PRÁCTICA 2

MODELOS MATRICIALES

2.1. Objetivo

Vamos a usar las operaciones y la diagonalización de matrices cuadradas para analizar el comportamiento a largo plazo de diferentes modelos discretos matriciales. A continuación estudiaremos el modelo de *Leslie* y las tablas de vida.

2.2. Cadenas de Markov

Una de las aplicaciones clásicas de los modelos discretos matriciales son las cadenas de Markov, como el siguiente ejemplo:

EJERCICIO 3 Un granjero tiene una gran población de flores cuyo color rojo, rosa y blanco viene determinado por los genotipos AA, Aa, y aa respectivamente. El granjero decide fertilizar todas las flores con un color rosa.

(a) **Si inicialmente tiene 100 flores rojas, 200 rosas y 300 blancas ¿Cuál será el número de flores de cada uno de los colores en la tercera generación? ¿Y en la sexta? ¿Y en la décima? Analizar el comportamiento a largo plazo.**

(b) **Encontrar la expresión para la distribución de los genotipos a lo largo de las generaciones, para una distribución inicial de $x_1(0)$ flores rojas, $x_2(0)$ rosas y $x_3(0)$ blancas.**

(c) **¿Existe alguna distribución inicial de colores de tal forma que se mantenga invariante?**

Para $k = 0, 1, 2, \cdots$, llamaremos:

- La fracción de las plantas del genotipo AA que hay en la generación de orden k como $x_1(k)$.
- La fracción de las plantas del genotipo Aa que hay en la generación de orden k como $x_2(k)$.
- La fracción de las plantas del genotipo aa que hay en la generación de orden k como $x_3(k)$.

En consecuencia, $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$ representarán a la distribución inicial de los genotipos, y es evidente que $x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.

La tabla que determina la distribución de los genotipos en cada generación, a partir de la distribución en la generación anterior es:

	$AA \times Aa$	$Aa \times Aa$	$aa \times Aa$
AA	1/2	1/4	0
Aa	1/2	1/2	1/2
aa	0	1/4	1/2

Por ejemplo, el cruce AAxAa da lugar a las siguientes posibilidades AA, Aa, AA, Aa, es decir AA y Aa con idénticas posibilidades. De la tabla anterior deducimos: para $k = 1, 2, \cdots$:

$$x_1(k) = \frac{1}{2}x_1(k-1) + \frac{1}{4}x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = \frac{1}{2}x_1(k-1) + \frac{1}{2}x_2(k-1) + \frac{1}{2}x_3(k-1)$$

$$x_3(k) = \frac{1}{4}x_2(k-1) + \frac{1}{2}x_3(k-1)$$

Estas ecuaciones podemos escribirlas de manera matricial

$$\vec{x}(k) = A\vec{x}(k-1)\,, \quad k = 1, 2, \cdots\,, \tag{2.1}$$

donde:

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}\,, \quad \vec{x}(k-1) = \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \end{pmatrix}\,; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como podemos apreciar, las tres columnas corresponden a las columnas de la tabla anterior. De la ecuación (2.1) deducimos,

$$\vec{x}(k) = A\vec{x}(k-1) = A^2\vec{x}(k-2) = \cdots = A^k\vec{x}(0)\,, \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

Realizamos, en primer lugar, la simulación con `Mathematica`®,

$$A := \{\{0.5, 0.25, 0\}, \{0.5, 0.5, 0.5\}, \{0, 0.25, 0.5\}\}$$
$$x0 := \{\{100\}, \{200\}, \{300\}\}$$
$$x1 = A.x0$$

{{100},{300},{200}}

$$\texttt{x3} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{M}, 3].\texttt{x0}$$

{{137.5},{300},{162.5}}

$$\texttt{x6} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{M}, 6].\texttt{x0}$$

{{148.437},{300},{151.562}}

$$\texttt{x10} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{M}, 10].\texttt{x0}$$

{{149.902},{300},{150.098}}

$$\texttt{x100} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{M}, 100].\texttt{x0}$$

{{150},{300},{150}}

Conclusión: A largo plazo tendremos 150 flores rojas, 300 rosas y 150 blancas.

También podemos llegar a la misma conclusión encontrando una expresión analítica para A^k. Primero se diagonaliza la matriz A, y para ello hay que buscar una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que

$$A = CDC^{-1}\,.$$

Multiplicando k veces

$$A^k = CD^kC^{-1}$$

En nuestro caso:

$$\texttt{Eigenvalues}[\texttt{A}]$$

{0, 1/2, 1}

Los valores propios asociados son,

$$\texttt{Eigenvectors}[\texttt{A}]$$

{{1, -2, 1}, {-1, 0, 1}, {1, 2, 1}}

Sustituyendo:

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2(1/2)^k}{4} & 1/4 & \frac{1-2(1/2)^k}{4} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \frac{1-2(1/2)^k}{4} & 1/4 & \frac{1+2(1/2)^k}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

Multiplicando estas matrices obtenemos,

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} 1/4 \left(x_1(0) + 2(1/2)^k x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) - 2(1/2)^k x_3(0)\right) \\ 1/2 \left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)\right) \\ 1/4 \left(x_1(0) - 2(1/2)^k x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + 2(1/2)^k x_3(0)\right) \end{pmatrix}$$

y como $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 1$, se tiene para $k = 1, 2, 3, \cdots$,

$$\begin{array}{l} x_1(k) = 1/4 \left(1 + 2(1/2)^k x_1(0) - 2(1/2)^k x_3(0)\right) \\ x_2(k) = 1/2 \\ x_3(k) = 1/4 \left(1 - 2(1/2)^k x_1(0) + 2(1/2)^k x_3(0)\right) \end{array}$$

Estas son las fórmulas explícitas que proporcionan las fracciones de los genotipos de la generación de plantas de orden k, expresadas en función de las fracciones de los genotipos iniciales. Como $(1/2)^k$ tiende a cero cuando k tiende a infinito, de estas ecuaciones se desprende que:

$$x_1(k) \to 1/4\,, \quad x_2(k) \to 1/2\,, \quad x_3(k) \to 1/4\,.$$

Es decir, en el límite, existen el mismo número de flores rojas y blancas y el doble de flores rosas.

Respecto a la última de las cuestiones, efectivamente existe una distribución inicial de colores de tal manera que se mantiene invariante con el tiempo.

Por ejemplo 100 rojas, 200 rosas y 100 blancas.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Y esto es cierto debido al hecho de que existe un valor propio que vale la unidad. Su vector propio asociado es del tipo $(\alpha, 2\alpha, \alpha)^T$. Cualquier combinación de flores cumpliendo que el número de flores rojas y blancas sean iguales y el número de flores rosas sea la suma de las anteriores, cumplirá con el requisito propuesto.

2.3. Segundo ejemplo

A continuación vamos a profundizar en el estudio de procesos que requieran el cálculo de potencias de matrices y a determinar en qué medida la evolución de los mismos está o no gobernada por los valores y vectores propios de la matriz en cuestión.

Es decir, queremos conocer el papel de los valores y vectores propios en problemas lineales discretos que se puedan escribir en la forma $\vec{x}(k+1) = A\vec{x}(k)$.

EJERCICIO 4 Supongamos que la dinámica de la situación geográfica de un comprador en un plano se rige por las ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{rcrlcrl} x_1(k+1) & = & 2 & x_1(k) & - & 3 & x_2(k) \\ x_2(k+1) & = & \frac{1}{2} & x_1(k) & - & \frac{1}{2} & x_2(k) \end{array}\right\}$$

donde $(x_1(k), x_2(k))$ **representan las coordenadas de la posición del comprador en la** k**-ésima transición. Vamos a contestar a las siguientes cuestiones:**

(a) **Si en un instante determinado el comprador ocupa la posición** $(5/2, 3/2)$ **¿Cuál será su posición tres etapas después?, ¿y cinco?, ¿y diez?.**

(b) **Diagonalizar la matriz** A **del sistema.**

(c) **Calcular** A^{50} **directamente y a través de la matriz diagonal.**

(d) **Calcular la posición del comprador para un instante** k**.**

(e) **¿Cuál será la evolución a largo plazo?.**

Las respuestas al ejercicio la obtendremos haciendo uso del ordenador.

```
A := {{2, −3}, {1/2, −1/2}}
x0 := {{5/2}, {3/2}}
x3 = MatrixPower[A, 3].x0
x5 = MatrixPower[A, 5].x0
x10 = MatrixPower[A, 10].x0
```

{{-1},{-(1/4)}}
{{-(11/8)},{-(7/16)}}
{{-(383/256)},{-(255/512)}}
Diagonalización de la matriz A.

```
paso := Transpose[Eigenvectors[A]]
diagonal = Inverse[paso].A.paso
```

{{1/2,0},{0,1}}
Potencia de la matriz A.

```
MatrixPower[A, k]]
```

$\{\{3 - 2(1/2)^k, -6 + 6(1/2)^k\},\{1 - (1/2)^k, -2 + 3(1/2)^k\}\}$

O bien

$$\texttt{potencia} = \texttt{paso.}\{\{(1/2)^{\texttt{k}}, \texttt{0}\}, \{\texttt{0}, \texttt{1}\}\}\texttt{.Inverse}[\texttt{paso}]$$

$\{\{3-2(1/2)^k$,$-6+6(1/2)^k\}$,$\{1-(1/2)^k$, $-2+3(1/2)^k$ $\}\}$
La posición en la etapa k con $k = 1, 2, 3, \cdots$, será

$$x_1(k) = \left(3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) x_1(0) + \left(-6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) x_2(0)$$

$$x_2(k) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) x_1(0) + \left(-2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) x_2(0)$$

Para saber el comportamiento a largo plazo del comprador, hacemos que $k \to \infty$ en las ecuaciones anteriores,

$$\begin{array}{l} x_1(k) \to 3x_1(0) - 6x_2(0) \\ x_2(k) \to \ x_1(0) - 2x_2(0)\,, \end{array}$$

y como $(x_1(0), x_2(0)) = (5/2,\ 3/2)$ tenemos

$$x_1(k) \to -3/2\,, \quad x_2(k) \to -1/2\,.$$

2.4. Modelo de Leslie

Bernadelli consideró una especie de escarabajo que sólo vive tres años y se propaga en su tercer año. Dividió a la especie en tres grupos de edades: de 0 a 1 año, de 1 a 2 años y de 2 a 3 años. Observó que la probabilidad de supervivencia de las hembras del primer grupo era 1/2 y las del segundo 1/3, y que en el tercer grupo el promedio de hembras que nacen por cada hembra era de 6.

2.4.1. Primer caso

Vamos a plantearnos, en primer lugar, las siguientes cuestiones.

EJEMPLO 2.1

- Si inicialmente hay 3000 hembras en cada grupo de edad,

  (a) ¿cuántas hembras habrá a los dos años?, ¿y a los tres?, ¿y a los cinco, a los seis y a los siete?.

  (b) calcular la distribución de las hembras para diferentes años y comprobar que su comportamiento es oscilatorio,

  (c) ¿cuál es la causa de tal oscilación?.

- Empezamos introduciendo los datos

$$\begin{array}{l}\texttt{L} := \{\{\texttt{0},\texttt{0},\texttt{6}\},\{\texttt{1/2},\texttt{0},\texttt{0}\},\{\texttt{0},\texttt{1/3},\texttt{0}\}\}\\ \texttt{inicial} := \{\{\texttt{3000}\},\{\texttt{3000}\},\{\texttt{3000}\}\}\end{array}$$

Calculamos las poblaciones en las sucesivas generaciones

$$\begin{array}{l}\texttt{x1} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{L},1].\texttt{inicial}\\ \texttt{x2} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{L},2].\texttt{inicial}\\ \texttt{x3} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{L},3].\texttt{inicial}\\ \texttt{x5} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{L},5].\texttt{inicial}\\ \texttt{x9} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{L},9].\texttt{inicial}\end{array}$$

obteniéndose como respuesta,

$$\begin{array}{l}\{\{18000\},\{1500\},\{1000\}\}\\ \{\{6000\},\{9000\},\{500\}\}\\ \{\{3000\},\{3000\},\{3000\}\}\\ \{\{6000\},\{9000\},\{500\}\}\\ \{\{3000\},\{3000\},\{3000\}\}\end{array}$$

- Es decir, la población tiene un comportamiento cíclico. Es fácil comprobar que L^3 es la matriz identidad I, entonces

$$\vec{x}(k) = L^k\vec{x}(0) = L^{3n}L^r\vec{x}(0)\,, \quad 0 \leq r \leq 2\,,$$

dando lugar a las siguientes situaciones:

$$\begin{array}{lll}\vec{x}(k) = \vec{x}(0) & \text{si} & r = 0\\ \vec{x}(k) = \vec{x}(1) & \text{si} & r = 1\\ \vec{x}(k) = \vec{x}(2) & \text{si} & r = 2\end{array}$$

Observemos que, al existir dos clases de edad no fértiles, no tenemos asegurada la existencia de un valor propio de L que sea estrictamente dominante.

2.4.2. Segundo caso

En un estudio demográfico de una población se obtuvieron los datos representados en la siguiente tabla,

Clases	a_i	b_i
$[0, 15)$	0	0.998937
$[15, 30)$	0.52952	0.999537
$[30, 45)$	0.403267	0.998807
$[45, 60)$	0.29	–

siendo a_i el promedio de hijas nacidas por mujer y b_i la tasa de supervivencia dentro del grupo de edad.

EJERCICIO 5 Si $\vec{x}(k)$ es el vector de distribución de mujeres por grupos de edad en el instante k, queremos determinar el mismo vector en el instante $k+1$. (Instantes que han de medirse en intervalos de 15 años). Supongamos que,

$$\vec{x}(0) = (267219, 284598, 233169, 270308)^T$$

es la distribución en 1967.

(a) **Construir el modelo de *Leslie*.**

(b) **¿Cuál será la población femenina en 1982?. ¿Y en 2012?. (Suponiendo que las tasas de supervivencia y los promedios de natalidad de hijas se hubiesen mantenido constantes).**

(c) **¿Cuál será la población femenina en el año 2057?.**

(d) **Comprobar que para k suficientemente grande, $\vec{x}(k) \approx \lambda_1 \vec{x}(k-1)$.**

(e) **Calcular la proporción de mujeres en cada una de las clases para valores de k suficientemente grandes.**

El modelo de *Leslie* que describe a la situación planteada es

$$\vec{x}(k+1) = \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.52952 & 0.403267 & 0.29 \\ 0.998937 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.999537 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.998807 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix},$$

con $k = 0, 1, 2, \cdots$.

Para encontrar las poblaciones femeninas en los años 1982 y 2012 utilizamos el ordenador

```
L  := {{0, 0.52952, 0.403267, 0.29}, {0.998937, 0, 0, 0}, {0, 0.999537, 0, 0},
       {0, 0, 0.998807, 0}}
x0 := {{267219}, {284598}, {233169}, {270308}}
```

Población de mujeres en el año 1982 (un período de tiempo).

```
x1 = MatrixPower[L, 1].x0
```

{{323119},{266935},{284466},{232891}}

Población de mujeres en el año 2012 (tres períodos de tiempo).

$$\texttt{x3} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{L}, 3].\texttt{x0}$$

{{360909},{323258},{322626},{266493}}

Población de mujeres en el año 2057 (seis períodos de tiempo).

$$\texttt{x6} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{L}, 6].\texttt{x0}$$

{{439152},{414213},{377981},{359929}}

Para estudiar la evolución de la población a largo plazo, encontramos los valores y vectores propios de la matriz de *Leslie*

```
Eigenvalues[L]
Eigenvectors[L]
```

{1.07438, -0.724172, -0.175103 + 0.584004 I, -0.175103 - 0.584004 I}

{{-0.553897, -0.515004, -0.479128, -0.445427},{-0.272938, 0.376497, -0.51965, 0.7167}, {0.139396 - 0.116672 I, -0.2487 - 0.163868 I, -0.140232 + 0.467703 I, 0.7999 - 1.93462 10^{-18} I}, {0.139396 + 0.116672 I, -0.2487 + 0.163868 I, -0.140232 - 0.467703 I, 0.7999 + 1.93462 10^{-18} I}}

Al ser el valor propio estrictamente dominante $\lambda_1 = 1.07438$ la población crecerá en cada período de tiempo a un ritmo aproximado del 7.5 %. Los porcentajes de hembras en cada una de las clases se estabilizarán y coincidirán con las componentes del vector propio asociado al valor propio λ_1. Esto es:

$$\begin{array}{l}
0.553897/(0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427)\\
0.515004/(0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427)\\
0.479128/(0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427)\\
0.445427/(0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427)
\end{array}$$

La conclusión es que a largo plazo, el 27.28 % de las hembras se encontrarán en la primera clase, el 25.83 % en la segunda, el 24 % en la tercera y el 22.34 % en la cuarta clase.

Podemos comprobarlo con la generación de orden veinte $\texttt{x20} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{L}, 20].\texttt{x0}$
{{1.20588 10^6 }, {1.12126 10^6 }, {1.04308 10^6 }, {969815.}}
Basta pasar a porcentajes y se obtiene el resultado deseado. Por ejemplo,

$$1.205887/(1.20588 + 1.12126 + 1.04308 + 0.969815) = 0.277852.$$

Si encontramos el número de hembras en la generación 21 podemos comprobar que $\vec{x}(21) \approx \lambda_1 \vec{x}(20)$. En efecto,

$$\texttt{x21} = \texttt{MatrixPower}[\texttt{L}, 21].\texttt{x0}$$

$\{\{1.29561\ 10^6\ \}, \{1.2046\ 10^6\ \}, \{1.12074\ 10^6\ \}, \{1.04183\ 10^6\ \}\}$

Dividiendo las componentes

$$\frac{1.29561}{1.20588} \approx \frac{1.2046}{1.12126} \approx \frac{1.12074}{1.04308} \approx \frac{1.04183}{0.969815} \approx 1.07438\,.$$

2.4.3. Tablas de vida y matrices de Leslie

Los datos siguientes fueron recogidos para la planta anual *Phlox drummondii*, donde la edad está expresada en días.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Edad	0 – 63	63 - 124	124 - 184	184 - 215	215 - 264	264 - 278	278 - 292	292 - 306	306 - 320	320 - 334	334 - 348	348 - 362	362 -
S(x)	996	668	295	190	176	172	167	159	154	147	105	22	0
b(x)	0	0	0	0	0	0	0	0.33	3.13	5.42	9.26	4.31	-

Observemos que la planta no se reproduce hasta la clase de edad que corresponde a los 292-306 días. Lo primero que necesitamos encontrar es la probabilidad de que la planta sobreviva desde el inicio hasta la clase de edad x, es decir $l(x)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l(x)	1.00	0.671	0.296	0.191	0.177	0.173	0.168	0.160	0.155	0.148	0.105	0.022	0.00

A continuación encontramos la mortalidad

$$q(x) = 1 - g(x) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)}\,,$$

para ver en que punto de su historia de vida, la planta es más vulnerable.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q(x)	0.329	0.558	0.354	0.073	0.022	0.029	0.047	0.031	0.045	0.290	0.790	1	-

Podemos representar gráficamente estos datos

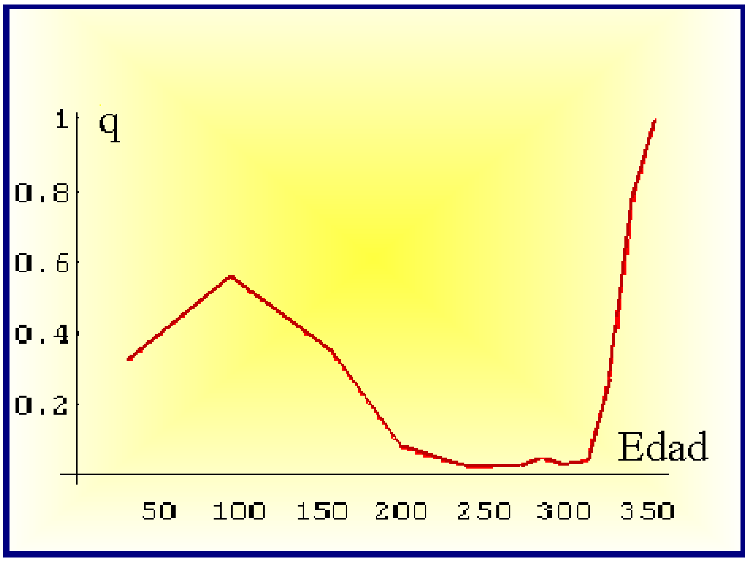

Figura 2.1

Se aprecia que los mayores niveles de mortalidad se da en la segunda clase de edad (63-124) y que aumenta de una forma considerable en la clase (320-334).

Necesitamos conocer para analizar la evolución de la población la tasa neta de reproducción

$$R_0 = \sum_{x=0}^{12} l(x)b(x) = 2.41\,,$$

y el tiempo de regeneración

$$G = \frac{\displaystyle\sum_{x=0}^{12} l(x)b(x)x}{\displaystyle\sum_{x=0}^{12} kl(x)b(x)} = 9.21 \quad \Rightarrow \quad r \approx \frac{\ln R_0}{G} = 0.0955\,,$$

y en consecuencia

$$x(t) = x(0)e^{rt} = x(0)e^{0.0955\,t}\,.$$

Interpretación: Esta planta parece ser más vulnerable (si no tenemos en cuenta las viejas) en las primeras tres clases de edad, especialmente en la segunda. Si fuese necesario la conservación de esta especie deberíamos ser especialmente cuidadosos en las primeras fases de su desarrollo para asegurar el éxito de esta población. Al ser la tasa neta de reproducción 2.41, esto quiere decir que la población se incrementará. En consecuencia, en el momento de recogida de estos datos, la población no se encuentra en peligro de extinción.

EJERCICIO 6 La población activa de un país se clasifica en 3 categorías profesionales: técnicos superiores x_1, obreros especializados x_2 y obreros no especializados x_3. Así, en cada generación k la fuerza de trabajo del país está caracterizada por el número de personas incluidas en las 3 categorías, es decir $(x_1(k), x_2(k), x_3(k))$. Supongamos que:

- **Cada trabajador activo sólo tiene un hijo.**
- **El 50 % de los hijos de los técnicos superiores lo son también, el 25 % pasa a ser obrero especializado y el 25 % restante es obrero no especializado.**
- **Los hijos de los obreros especializados se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes 30 %, 40 %, 30 %**
- **Para los hijos de obreros no especializados las proporciones de reparto entre las categorías son 50 %, 25 % y 25 %.**

Se pide:

(a) **Plantear en forma matricial un modelo que represente la distribución de la fuerza de trabajo del país de generación en generación.**

(b) **¿Cuál será la distribución de los trabajadores a largo plazo independientemente de la distribución inicial?.**

Sean $\vec{x}(0) = (x_1(0),\, x_2(0),\, x_3(0))^T$ el vector de distribución inicial y

$$\vec{x}(k) = (x_1(k),\, x_2(k),\, x_3(k))^T$$

el vector de distribución correspondiente a la generación de orden k. Del enunciado del ejercicio se deduce,

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.3 & 0.50 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(1) = A\vec{x}(0)\,, \quad \cdots, \quad \vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0)\,.$$

Operando

```
A := {{0.5, 0.3, 0.5}, {0.25, 0.4, 0.25}, {0.25, 0.3, 0.25}}
Eigenvalues[A]
```

$\{1.,\ 0.15,\ -1.68812\ 10^{-17}\}$

Como hay un valor propio igual a 1 entonces, a largo plazo existirá estabilidad.

```
Eigenvectors[A]
```

$\{\{0.744438,\ 0.496292,\ 0.446663\},\{0.784465,\ 0.496292,\ 0.446663\},$
$\{-0.707107,\ -3.18473\ 10^{-16},\ 0.707107\}\}$

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1. Es decir,

$$(0.744438,\ 0.496292,\ 0.446663)^T\ ,$$

que una vez pasado a porcentajes:

- el 44 % serán técnicos superiores,
- el 29 % serán obreros especializados,
- el 27 % serán obreros no especializados.

EJERCICIO 7 En una determinada Comunidad Autónoma española el 20 % de las rentas familiares anuales son inferiores a 6000 de euros, el 70 % están comprendidas entre 6000 y 12000 de euros y sólo el 10 % superan esta última cifra. A estos tres tramos de renta los denominaremos tramos de renta baja, mediana y alta respectivamente.

Se sabe que, año tras año, un 70 % de las familias con renta baja permanecen en dicho tramo mientras que un 20 % pasan a renta media y un 10 % a renta alta. De las familias con renta media, permanecen en dicha renta un 60 % , pasando un 30 % a renta baja y un 10 % a renta alta. Por último, el 60 % de las rentas altas siguen siéndolo, pasando un 30 % a rentas medias y un 10 % a rentas bajas.

Las autoridades de la mencionada Comunidad Autónoma están muy preocupadas por el tema de la distribución futura de la renta y están pensando aplicar medidas correctoras, ya que creen que la situación actual puede empeorarse en un futuro. Se pide:

(a) **¿Existe una distribución de la renta estable?**

(b) **En caso afirmativo, ¿qué tanto por ciento de familias están en cada tramo de rentas?**

Si llamamos x_1, x_2, x_3 al porcentaje de familias que pertenecen al tramo de renta baja, media y alta respectivamente, podemos observar que año tras año se cumple,

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots ,$$

(a) Si obtenemos los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

podremos comprobar si la distribución es estable o no. Para ello resolvemos la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = 0.2 - 1.1\lambda + 1.9\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.4, \quad \lambda_3 = 0.5\,.$$

Cómo existe un autovalor $\lambda_1 = 1$, entonces existe estabilidad.

(b) La distribución estable nos viene dada por el autovector correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$.

A continuación calculamos la forma de dicho autovector,

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -0.3x + 0.3y + 0.1z & = & 0 \\ 0.2x - 0.4y + 0.3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $z = t \Rightarrow y = 1.833t, \quad x = 2.16t$. De donde:

$$2.16t + 1.833t + t = 100 \Rightarrow t = 20$$

- El 43 % de las familias tendrán renta alta
- El 37 % renta media
- El 20 % renta baja.