedor creado por comprador} &= 0.2 \\
 \text{Ritmo aparición compradores} &= \text{Compradores} * \text{Fraccion} \\
 &\quad \text{aparición compradores} * (1 - \text{Compradores}/\text{Capacidadde carga}) \\
 \text{Ritmo desaparición de compradores} &= \text{Compradores} * \text{Fraccion desaparición compradores} \\
 \text{Ritmo aparición vendedores} &= \text{Fraccion aparición vendedores} * \text{vendedores} \\
 \text{Ritmo desaparición vendedores} &= \text{Fraccion desaparición vendedores} * \text{vendedores}^2 \\
 \text{Compradores} &= \text{INT}(\text{Ritmo aparición compradores} - \text{Ritmo desaparición de compradores}, 150) \\
 \text{vendedores} &= \text{INT}(\text{Ritmo aparición vendedores} - \text{Ritmo desaparición de vendedores}, 25)
 \end{aligned}$$

El modelo se ha simulado entre $t = 0$ y $t = 100$, utilizando como método de aproximación numérica el de *Euler* y con un paso de $h = 0.015625$.

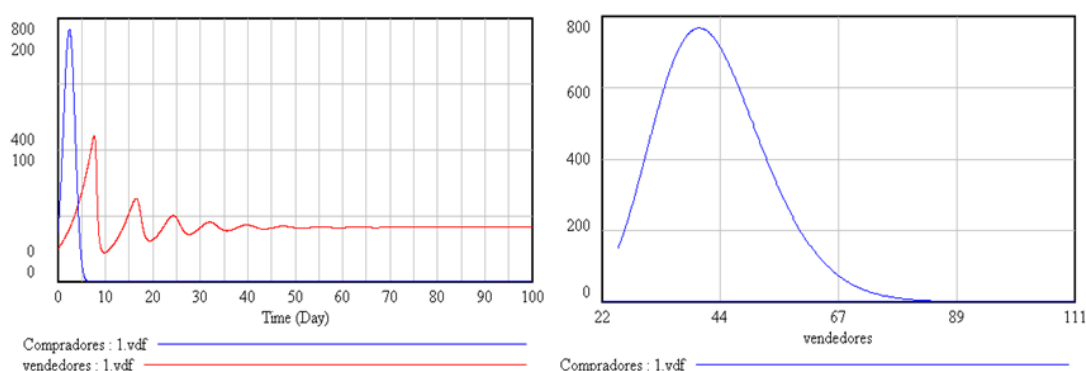


Figura 8.10: Simulación del modelo presa-depredador modificado tipo *Leslie*.

A largo plazo el comportamiento del modelo deja de ser cíclico, con la eliminación del número de compradores disponibles por parte de los vendedores que se estabilizarán en un valor aproximado de 41 (figura 8.10 izquierda). En el plano fase (figura 8.10 derecha) puede apreciarse como la órbita que se inicia en el punto $(150, 25)$ acaba en el punto $(0, 41)$.

8.6. Modelos en competencia

En los modelos presa-depredador que hemos estudiado no se ha tenido en cuenta un hecho importante como es la interacción de los compradores, ya que compiten por los mismos productos, provocando, por ejemplo, que los compradores tienda a la extinción, mientras que los vendedores se aproximen a su capacidad de carga, o bien pudiese ocurrir que compradores y vendedores, en función de los recursos disponibles, tiendan a un estado de equilibrio.

Para poner de manifiesto estos diversos comportamientos, vamos a construir un nuevo modelo alterando ligeramente las hipótesis del presa-depredador. Supongamos que $x(t)$ representa al número de compradores en un tiempo t , mientras que $y(t)$ sean los vendedores presentes en el tiempo t . En el modelo modificado de Lotka-Volterra observamos que en ausencia de vendedores, los compradores evolucionan

según el modelo logístico,

$$x'(t) = x(t) (a - b x(t))$$

Simultáneamente, si no existieran compradores, la velocidad de crecimiento de los vendedores estaría gobernada por la ecuación diferencial,

$$y'(t) = y(t) (c - d y(t))$$

Es decir, se ha introducido la interacción entre compradores dada por $b x(t)x(t)$, y la de los vendedores $d y(t)y(t)$, dependiendo su intensidad de los parámetros b y d . A continuación debemos tener en cuenta en las ecuaciones la reducción de la velocidad de crecimiento debido a las interferencias entre los compradores y vendedores, expresado como $-m y(t)x(t)$, donde m es la medida del grado en que los vendedores interfieren con los compradores. De la misma forma también aparecerá $-n x(t)y(t)$, donde n es la medida del grado en que los compradores interactúan con los vendedores. Finalmente, las ecuaciones del modelo en competencia son:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (a - b x(t) - m y(t)) & ; \quad x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = y(t) (c - d y(t) - n x(t)) & ; \quad y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Un análisis cualitativo detallado del modelo prueba que los posibles resultados, a largo plazo, dependiendo de los valores positivos de los parámetros, son:

- Primer caso: los compradores ganan a los vendedores. Esto es, los compradores tienden a un valor constante, mientras que los vendedores, a la larga, desaparecen.
- Segundo caso: los vendedores ganan a los compradores.
- Tercer caso: los compradores y vendedores tienden a coexistir en un punto de equilibrio estable.
- Cuarto caso: los compradores y vendedores tienden a coexistir en un punto de equilibrio inestable.

Nuestro próximo objetivo será el de poner de manifiesto estos comportamientos realizando diferentes simulaciones con **Vensim PLE**[®].

8.6.1. Primer caso

Por trabajar con un caso concreto, supongamos que el modelo de competencia a estudiar sea:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (0.3 - 0.01 x(t) - 0.06 y(t)) & ; \quad x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t) (0.03 - 0.009 y(t) - 0.0055 x(t)) & ; \quad y(0) = 20 \end{cases}$$

En la figura 8.11 puede verse el Diagrama de *Forrester*, que consta de dos niveles correspondientes al número de compradores y vendedores existentes en cualquier día t , dos flujos de entrada, cuatro flujos de salida, y seis variables auxiliares identificadas con los distintos parámetros del modelo.

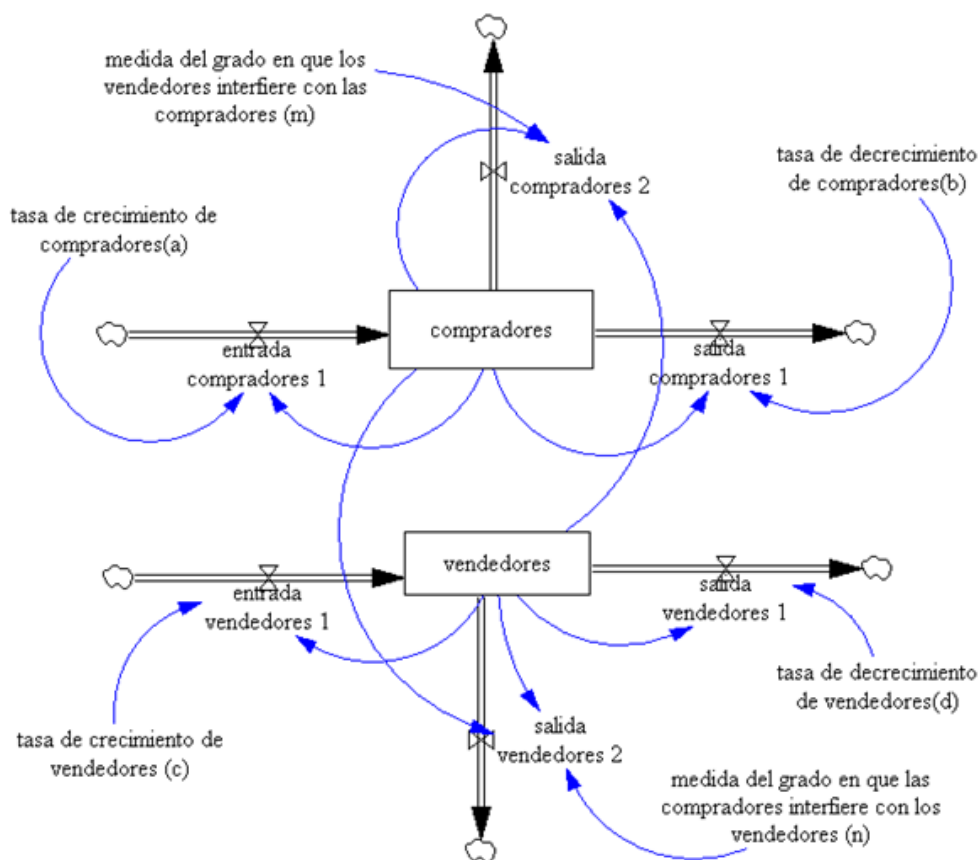


Figura 8.11: Diagrama de Forrester de competencia1.

Las ecuaciones del modelo son:

$$\text{compradores} = \text{INT}(\text{entrada compradores 1} - \text{salida compradores 1} - \text{salida compradores 2}, 75)$$

$$\text{vendedores} = \text{INT}(\text{entrada vendedores 1} - \text{salida vendedores 1} - \text{salida vendedores 2}, 20)$$

$$\text{medida del grado en que los vendedores interfieren con los compradores } (m) = 0.06$$

$$\text{medida del grado en que los compradores interfieren con los vendedores } (n) = 0.0055$$

$$\text{entrada compradores 1} = \text{tasa de crecimiento de compradores } (a) * \text{compradores}$$

$$\text{salida compradores 1} = \text{tasa de decrecimiento de compradores } (b) * \text{compradores}^2$$

$$\text{salida compradores 2} = \text{medida del grado en que los vendedores interfiere con los compradores } (m) * \text{compradores} * \text{vendedores}$$

$$\text{tasa de crecimiento de compradores } (a) = 0.3$$

$$\text{tasa de decrecimiento de compradores } (b) = 0.01$$

$$\text{entrada vendedores 1} = \text{tasa de crecimiento de vendedores } (c) * \text{vendedores}$$

$$\text{salida vendedores 1} = \text{tasa de decrecimiento de vendedores } (d) * \text{vendedores}^2$$

$$\text{salida vendedores 2} = \text{medida del grado en que los compradores interfiere con los vendedores } (n) * \text{compradores} * \text{vendedores}$$

$$\text{tasa de crecimiento de vendedores } (c) = 0.03$$

$$\text{tasa de decrecimiento de vendedores } (d) = 0.009$$

Una vez simulado el modelo, utilizando el método de *Runge-Kutta* de orden 4 y un paso de $h = 0.015625$ (figura 8.12), se comprueba que, independientemente del

número inicial, el número de compradores se estabiliza en 30 mientras que desaparecen los vendedores.

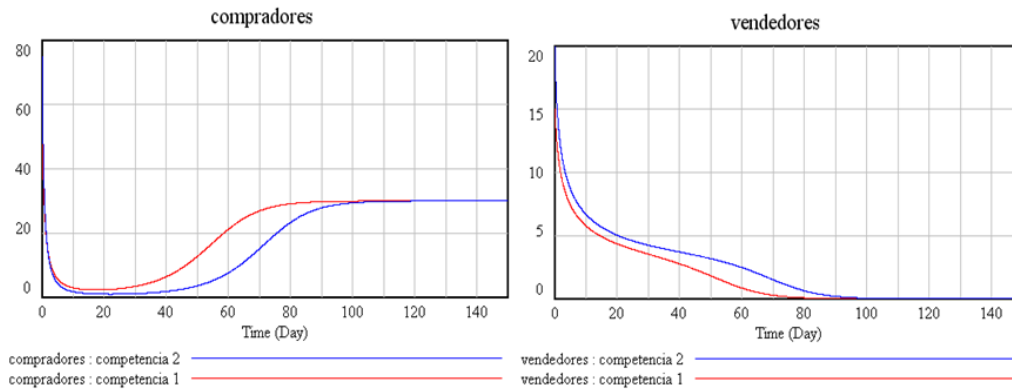


Figura 8.12: Resultados simulación modelo competencia 1.

Simultáneamente se ha ejecutado el análisis de sensibilidad de uno de los parámetros, concretamente a la medida del grado en que los compradores interfieren con los vendedores. Se han realizado 200 simulaciones aleatorias, según una distribución uniforme, para valores de n comprendidos en el intervalo $[0.005, 0.006]$. Los resultados de la figura 8.13 confirman el estudio anterior.

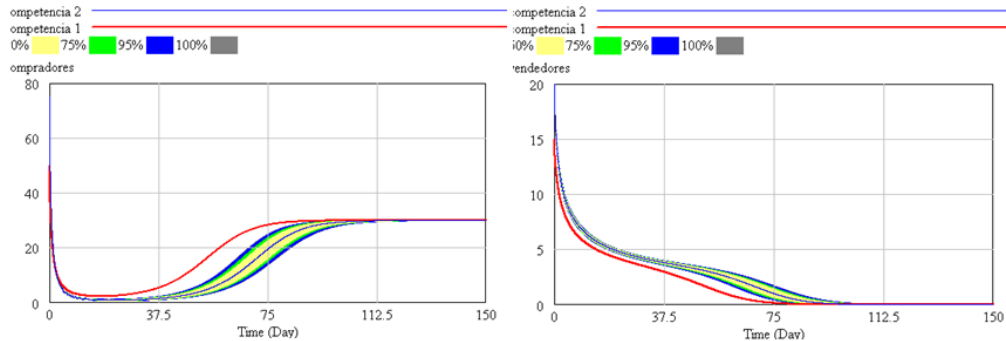


Figura 8.13: Análisis de sensibilidad del modelo competencia 1.

El mismo tipo de análisis de sensibilidad podría realizarse con el resto de las variables auxiliares, o bien realizar una simulación dinámica con el icono **SyntheSim**, que ofrece la posibilidad de modificar los valores de los parámetros **online** y ver el efecto que se produce sobre los diferentes niveles.

Una vez mostrado el camino de resolución del primero de los casos, el resto de ellos se proponen como ejercicios complementarios.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Modelo 2:** Simular con Vensim PLE[®] el siguiente modelo de competencia:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (0.26 - 0.2x(t) - 0.06y(t)) & ; x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t) (0.06 - 0.01y(t) - 0.015x(t)) & ; y(0) = 20 \end{cases}$$

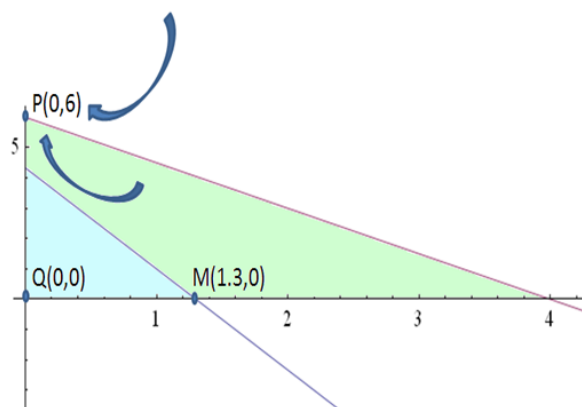


Figura 8.14: Estudio cualitativo modelo 2

- Modelo 3:** Simular con Vensim PLE[®] el siguiente modelo de competencia:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (0.26 - 0.02x(t) - 0.06y(t)) & ; x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t) (15.5 - 0.9y(t) - 4.2x(t)) & ; y(0) = 20 \end{cases}$$

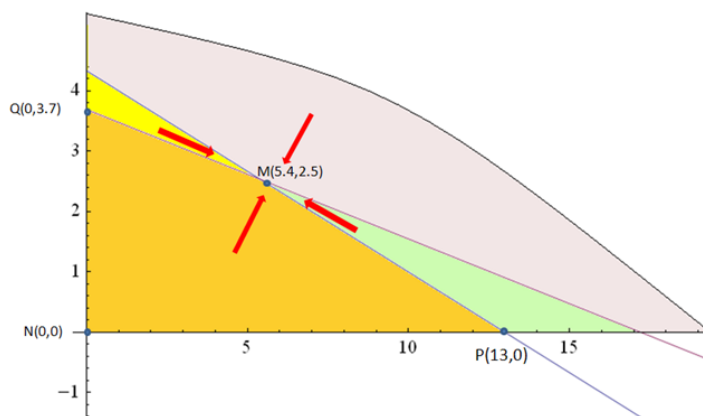


Figura 8.15: Estudio cualitativo modelo 3

- **Modelo 4:** Simular con Vensim PLE[®] el siguiente modelo de competencia:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (0.26 - 0.021 x(t) - 0.06 y(t)) & ; x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t) (0.06 - 0.01 y(t) - 0.01 x(t)) & ; y(0) = 20 \end{cases}$$

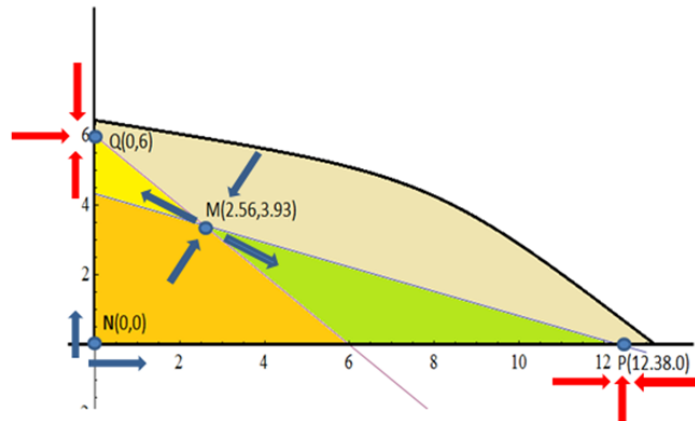


Figura 8.16: Estudio cualitativo modelo 4