

UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



MODELOS MATEMÁTICOS  
DISCRETOS EN LA EMPRESA  
GRADO EN ESTADÍSTICA Y EMPRESA  
LABORATORIO MATEMÁTICO

Juan Navas Ureña

Jaén, 19 de octubre de 2017



# Índice general

<b>1. Modelos discretos</b>	<b>5</b>
1.1. Objetivo . . . . .	5
1.2. Introducción . . . . .	5
1.3. Modelo logístico de May . . . . .	8
1.4. Modelo de Ricker . . . . .	11
1.4.1. Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 0.5$ . . . . .	13
1.4.2. Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 1.9$ . . . . .	14
1.4.3. Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 2.3$ . . . . .	15
1.4.4. Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 3$ . . . . .	17
1.4.5. Diagrama de bifurcación del modelo de Ricker . . . . .	19
<b>2. Modelos matriciales</b>	<b>21</b>
2.1. Objetivo . . . . .	21
2.2. Cadenas de Markov . . . . .	21
2.3. Segundo ejemplo . . . . .	24
2.4. Modelo de Leslie . . . . .	26
2.4.1. Primer caso . . . . .	26
2.4.2. Segundo caso . . . . .	27
2.4.3. Tablas de vida y matrices de Leslie . . . . .	30
<b>3. Dinámica de poblaciones</b>	<b>35</b>
3.1. Objetivo . . . . .	35
3.2. Introducción . . . . .	35
3.3. Modelo de crecimiento exponencial . . . . .	35
3.3.1. Caso discreto . . . . .	36
3.3.2. Caso continuo . . . . .	40
3.4. Modelo logístico . . . . .	41
3.4.1. Análisis cualitativo del modelo . . . . .	42
<b>4. Modelos de competición entre dos especies</b>	<b>47</b>
4.1. Objetivo . . . . .	47
4.2. Introducción . . . . .	47
4.3. Análisis cualitativo del modelo . . . . .	50
4.4. Análisis numérico del modelo . . . . .	53

<b>5. Modelo Lotka-Volterra</b>	<b>57</b>
5.1. Objetivo . . . . .	57
5.2. Introducción . . . . .	57
5.3. Análisis cualitativo del modelo . . . . .	58
5.4. Análisis numérico del modelo . . . . .	63
<b>6. Construcción de modelos dinámicos con Vensim PLE</b>	<b>67</b>
6.1. Objetivo . . . . .	67
6.2. Introducción . . . . .	67
6.3. La Dinámica de Sistemas . . . . .	68
6.3.1. Historia de la Dinámica de Sistemas . . . . .	68
6.3.2. Introducción a la Dinámica de Sistemas . . . . .	70
6.3.3. Diagrama de Forrester . . . . .	76
6.3.4. Simulación de modelos con Vensim. . . . .	77
<b>7. Simulación de modelos con Vensim PLE</b>	<b>89</b>
7.1. Objetivo . . . . .	89
7.2. Modelo lineal . . . . .	89
7.3. Modelo exponencial . . . . .	92
7.4. Modelo Logístico . . . . .	95
7.4.1. Estructura genérica . . . . .	98
7.4.2. Modelos Logísticos modificados . . . . .	104
7.5. Modelo de Gompertz . . . . .	107
7.6. Modelos de disolución . . . . .	111
<b>8. El modelo presa depredador y la Dinámica de Sistemas</b>	<b>117</b>
8.1. Objetivo . . . . .	117
8.2. Antecedentes . . . . .	117
8.3. La construcción del modelo . . . . .	119
8.4. Simulación del modelo con Vensim . . . . .	120
8.5. Modificaciones del modelo presa-depredador. . . . .	125
8.5.1. Primera versión . . . . .	125
8.6. Modelos en competencia . . . . .	127
8.6.1. Primer caso . . . . .	128



# PRACTICA 1

---

## MODELOS DISCRETOS

---

### 1.1. Objetivo

En esta práctica vamos a usar la potencia de la recursión para experimentar con diferentes modelos discretos lineales y no lineales. Observaremos puntos de bifurcación y caos para el modelo de *Ricker* y el modelo logístico de *May*.

### 1.2. Introducción

Consideremos la siguiente ecuación  $x = \cos x$ . Cualquier solución de esta ecuación es la abscisa de la intersección de la recta  $y = x$  con la gráfica de la función  $y = \cos x$ .

**EJERCICIO 1** Dibuja las dos gráficas y comprueba que hay un punto de intersección en el intervalo  $[0, 1]$ .

En general, cualquier solución de la ecuación  $f(x) = x$  se llama un punto fijo de la función  $f$ .

La fórmula de iteración  $x_{k+1} = f(x_k)$  se llama **iteración funcional o iteración de punto fijo** y en muchos casos, dependiendo de la función  $f$  y del punto inicial  $x_0$ , la sucesión  $\{x_k\}$  converge al punto fijo.

Para poder construir estas sucesiones podemos utilizar las siguientes órdenes del programa Mathematica®

`Nest[f, x0, k]`: da el término  $k$ -ésimo de la sucesión.

`NestList[f, x0, k]` : da una lista con las iteraciones desde  $x_0$  a  $k$ .

Las órdenes `FixedPoint[f, x0]` y `FixedPointListNest[f, x0]` son similares a las anteriores salvo que paran cuando encuentran dos iteraciones sucesivas iguales.

### EJEMPLO 1.1

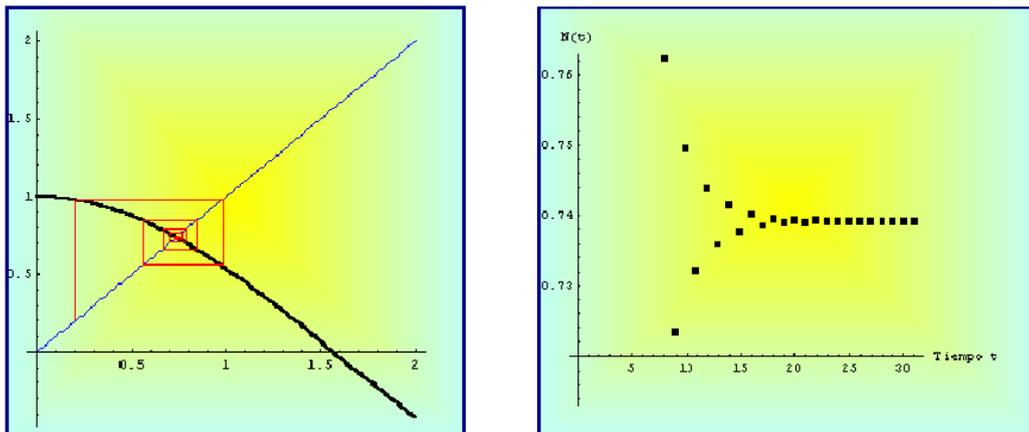
- Vamos a utilizar las ordenes anteriores para construir la sucesión de iteraciones que se obtiene para  $f(x) = \cos x$  comenzando en  $x_0 = 0$ . Con `ListPlot[ ]` podemos ahora dibujar los puntos y hacer una interpretación gráfica de lo que ocurre.

Empezamos definiendo la función

```
f[x_]:=Cos[x]
```

A continuación, construimos los veinte primeros términos de su órbita

```
iters=NestList[f,0.,20]
```



**Figura 1.1:** Diagrama de Cobweb para  $f(x) = \cos x$

Dibujamos en primer lugar la función  $f[x]$  y la bisectriz del primer cuadrante.

```
fg=Plot[{x,f[x]}, {x,0,1.5}, PlotStyle -> {RGBColor[1,0,0],  
RGBColor[0,0,1]}, DisplayFunction -> Identity]
```

Trazamos la órbita

```
gi=ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{iters, iters}]],2,1],  
PlotJoined -> True,DisplayFunction -> Identity]
```

Finalmente, superponemos los dos gráficos.

```
Show[fg,gi,AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

- La conclusión es que existe un único punto de equilibrio  $x_0 = 0.74$  que es estable.

**EJERCICIO 2** Supongamos que nos encontramos en una ciudad de un rico país. Estamos interesados en analizar la evolución de la población de esta ciudad. Por desgracia, las condiciones económicas no son las más adecuadas, de tal forma que si se encontraran aisladas su población disminuiría según el siguiente modelo exponencial o de *Malthus*

$$N_{t+1} = 0.5N_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

donde  $N_t$  es la población en el tiempo  $t$ .

Cada año 100 personas del país emigran a nuestra ciudad.

- (a) Modifica el modelo (1.1) para tener en cuenta el factor de la emigración
- (b) Supongamos que inicialmente hay 30 personas. Encontrar los primeros 10 términos de su órbita
- (c) Describir el comportamiento a “largo plazo” de la población.
- (d) Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

Repetir el ejercicio suponiendo que ahora el modelo exponencial es:

$$N_{t+1} = 1.5N_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

El Teorema del Punto Fijo de *Brouwer* establece que toda función continua de un intervalo cerrado en sí mismo  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ , tiene al menos un punto fijo en  $[a, b]$ .

En la próxima sección analizaremos el comportamiento de los términos de la iteración funcional con respecto a los puntos fijos.

Recordemos que si  $x^*$  es un punto fijo, entonces  $f(x^*) = x^*$ . Si la función  $f$  es derivable, y

$$|f'(x^*)| < 1,$$

entonces el punto  $x^*$  se llama **punto fijo atractor**. Cuando una iteración funcional comienza suficientemente cerca de él irremediablemente cae dentro de su ámbito de influencia y la sucesión converge.

Por el contrario, si

$$|f'(x^*)| > 1$$

se trata de un **punto fijo repulsor**, y por muy cerca de él que se comience, la sucesión termina por alejarse.

### 1.3. Modelo logístico de May

Suele utilizarse con mucha frecuencia para hacer ver como un modelo matemático determinista no lineal que depende de un parámetro, puede presentar múltiples comportamientos. Recordemos que el modelo discreto logístico viene dado por la familia de funciones

$$y_c(x) = cx(1 - x), \quad c \in \mathbb{R}^+, \quad x \in [0, 1],$$

donde  $x$  representa la fracción de la máxima población posible de una especie, por lo que sólo consideraremos valores de  $x$  comprendidos entre cero y uno.

#### EJEMPLO 1.2

- Consideremos la familia de parábolas

$$y = cx(1 - x), \quad c \in \mathbb{R}^+, \quad x \in [0, 1].$$

Empezamos definiendo una función (de  $c$  y  $x$ ) para la familia anterior.

$$f[c_-, x_-] := c * x * (1 - x)$$

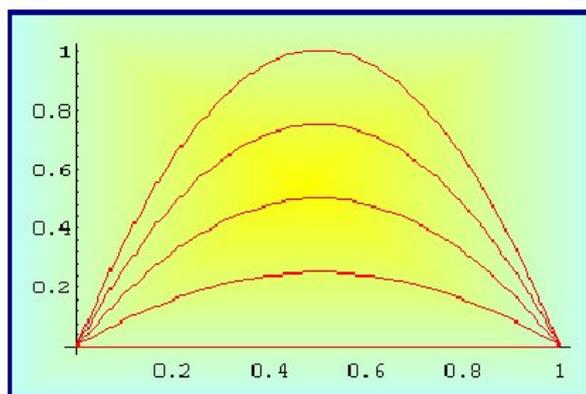
- ¿Cuáles son los puntos fijos en función de  $c$ ?
- Consideremos el caso  $0 < c < 1$ . ¿Cuáles son los puntos fijos? ¿Son los puntos fijos atractores o repulsores? Usar `NestList[ ]` para ver qué ocurre con la iteración funcional para distintas elecciones del punto inicial. Tomar, por ejemplo,  $c = 0.5$  y comentar los resultados.
- Cuando  $1 < c < 3$ , ¿de qué tipo son los puntos fijos? Comprobar gráficamente que para  $c = 2$  la iteración funcional converge rápidamente al punto fijo 0.5
- Tomar  $c = 3$  y usar `NestList[ ]`. Comprobar que después de algunas iteraciones, los términos sucesivos oscilan entre dos valores diferentes, y quedan atrapados en un bucle sin fin. Es lo que se llama un **ciclo periódico de orden 2**. ¿Qué ocurre cuando  $c = 3.5$ ? ¿Hay un ciclo periódico? ¿De qué orden?.
- Comprobar que cuando  $c = 4$  las iteraciones son aleatorias y la situación se vuelve completamente caótica. Hacer un gráfico con

`ListPlot[ ]`

para esta situación caótica.

- Gran parte de las preguntas planteadas en el ejemplo han sido contestadas en la teoría. Algunas otras pueden razonarse de la siguiente manera.

`Plot[Evaluate[Table[f[c, x], {c, 0, 4}], {x, 0, 1}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]]`



**Figura 1.2:**  $f[c, x] = cx(1 - x)$ ,  $c = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Comenzamos con un punto  $x$  entre 0 y 1, y calculamos  $f[c, x]$ . Como  $f[c, x]$  sigue estando entre 0 y 1, tiene sentido escribir  $f[c, f[c, x]]$ , y así sucesivamente. Este proceso, como sabemos, es conocido con el nombre de iteración y podemos realizarlo con el programa **Mathematica**<sup>®</sup> utilizando la orden `NestList`. Empezamos fijando para  $c$  el valor de 2 y calculamos las veinte primeras iteraciones del punto 0.25

```
g[x_] := f[2, x]
NestList[g, 0.25, 20]
```

```
{0.25, 0.375, 0.46875, 0.498047, 0.499992, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5}
```

**Resultado 1:** Como puede observarse, la órbita converge al punto de equilibrio 0.5.

Si cambiamos el valor de la semilla el resultado sigue siendo el mismo.

```
g[x_] := f[2, x]
NestList[g, 0.7, 20]
```

```
{0.7, 0.42, 0.4872, 0.499672, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5}
```

Supongamos que ahora el valor del parámetro es  $c = 3$ .

```
g[x_] := f[3, x]
NestList[g, 0.45, 20]
NestList[g, 0.75, 20]
```

```
{0.45, 0.7425, 0.573581, 0.733757, 0.586072, 0.727775, 0.594356, 0.723291, 0.600424, 0.719745, 0.605136, 0.716839, 0.608942, 0.714395, 0.612105, 0.712298, 0.614789, 0.71047, 0.617107, 0.708858, 0.619135}
```

```
{0.75, 0.5625, 0.738281, 0.579666, 0.73096, 0.589973, 0.725715, 0.597158, 0.721681, 0.602573, 0.718436, 0.606857, 0.715745, 0.610362, 0.71346, 0.61330, 0.71148, 0.6158, 0.709757, 0.618006, 0.708224}
```

**Resultado 2:** Ahora las órbitas tienden a los puntos 0.61 y 0.70. Es decir, presenta un comportamiento periódico de orden dos.

Si aumentamos el valor del parámetro  $c = 3.5$ .

```
g[x_] := f[3.5, x]
NestList[g, 0.15, 20]
NestList[g, 0.83, 20]
```

```
{ 0.15, 0.44625, 0.864888, 0.408998, 0.846015, 0.455957, 0.868211, 0.400473, 0.84033,
0.469614, 0.871768, 0.391259, 0.83361, 0.48545, 0.87426, 0.384754, 0.82851, 0.49727,
0.874974, 0.382881, 0.826991 }
```

```
{ 0.83, 0.49385, 0.874868, 0.38316, 0.827219, 0.500246, 0.875, 0.382813, 0.826935,
0.500897, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.50088, 0.87499, 0.38282, 0.82694, 0.50088,
0.874997, 0.38282, 0.826941 }
```

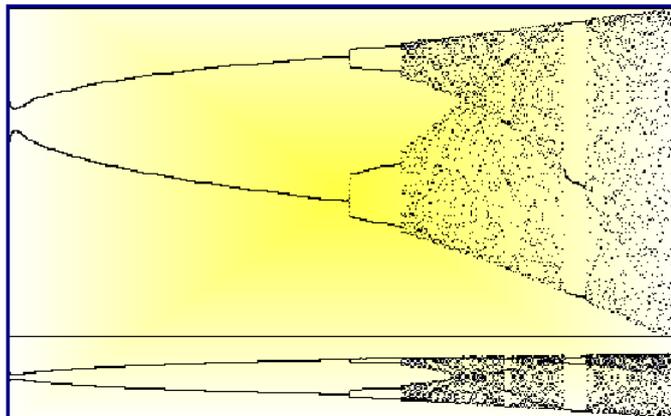
**Resultado 3.** Ahora los valores se repiten cada cuatro veces. Si aumentamos el valor de  $c$ , podríamos ver que se repiten cada ocho, dieciséis, treinta y dos, ... veces. Este proceso donde cada periodo duplica al anterior, culmina hasta llegar a un valor de  $c$  que se conoce con el nombre de **constante de Feigenbaum** (aproximadamente  $c = 3.5699456718\dots$ ).

A continuación repetiremos el proceso anterior, pero variando el valor del parámetro, que se inicia con  $c = 0.223$ .

```
logistic[n_Integer] := Module[{f, t, x}, f = Compile[{x, t},
Evaluate[(3 + t/n) * x * (1 - x)]];
FoldList[f, 0.223, Range[n]]]
```

La celda próxima representa de forma sonora el efecto del barrido del parámetro  $c$ . Puede oírse como el período del sonido va doblándose hasta llegar al caos.

```
ListPlay[logistic[8000]];
```



**Figura 1.3:** Diagrama de bifurcación de  $f(x) = cx(1 - x)$ .

## 1.4. Modelo de Ricker

Es un modelo discreto frecuentemente utilizado en dinámica de poblaciones para estudiar su evolución y viene definido por la ecuación:

$$N_{t+1} = f(N_t) = N_t e^{r \left(1 - \frac{N_t}{k}\right)}, \quad r, k \in \mathbb{R}^+, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

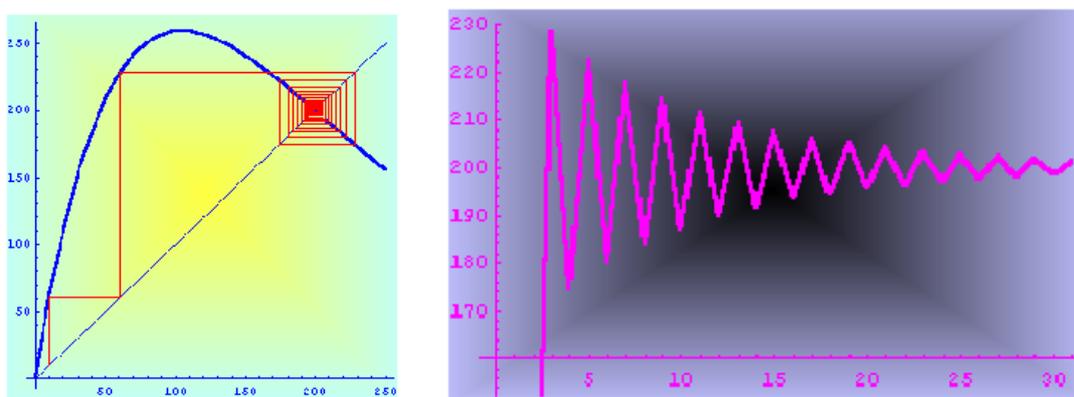
Nos proponemos encontrar y analizar los puntos de equilibrio no triviales.

Para este modelo discreto no lineal, la función que lo define es  $f(x) = x e^{r(1 - \frac{x}{k})}$ . Los puntos de equilibrio se obtienen al resolver la ecuación  $f(x) = x$ , cuyos valores son  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = k$ . Para poder clasificarlos, es necesario encontrar la derivada de la función  $f(x)$ , es decir

$$f'(x) = e^{r(1 - \frac{x}{k})} \left(1 - \frac{xr}{k}\right).$$

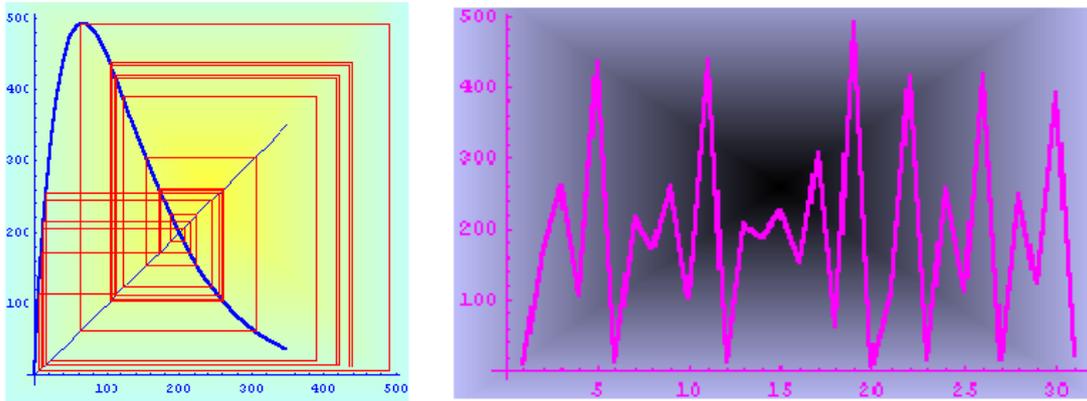
Ahora debemos sustituir el punto de equilibrio no trivial en  $f'(x)$ . Al ser  $f'(k) = 1 - r$ , entonces el  $x_2^* = k$  será un punto de equilibrio estable si  $|1 - r| < 1$ , y para ello  $0 < r < 2$ .

La siguiente cuestión importante es saber que le sucede al modelo cuando se pierde la estabilidad. Lo primero que podemos pensar es que la población se extinguirá. Para ver su comportamiento podríamos simular la dinámica de la población del modelo para diferentes valores del parámetro  $r$ .



**Figura 1.4:** Modelo de *Ricker*  $r=1.9$ ;  $k=200$ .

Tomamos como  $k = 200$  y cambiamos el valor del parámetro  $r$ . La solución  $N_t$  tiende de forma monótona al punto de equilibrio si  $r = 0.5$ , o bien oscilando si  $r = 1.9$ .



**Figura 1.5:** Modelo de *Ricker*  $r=3$ ;  $k=200$

También puede tender a un ciclo límite de periodo dos si  $r = 2.3$  o bien tener un comportamiento caótico cuando  $r = 3$ . Por supuesto, en este caso podemos dibujar su diagrama de bifurcación, que presenta unas características muy parecidas al modelo logístico de *May*.

La dinámica caótica se comporta de manera parecida al ruido estocástico, sin embargo el modelo es absolutamente determinista. Los modelos caóticos, de hecho, se utilizan para generar números aleatorios con ordenadores. Una de las cuestiones que se discuten con frecuencia en la literatura ecológica es si existe realmente el caos en la dinámica de poblaciones. El mayor argumento en favor del caos es que cuando los parámetros del modelo se ajustan a series temporales conocidas de dinámica de poblaciones, entonces la dinámica de ese modelo con estos parámetros es caótica. Otros tipos de argumentos se basan en intentar separar la dinámica caótica del ruido estocástico. Sin embargo, detectar el caos es bastante difícil pues:

- No existen evidencias de que el modelo sea el correcto, ya que es normal que el que diseñemos ignore muchos procesos ecológicos. Se necesita utilizar múltiples modelos para detectar el caos.
- El intervalo de confianza para los valores de los parámetros es usualmente muy grande y esto hace cambiar el comportamiento de la dinámica del modelo (período, caos,...)
- Las series temporales en dinámica de poblaciones son generalmente no lo suficientemente grandes para separar el comportamiento caótico del ruido estocástico.

Por todas estas razones, algunos autores sostienen que probablemente el caos es un fenómeno extraño en dinámica de poblaciones.

Si dibujamos  $N_{t+1}$  en función de  $N_t$ , observamos que para valores pequeños de la población, entonces ésta aumentará en el próximo año. Por el contrario, para niveles altos de población los mecanismos dependientes de la densidad (competencia) reducen el tamaño de la población en el año próximo.

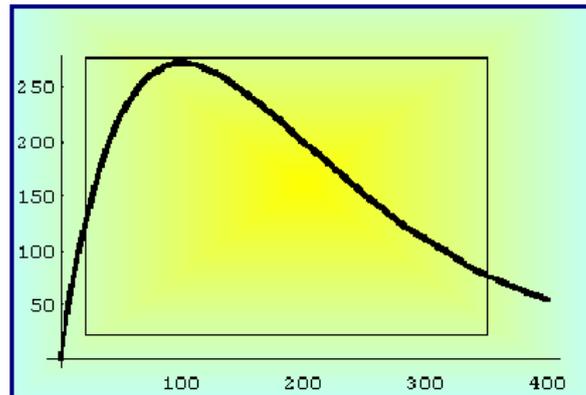


Figura 1.6: Gráfica de  $N_{t+1} = f(N_t)$ .

### 1.4.1. Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 0.5$

A continuación incluimos la simulación para diferentes valores del parámetro  $r$  utilizando el programa Mathematica®.

$$f[x_] := x * \text{Exp}[0.5 * (1 - x/200)]$$

- Cálculo de la órbita para el valor inicial  $x_0 = 10$ .

```
iters = NestList[f, 10, 20]
```

```
{10, 16.0801, 25.467, 39.3981, 58.8635, 83.769, 112.016, 139.575, 162.335, 178.36,
188.277, 193.87, 196.867, 198.415, 199.203, 199.6, 199.8, 199.9, 199.95, 199.97,
199.987, 199.994, 199.997, 199.998, 199.999, 200.}
```

- Para dibujar el diagrama de Cobweb empezamos construyendo la órbita

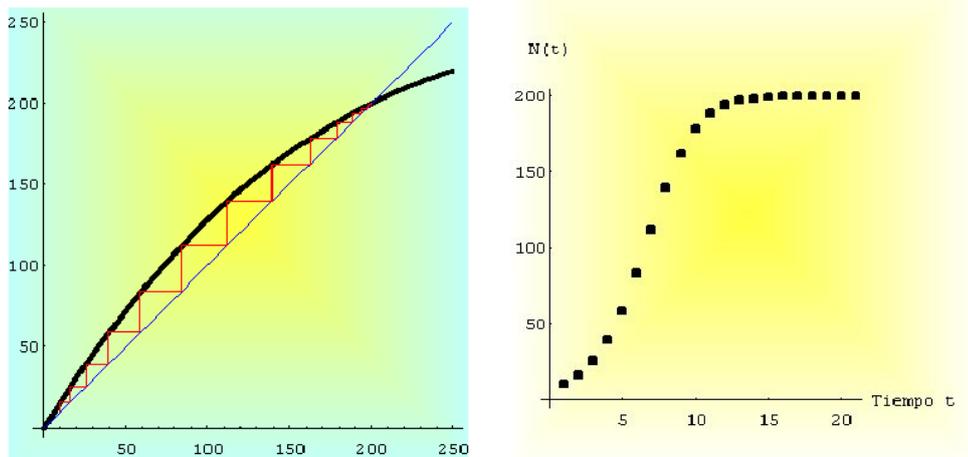
```
gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[iters, iters]], 2, 1],
PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity, PlotStyle ->
RGBColor[1, 0, 0]]
```

y a continuación representamos la función  $f(x)$  que nos define el modelo y la bisectriz del primer cuadrante.

```
fg = Plot[{f[x], x}, {x, 0, 250}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01],
Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}},
DisplayFunction -> Identity]
```

Por último, superponemos los dos gráficos y construimos la función  $N(t)$ .

```
grafica1 = Show[fg, gi, AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $Display
Function, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]ListPlot[iters,
PlotStyle -> PointSize[0.02], Background -> RGBColor[1, 0.5, 0.2],
AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"Tiempo t", "N(t)"}]
```



**Figura 1.7:** Diagrama de Cobweb y Evolución de la población.

- **Comentario:** La población tiende de manera monótona creciente al punto de equilibrio 200 cuando el tiempo tiende hacia infinito.

#### 1.4.2. Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 1.9$

$$f[x_] := x * \text{Exp}[1.9 * (1 - x/200)]$$

- Cálculo de la órbita para el valor inicial  $x_0 = 10$ .

```
iters = NestList[f, 10, 20]
```

```
{ 10, 60.7997, 228.146, 174.617, 222.234, 179.919, 217.735, 183.975, 214.228,
187.144, 211.455, 189.652, 209.243, 191.653, 207.469, 193.258, 206.041, 194.549,
204.889, 195.591, 203.958 }
```

- Para dibujar el diagrama de Cobweb empezamos construyendo la órbita

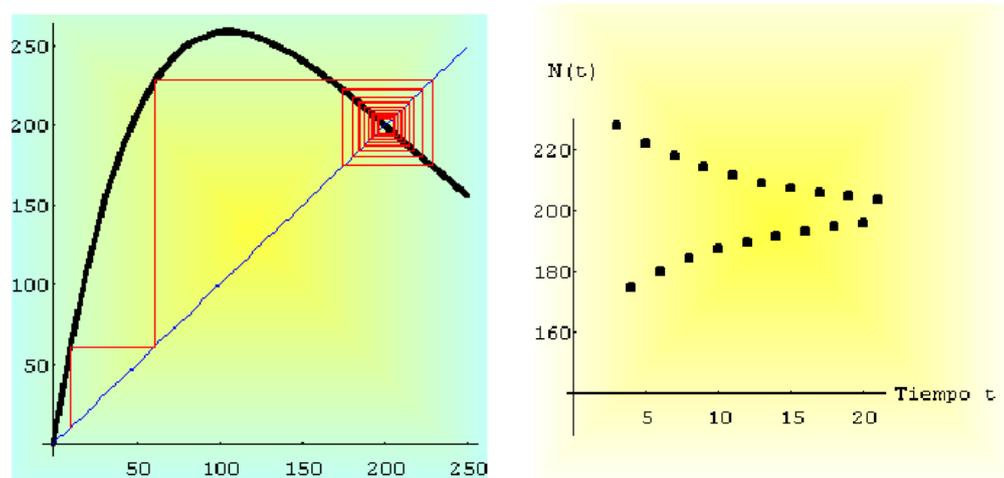
```
gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[iters, iters]], 2, 1],
PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity, PlotStyle ->
RGBColor[1, 0, 0]]
```

y a continuación representamos la función  $f(x)$  que nos define el modelo y la bisectriz del primer cuadrante.

```
fg = Plot[{f[x], x}, {x, 0, 250}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01],
Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}},
DisplayFunction -> Identity]
```

Por último, superponemos los dos gráficos y construimos la función  $N(t)$ .

```
grafica1 = Show[fg, gi, AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $Display
Function, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]ListPlot[iters,
PlotStyle -> PointSize[0.02], Background -> RGBColor[1, 0.5, 0.2],
AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"Tiempo t", "N(t)"}]
```



**Figura 1.8:** Diagrama de Cobweb y Evolución de la población.

- **Comentario:** La población tiende de una forma oscilatoria al punto de equilibrio 200 cuando el tiempo tiende hacia infinito.

### 1.4.3. Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 2.3$

$$f[x_] := x * \text{Exp}[2.3 * (1 - x/200)]$$

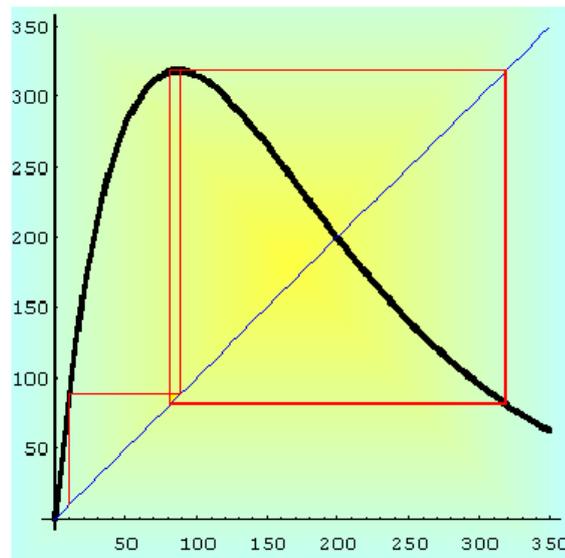
- Cálculo de la órbita para el valor inicial  $x_0 = 10$ .

```
iters = NestList[f, 10, 20]
```

```
{ 10, 88.9065, 318.99, 81.1884, 318.335, 81.6342, 318.447, 81.5583, 318.428,
81.5708, 318.431, 81.5687, 318.431, 81.5691, 318.431, 81.569, 318.431, 81.569,
318.431, 81.569, 318.431, 81.569, 318.431, 81.569, 318.431 }
```

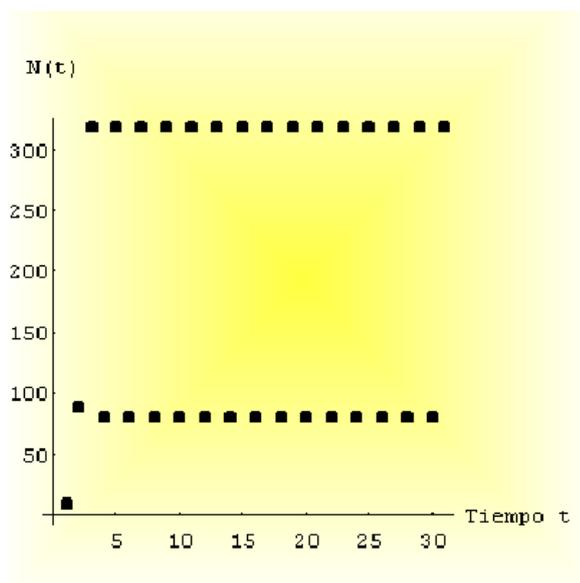
- Diagrama Cobweb

```
gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[iters, iters]], 2, 1],
PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity, PlotStyle ->
RGBColor[1, 0, 0]]
fg = Plot[{f[x], x}, {x, 0, 350}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01],
Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}},
DisplayFunction -> Identity]
grafica1 = Show[fg, gi, AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $Display
Function, Background -> RGBColor[1, 1, 0]] ListPlot[iters,
PlotStyle -> PointSize[0.02], Background -> RGBColor[1, 0.5, 0.2],
AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"Tiempo t", "N(t)"}]
```



**Figura 1.9:** Diagrama de Cobweb y Evolución de la población.

- **Comentario:** La población tiene un comportamiento periódico de orden dos cuando el tiempo tiende hacia infinito.



**Figura 1.10:** Representación gráfica de la órbita.

Podemos observar mejor el comportamiento periódico si unimos los puntos correspondientes a la población en el tiempo  $t$ .

```
grafica2 = ListPlot[itters, PlotJoined -> True,
Background -> RGBColor[0.8, 1, 0], PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```

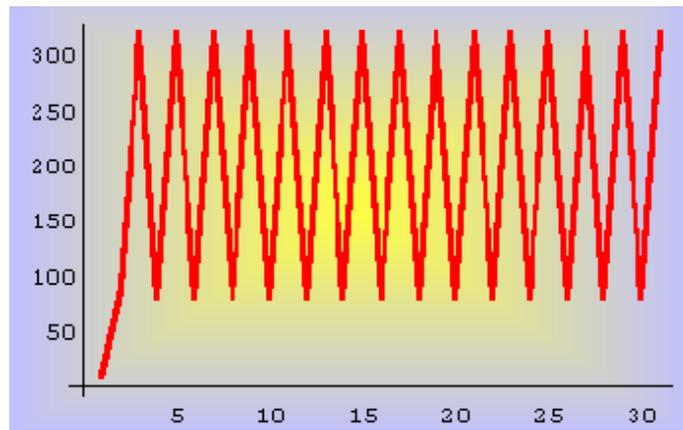


Figura 1.11: Representación gráfica de la órbita.

#### 1.4.4. Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 3$

$$f[x_] := x * \text{Exp}[3 * (1 - x/200)]$$

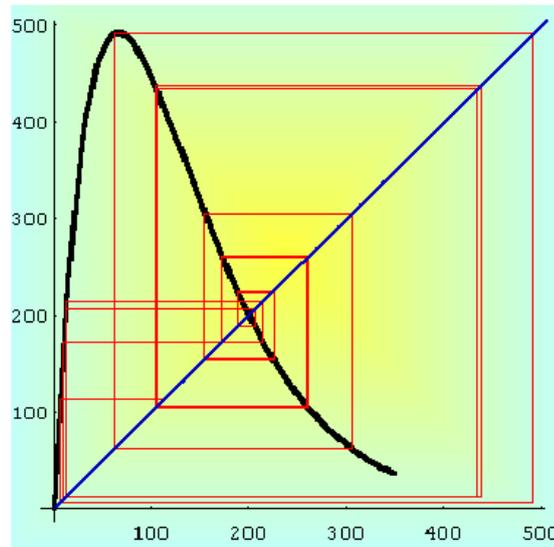
- Cálculo de la órbita para el valor inicial  $x_0 = 10$ .

```
iters = NestList[f, 10, 24]
```

```
{10., 172.878, 259.672, 106.096, 433.939, 12.9853, 214.656, 172.293, 261.072,
104.451, 437.885, 12.3504, 206.114, 188.052, 224.964, 154.699, 305.208, 62.9838,
491.824, 6.17657, 113.082, 416.498, 16.1903, 255.075 }
```

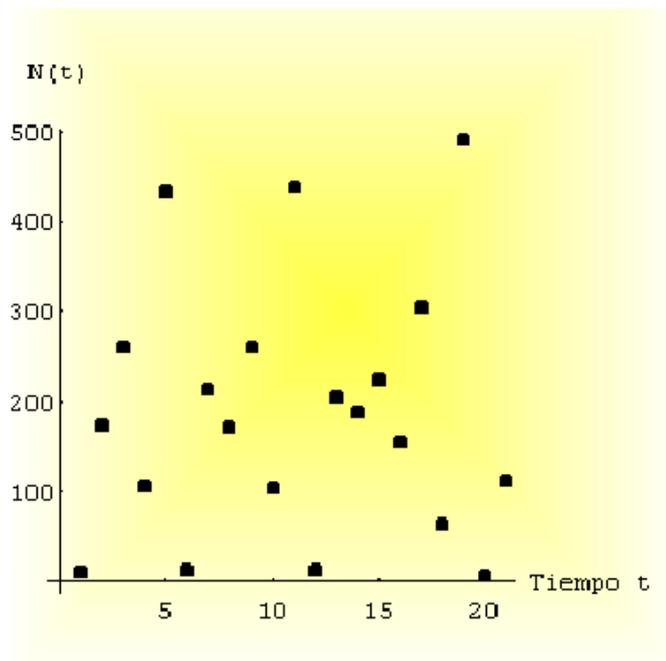
- Diagrama de Cobweb

```
gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[iters, iters]], 2, 1],
PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity, PlotStyle ->
RGBColor[1, 0, 0]]
fg = Plot[{p[x], x}, {x, 0, 350}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01],
Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}},
DisplayFunction -> Identity]
grafica1 = Show[fg, gi, AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $Display
Function, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]
ListPlot[iters,
PlotStyle -> PointSize[0.02], Background -> RGBColor[1, 0.5, 0.2],
AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"Tiempo t", "N(t)"}]
```



**Figura 1.12:** Diagrama de Cobweb y Evolución de la población.

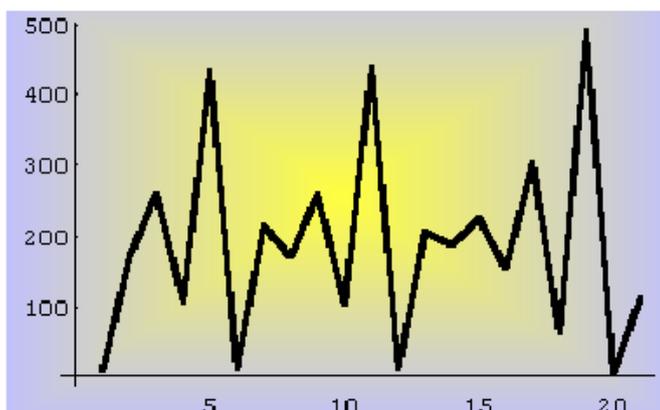
- **Comentario:** La población tiene un comportamiento caótico, cuando el tiempo tiende hacia infinito.



**Figura 1.13:** Representación gráfica de la órbita.

Podemos observar mejor el comportamiento caótico si unimos los puntos correspondientes a la población en el tiempo  $t$ .

```
grafica2 = ListPlot[iters, PlotJoined -> True,
  Background -> RGBColor[0.8, 1, 0], PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



**Figura 1.14:** Representación gráfica de la órbita

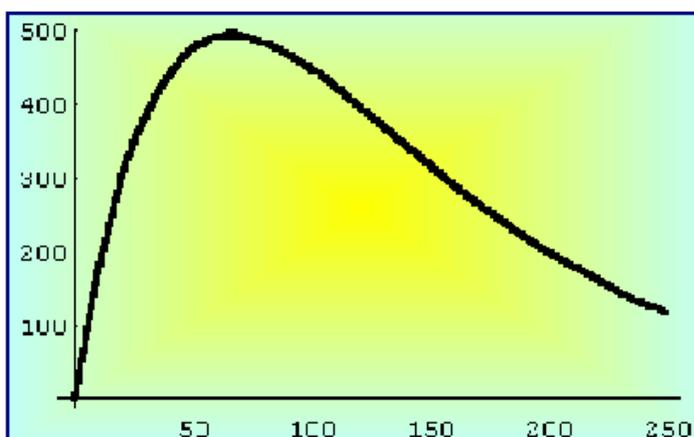
### 1.4.5. Diagrama de bifurcación del modelo de Ricker

Un método muy útil para entender el comportamiento cualitativo de las soluciones de un sistema dinámico discreto como el que estamos analizando, es construir su diagrama de bifurcación, ya que pueden sufrir cambios en la estructuras de sus órbitas cuando variamos los valores de los parámetros que intervienen en el modelo. Esas modificaciones dan lugar al nacimiento o a la muerte de puntos fijos y ciclos o transformaciones en el tipo de las órbitas. A estos cambios se le conocen con el nombre de bifurcaciones.

$$f[x_] := 3 * \text{Exp}[3 * (1 - x/200)]$$

Dibujamos la función que nos define nuestro modelo (en este caso, hemos tomado como valor del parámetro  $r = 3$ ).

```
Plot[f[x], {x, 0, 250}, PlotStyle -> {Thickness[0.01],
RGBColor[1, 0, 0]}, Background -> RGBColor[1, 0.6, 0.3]]
```



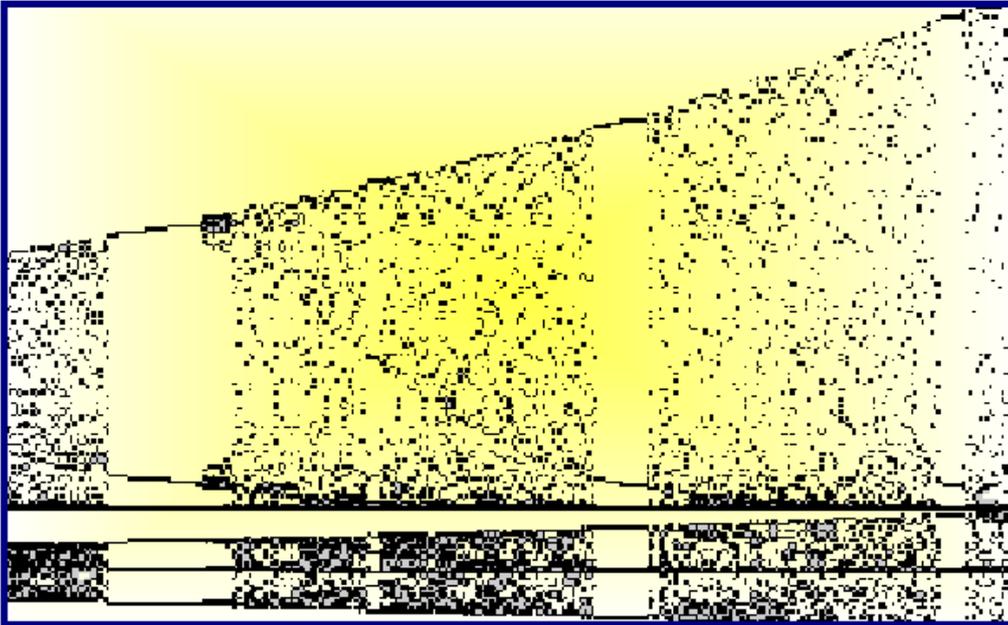
**Figura 1.15:** Representación de la función  $f(x)$  que define al modelo.

El diagrama es una gráfica (en el plano  $Ory$ ) de las líneas de fase cercanas a un valor de bifurcación, que nos permite ver los cambios experimentados por las líneas de fase, cuando el parámetro pasa por este valor.

```
logistic[n_Integer] := Module[{f, t, x}, f = Compile[{x, t},
  Evaluate[x * Exp[(3 + t/n) * (1 - x/200)]]];
  FoldList[f, 0.223, Range[n]]
  Null
```

Además podemos escuchar el sonido de este estado caótico con la siguiente instrucción:

```
b = ListPlay[logistic[8000]];
```



**Figura 1.16:** Diagrama de bifurcación de  $f(x)$ .

**Nota:** Para trazar el diagrama de bifurcación representamos en el eje de abscisas los diferentes valores del parámetro  $r$ . Vamos dando a  $r$  un número elevado de valores (no necesariamente números enteros) y dibujamos la línea de fase correspondiente para cada uno de los valores del parámetro. De esta manera obtenemos una línea paralela al eje de ordenadas que corta al eje de abscisas en el valor  $r$ . Si miramos el dibujo de izquierda a derecha, observamos como evoluciona la línea de fase a través de la bifurcación.



## PRÁCTICA 2

---

# MODELOS MATRICIALES

---

### 2.1. Objetivo

Vamos a usar las operaciones y la diagonalización de matrices cuadradas para analizar el comportamiento a largo plazo de diferentes modelos discretos matriciales. A continuación estudiaremos el modelo de *Leslie* y las tablas de vida.

### 2.2. Cadenas de Markov

Una de las aplicaciones clásicas de los modelos discretos matriciales son las cadenas de Markov, como el siguiente ejemplo:

**EJERCICIO 3** Un granjero tiene una gran población de flores cuyo color rojo, rosa y blanco viene determinado por los genotipos  $AA$ ,  $Aa$ , y  $aa$  respectivamente. El granjero decide fertilizar todas las flores con un color rosa.

- Si inicialmente tiene 100 flores rojas, 200 rosas y 300 blancas ¿Cuál será el número de flores de cada uno de los colores en la tercera generación? ¿Y en la sexta? ¿Y en la décima? Analizar el comportamiento a largo plazo.
- Encontrar la expresión para la distribución de los genotipos a lo largo de las generaciones, para una distribución inicial de  $x_1(0)$  flores rojas,  $x_2(0)$  rosas y  $x_3(0)$  blancas.
- ¿Existe alguna distribución inicial de colores de tal forma que se mantenga invariante?

Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , llamaremos:

- La fracción de las plantas del genotipo  $AA$  que hay en la generación de orden  $k$  como  $x_1(k)$ .
- La fracción de las plantas del genotipo  $Aa$  que hay en la generación de orden  $k$  como  $x_2(k)$ .
- La fracción de las plantas del genotipo  $aa$  que hay en la generación de orden  $k$  como  $x_3(k)$ .

En consecuencia,  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  y  $x_3(0)$  representarán a la distribución inicial de los genotipos, y es evidente que  $x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) = 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

La tabla que determina la distribución de los genotipos en cada generación, a partir de la distribución en la generación anterior es:

	$AA \times Aa$	$Aa \times Aa$	$aa \times Aa$
$AA$	1/2	1/4	0
$Aa$	1/2	1/2	1/2
$aa$	0	1/4	1/2

Por ejemplo, el cruce  $AA \times Aa$  da lugar a las siguientes posibilidades  $AA$ ,  $Aa$ ,  $AA$ ,  $Aa$ , es decir  $AA$  y  $Aa$  con idénticas posibilidades. De la tabla anterior deducimos: para  $k = 1, 2, \dots$ :

$$x_1(k) = \frac{1}{2}x_1(k-1) + \frac{1}{4}x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = \frac{1}{2}x_1(k-1) + \frac{1}{2}x_2(k-1) + \frac{1}{2}x_3(k-1)$$

$$x_3(k) = \frac{1}{4}x_2(k-1) + \frac{1}{2}x_3(k-1)$$

Estas ecuaciones podemos escribirlas de manera matricial

$$\vec{x}(k) = A\vec{x}(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

donde:

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(k-1) = \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como podemos apreciar, las tres columnas corresponden a las columnas de la tabla anterior. De la ecuación (2.1) deducimos,

$$\vec{x}(k) = A\vec{x}(k-1) = A^2\vec{x}(k-2) = \dots = A^k\vec{x}(0), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Realizamos, en primer lugar, la simulación con **Mathematica**<sup>®</sup>,

```
A := {{0.5, 0.25, 0}, {0.5, 0.5, 0.5}, {0, 0.25, 0.5}}
x0 := {{100}, {200}, {300}}
x1 = A.x0
```

```
{{100}, {300}, {200}}
```

```
x3 = MatrixPower[M, 3].x0
```

```
{{137.5}, {300}, {162.5}}
```

```
x6 = MatrixPower[M, 6].x0
```

```
{{148.437}, {300}, {151.562}}
```

```
x10 = MatrixPower[M, 10].x0
```

```
{{149.902}, {300}, {150.098}}
```

```
x100 = MatrixPower[M, 100].x0
```

```
{{150}, {300}, {150}}
```

**Conclusión:** A largo plazo tendremos 150 flores rojas, 300 rosas y 150 blancas.

También podemos llegar a la misma conclusión encontrando una expresión analítica para  $A^k$ . Primero se diagonaliza la matriz  $A$ , y para ello hay que buscar una matriz invertible  $C$  y una matriz diagonal  $D$  tales que

$$A = CDC^{-1}.$$

Multiplicando  $k$  veces

$$A^k = CD^kC^{-1}$$

En nuestro caso:

```
Eigenvalues[A]
```

```
{0, 1/2, 1}
```

Los valores propios asociados son,

```
Eigenvectors[A]
```

```
{{1, -2, 1}, {-1, 0, 1}, {1, 2, 1}}
```

Sustituyendo:

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2(1/2)^k}{4} & 1/4 & \frac{1-2(1/2)^k}{4} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \frac{1-2(1/2)^k}{4} & 1/4 & \frac{1+2(1/2)^k}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

Multiplicando estas matrices obtenemos,

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} 1/4 (x_1(0) + 2(1/2)^k x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) - 2(1/2)^k x_3(0)) \\ 1/2 (x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) \\ 1/4 (x_1(0) - 2(1/2)^k x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + 2(1/2)^k x_3(0)) \end{pmatrix}$$

y como  $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 1$ , se tiene para  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 1/4 (1 + 2(1/2)^k x_1(0) - 2(1/2)^k x_3(0)) \\ x_2(k) &= 1/2 \\ x_3(k) &= 1/4 (1 - 2(1/2)^k x_1(0) + 2(1/2)^k x_3(0)) \end{aligned}$$

Estas son las fórmulas explícitas que proporcionan las fracciones de los genotipos de la generación de plantas de orden  $k$ , expresadas en función de las fracciones de los genotipos iniciales. Como  $(1/2)^k$  tiende a cero cuando  $k$  tiende a infinito, de estas ecuaciones se desprende que:

$$x_1(k) \rightarrow 1/4, \quad x_2(k) \rightarrow 1/2, \quad x_3(k) \rightarrow 1/4.$$

Es decir, en el límite, existen el mismo número de flores rojas y blancas y el doble de flores rosas.

Respecto a la última de las cuestiones, efectivamente existe una distribución inicial de colores de tal manera que se mantiene invariante con el tiempo.

Por ejemplo 100 rojas, 200 rosas y 100 blancas.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Y esto es cierto debido al hecho de que existe un valor propio que vale la unidad. Su vector propio asociado es del tipo  $(\alpha, 2\alpha, \alpha)^T$ . Cualquier combinación de flores cumpliendo que el número de flores rojas y blancas sean iguales y el número de flores rosas sea la suma de las anteriores, cumplirá con el requisito propuesto.

### 2.3. Segundo ejemplo

A continuación vamos a profundizar en el estudio de procesos que requieran el cálculo de potencias de matrices y a determinar en qué medida la evolución de los mismos está o no gobernada por los valores y vectores propios de la matriz en cuestión.

Es decir, queremos conocer el papel de los valores y vectores propios en problemas lineales discretos que se puedan escribir en la forma  $\vec{x}(k+1) = A\vec{x}(k)$ .

**EJERCICIO 4** Supongamos que la dinámica de la situación geográfica de un comprador en un plano se rige por las ecuaciones,

$$\left. \begin{aligned} x_1(k+1) &= 2x_1(k) - 3x_2(k) \\ x_2(k+1) &= \frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) \end{aligned} \right\}$$

donde  $(x_1(k), x_2(k))$  representan las coordenadas de la posición del comprador en la  $k$ -ésima transición. Vamos a contestar a las siguientes cuestiones:

- Si en un instante determinado el comprador ocupa la posición  $(5/2, 3/2)$  ¿Cuál será su posición tres etapas después?, ¿y cinco?, ¿y diez?
- Diagonalizar la matriz  $A$  del sistema.
- Calcular  $A^{50}$  directamente y a través de la matriz diagonal.
- Calcular la posición del comprador para un instante  $k$ .
- ¿Cuál será la evolución a largo plazo?

Las respuestas al ejercicio la obtendremos haciendo uso del ordenador.

```
A := {{2, -3}, {1/2, -1/2}}
x0 := {{5/2}, {3/2}}
x3 = MatrixPower[A, 3].x0
x5 = MatrixPower[A, 5].x0
x10 = MatrixPower[A, 10].x0
```

```
{{-1}, {-(1/4)}}
{{-(11/8)}, {-(7/16)}}
{{-(383/256)}, {-(255/512)}}
Diagonalización de la matriz A.
```

```
paso := Transpose[Eigenvectors[A]]
diagonal = Inverse[paso].A.paso
```

```
{{1/2, 0}, {0, 1}}
```

Potencia de la matriz A.

```
MatrixPower[A, k]
{{3 - 2(1/2)^k, -6 + 6(1/2)^k}, {1 - (1/2)^k, -2 + 3(1/2)^k}}
```

O bien

$$\text{potencia} = \text{paso} \cdot \left\{ \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^k, 0 \right\}, \{0, 1\} \right\} \cdot \text{Inverse}[\text{paso}]$$

$$\left\{ \left\{ 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k, -6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^k \right\}, \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k, -2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^k \right\} \right\}$$

La posición en la etapa  $k$  con  $k = 1, 2, 3, \dots$ , será

$$x_1(k) = \left( 3 - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^k \right) x_1(0) + \left( -6 + 6 \left( \frac{1}{2} \right)^k \right) x_2(0)$$

$$x_2(k) = \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^k \right) x_1(0) + \left( -2 + 3 \left( \frac{1}{2} \right)^k \right) x_2(0)$$

Para saber el comportamiento a largo plazo del comprador, hacemos que  $k \rightarrow \infty$  en las ecuaciones anteriores,

$$\begin{aligned} x_1(k) &\rightarrow 3x_1(0) - 6x_2(0) \\ x_2(k) &\rightarrow x_1(0) - 2x_2(0), \end{aligned}$$

y como  $(x_1(0), x_2(0)) = (5/2, 3/2)$  tenemos

$$x_1(k) \rightarrow -3/2, \quad x_2(k) \rightarrow -1/2.$$

## 2.4. Modelo de Leslie

*Bernadelli* consideró una especie de escarabajo que sólo vive tres años y se propaga en su tercer año. Dividió a la especie en tres grupos de edades: de 0 a 1 año, de 1 a 2 años y de 2 a 3 años. Observó que la probabilidad de supervivencia de las hembras del primer grupo era  $1/2$  y las del segundo  $1/3$ , y que en el tercer grupo el promedio de hembras que nacen por cada hembra era de 6.

### 2.4.1. Primer caso

Vamos a plantearnos, en primer lugar, las siguientes cuestiones.

#### EJEMPLO 2.1

- Si inicialmente hay 3000 hembras en cada grupo de edad,
  - (a) ¿cuántas hembras habrá a los dos años?, ¿y a los tres?, ¿y a los cinco, a los seis y a los siete?.
  - (b) calcular la distribución de las hembras para diferentes años y comprobar que su comportamiento es oscilatorio,
  - (c) ¿cuál es la causa de tal oscilación?.

- Empezamos introduciendo los datos

$$L := \{\{0, 0, 6\}, \{1/2, 0, 0\}, \{0, 1/3, 0\}\}$$

$$\text{inicial} := \{\{3000\}, \{3000\}, \{3000\}\}$$

Calculamos las poblaciones en las sucesivas generaciones

$$\begin{aligned} x1 &= \text{MatrixPower}[L, 1].\text{inicial} \\ x2 &= \text{MatrixPower}[L, 2].\text{inicial} \\ x3 &= \text{MatrixPower}[L, 3].\text{inicial} \\ x5 &= \text{MatrixPower}[L, 5].\text{inicial} \\ x9 &= \text{MatrixPower}[L, 9].\text{inicial} \end{aligned}$$

obteniéndose como respuesta,

$$\begin{aligned} &\{\{18000\}, \{1500\}, \{1000\}\} \\ &\{\{6000\}, \{9000\}, \{500\}\} \\ &\{\{3000\}, \{3000\}, \{3000\}\} \\ &\{\{6000\}, \{9000\}, \{500\}\} \\ &\{\{3000\}, \{3000\}, \{3000\}\} \end{aligned}$$

- Es decir, la población tiene un comportamiento cíclico. Es fácil comprobar que  $L^3$  es la matriz identidad  $I$ , entonces

$$\vec{x}(k) = L^k \vec{x}(0) = L^{3n} L^r \vec{x}(0), \quad 0 \leq r \leq 2,$$

dando lugar a las siguientes situaciones:

$$\begin{aligned} \vec{x}(k) &= \vec{x}(0) & \text{si } r &= 0 \\ \vec{x}(k) &= \vec{x}(1) & \text{si } r &= 1 \\ \vec{x}(k) &= \vec{x}(2) & \text{si } r &= 2 \end{aligned}$$

Observemos que, al existir dos clases de edad no fértiles, no tenemos asegurada la existencia de un valor propio de  $L$  que sea estrictamente dominante.

### 2.4.2. Segundo caso

En un estudio demográfico de una población se obtuvieron los datos representados en la siguiente tabla,

Clases	$a_i$	$b_i$
[0, 15)	0	0.998937
[15, 30)	0.52952	0.999537
[30, 45)	0.403267	0.998807
[45, 60)	0.29	—

siendo  $a_i$  el promedio de hijas nacidas por mujer y  $b_i$  la tasa de supervivencia dentro del grupo de edad.

**EJERCICIO 5** Si  $\vec{x}(k)$  es el vector de distribución de mujeres por grupos de edad en el instante  $k$ , queremos determinar el mismo vector en el instante  $k + 1$ . (Instantes que han de medirse en intervalos de 15 años). Supongamos que,

$$\vec{x}(0) = (267219, 284598, 233169, 270308)^T$$

es la distribución en 1967.

- Construir el modelo de *Leslie*.
- ¿Cuál será la población femenina en 1982?. ¿Y en 2012?. (Suponiendo que las tasas de supervivencia y los promedios de natalidad de hijas se hubiesen mantenido constantes).
- ¿Cuál será la población femenina en el año 2057?.
- Comprobar que para  $k$  suficientemente grande,  $\vec{x}(k) \approx \lambda_1 \vec{x}(k - 1)$ .
- Calcular la proporción de mujeres en cada una de las clases para valores de  $k$  suficientemente grandes.

El modelo de *Leslie* que describe a la situación planteada es

$$\vec{x}(k+1) = \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.52952 & 0.403267 & 0.29 \\ 0.998937 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.999537 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.998807 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix},$$

con  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Para encontrar las poblaciones femeninas en los años 1982 y 2012 utilizamos el ordenador

```
L := {{0, 0.52952, 0.403267, 0.29}, {0.998937, 0, 0, 0}, {0, 0.999537, 0, 0},
      {0, 0, 0.998807, 0}}
x0 := {{267219}, {284598}, {233169}, {270308}}
```

Población de mujeres en el año 1982 (un período de tiempo).

```
x1 = MatrixPower[L, 1].x0
```

```
{{323119}, {266935}, {284466}, {232891}}
```

Población de mujeres en el año 2012 (tres períodos de tiempo).

$$\mathbf{x}_3 = \text{MatrixPower}[\mathbf{L}, 3].\mathbf{x}_0$$

$$\{\{360909\}, \{323258\}, \{322626\}, \{266493\}\}$$

Población de mujeres en el año 2057 (seis períodos de tiempo).

$$\mathbf{x}_6 = \text{MatrixPower}[\mathbf{L}, 6].\mathbf{x}_0$$

$$\{\{439152\}, \{414213\}, \{377981\}, \{359929\}\}$$

Para estudiar la evolución de la población a largo plazo, encontramos los valores y vectores propios de la matriz de *Leslie*

$$\begin{array}{l} \text{Eigenvalues}[\mathbf{L}] \\ \text{Eigenvectors}[\mathbf{L}] \end{array}$$

$$\{1.07438, -0.724172, -0.175103 + 0.584004 I, -0.175103 - 0.584004 I\}$$

$$\begin{array}{l} \{-0.553897, -0.515004, -0.479128, -0.445427\}, \{-0.272938, 0.376497, -0.51965, 0.7167\}, \\ \{0.139396 - 0.116672 I, -0.2487 - 0.163868 I, -0.140232 + 0.467703 I, 0.7999 - 1.93462 \\ 10^{-18} I\}, \{0.139396 + 0.116672 I, -0.2487 + 0.163868 I, -0.140232 - 0.467703 I, 0.7999 \\ + 1.93462 \cdot 10^{-18} I\} \end{array}$$

Al ser el valor propio estrictamente dominante  $\lambda_1 = 1.07438$  la población crecerá en cada período de tiempo a un ritmo aproximado del 7.5%. Los porcentajes de hembras en cada una de las clases se estabilizarán y coincidirán con las componentes del vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1$ . Esto es:

$$\begin{array}{l} 0.553897 / (0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427) \\ 0.515004 / (0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427) \\ 0.479128 / (0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427) \\ 0.445427 / (0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427) \end{array}$$

**La conclusión** es que a largo plazo, el 27.28% de las hembras se encontrarán en la primera clase, el 25.83% en la segunda, el 24% en la tercera y el 22.34% en la cuarta clase.

Podemos comprobarlo con la generación de orden veinte  $\mathbf{x}_{20} = \text{MatrixPower}[\mathbf{L}, 20].\mathbf{x}_0$

$$\{\{1.20588 \cdot 10^6\}, \{1.12126 \cdot 10^6\}, \{1.04308 \cdot 10^6\}, \{969815\}\}$$

Basta pasar a porcentajes y se obtiene el resultado deseado. Por ejemplo,

$$1.205887 / (1.20588 + 1.12126 + 1.04308 + 0.969815) = 0.277852.$$

Si encontramos el número de hembras en la generación 21 podemos comprobar que  $\vec{x}(21) \approx \lambda_1 \vec{x}(20)$ . En efecto,

$$\mathbf{x}_{21} = \text{MatrixPower}[\mathbf{L}, 21].\mathbf{x}_0$$

$\{1.29561 \cdot 10^6\}$ ,  $\{1.2046 \cdot 10^6\}$ ,  $\{1.12074 \cdot 10^6\}$ ,  $\{1.04183 \cdot 10^6\}$

Dividiendo las componentes

$$\frac{1.29561}{1.20588} \approx \frac{1.2046}{1.12126} \approx \frac{1.12074}{1.04308} \approx \frac{1.04183}{0.969815} \approx 1.07438.$$

### 2.4.3. Tablas de vida y matrices de Leslie

Los datos siguientes fueron recogidos para la planta anual *Phlox drummondii*, donde la edad está expresada en días.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Edad	0 - 63	63 - 124	124 - 184	184 - 215	215 - 264	264 - 278	278 - 292	292 - 306	306 - 320	320 - 334	334 - 348	348 - 362	362 -
S(x)	996	668	295	190	176	172	167	159	154	147	105	22	0
b(x)	0	0	0	0	0	0	0	0.33	3.13	5.42	9.26	4.31	-

Observemos que la planta no se reproduce hasta la clase de edad que corresponde a los 292-306 días. Lo primero que necesitamos encontrar es la probabilidad de que la planta sobreviva desde el inicio hasta la clase de edad  $x$ , es decir  $l(x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l(x)	1.00	0.671	0.296	0.191	0.177	0.173	0.168	0.160	0.155	0.148	0.105	0.022	0.00

A continuación encontramos la mortalidad

$$q(x) = 1 - g(x) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)},$$

para ver en que punto de su historia de vida, la planta es más vulnerable.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q(x)	0.329	0.558	0.354	0.073	0.022	0.029	0.047	0.031	0.045	0.290	0.790	1	-

Podemos representar gráficamente estos datos

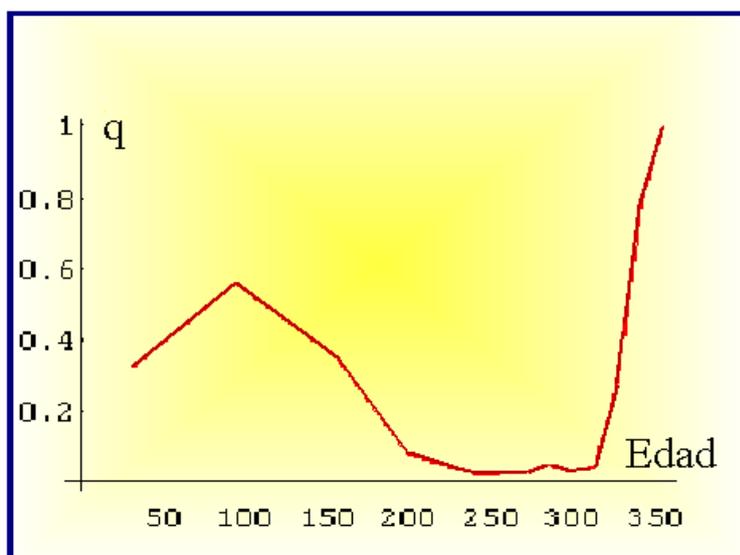


Figura 2.1

Se aprecia que los mayores niveles de mortalidad se da en la segunda clase de edad (63-124) y que aumenta de una forma considerable en la clase (320-334).

Necesitamos conocer para analizar la evolución de la población la tasa neta de reproducción

$$R_0 = \sum_{x=0}^{12} l(x)b(x) = 2.41,$$

y el tiempo de regeneración

$$G = \frac{\sum_{x=0}^{12} l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^{12} kl(x)b(x)} = 9.21 \quad \Rightarrow \quad r \approx \frac{\ln R_0}{G} = 0.0955,$$

y en consecuencia

$$x(t) = x(0)e^{rt} = x(0)e^{0.0955t}.$$

**Interpretación:** Esta planta parece ser más vulnerable (si no tenemos en cuenta las viejas) en las primeras tres clases de edad, especialmente en la segunda. Si fuese necesario la conservación de esta especie deberíamos ser especialmente cuidadosos en las primeras fases de su desarrollo para asegurar el éxito de esta población. Al ser la tasa neta de reproducción 2.41, esto quiere decir que la población se incrementará. En consecuencia, en el momento de recogida de estos datos, la población no se encuentra en peligro de extinción.

**EJERCICIO 6** La población activa de un país se clasifica en 3 categorías profesionales: técnicos superiores  $x_1$ , obreros especializados  $x_2$  y obreros no especializados  $x_3$ . Así, en cada generación  $k$  la fuerza de trabajo del país está caracterizada por el número de personas incluidas en las 3 categorías, es decir  $(x_1(k), x_2(k), x_3(k))$ . Supongamos que:

- Cada trabajador activo sólo tiene un hijo.
- El 50 % de los hijos de los técnicos superiores lo son también, el 25 % pasa a ser obrero especializado y el 25 % restante es obrero no especializado.
- Los hijos de los obreros especializados se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes 30 %, 40 %, 30 %
- Para los hijos de obreros no especializados las proporciones de reparto entre las categorías son 50 %, 25 % y 25 %.

Se pide:

- (a) Plantear en forma matricial un modelo que represente la distribución de la fuerza de trabajo del país de generación en generación.
- (b) ¿Cuál será la distribución de los trabajadores a largo plazo independientemente de la distribución inicial?

Sean  $\vec{x}(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T$  el vector de distribución inicial y

$$\vec{x}(k) = (x_1(k), x_2(k), x_3(k))^T$$

el vector de distribución correspondiente a la generación de orden  $k$ . Del enunciado del ejercicio se deduce,

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.3 & 0.50 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(1) = A\vec{x}(0), \quad \dots, \quad \vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0).$$

Operando

$$A := \{\{0.5, 0.3, 0.5\}, \{0.25, 0.4, 0.25\}, \{0.25, 0.3, 0.25\}\}$$

$$\text{Eigenvalues}[A]$$

$$\{1., 0.15, -1.68812 \cdot 10^{-17}\}$$

Como hay un valor propio igual a 1 entonces, a largo plazo existirá estabilidad.

$$\text{Eigenvectors}[A]$$

$$\{\{0.744438, 0.496292, 0.446663\}, \{0.784465, 0.496292, 0.446663\}, \\ \{-0.707107, -3.18473 \cdot 10^{-16}, 0.707107\}\}$$

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1. Es decir,

$$(0.744438, 0.496292, 0.446663)^T,$$

que una vez pasado a porcentajes:

- el 44 % serán técnicos superiores,
- el 29 % serán obreros especializados,
- el 27 % serán obreros no especializados.

**EJERCICIO 7** En una determinada Comunidad Autónoma española el 20 % de las rentas familiares anuales son inferiores a 6000 de euros, el 70 % están comprendidas entre 6000 y 12000 de euros y sólo el 10 % superan esta última cifra. A estos tres tramos de renta los denominaremos tramos de renta baja, mediana y alta respectivamente.

Se sabe que, año tras año, un 70 % de las familias con renta baja permanecen en dicho tramo mientras que un 20 % pasan a renta media y un 10 % a renta alta. De las familias con renta media, permanecen en dicha renta un 60 %, pasando un 30 % a renta baja y un 10 % a renta alta. Por último, el 60 % de las rentas altas siguen siéndolo, pasando un 30 % a rentas medias y un 10 % a rentas bajas.

Las autoridades de la mencionada Comunidad Autónoma están muy preocupadas por el tema de la distribución futura de la renta y están pensando aplicar medidas correctoras, ya que creen que la situación actual puede empeorarse en un futuro. Se pide:

- (a) ¿Existe una distribución de la renta estable?
- (b) En caso afirmativo, ¿qué tanto por ciento de familias están en cada tramo de rentas?

Si llamamos  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  al porcentaje de familias que pertenecen al tramo de renta baja, media y alta respectivamente, podemos observar que año tras año se cumple,

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

(a) Si obtenemos los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

podremos comprobar si la distribución es estable o no. Para ello resolvemos la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = 0.2 - 1.1\lambda + 1.9\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.4, \quad \lambda_3 = 0.5.$$

Cómo existe un autovalor  $\lambda_1 = 1$ , entonces existe estabilidad.

(b) La distribución estable nos viene dada por el autovector correspondiente al autovalor  $\lambda_1 = 1$ .

A continuación calculamos la forma de dicho autovector,

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -0.3x + 0.3y + 0.1z = 0 \\ 0.2x - 0.4y + 0.3z = 0 \end{cases}$$

Si  $z = t \Rightarrow y = 1.833t, \quad x = 2.16t$ . De donde:

$$2.16t + 1.833t + t = 100 \Rightarrow t = 20$$

- El 43% de las familias tendrán renta alta
- El 37% renta media
- El 20% renta baja.



## PRÁCTICA 3

---

# DINÁMICA DE POBLACIONES

---

### 3.1. Objetivo

En esta práctica estudiaremos los modelos más simples utilizados para analizar la dinámica de poblaciones, como son el modelo de crecimiento exponencial y el modelo logístico, en sus versiones discreta y continua.

### 3.2. Introducción

Uno de los métodos para disponer de un cultivo de levadura usada en la fabricación de cerveza consiste en lo siguiente: En un gran recipiente con una determinada cantidad de levadura se inyectan nutrientes a un ritmo constante. Bajo condiciones ideales el monocultivo de levadura crece al principio exponencialmente, hasta que su concentración se hace suficientemente grande, punto en el cual se estabiliza. A esta concentración sabemos que se la conoce con el nombre de capacidad de carga del sistema. En este momento, la concentración de levadura permanece constante, ya que el ritmo con el que se crea, es idéntico al ritmo con el que se extrae la levadura del recipiente. Esto permite al cervecero un cultivo de levadura uniforme, lo cual asegura un producto con las características deseadas. Sin embargo, es casi imposible mantener un monocultivo consistente de levadura, ya que a menudo el recipiente se encuentra infectado con otro tipo de levadura que destruye la uniformidad y hace que descienda la calidad de la cerveza.

### 3.3. Modelo de crecimiento exponencial

Nuestra intención es la de construir un modelo matemático que modele la situación anterior. Para ello, los datos los extraeremos de los experimentos llevados a cabo por *G.F. Gause* en 1930. Uno de los primeros experimentos lo realizó con un

tipo standard de levadura *Saccharomyces cerevisiae*, y otra que presenta un crecimiento mucho más lento, *Schizosaccharomyces kephir*. En un principio se estudió el crecimiento por separado, y posteriormente se mezclaron para ver como competían ambos organismos por la cantidad de nutrientes disponibles.

Tiempo (h.)	0	1.5	9	10	17	18	23
Volumen	0.37	1.63	6.2	8.87	10.66	10.97	12.5
Tiempo (h.)	25.5	27	34	38	42	45.5	47
Volumen	12.6	12.9	13.27	12.77	12.87	12.9	12.7

**Tabla 3.1** Datos para *Saccharomyces cerevisiae*.

La Tabla 3.2 corresponde al cultivo de *Schizosaccharomyces kephir* y se llevó a cabo en un período más largo de tiempo, debido a que presenta un crecimiento más lento.

Tiempo (h.)	9	10	23	25.5	42	45.5	66	87	111	135
Volumen	1.27	1.0	1.7	2.33	2.73	4.56	4.87	5.67	5.8	5.83

**Tabla 3.2** Datos para *Schizosaccharomyces. kephir*

### 3.3.1. Caso discreto

La *S. cerevisiae*, es un organismo simple que se reproduce por un proceso de división. En un cultivo de nutrientes ilimitado (lo cual es cierto cuando la población es pequeña), durante un período fijo de tiempo, existe una cierta probabilidad de que cualquier levadura origine una nueva que crecerá hasta llegar a ser madura. Existe también cierta probabilidad de que una que está creciendo muera. Una unidad razonable de tiempo que podemos tomar es de 0.5 horas, aunque es evidente que podemos elegir cualquier otra. Es muy importante llamar la atención sobre el hecho de que bajo las condiciones que estamos considerando las tasas de creación y destrucción se mantienen constantes.

Sea  $b$  la tasa de creación de levadura por unidad de volumen y por unidad de tiempo ( $\Delta t = 0.5$ ), y  $d$  la tasa de destrucción por unidad de volumen y por unidad de tiempo ( $\Delta t$ ). Entonces la tasa de aumento en volumen de levadura por unidad de tiempo,  $\Delta t$ , y unidad de volumen de levadura viene dada por  $r = b - d$ . Si  $P(t)$  es el volumen de levadura en el tiempo  $t$ , entonces cuando la población es relativamente baja, podemos escribir

$$P(t + \Delta t) - P(t) = r P(t) \quad \Rightarrow \quad P(t + \Delta t) = (1 + r)P(t).$$

Si  $k$  es el número de intervalos de medias horas que han transcurrido desde el instante inicial  $t = 0$  en el que empezamos a tomar los datos y definimos  $P_k$  como la población para la  $k$ -ésima media hora después del valor  $t = 0$ , podemos escribir la última de las ecuaciones como

$$P_{k+1} = (1 + r)P_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) es el **modelo discreto de crecimiento exponencial o malthusiano** y es un caso particular de un sistema dinámico discreto o de ecuaciones en diferencia. Para este tipo de modelos, la población en la próxima generación es proporcional a la población actual.

Ante esta situación, lo deseable sería poder encontrar una solución explícita, lo cuál no es posible hacerlo en la mayoría de las ocasiones, pero en nuestro caso (3.1) es bastante fácil,

$$P_k = (1 + r)^k P_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

La expresión anterior muestra que la solución del modelo discreto malthusiano viene dada por una función exponencial de base  $(1 + r)$  y exponente  $k$ , que representa al número de iteraciones que se han dado después de la población inicial.

Para aplicar este modelo a nuestras poblaciones de levadura, debemos suponer que es cierto en una primera fase del crecimiento, por ejemplo para un volumen de levadura menor de la mitad de la capacidad de carga del cultivo. Para la primera población este valor es aproximadamente 13 y para la segunda aproximadamente 3, que nos definen el rango donde se espera un crecimiento exponencial.

La pregunta fundamental que debemos hacernos es: **¿qué técnica debemos usar para ajustar los datos al modelo?** Esta pregunta corresponde al problema inverso de identificación de los parámetros para un sistema dinámico. Podemos utilizar dos técnicas diferentes para encontrar los dos parámetros que desconocemos  $r$  y  $P_0$ .

### EJEMPLO 3.1 (Ajuste algebraico de los datos)

- Representaremos gráficamente los datos y elegiremos dos puntos que sean más representativos para determinar los parámetros  $P_0$  y  $r$ .

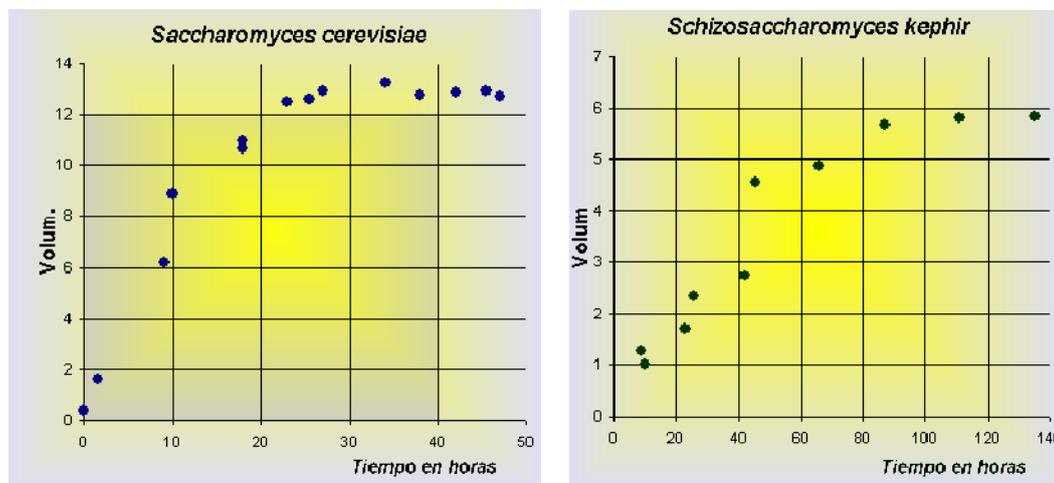


Figura 3.1

A la vista de estos gráficos, para la *S. cerevisiae* elegimos los puntos,  $(k, P) = (0, 0.37)$  y  $(k, P) = (18, 6.2)$ . Observemos que al ser  $\Delta t = 0.5$  horas, el punto correspondiente al tercero de los datos corresponde a las 9 horas, con  $k = 18$ . Si sustituimos en (3.2),  $P_0 = 0.37$  y

$$P_{18} = (1 + r)^{18} P_0 = 0.37(1 + r)^{18} = 6.2 \quad \Rightarrow \quad r = 0.1695.$$

En consecuencia,

$$P_k = 0.37(1.1695)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

### EJEMPLO 3.2 (Ajuste por mínimos cuadrados)

- Utilizando este segundo método, ajustaremos al modelo exponencial el logaritmo neperiano de los datos.

Si tomamos logaritmos en (3.2),

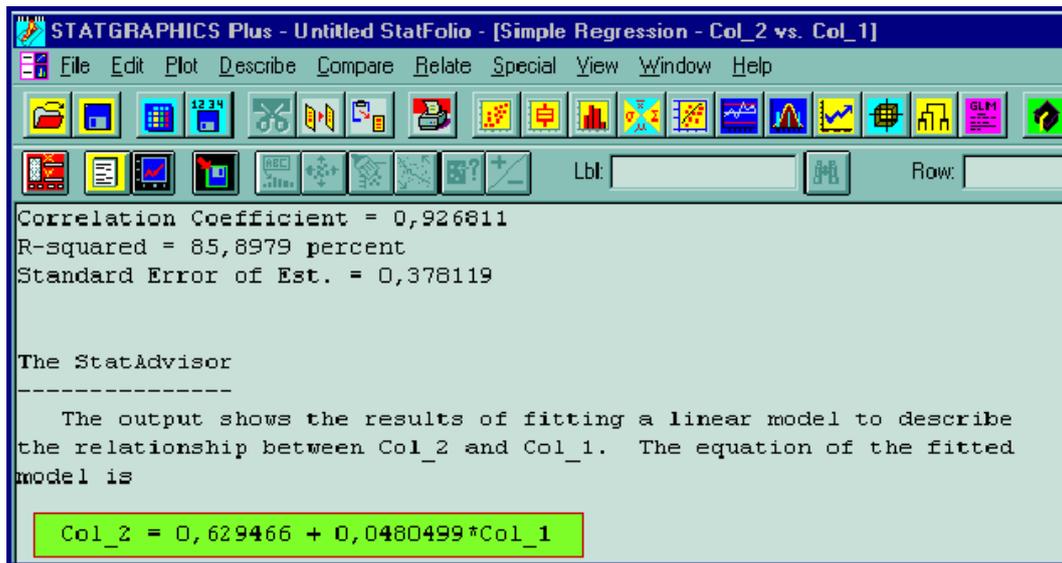
$$\ln(P_k) = k \ln(1 + r) + \ln(P_0),$$

debemos buscar la recta que mejor ajusta al logaritmo del volumen de levadura,  $\ln(P_k)$  y la iteración  $k$ .

Para encontrar dicho ajuste utilizamos el programa STATGRAPHICSPlus®. Empezamos introduciendo los datos

	Col_1	Col_2	Col_3	Col_4	Col_5
1	3	0,48858			
2	18	1,82455			
3	20	2,18267			
4	36	2,3665			
5	38	2,39			
6	46	2,52			
7	0	0,37			
8					

Finalmente realizamos el ajuste deseado



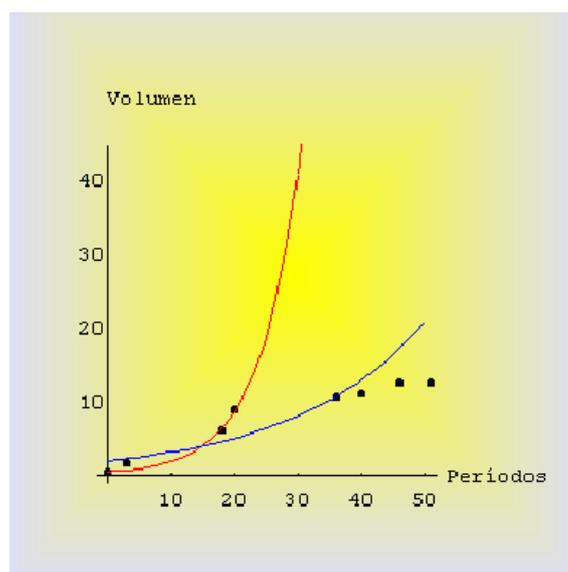
La recta que mejor se ajusta al logaritmo del volumen de los datos viene dada por

$$\ln(P_k) = 0.6294 + 0.048 k,$$

que corresponde al modelo

$$P_k = e^{0.6294} e^{0.048k} = 1.8764(1.0491)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Por último representamos en un período de 25 horas la población de *S. cerevisiae* y los dos ajustes realizados



**Figura 3.2** Rojo: ajuste algebraico. Azul: ajuste por mínimos cuadrados.

**Comentario:** Los dos procedimientos de ajuste presentan un comportamiento cualitativo muy similar (crecimiento exponencial) con errores pequeños en los primeros datos, pero que se alejan de ellos a partir de la sexta observación.

### 3.3.2. Caso continuo

Hemos visto en el apartado anterior que el modelo de crecimiento discreto exponencial viene dado por  $P_{k+1} = (1 + r)P_k$ , donde  $P_k$  es el volumen de levadura en el período  $k$  (con el tiempo dado en unidades de 0.5 horas). La ecuación anterior podemos expresarla como

$$P_{k+1} - P_k = rP_k,$$

la cual nos indica que el cambio en volumen de la levadura entre el período de tiempo  $k + 1$  y  $k$  es proporcional al volumen de levadura en el período  $k$ .

Podemos escribir este modelo considerando la variable tiempo continua. Definimos  $P(t)$  como el volumen de levadura en cualquier tiempo  $t$ , y suponemos que  $r$  es la tasa de cambio del volumen de levadura por unidad de tiempo y por unidad de volumen. Si consideramos que el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es suficientemente pequeño, entonces el cambio en volumen de la población estudiada entre  $t$  y  $t + \Delta t$  cumple la ecuación:

$$P(t + \Delta t) - P(t) = \Delta t r P(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = r P(t),$$

y si tomamos límites cuando  $\Delta t$  tiende a cero obtenemos

$$P'(t) = rP(t), \tag{3.5}$$

que se conoce con el nombre de **modelo continuo de crecimiento exponencial o de Malthus**. La solución de esta ecuación diferencial (3.5) es

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{rt}}. \tag{3.6}$$

### EJEMPLO 3.3 (Ajuste algebraico de los datos)

- Usaremos el primer  $(t, P) = (0, 0.37)$  y el tercer dato  $(t, P) = (9, 6.2)$  para ajustar el modelo de crecimiento continuo exponencial y encontrar los parámetros  $P_0$  y  $r$ .

Es inmediato que  $P_0 = 0.37$  y además

$$P(9) = 6.2 = 0.37 e^{9r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\ln 16.76}{9} = 0.3132.$$

El modelo buscado es:

$$P(t) = 0.37 e^{0.3132t}.$$

**EJEMPLO 3.4 (Ajuste por mínimos cuadrados)**

- Tomaremos los primeros cuatro datos de *S. cerevisiae*, y encontraremos la recta que ajusta el logaritmo neperiano de los datos.

Procediendo de forma similar a como lo hicimos en el caso discreto, debemos encontrar la recta que mejor aproxime a  $\ln P(t) = \ln P_0 + rt$ . Se obtiene la recta,

$$\ln(P(t)) = 0.249t - 0.379 \quad \Rightarrow \quad P_0 \approx 0.7, \quad r \approx 0.25,$$

y el modelo quedará,

$$P(t) = 0.7 e^{0.25t}.$$

**3.4. Modelo logístico**

En la sección anterior hemos visto como el modelo exponencial es únicamente válido en la primera fase del crecimiento de una población. A medida que ésta aumenta disminuyen los nutrientes disponibles y el crecimiento dependerá de la densidad de la población, por tanto necesitamos mejorar el modelo.

Claramente las dos especies de levadura tienen tasas de crecimiento diferentes y distintas capacidades de carga, aunque las condiciones en las que se llevaron a cabo los experimentos eran idénticas.

Durante todo el tiempo la levadura está continuamente creciendo, por esta razón las herramientas matemáticas que debemos utilizar son las ecuaciones diferenciales. Para una especie concreta, si llamamos  $P(t)$  a la población en el tiempo  $t$ , podemos escribir un modelo general de la forma

$$P'(t) = f(t, P(t)),$$

siendo  $f$  una función que representa el ritmo de crecimiento de la población. Recordemos que para el caso de crecimiento exponencial, (3.5) es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, cuya solución viene dada por (3.6).

Los experimentos de *Gause* se realizaron en un sistema cerrado con condiciones ideales para la reproducción. Al introducir en el recipiente un flujo constante de nutrientes y al tener un medioambiente constante, la tasa de crecimiento (que viene incluida en  $f(t, P)$ ) debería depender únicamente del tamaño de la población y no del tiempo. Esto nos indica que nuestro modelo viene representado por una **ecuación diferencial autónoma** de la forma  $P' = f(P)$ .

Si desarrollamos por *MacLaurin* la función  $f(P)$ , podemos escribir

$$f(P) = f(0) + f'(0)P + \frac{f''(0)}{2}P^2 + O(P^3). \quad (3.7)$$

Al ser un sistema cerrado, cuando la población es cero, entonces la población permanece en cero, (no hay crecimiento), es decir  $f(0) = 0$ . El término lineal viene del crecimiento exponencial,  $f'(0) = r$ . De los datos, sabemos que el ritmo de crecimiento disminuye cuando la población aumenta. En Biología, este hecho es conocido como competición entre las especies. Matemáticamente, esto implica que el término siguiente más significativo en (3.7) después del término de crecimiento lineal debe ser negativo. Más adelante veremos que es conveniente identificar

$$\frac{f''(0)}{2!} = -\frac{r}{K}.$$

si no tenemos en cuenta el resto de los términos de (3.7), entonces podemos escribir nuestra ecuación diferencial como

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right), \quad (3.8)$$

que es el modelo de crecimiento logístico.

### 3.4.1. Análisis cualitativo del modelo

Estamos ante un modelo que viene definido por una ecuación diferencial no lineal. Un gran número de este tipo de ecuaciones no pueden ser resueltas, y por esta razón sabemos que se introducen las técnicas de análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales.

---

#### EJEMPLO 3.5

- Vamos a realizar el estudio cualitativo del modelo de crecimiento logístico. El primer paso que debemos dar es encontrar los puntos de equilibrio. Recordemos que los puntos de equilibrio son las soluciones constantes  $P(t) = cte$ , es decir  $P'(t) = 0$ . En modelos de poblaciones cerradas, un punto de equilibrio es siempre el trivial  $P(t) = 0$ . En nuestro caso tenemos dos puntos de equilibrio  $P_1 = 0$  y la capacidad de carga del modelo  $P_2 = K$ .

La capacidad de carga para la primera de las levaduras *S. cerevisiae* podemos encontrarla calculando la media aritmética de aquellos datos que en cierta manera están estabilizados.

$$K = \frac{12.6 + 12.9 + 13.27 + 12.77 + 12.87 + 12.9 + 12.7}{7} = 12.86 \approx 12.9.$$

El siguiente paso es mirar el comportamiento de la solución cerca del punto de equilibrio. Para ello, linealizamos el modelo en  $P_1 = 0$ , obteniéndose el modelo de crecimiento exponencial  $P'(t) = rP(t)$ . Como sabemos, este modelo siempre crece desde  $P_0 = 0$ , y en consecuencia el punto de equilibrio  $P_1$  es inestable.

Para analizar el segundo punto, volvemos a linealizar  $f(P)$  en un entorno del punto  $P_2 = K$ .

$$f(P) = f(K) + f'(K)(P - K) + O((P - K)^2),$$

al ser  $K$  el punto de equilibrio  $f(K) = 0$  y además  $f'(K) = r - 2rP/K$ . Entonces

$$f'(K) = -r,$$

lo cual indica que cerca del punto de equilibrio  $P_2 = K$  las soluciones del modelo de crecimiento logístico tienden exponencialmente hacia el punto de equilibrio. Entonces, el punto  $P_2 = K$  es estable. Esta información sugiere que todas las soluciones para el monocultivo de *S. cerevisiae* tienden a la capacidad de carga cerca del 12.9

### EJEMPLO 3.6

- A continuación analizaremos la línea fase del modelo de crecimiento logístico.

En el estudio del modelo de crecimiento continuo exponencial habíamos encontrado para la primera de las levaduras los valores

$$P_0 = 0.7, \quad r = 0.25,$$

y sabemos además que la capacidad de carga es  $K = 12.9$ . Al ser  $r/K = 0.0194$  una aproximación razonable al modelo de crecimiento logístico viene dada por el siguiente problema de valores iniciales

$$P' = f(P) = 0.25P - 0.0194P^2, \quad P(0) = 0.7.$$

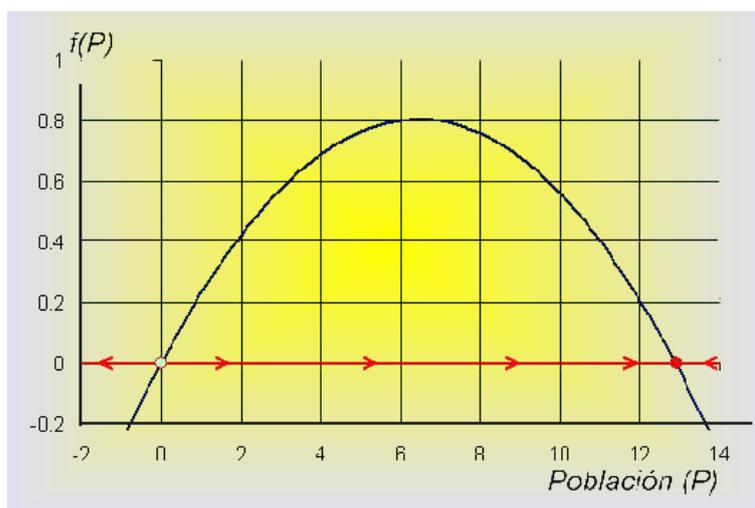
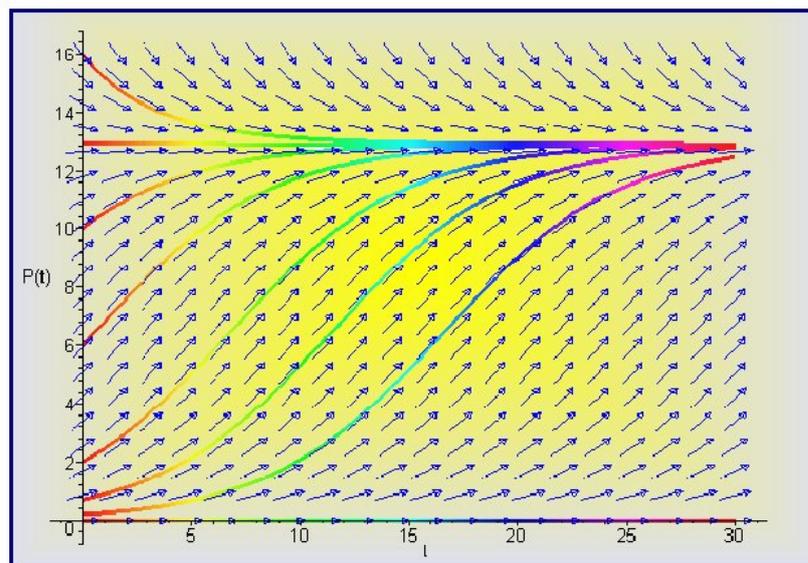


Figura 3.3 Línea fase.

El gráfico de  $f(P)$  nos da más información sobre el comportamiento del modelo de crecimiento logístico. Como hemos visto anteriormente, los puntos de equilibrio son  $P_1 = 0$  y  $P_2 = K = 12.9$ . Observemos en la Figura 3.3 que a la izquierda de  $P_1 = 0$  la función  $f(P)$  es negativa, entonces cuando  $P < 0$ ,  $P'(t) < 0$  y la población  $P$  decrece, (aunque en este caso no tenga significado biológico). Cuando  $0 < P < 12.9$ , entonces  $P'(t) > 0$  y  $P(t)$  aumenta. Además, podemos observar que el aumento mayor se produce cuando  $P = 6.45$  que coincide con el vértice de la parábola. Si  $P > 12.9$ ,  $P'(t) < 0$  y de nuevo la población decrece. Este proceso que hemos realizado y que está recogido en la Figura 3.3 se conoce con el nombre de **línea fase** del comportamiento de la ecuación diferencial a lo largo del  $P$ -eje. El comportamiento de la ecuación diferencial se representa por flechas a lo largo del eje de abscisas, donde su dirección representa si  $f(P)$  es positiva o negativa. El círculo abierto en  $P_1 = 0$  representa un equilibrio inestable (fuente), mientras que el punto cerrado en  $P_2 = 12.9$  simboliza a un punto de equilibrio estable (sumidero).

Podemos utilizar la información de la línea fase para dibujar de forma aproximada las soluciones de la ecuación diferencial. Para ello representamos en el eje de abscisas el tiempo  $t$  y en el de ordenadas la población  $P(t)$ . Como los puntos de equilibrio son las soluciones que no cambian con el tiempo, es decir las soluciones constantes, su gráfica será una recta paralela al eje de abscisas. Cuando el valor inicial  $P_0 = P(0)$  se encuentra a la izquierda de  $P_1 = 0$ , entonces la solución es decreciente, mientras que si la población inicial se encuentra entre  $0 < P_0 < 12.9$  la solución es creciente. Observemos además que por los teoremas de existencia y unicidad de soluciones, sabemos que por cada uno de los puntos pasa una única solución, y en consecuencia ninguna de las curvas solución puede cortarse. En la Figura 3.4 se recoge toda la información que poseemos sobre las soluciones.



**Figura 3.4** Modelo de crecimiento logístico.

- La Figura 3.4 se ha realizado con el programa Maple<sup>®</sup> utilizando las siguientes instrucciones:

```
> with(DEtools):
> de := diff(P(t), t) = 0.25 * P(t) - 0.0194 * P(t)^2;
> DEplot(de, P(t), t = 0..30, [[P(0) = 0], [P(0) = 0.2], [P(0) = 0.7], [P(0) = 2],
[P(0) = 6], [P(0) = 10], [P(0) = 16], [P(0) = 12.9]], stepsize = 0.2,
color = [0.3 * y(t) * (x(t) - 1), x(t) * (1 - y(t)), 0.1],
linecolor = t/2, arrows = MEDIUM, color = blue, method = rkf45);
```

- También podemos usar el programa Mathematica<sup>®</sup>.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{1, 0.25y - 0.0194y^2},
{t, 0, 30}, {y, 0, 16}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]]
Plot[13/(1 + 7.527E(-0.21827 * t)), {t, 0, 30}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]]
```

### EJEMPLO 3.7 (Ajuste algebraico de los datos)

- Se ha demostrado en teoría que la solución de (3.8) viene dada por

$$P(t) = \frac{K P_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}. \quad (3.9)$$

Nos proponemos encontrar su valor para la levadura *S. cerevisiae*.

Para el caso que estamos estudiando sabemos que

$$P_0 = 0.7, \quad r = 0.25, \quad K = 12.9,$$

y podemos sustituir en (3.9) para obtener

$$P(t) = \frac{12.9 \times 0.7}{0.7 + 12.2 e^{-0.25t}} \Rightarrow P(t) = \frac{12.9}{1 + 17.43 e^{-0.25t}}.$$

Esta solución podemos compararla con el modelo propuesto por *Gause*

$$P(t) = \frac{13}{1 + 7.527 e^{-0.21827t}}.$$

### EJEMPLO 3.8 (Ajuste por mínimos cuadrados.)

- Utilizando el método de los mínimos cuadrados, ajustaremos los datos de la levadura *S. cerevisiae* a la curva dada en (3.9).

Para ello, tenemos que encontrar los valores de  $P_0$ ,  $K$ , y  $r$  que minimizan a la función

$$\psi(P_0, K, r) = \sum_{j=1}^{14} \left( P_d(t_j) - \frac{K P_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt_j}} \right)^2,$$

siendo  $P_d(t_i) = 0.37, 1.63, 6.2, \dots, 12.7$  y  $t_i = 0, 1.5, 9, 10, \dots, 47$ .

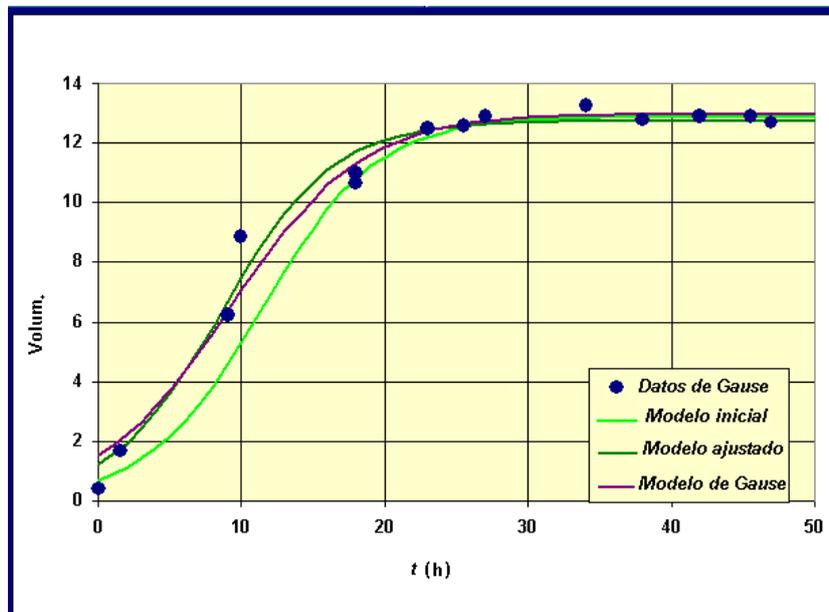
Utilizando el ordenador encontramos los valores de los parámetros

$$P_0 = 1.234, \quad K = 12.74, \quad r = 0.2586,$$

dando lugar al modelo

$$P(t) = \frac{12.74}{1 + 9.3216e^{-0.2586t}}.$$

En la Figura 3.5 aparecen los datos experimentales, el ajuste algebraico, el modelo encontrado por *Gause* y el modelo obtenido por el método de los mínimos cuadrados, para la levadura *S. cerevisiae*.



**Figura 3.5** Comparación entre los diferentes ajustes.

Como podemos ver, los tres modelos presentan aproximaciones relativamente buenas de los datos experimentales, aunque el modelo inicial se encuentra algo más escorado a la derecha. En todos ellos se obtienen valores de la capacidad de carga muy cercanos y además estos valores están de acuerdo con el análisis cualitativo realizado. Existen discrepancias en las tasas de crecimiento, lo cual nos muestra la necesidad de contar con más datos en la primera fase de crecimiento.



## 4

---

# MODELOS DE COMPETICIÓN ENTRE DOS ESPECIES

---

## 4.1. Objetivo

En esta práctica estudiaremos un modelo ecológico que describe el comportamiento de dos especies que compiten en un mismo habitat por los recursos disponibles. El análisis se centra fundamentalmente en el estudio cualitativo del sistema que modela las distintas situaciones.

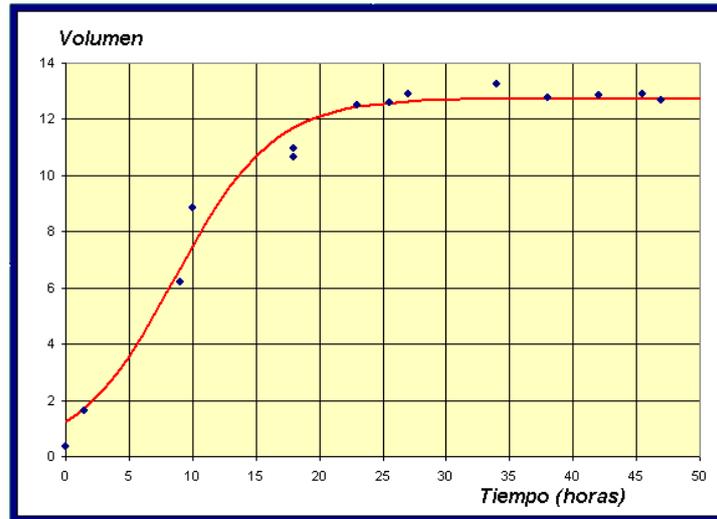
## 4.2. Introducción

El estudio lo realizaremos con los datos experimentales obtenidos por *G.F. Gause* presentados en la Práctica 3, para las poblaciones de levadura de la cerveza, *Saccharomyces cerevisiae* y *Schizosaccharomyces Kephir*.

Tiempo (h.)	0	1.5	9	10	17	18	23
Volumen	0.37	1.63	6.2	8.87	10.66	10.97	12.5
Tiempo (h.)	25.5	27	34	38	42	45.5	47
Volumen	12.6	12.9	13.27	12.77	12.87	12.9	12.7

**Tabla 4.1** Datos para *Saccharomyces cerevisiae*

En la Figura 4.1 puede verse el gráfico que muestra el ajuste de estos datos al modelo logístico.



**Figura 4.1** *Saccharomyces cerevisiae*

Si llamamos  $x(t)$  a la población de *Saccharomyces cerevisiae*, vimos en la Práctica 3 que para esta levadura el modelo logístico que mejor se ajusta viene dado por

$$\frac{dx}{dt} = 0.2586 \left(1 - \frac{x}{12.74}\right) = 0.2586x - 0.0203x^2, \quad x(0) = 1.2, \quad (4.1)$$

que tiene por solución,

$$x(t) = \frac{12.74}{1 + 9.324e^{-0.2586t}}. \quad (4.2)$$

La Tabla 4.2 corresponde al segundo tipo de levadura

Tiempo (h.)	9	10	23	25.5	42	45.5	66	87	111	135
Volumen	1.27	1.0	1.7	2.33	2.73	4.56	4.87	5.67	5.8	5.83

**Tabla 4.2** Datos para *Schizosaccharomyces Kephir*

### EJEMPLO 4.1

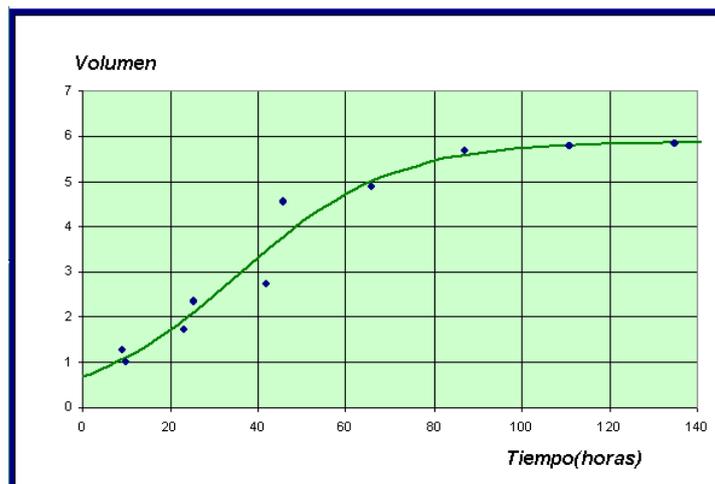
- En primer lugar, ajustaremos los datos de la Tabla 4.2 al modelo logístico continuo de crecimiento, y encontraremos la solución del problema de valores iniciales.

Si representamos por  $y(t)$  la población para la *S. Kephir*, entonces procediendo de forma similar a la práctica anterior, estos datos pueden ajustarse al siguiente modelo.

$$\frac{dy}{dt} = 0.05744 \left(1 - \frac{y}{5.8880}\right) = 0.05744y - 0.00976y^2, \quad y(0) = 0, \quad (4.3)$$

cuya solución es:

$$y(t) = \frac{5.880}{1 + 7.67e^{-0.05744t}}. \quad (4.4)$$



**Figura 4.2** *Schizosaccharomyces kephir*

En la Tabla 4.3 se muestra la competición entre los dos tipos de levaduras.

<b>Tiempo (h)</b>	0	1.5	9	10	18	19	23
<b>C. cerevisiae</b>	0.375	0.92	3.08	3.99	4.69	5.78	6.15
<b>C. Kephir</b>	0.29	0.37	0.63	0.98	1.47	1.22	1.46
<b>Tiempo (h)</b>	25.5	27	38	42	45.5	47	-
<b>C. cerevisiae</b>	9.91	9.47	10.57	7.27	9.88	8.3	-
<b>C. Kephir</b>	1.11	1.22	1.1	1.71	0.96	1.84	-

**Tabla 4.3**

Nuestro objetivo será encontrar un modelo que estudie la evolución de las poblaciones de estas dos especies que compiten por una cantidad de recursos limitados.

Sea  $x(t)$  la población de la primera levadura e  $y(t)$  la correspondiente a la segunda. En ausencia de *S. Kephir* es de suponer que  $x(t)$  sigue un modelo logístico; es decir

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1 x(t) - a_2 x(t)^2.$$

Al incorporar la segunda especie se producirá una competencia entre ellas, y será necesario añadir el término  $-a_3 x(t) y(t)$ . La ecuación que describe su comportamiento dinámico será:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1 x(t) - a_2 x(t)^2 - a_3 x(t) y(t).$$

Del mismo modo,

$$\frac{dy(t)}{dt} = b_1 y(t) - b_2 y(t)^2 - b_3 x(t) y(t).$$

Recordemos que de experimentos anteriores conocemos los valores de los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  y sólo necesitamos calcular  $a_3$ , y  $b_3$ . Las dos ecuaciones diferenciales dan lugar a un sistema que describe la dinámica de las dos especies de levaduras. Este sistema no puede resolverse exactamente, de manera que es necesario utilizar técnicas cualitativas junto con técnicas numéricas para encontrar los parámetros desconocidos.

### 4.3. Análisis cualitativo del modelo

El sistema de ecuaciones diferenciales anterior es no lineal y muy difícil de resolver. No obstante, podemos conocer el comportamiento a “largo plazo” de ambas poblaciones de levaduras mediante su estudio cualitativo.

---

#### EJEMPLO 4.2

- En primer lugar encontramos los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales. Como sabemos, los puntos de equilibrio son las soluciones constantes  $x(t) = k_1$  e  $y(t) = k_2$ , y para su localización debemos resolver el sistema,

$$\begin{cases} x^*(a_1 - a_2x^* - a_3y^*) = 0 \\ y^*(b_1 - b_2y^* - b_3x^*) = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = \left(0, \frac{b_1}{b_2}\right), \quad P_3 = \left(\frac{a_1}{a_2}, 0\right),$$

lo que supone la desaparición de al menos una de las dos especies. Existe además, el punto de corte de las rectas  $r_1 \equiv a_1 - a_2x^* - a_3y^*$  y  $r_2 \equiv b_1 - b_2y^* - b_3x^*$ , que tiene de coordenadas

$$P_4 = \left(\frac{a_1b_2 - a_3b_1}{a_2b_2 - a_3b_3}, \frac{a_2b_1 - a_1b_3}{a_2b_2 - a_3b_3}\right),$$

lo cual implica la coexistencia de ambas especies.

---

Existen diferentes casos a estudiar en función de los valores de los parámetros. Una bifurcación, que como sabemos, es un cambio del comportamiento del sistema de ecuaciones diferenciales que se produce al variar algunos de los parámetros.

Los valores de la Tabla 4.3 sugieren que las dos especies coexisten, aunque los niveles de poblaciones son bastante bajos.

### EJEMPLO 4.3

- Ahora, procederemos a realizar un estudio cualitativo del modelo ajustado:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.2586x - 0.02030x^2 - 0.05711xy, & x(0) = 0.4184 \\ \frac{dy}{dt} = 0.0574y - 0.00976y^2 - 0.00480xy, & y(0) = 0.6315 \end{cases}$$

En este caso, los puntos de equilibrio son,

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, 5.88), \quad P_3 = (12.74, 0), \quad P_4 = (10.37, 0.8469).$$

En la Figura 4.3 se han representado los datos de la Tabla 4.3 y las dos curvas solución que ajustan a estos datos.

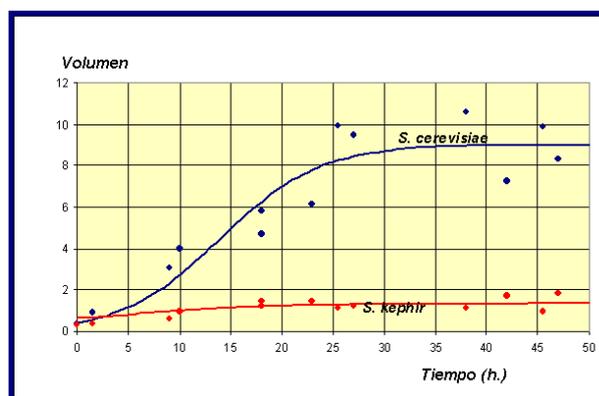


Figura 4.3

De forma aproximada,  $x(50) = 8.9$  e  $y(50) = 0.35$ , lo cual nos dice que están próximos al punto de equilibrio correspondiente al estado de coexistencia,  $P_4$ . Pero esta hipótesis no es cierta, de hecho si simulamos nuestro modelo para valores de tiempo mayores puede comprobarse que  $x(500) = 0.01$  e  $y(500) = 5.83$ . Es decir, la población máxima de *S. cerevisiae* se alcanza en  $x(44) = 8.98$  y a partir de este momento empieza a decrecer. En resumen, cuando el tiempo es suficientemente grande la levadura *S. Kephir* eliminará a la *S. cerevisiae*. Este proceso se conoce con el nombre de **exclusión competitiva** y es bastante frecuente entre dos especies en competencia.

- Veamos que a esta misma conclusión podemos llegar por un razonamiento geométrico.

En primer lugar, dibujamos las isoclinas nulas, es decir aquellos valores que anulan las derivadas. En la Figura 4.4 hemos dibujado las isoclinas nulas (rectas rojas y azules) y la solución en el plano fase. En cada una de las cuatro regiones A, B, C y D las soluciones deben tener un comportamiento monótono.

En la región A, tanto  $x(t)$  como  $y(t)$  deben de ser crecientes, ya que para valores

$(x(t), y(t))$  pertenecientes a la región A sus derivadas  $x'(t)$  e  $y'(t)$  son positivas. La solución continúa hasta tocar a la línea azul o roja, por encima de esta región (excepto la solución que une el origen con el punto de equilibrio  $P_4$  que se llama separatriz). Dentro de la región B el signo de  $x'(t)$  se hace negativo y la solución gira a la izquierda (la población  $x(t)$  decrece) y tiende al punto de equilibrio  $(0, 5.88)$ , con lo cuál se produce la extinción de la levadura *S. cerevisiae*. Del mismo modo, si atravesamos la isoclina roja y pasamos a la región D, entonces el signo de la derivada de  $y(t)$  es negativa y la población  $y(t)$  decrece, por lo que la solución tiende hacia abajo.

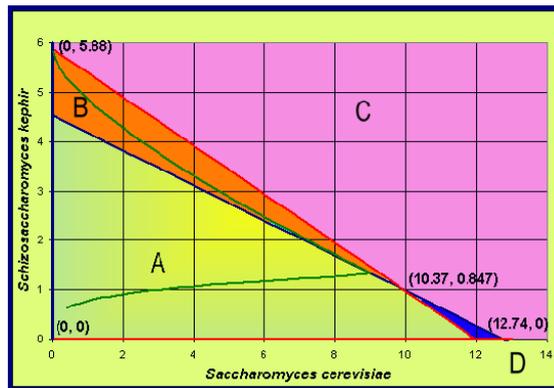


Figura 4.4 Isoclinas nulas del modelo

Si pudiésemos ver el movimiento en esta dirección, la solución tendería al punto de equilibrio  $(12.74, 0)$  y en este caso *S. cerevisiae* eliminaría a *S. Kephir*. Si la solución empieza en la región C, entonces tanto  $x(t)$  como  $y(t)$  decrecen y la solución se mueve hacia abajo y hacia la izquierda hasta cruzar unas de las isoclinas. Allí es atrapada y tiende hacia uno de los puntos de equilibrio, dando lugar a la extinción de una de las especies, mientras que la otra tiende a su capacidad de carga. Sólo hay una solución que dé lugar a la coexistencia de las dos especies, que es aquella que se dirige a través de la separatriz.

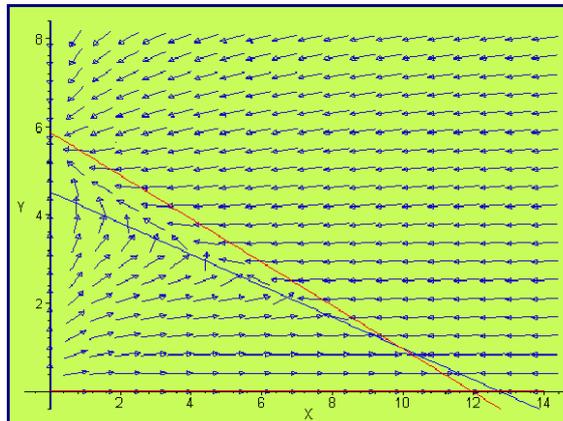


Figura 4.5 Campo de direcciones

## 4.4. Análisis numérico del modelo

Como hemos tenido ocasión de comentar anteriormente, el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal que define al modelo no es resoluble. Por la sección anterior, sabemos como se comportan las soluciones, pero también podemos obtener soluciones aproximadas de las soluciones por medio de técnicas numéricas.

### EJEMPLO 4.4

- Por ejemplo, aplicaremos el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden para obtener la solución numérica del modelo en competencia

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.2586x - 0.02030x^2 - 0.05711xy, & x(0) = 0.4184 \\ \frac{dy}{dt} = 0.0574y - 0.00976y^2 - 0.00480xy, & y(0) = 0.6315 \end{cases}$$

El método lo programamos con *Mathematica*<sup>®</sup>. Empezamos introduciendo los datos del problema,

```
f[x_, y_, z_] := 0.2586y - 0.02030y^2 - 0.05711y * z;
g[x_, y_, z_] := 0.05744z - 0.009768z^2 - 0.004803y * z; a = 0; b = 500;

valor = {0.4184};
cola = {0.6315};
n = 100;
```

A continuación implantamos el método de aproximación numérica de este sistema de ecuaciones diferenciales con valores iniciales  $x(0) = 0.4184$  e  $y(0) = 0.6315$ .

```
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
For[i = 2, i <= n + 1, i + +,
k1 = f[nodo[[i - 1]], valor[[i - 1]], cola[[i - 1]]];
L1 = g[nodo[[i - 1]], valor[[i - 1]], cola[[i - 1]]];
k2 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, valor[[i - 1]] + (h/2)k1, cola[[i - 1]] + (h/2)L1];
L2 = g[nodo[[i - 1]] + h/2, valor[[i - 1]] + (h/2)k1, cola[[i - 1]] + (h/2)L1];
k3 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, valor[[i - 1]] + (h/2)k2, cola[[i - 1]] + (h/2)L2];
L3 = g[nodo[[i - 1]] + h/2, valor[[i - 1]] + (h/2)k2, cola[[i - 1]] + (h/2)L2];
k4 = f[nodo[[i - 1]] + h, valor[[i - 1]] + hk3, cola[[i - 1]] + hL3];
L4 = g[nodo[[i - 1]] + h, valor[[i - 1]] + hk3, cola[[i - 1]] + hL3];
AppendTo[valor, valor[[i - 1]] + (h/6)(k1 + 2k2 + 2k3 + k4)];
AppendTo[cola, cola[[i - 1]] + (h/6)(L1 + 2L2 + 2L3 + L4)];];
```

La primera de las gráficas de la Figura 4.6, corresponde a la evolución en el tiempo de la primera levadura *S. cerevisiae* y la segunda a *S. Kephir*

```
grafRK4 = ListPlot[Table[{nodo[[i]], valor[[i]]}, {i, n + 1}],
PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]]
```

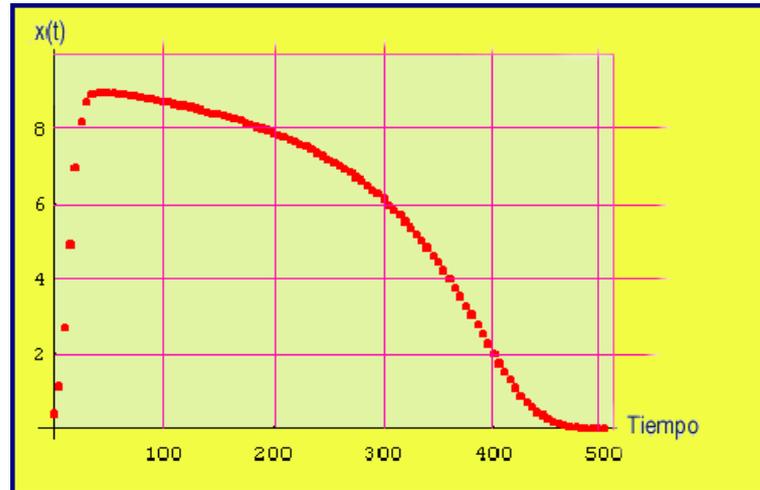


Figura 4.6

```
grafRK4 = ListPlot[Table[{nodo[[i]], cola[[i]]}, {i, n + 1}],
PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1];
```

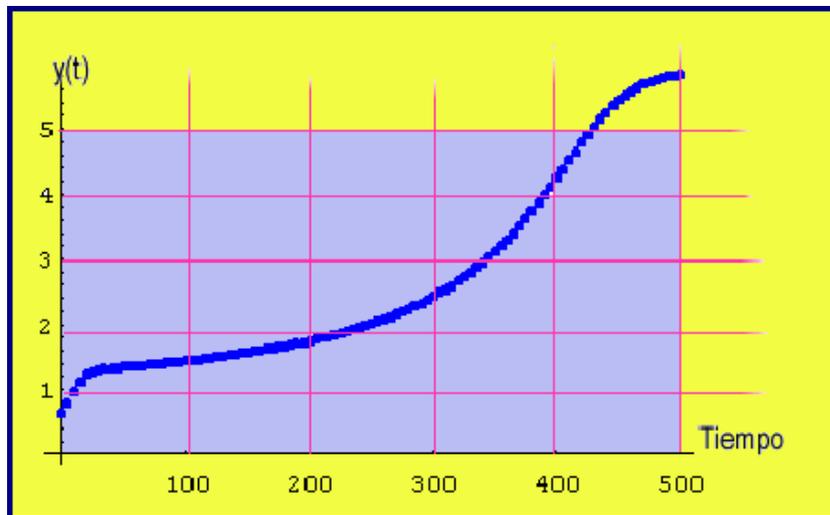


Figura 4.7

La Figura 4.8 muestra las dos gráficas superpuestas, y permite observar el triunfo de la levadura *S. Kephir* sobre la *S. Cerevisiae*.

```
Show[grafRK4, gragRK4]
```

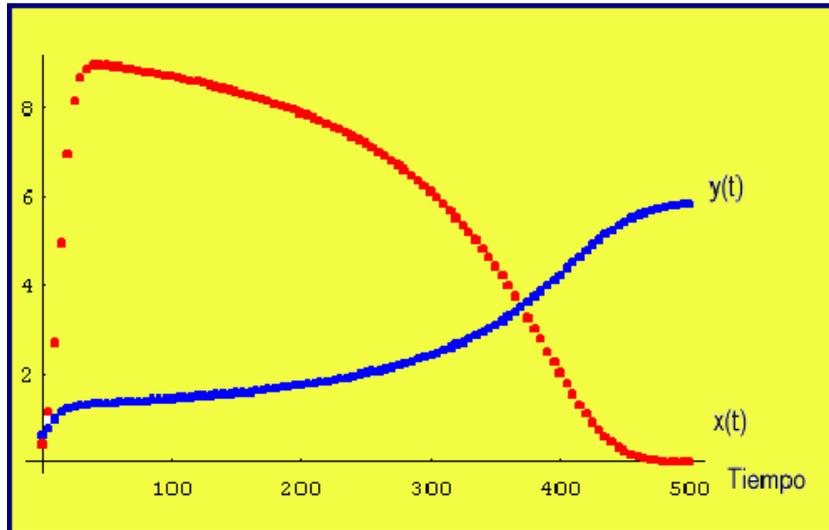


Figura 4.8 Superposición de las poblaciones de levaduras.

```
ListPlot[Table[{valor[[i]], cola[[i]]}, {i, n + 1}], PlotStyle →
RGBColor[0, 1, 0], AxesLabel → {"S.cerevisiae", "S.Kephir"}];
```

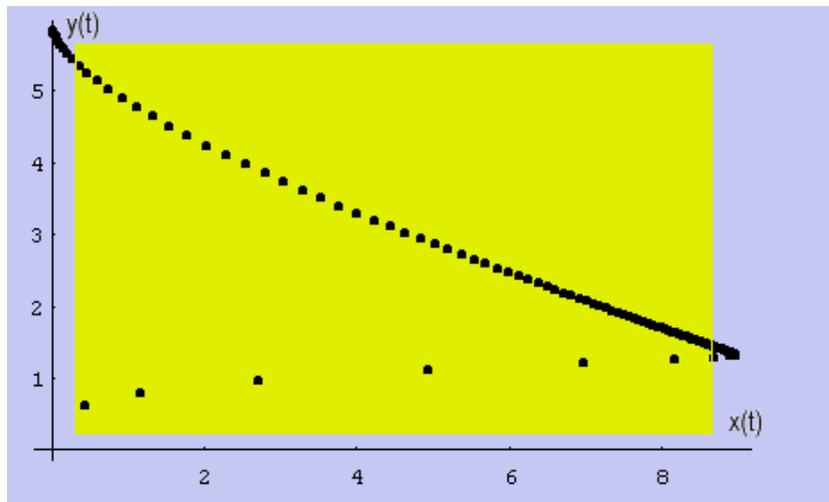


Figura 4.9 Abscisas: *S. cerevisiae*. Ordenadas: *S. Kephir*





## PRÁCTICA 5

---

# MODELO LOTKA-VOLTERRA

---

### 5.1. Objetivo

En la Práctica 4 estudiamos algunas técnicas para hacer el análisis cualitativo de una ecuación diferencial no lineal. En esta práctica analizaremos el modelo presa-depredador, donde también el sistema de ecuaciones diferenciales que aparece no puede resolverse exactamente. Por tanto, necesitaremos emplear métodos numéricos y cualitativos. En concreto, encontraremos los puntos de equilibrio, linealizaremos el sistema alrededor de los puntos de equilibrio para hacer el análisis de estabilidad, demostraremos que las soluciones son periódicas, y por último lo aplicaremos a un caso concreto.

### 5.2. Introducción

Un ejemplo clásico del modelo presa depredador es el que representa a la población de lince y conejos de un bosque al norte de Canadá. La razón de la frecuencia con que aparece dicho ejemplo, es debido a que la compañía Hudson Bay anotó cuidadosamente las capturas de estas dos especies en el período 1800-1900, y se asume que estas capturas son representativas del tamaño de las poblaciones. La Figura 5.1 representa a las capturas de lince y conejos entre los años 1895 y 1925, apreciándose un comportamiento oscilatorio con un período aproximado de 12 años. Nuestro objetivo será construir un modelo que explique de forma matemática el comportamiento periódico de este sistema. Como sabemos, dicho modelo ha sido estudiado en teoría y básicamente consiste en lo siguiente.

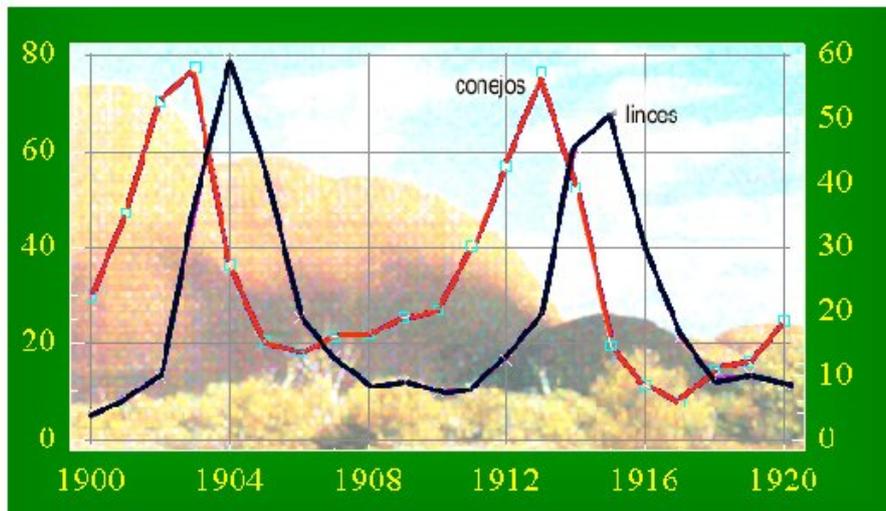
Sean  $x(t)$ ,  $y(t)$  las poblaciones de conejos (presas) y lince (depredadores) respectivamente. La razón de cambio de las presas  $x'(t)$  es proporcional en cada momento al número de ellas,  $a_1x(t)$ , menos la probabilidad de contacto entre los conejos y los

lince,  $a_2x(t)y(t)$ . Es decir,

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1x(t) - a_2x(t)y(t).$$

De manera similar, en ausencia de presas la población de linces disminuye a una tasa proporcional al número de ellos,  $-b_1y(t)$ , y al incluir los conejos su población aumenta proporcional a la posibilidad de contacto entre las presas y los depredadores  $b_2x(t)y(t)$ . Combinando estos factores

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b_1y(t) + b_2x(t)y(t).$$



**Figura 5.1** Capturas de linces y conejos en 1895-1925.

Es evidente que para la realización de dicho modelo se han efectuado un elevado número de simplificaciones de la realidad. Por ejemplo, no se ha tenido en cuenta la variación del clima, las relaciones con otras especies, la presencia del ser humano, y otros factores muy importantes como son la edad de los animales y su distribución espacial. Sin embargo, comprobaremos que este modelo tiene un comportamiento muy parecido al de la Figura 5.1.

### 5.3. Análisis cualitativo del modelo

Empezaremos encontrando los puntos de equilibrio del sistema.

**EJEMPLO 5.1**

- Para encontrar los puntos de equilibrio del modelo

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1x(t) - a_2x(t)y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b_1y(t) + b_2x(t)y(t),$$

tenemos que igualar sus derivadas  $x'(t)$  e  $y'(t)$  a cero. Por tanto,

$$\begin{cases} x'(t) = x(a_1 - a_2y) = 0 \\ y'(t) = y(-b_1 + b_2x) = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$P_1 = (x(t), y(t)) = (0, 0), \quad P_2 = \left( \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2} \right).$$

Ahora bien, de los puntos de equilibrio encontrados no podemos deducir el comportamiento oscilatorio del sistema observado en la Figura 5.1.

**EJEMPLO 5.2**

- Vamos a linealizar el sistema de ecuaciones diferenciales en un entorno de los puntos de equilibrio, para estudiar la estabilidad del sistema.

Para encontrar el jacobiano definimos las funciones

$$f(x, y) := a_1x - a_2xy, \quad g(x, y) := -b_1y + b_2xy,$$

y calculamos las siguientes derivadas parciales,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= a_1 - a_2y & ; & \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -a_2x \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= b_2y & ; & \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -b_1 + b_2x \end{aligned}$$

posteriormente, evaluamos en el primero de los puntos  $P_1$ ,

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

Si calculamos los valores y vectores propios de esta matriz

$$\begin{aligned} J &:= \{\{a_1, 0\}, \{0, -b_1\}\} \\ \text{Eigenvalues}[J] & \\ \text{Eigenvectors}[J] & \end{aligned}$$

$$\{a_1, -b_1\}$$

$$\{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}$$

**Conclusión:** Los resultados muestran que el punto de equilibrio  $P_1 = (0, 0)$  es nodo del tipo punto de silla, con soluciones que crecen exponencialmente a lo largo del eje  $x(t)$  y que disminuye a lo largo del eje  $y(t)$ . Las soluciones lineales son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{a_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-b_1 t}.$$

O bien,

$$x(t) = c_1 e^{a_1 t}, \quad y(t) = c_2 e^{-b_1 t}.$$

- Para el segundo de los puntos  $P_2 = (b_1/b_2, a_1/a_2)$ , la matriz jacobiana es

$$J(b_1/b_2, a_1/a_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_2 b_1}{b_2} \\ \frac{a_1 b_2}{a_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus valores propios son,

$$J := \{0, -(a_2 b_1)/b_2\}, \{(a_1 b_2)/a_2, 0\}$$

Eigenvalues[J]

$$\{-i \sqrt{a_1 b_1}, i \sqrt{a_1 b_1}\}$$

**Conclusión:** Ahora,  $\lambda = \pm \sqrt{a_1 b_1} \equiv iw$ , lo que muestra que  $P_2$  es un centro y sugiere que las soluciones girarán en torno a él, dando lugar, en este caso, a soluciones periódicas de las poblaciones.

Las soluciones son ahora

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos wt \\ A \sin wt \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin wt \\ -A \cos wt \end{pmatrix},$$

con

$$A = \frac{b_2}{b_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}.$$

### EJEMPLO 5.3

- Las órbitas del sistema para  $x, y \neq 0$ , son las curvas soluciones de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b_1 y + b_2 x y}{a_1 x - a_2 x y} = \frac{y(-b_1 + b_2 x)}{x(a_1 - a_2 y)}$$

Esta ecuación es de variables separables ya que puede expresarse de la forma,

$$\frac{a_1 - a_2 y}{y} dy = \frac{-b_1 + b_2 x}{x} dx$$

Por consiguiente,  $a_1 \ln y - a_2 y + b_1 \ln x - b_2 x = k_1$  para una constante  $k_1$ . Tomando exponenciales en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$\frac{y^{a_1}}{e^{a_2 y}} \frac{x^{b_1}}{e^{b_2 x}} = K$$

para una constante  $K$ . Así pues, las órbitas del sistema son la familia de curvas definidas por la ecuación

$$x^{-b_1} e^{b_2 x} = C e^{-a_2 y} y^{a_1}. \quad (5.1)$$

- Para probar que las soluciones son periódicas separamos la función implícita anterior en las funciones

$$F(x) = x^{-b_1} e^{b_2 x}, \quad G(y) = C e^{-a_2 y} y^{a_1},$$

y las representamos gráficamente.

- $F(x)$  tiene una asíntota vertical en  $x = 0$ .
- $F(x)$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito.
- La derivada de  $F(x)$  es

$$F'(x) = -b_1 x^{-b_1-1} e^{b_2 x} + b_2 x^{-b_1} e^{b_2 x} = x^{-b_1-1} e^{b_2 x} (b_2 x - b_1),$$

que se anula en  $x = b_1/b_2$ , donde presenta un mínimo.

- $G(0) = 0$
- $G(y)$  tiende a cero cuando  $y$  tiende hacia infinito.
- La derivada de  $G(y)$  es

$$G'(y) = C a_1 y^{a_1-1} e^{-a_2 y} - C y^{a_1} a_2 e^{-a_2 y} = C y^{a_1-1} e^{-a_2 y} (a_1 - a_2 y),$$

que vale cero en  $y = a_1/a_2$  donde tiene un máximo.

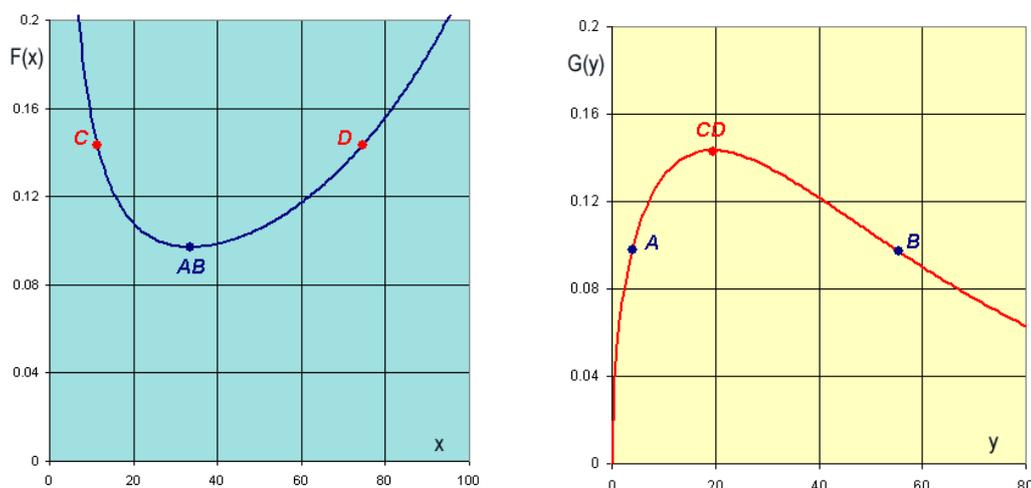
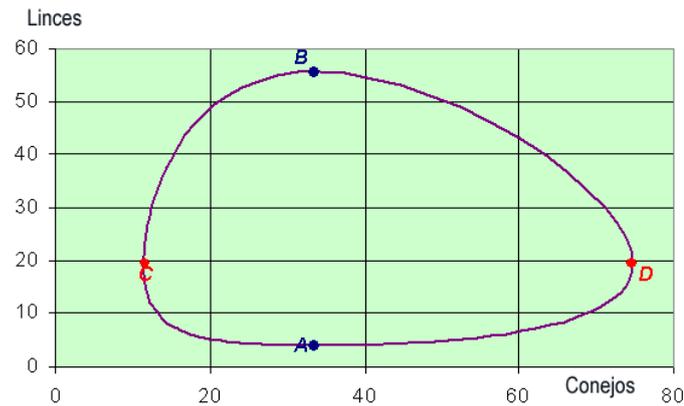


Figura 5.2 Representación gráfica de las funciones  $F(x)$  y  $G(y)$ .

Por (5.1) sabemos que las funciones  $F(x)$  y  $G(y)$  deben ser iguales, y si observamos la Figura 5.2, esto sólo es posible si el rango se encuentra entre el valor mínimo de  $F(x)$  y el máximo de  $G(y)$ . Cuando  $F(x)$  alcanza el mínimo, entonces  $G(y)$  puede tomar dos posibles valores, que corresponden al valor más alto y más bajo de la población de lince (puntos A y B). En el valor máximo de  $G(y)$ , la función  $F(x)$  toma también dos posibles valores, que son los niveles de población más bajo y más alto de conejos (puntos C y D). La Figura 5.3 representa a la situación anterior.



**Figura 5.3** Representación gráfica del plano fase.

#### EJEMPLO 5.4

- Ahora, vamos a encontrar los niveles medios de las presas y de los depredadores.

Como ocurre que  $(\ln x(t))' = x'(t)/x(t) = a_1 - a_2 y(t)$  se tiene que

$$y(t) = \frac{1}{a_2}(a_1 - (\ln x(t))').$$

El valor promedio de  $y(t)$  sobre el intervalo  $[0, T]$  se define como:

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt,$$

si sustituimos

$$\frac{1}{T} \frac{1}{a_2} \int_0^T (a_1 - (\ln x(t))') dt = \frac{a_1}{a_2}.$$

Razonando de manera similar se prueba que el valor promedio de  $y(t)$  es  $b_1/b_2$ . En consecuencia, no importa como de grandes sean las poblaciones iniciales de las dos especies ni importa como sean las variaciones, el promedio en las poblaciones es siempre el mismo. Esta propiedad se puede considerar como **la ley de conservación de la naturaleza**.

---

## 5.4. Análisis numérico del modelo

La siguiente tabla muestra el índice de capturas de lince y conejos elaborada por la compañía Hudson Bay entre los años 1900 y 1920.

Año	Conejos	Linces	Año	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1920	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1921	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	1922	-	-

**Tabla 5.1** Capturas de lince y conejos en miles.

Para poder aplicar el modelo *Lotka-Volterra* a los datos de la Tabla 5.1, es necesario conocer  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $x(0)$ ,  $y(0)$ . Empezamos tomando como valores iniciales  $x(0) = 30$  e  $y(0) = 4$ . Para encontrar el resto de los parámetros debemos tener en cuenta los valores medios

$$\bar{x}(t) = \frac{b_1}{b_2}, \quad \bar{y}(t) = \frac{a_1}{a_2}.$$

Si elegimos los datos comprendidos entre dos valores máximos (o mínimos) y hacemos su media, podemos estimar  $\bar{x}(t)$  e  $\bar{y}(t)$ . Por ejemplo, en el caso de los conejos consideraremos la población comprendida entre los años 1903 y 1913

$$\frac{77.4 + 36.3 + 20.6 + 18.1 + 21.4 + 22 + 25.4 + 27.1 + 40.3 + 57}{10} = 34.6,$$

y para los lince los comprendidos entre 1904 y 1915

$$\frac{59.4 + 41.7 + 19 + 13 + 8.3 + 9.1 + 7.4 + 8 + 12.3 + 19.5 + 45.7}{11} = 22.12.$$

De esta manera.

$$\bar{x}(t) = \frac{b_1}{b_2} = 34.6, \quad \bar{y}(t) = \frac{a_1}{a_2} = 22.12. \quad (5.2)$$

Todavía necesitamos otras dos ecuaciones para poder estimar todos los coeficientes. Para ello razonamos de la siguiente manera: cuando la población de depredadores sea muy baja, es de esperar que las presas estén creciendo de manera exponencial. A partir de esta hipótesis calcularemos  $a_1$ . En efecto, en la Tabla 5.1 observamos

que una población baja de lince, y al mismo tiempo un crecimiento rápido de los conejos, corresponde al año 1910. Para estos años los datos son  $x(t) = 27.1$  en 1910 y  $x(t+1) = 40.3$  en 1911. Si sustituimos en la fórmula del crecimiento exponencial  $x(t) = x(0)e^{a_1 t}$ , se obtiene

$$40.3 = 27.1 e^{a_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \ln \left( \frac{40.3}{27.1} \right) = 0.397. \quad (5.3)$$

En el otro caso, una población muy baja de conejos que implica un ritmo elevado en el descenso de la población de lince, se da en el año 1905. Sean  $y(0) = 41.7$ ,  $y(1) = 19$ , si sustituimos en  $y(t) = y(0)e^{-b_1 t}$ ,

$$19 = 41.7 e^{-b_1} \quad \Rightarrow \quad b_1 = -\ln \left( \frac{19}{41.7} \right) = 0.786. \quad (5.4)$$

De las expresiones (5.2, 5.3, 5.4) deducimos

$$x(0) = 30, \quad y(0) = 4, \quad a_1 = 0.4, \quad a_2 = 0.018, \quad b_1 = 0.8, \quad b_2 = 0.023, \quad (5.5)$$

que nos permiten escribir nuestro modelo presa-depredador

$$\begin{cases} x'(t) = 0.4x(t) - 0.018x(t)y(t) & ; \quad x(0) = 30 \\ y'(t) = -0.8y(t) + 0.023x(t)y(t) & ; \quad y(0) = 4 \end{cases} \quad (5.6)$$

### EJEMPLO 5.5

- Usaremos el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (5.6).

Empezamos introduciendo los datos

```
f[x_, y_, z_] := 0.4y - 0.018yz;
g[x_, y_, z_] := -0.8z + 0.023yz;
a = 0;
b = 22;
valor = {30};
cola = {4};
n = 200;
h = (b - a)/n;
```

construimos los nodos

```
nodo = Table[a + ih.{i, 0, n}];
```

y encontramos los valores de  $L_1, L_2, L_3, L_4, K_1, K_2, K_3, K_4$ .

```
For[i = 2, i <= n + 1, i ++, K1 = f[nodo[[i - 1]], valor[[i - 1]], cola[[i - 1]]];
L1 = g[nodo[[i - 1]], valor[[i - 1]], cola[[i - 1]]];
K2 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, valor[[i - 1]] + (h * K1)/2, cola[[i - 1]] + (h * L1)/2];
L2 = g[nodo[[i - 1]] + h/2, valor[[i - 1]] + (h * K1)/2, cola[[i - 1]] + (h * L1)/2];
K3 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, valor[[i - 1]] + (h * K2)/2, cola[[i - 1]] + (h * L2)/2];
L3 = g[nodo[[i - 1]] + h/2, valor[[i - 1]] + (h * K2)/2, cola[[i - 1]] + (h * L2)/2];
K4 = f[nodo[[i - 1]] + h, valor[[i - 1]] + hK3, cola[[i - 1]] + hL3];
L4 = g[nodo[[i - 1]] + h, valor[[i - 1]] + hK3, cola[[i - 1]] + hL3];
AppendTo[valor, valor[[i - 1]] + 1/6 * h * (K1 + 2K2 + 2K3 + K4)];
AppendTo[cola, cola[[i - 1]] + 1/6 * h * (L1 + 2L2 + 2L3 + L4)];];
```

Construimos la gráfica que nos muestra la evolución de las presas

```
grafica1 = ListPlot[Table[{nodo[[i]], valor[[i]]}, {i, n + 1}], PlotStyle →
  RGBColor[1, 0, 0], PlotJoined → True];
```

y la gráfica que nos muestra la evolución de los depredadores

```
grafica2 = ListPlot[Table[{nodo[[i]], cola[[i]]}, {i, n + 1}], PlotStyle →
  RGBColor[0, 0, 1], PlotJoined → True];
```

Finalmente, introducimos los datos de la Tabla 5.1

```
conejes = ListPlot[{{1, 30}, {2, 47.2}, {3, 70.2}, {4, 77.4}, {5, 36.3}, {6, 20.6},
  {7, 18.1}, {8, 21.4}, {9, 22}, {10, 25.4}, {11, 27.1}, {12, 40.3},
  {13, 57}, {14, 76.6}, {15, 52.3}, {16, 19.5}, {17, 11.2}, {18, 7.6},
  {19, 14.6}, {20, 16.2}, {21, 24.7}}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]]
```

```
lince = ListPlot[{{1, 4}, {2, 6.1}, {3, 9.8}, {4, 35.2}, {5, 59.4},
  {6, 41.7}, {7, 19}, {8, 13}, {9, 8.3}, {10, 9.1}, {11, 7.4}, {12, 8},
  {13, 12.3}, {14, 19.5}, {15, 45.7}, {16, 51.1}, {17, 29.7}, {18, 15.8}, {19, 9.7},
  {20, 10.1}, {21, 8.6}}, PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1]]
```

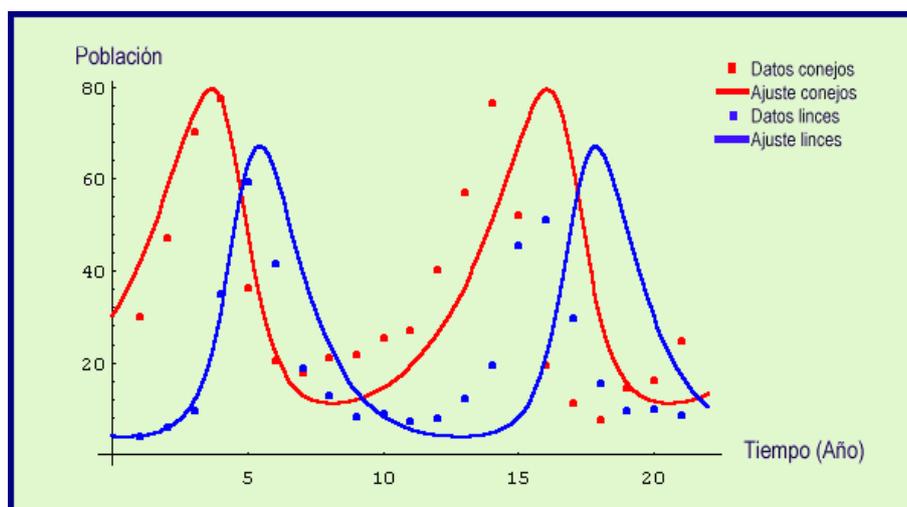


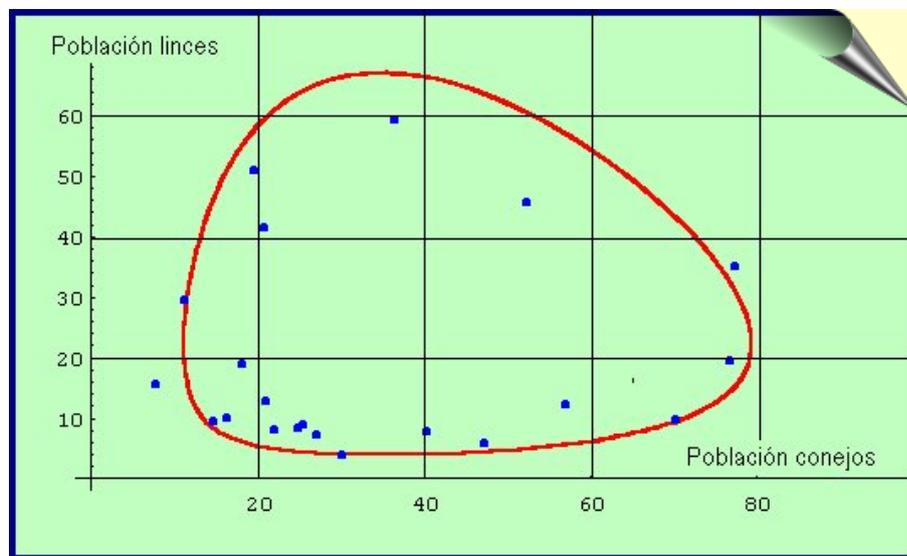
Figura 5.4 Ajuste de los datos.

A continuación dibujamos las órbitas

```
grafica3 = ListPlot[Table[{valor[[i]], cola[[i]]}, {i, n + 1}], PlotStyle →
  RGBColor[0, 1, 0], PlotJoined → True];
```

y representamos la nube de puntos correspondientes a las poblaciones de conejos y zorros de la Tabla 5.1

```
grafica4 = ListPlot[{{30, 4}, {47.2, 6.1}, {70.2, 9.8}, {77.4, 35.2}, {36.3, 59.4},
  {20.6, 41.7}, {18.1, 19}, {21.4, 13}, {22, 8.3}, {25.4, 9.1}, {27.1, 7.4},
  {40.3, 8}, {57, 12.3}, {76.6, 19.5}, {52.3, 45.7}, {19.5, 51.1}, {11.2, 29.7},
  {7.6, 15.8}, {14.6, 9.7}, {16.2, 10.1}, {24.7, 8.6}}]
```



**Figura 5.5** Ajuste de las órbitas.

## PRÁCTICA 6



---

# CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DINÁMICOS CON VENSIM PLE

---

### 6.1. Objetivo

El propósito de esta práctica es dar unas breves ideas que nos ayuden a familiarizarnos con la construcción y simulación de modelos de sistemas dinámicos usando el programa Vensim PLE<sup>®</sup>. Gran parte de esta práctica está extraída de los Trabajos Fin de Grado de las alumnas *Mengyu Xu*<sup>1</sup> y *Runjie Wu*<sup>2</sup>, que han sido tutorizados por el profesor Juan Navas Ureña.

### 6.2. Introducción

Una manera interesante de poder resolver un problema científico, es como sabemos, hacer uso de un modelo matemático. La modelización es un tema que en los últimos años ha adquirido una gran importancia, por la naturaleza y la complejidad de los problemas a los que se aplica. Las razones que justifican esta gran expansión, hay que buscarlas en el importante desarrollo que ha tenido el uso del ordenador, la aparición de nuevas teorías matemáticas y el análisis de sistemas. Uno de los programas más fáciles de utilizar para construir y posteriormente simular un sistema dinámico es Vensim PLE<sup>®</sup>.

---

<sup>1</sup> *Modelos de gestión de existencias de una empresa a través de Dinámica de Sistemas*

<sup>2</sup> *El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la Economía*

## 6.3. La Dinámica de Sistemas

Después de la Segunda Guerra Mundial, con el desarrollo de la industrialización, en algunos países los problemas sociales se volvieron cada vez más complejos y preocupantes, por ejemplo: el crecimiento de la población, el desempleo, la contaminación ambiental, el agotamiento de los recursos naturales, etc.

En síntesis estos problemas tienen en común las siguientes características:

- Existen relaciones muy estrechas y contradictorias entre ellos, como por ejemplo entre la dinámica del crecimiento de la población y la protección del medio ambiente.
- Existe un retraso en muchos de ellos como resultado de la inversión, la contaminación ambiental y la transferencia de información. Por tanto, se deben resolver estos problemas desde un punto de vista dinámico y no de manera estática
- Existen factores cuantitativos y cualitativos interconectados y es por ello que su resolución es mucho más difícil.

Estas complicaciones necesitaban de una nueva metodología para solventarlos; por lo que se crean metodologías diferentes, donde la tecnología, debido fundamentalmente al gran avance de la técnica computacional, adquiere un gran protagonismo.

### 6.3.1. Historia de la Dinámica de Sistemas

La Dinámica de Sistemas (DS) es una nueva metodología utilizada en el estudio de los sistemas complejos. Su fundador, el profesor e ingeniero electrónico *Jay Wright Forrester* del Massachusetts Institute of Technology (MIT), propuso en 1956 un método, basado en la simulación, para el análisis global de problemas empresariales relacionados con la gestión de la producción y el inventario, que en un principio recibió el nombre de “*dinámica industrial*.” Sus resultados quedaron reflejados en el famoso libro *Dinámica Industrial* (Forrester, 1961).

La DS es una disciplina emergente que en sus inicios, se desarrolló a partir una combinación de diversas teorías, como la cibernética (Cybernetics), la teoría de sistemas (SystemTheory), la mecánica de servo-mecanismo (Servo-mechanism), la teoría de la información (InformationTheory), la teoría de la decisión (DecisionTheory) y la simulación por ordenador (ComputerSimulation).

Los orígenes de la DS están muy relacionados con la aparición de un comportamiento oscilatorio de los pedidos de una empresa de material electrónico, el cual era bastante ilógico debido al pequeño número de clientes de esta empresa. El estudio detallado de este comportamiento se comprobó que era debido a los retrasos producidos entre el pedido y el tiempo de respuesta a estos encargos, así como a la existencia de bucles de realimentación. Su descubrimiento fue realizado no por las

técnicas de investigación operativas tradicionales, como el método de *Montecarlo*, sino por una nueva metodología que recibiría el nombre de DS.

En un principio, entre 1920-1930, la DS se relacionó con el estudio de los sistemas mecánicos de regulación, conocidos también como realimentación, retroalimentación o feedback. Sin embargo, el también profesor del MIT, gran matemático *Norbert Wiener*, y creador de la cibernética, definió el feedback como “*aquel método que proporciona control a los sistemas mediante la técnica de introducir en ellos los resultados obtenidos*”.

Después de 1950, la gente se dio cuenta de que no sólo en la ingeniería estaba presente la realimentación, sino que otros sistemas, como los biológicos, el medioambiental, los sociales, estaban regulados por este mecanismo. Esto hacía que los modelos matemáticos simples estudiados inicialmente, que eran lineales, pasaran a ser modelos no lineales, con un gran mayor nivel de dificultad.

Como se ha comentado, en 1961, *Forrester* publicó “*Industrial Dynamics*” un clásico y punto de partida de la DS. En este estudio observó y explicó las causas de las oscilaciones que se producían en algunos fenómenos relacionados con las empresas, empleando modelos cibernéticos aplicados a los procesos industriales. Para ello se elaboraba el llamado Diagrama de *Forrester*, posteriormente se implementaba y simulaba con la ayuda de un programa de ordenador y se analizaba la evolución del modelo a lo largo del tiempo.

En 1968, y por un hecho casual, *Forrester* empezó a interesarse por la organización de las grandes ciudades. El motivo fue la presencia de *John Collins*, un antiguo alcalde de Boston, en un despacho contiguo al suyo en el MIT. De esta manera surgió entre ambos una amistad y la posibilidad de colaboración en el estudio de los problemas que afectan a las grandes ciudades, utilizando como metodología la DS. Todos estos resultados fueron recopilados en un libro (*Forrester*, 1969) y a partir de entonces este método de estudio ha sido ampliamente utilizado en el estudio de cualquier otro sistema dinámico continuo.

Durante esta época, un colaborador, *Richard Bennett*, creó el primer software llamado SIMPLE (Simulation of Industrial Management Problems with Lots of Equations) para la implementación de la DS en un ordenador. Posteriormente *Alexander Pugh* y *Phyllis Fox*, mejoraron la versión anterior, que se conoce con el nombre DYNAMO (DYNAmicMOdels), y ha llegado a ser el programa más utilizado en DS.

El momento clave, en la popularización de esta metodología, se encuentra en los años setenta, cuando el Club de Roma encargó a *Forrester* y a su equipo un estudio para conocer las relaciones existentes entre el crecimiento de la población y las actividades humanas en un mundo donde los recursos son limitados. Las conclusiones, presentadas en el modelo WORD1, fueron muy llamativas y preocupantes, puesto que en ellas se afirmaba que, en ese momento, el crecimiento de la población no era sostenible a más de 100 años vista y que el sistema colapsaría.

Casi al mismo tiempo, *Forrester* lideró un equipo del MIT, que puso en marcha un estudio local del WORD1, a un “*Modelo Nacional*”. El proyecto contó con la ayuda financiera de empresas de los Estados Unidos y del gobierno, y consistió en un modelo matemático con más de 4000 ecuaciones. Los resultados obtenidos explicaron de manera muy acertada la mayoría de los comportamientos económicos que venían siendo observados: el crecimiento de la tasa de desempleo, la tasa de interés real, los procesos de recesión y recuperación, etc.

Estos estudios hicieron que la DS captara la atención de todo el mundo, promovió su difusión y se desarrolló en casi todos los países, imponiéndose su metodología interdisciplinar en la mayoría de las investigaciones de los problemas socio-económicos.

A principios de la década de 1970, el modelo anterior se perfeccionó. Concretamente en 1971 *Forrester* dirigió los trabajos de elaboración de una segunda versión para el estudio global del mundo que recibió el nombre de “*World Dynamics*” (Dinámica Mundial), y además en 1973, coordinó, junto con *D.L. Meadows*, el informe final de título “*The Limits to Growth*” (Los límites del crecimiento). Existió una tercera versión, realizada en 1974, y encargada por *Mesarovic* y *Pestel*, que se llamó “*Mankind at the Turning Point*” (Los seres humanos en el punto de inflexión).

En los años 80, la DS salió del ámbito de la dirección y administración de empresas y empezó a aplicarse en estudios de medioambiente y gestión de los recursos naturales. En la actualidad, el rango de aplicaciones ha crecido y hoy pueden verse estudios relacionados con la psicología y la sociología del comportamiento humano, y en muchas otras ramas del conocimiento.

### 6.3.2. Introducción a la Dinámica de Sistemas

#### Concepto y definición de sistema.

La primera cuestión importante es conocer lo que se entiende por un sistema. Existen diferentes definiciones, desde la idea más intuitiva como: el método para llevar a cabo una tarea. Pero es en un sentido muy diferente el que está presente en DS.

De esta manera *Aracil* define: “*Un sistema como de un objeto dotado de alguna complejidad, formado por partes coordinadas, de modo que el conjunto posea una cierta unidad, que es precisamente el sistema*” (*Aracil*, 1995), o bien de una forma más precisa: “*Una unidad cuyos elementos interaccionan juntos, de modo que operan hacia una meta común. Es algo que se percibe como una identidad que lo distingue de que lo rodea, y que es capaz de mantener esa identidad a lo largo del tiempo y bajo entornos cambiantes*” (*Aracil y Gordillo*, 1997).

Otros autores, como por ejemplo *Peter Senge* piensan que “*Un sistema es una totalidad percibida cuyos elementos se aglomeran porque se afectan recíprocamente a lo largo del tiempo y operan con un propósito común*” (*Senge* (1998).

De todas las definiciones, tal vez la de *Forrester* se la más precisa: “*Conjunto de*

*partes que trabajan para lograr un objetivo común” (Forrester, 1982).*

El enfoque científico utilizado en la DS es el holístico, también llamado enfoque sistémico. Es decir, se basa en el estudio de todo el sistema completo y las interrelaciones entre sus partes. Al contrario del enfoque reduccionista que consiste en analizar por separado cada una de las partes que constituyen el sistema.

A la vista de los comentarios anteriores, es evidente que los sistemas están en todas partes, en el universo, desde las partículas elementales hasta las galaxias, desde la sociedad humana hasta el pensamiento de las personas, desde el sector inorgánico al sector orgánico, desde las ciencias naturales a las ciencias sociales.

Por tanto, según *Forrester*, cualquier cosa de este mundo puede ser un sistema. Para ello se necesita una variedad de elementos con la condición de que se encuentren interrelacionados. Es importante darse cuenta que el sistema siempre será considerado como una unidad, en lugar de como la suma de sus componentes.

### ¿Qué es un sistema dinámico?

La Teoría de Sistemas Dinámicos es una rama del conocimiento que se ocupa del estudio del movimiento y proporciona un lenguaje común para el estudio de las Matemáticas, la Biología, la Física, la Economía, e incluso en los últimos años se ha extendido a otros campos como por ejemplo la Historia y la Literatura.

Como se ha comentado, un sistema es un grupo de elementos que están relacionándose continuamente para formar un conjunto unificado. A estas relaciones internas y externas se las conoce con el nombre de estructura del sistema. Por ejemplo, en un sistema económico su estructura está definida por las relaciones entre la población, los nacimientos, las muertes, las migraciones, el trabajo, y cualquier otra variable presente que modifique a un determinado ecosistema.

Los sistemas dinámicos es un concepto matemático que tiene su origen en el análisis matemático. Una regla de los sistemas dinámicos es que, elegido un punto en un espacio geométrico, éste cambia con el tiempo. Ejemplos muy intuitivos pueden ser la descripción del movimiento de un péndulo, el flujo del agua en una tubería, o el precio de una acción de una empresa en cada uno de los días del año.

A través de los sistemas dinámicos puede analizarse como el cambio de una pequeña parte del sistema puede afectar al comportamiento del sistema completo. De esta manera, puede estudiarse como influye una sequía temporal en el ecosistema, o bien como la subida del IVA en determinado producto afecta a la economía de este sector.

Un concepto importante a tener en cuenta en un sistema es el de estado. Un sistema dinámico discreto es una ecuación en diferencias de la forma:

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde la función  $f$  está definida de  $X$  en  $X$ , siendo  $X$  el espacio de fases o de los estados. La función, que puede ser explícita o implícita, que relaciona a estas varia-

bles de estado se conoce con el nombre de ecuación de estado. Por tanto, el estado del sistema viene determinado por un conjunto de números reales que lo describen, de tal manera que una ligera variación en el estado se corresponde con pequeños cambios en el conjunto de esos números reales.

Los sistemas complejos estarán representados por un número elevado de variables de estado. Por ejemplo el sistema atmosférico quedará determinado (entre otras variables) por la presión, la temperatura, la humedad, la presión atmosférica, etc. La evolución de los sistemas dinámicos describe cómo el estado futuro depende del estado actual, por tanto, es un proceso paulatino que depende del tiempo  $t$ . Si suponemos que inicialmente, para  $t=0$ , el estado del sistema se encuentra en el origen de coordenadas, al pasar el tiempo el punto se desplaza de tal manera que describe una curva conocida con el nombre de diagrama de fase.

### ¿Qué es la Dinámica de Sistemas?

La DS es una metodología utilizada para analizar, comprender, y resolver los sistemas dinámicos. Se basa en la Teoría General de Sistemas, y en su esencia, tiene en cuenta conceptos de la Cibernética, y de la Teoría de la Información. En un principio se aplicó a las Ciencias Sociales y a las Ciencias Naturales, pero en la actualidad el rango de aplicaciones se ha extendido a otros muchos campos científicos.

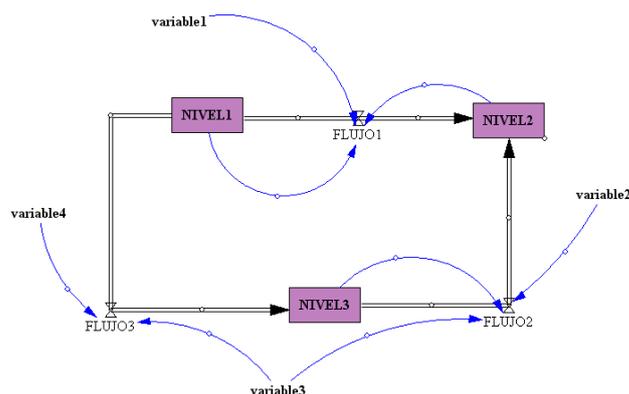
Es necesario tener en cuenta que la DS no sólo se aplica a modelos lineales, sino que también es especialmente interesante en el estudio de modelos no lineales. Esta cuestión es muy interesante, porque como es conocido, detrás de los modelos no lineales se encuentra la aparición del caos matemático.

El caos en los modelos no lineales hace referencia a un estado de movimiento determinado pero impredecible cuya apariencia externa es parecida al movimiento aleatorio. Sin embargo, es importante recalcar que es diferente de un movimiento al azar. Los sistemas caóticos son sensibles a los cambios infinitesimales iniciales de perturbación, no importa cómo de pequeños sean estos cambios, después de un largo tiempo, el sistema se desviará completamente de la dirección original. Las pequeñas diferencias en el valor inicial se amplificarán de forma exponencial, lo que conlleva a que el sistema no resulte predecible a largo plazo. Este efecto, puesto de manifiesto por primera vez por el meteorólogo Edward Lorenz, se conoce como efecto mariposa: “*el aleteo de una mariposa en New York puede provocar un huracán en Madrid.*”

Por último, y más importante, debemos tener en cuenta que detrás de un sistema dinámico continuo siempre se encuentra un sistema de ecuaciones diferenciales, que al ser simulados por un ordenador su resolución se realiza por medio de técnicas de aproximación del cálculo numérico. Al ser valores aproximados el resultado puede verse afectado por lo que se ha comentado relativo a los modelos no lineales y el caos. Por tanto, se hace necesario un estudio más detallado de las ecuaciones que definen el modelo y realizar, si es posible, un análisis de sensibilidad de los parámetros más destacados del modelo.

### Etapas en la resolución de problemas mediante la Dinámica de sistemas

La primera y más importante de las fases para la resolución de un problema mediante DS es “*identificar el problema con claridad, y describir los objetivos del estudio con precisión*” (Martin, 2011). Necesitamos, por tanto, hacer las preguntas adecuadas con la intención de localizar los problemas que necesitamos estudiar y resolver.



**Figura 6.1:** Estructura básica en Dinámica de Sistemas.

A continuación, una vez localizado el problema, es necesario estudiar las posibles soluciones, el comportamiento histórico y la conceptualización del sistema. A partir de ello se construye el modelo y se analiza mentalmente su futuro comportamiento.

La fase siguiente es técnica y consiste en la elaboración del modelo a través del Diagrama Causal y el Diagrama de Forrester, e introducir las ecuaciones, lo que permite convertir el sistema en una expresión matemática que viene dada por una ecuación o un sistema de ecuaciones diferenciales.

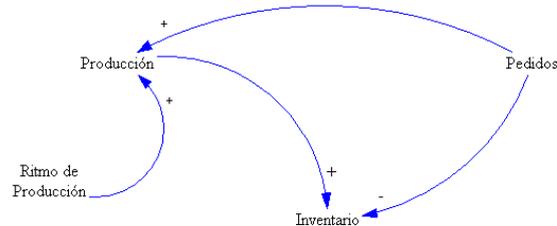
Posteriormente se procede a la ejecución de diferentes simulaciones y a la comparación de los resultados obtenidos con los datos históricos disponibles, lo que permite un posterior refinamiento del modelo mediante un nuevo ajuste de los parámetros introducidos.

#### Estructura del sistema.

Desde el punto de vista metodológico, la estructura básica de un SD está compuesta por niveles, flujos, variables auxiliares y las relaciones internas existentes entre estas variables, tal y como puede apreciarse en la figura 6.1.

El Diagrama Causal también se conoce con el nombre de diagrama de influencia. Se utiliza, generalmente, en la primera fase de la elaboración de un modelo a través de DS, puesto que puede simplificar la ilustración del mismo. En la Figura 6.2 aparece el Diagrama Causal correspondiente a un modelo elemental de gestión de un inventario. La variación del inventario está afectada por los cambios debidos a la producción

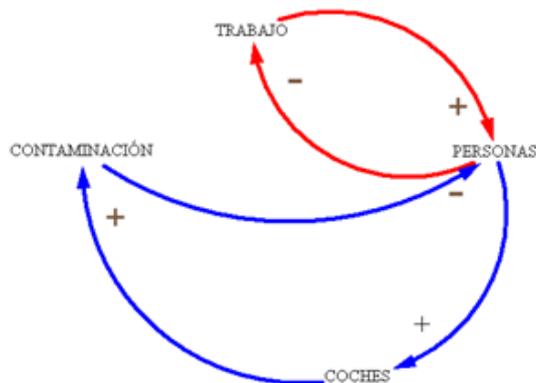
(con una tasa de producción) y al número de pedidos. Es evidente que un aumento de la producción implica un aumento de inventarios, por otro lado, un aumento en el número de pedidos se corresponde con una disminución del inventario.



**Figura 6.2:** Ejemplo de Diagrama Causal.

El concepto más importante a tener en cuenta en DS es el de realimentación, o retroalimentación. Básicamente es un concepto por el cual una determinada acción de un elemento sobre otro del sistema, origina una reacción del segundo sobre el primero.

*Forrester* investigó este aspecto analizando el comportamiento oscilatorio que se producía en la gestión de existencias en el suministro de una empresa de componentes electrónicos. Descubrió que esta conducta tan extraña de los productos almacenados era debida a dos factores, primero al retraso existente entre el momento del pedido y el tiempo de respuesta a estos pedidos y segundo a los bucles de realimentación existentes en el sistema.



**Figura 6.3:** Ejemplos de bucles de realimentación.

El sistema de realimentación es un conjunto de bucles interconectado e interaccionado; cuando el bucle es único es un sistema sencillo y si el sistema tiene tres o más bucles es un sistema complejo.

En el ejemplo anterior (figura 6.3) puede observarse dos bucles. El primero, en rojo,

actúa del modo siguiente: al aumentar el trabajo aumenta el número de personas de una ciudad (realimentación positiva); al mismo tiempo, si aumenta el número de personas el trabajo disminuirá (realimentación negativa). Al ser impar el número de realimentaciones negativas, entonces el bucle es impar. Haciendo un análisis similar puede comprobarse que el bucle en azul está compuesto de tres realimentaciones y también es impar.

Los bucles de realimentación positivos fortalecen la tendencia y tienden a desestabilizar el sistema, incrementando el valor de las variables. Por el contrario, los negativos aportan estabilidad o equilibrio al sistema. Un ejemplo inmediato de estos comportamientos puede verse en un sistema dinámico exponencial independiente de la densidad de población. En este caso el bucle dominante es positivo. Mientras que en un modelo logístico, donde se produce el típico crecimiento en  $S$ , este crecimiento depende de la densidad de la población y el sistema estará dominado por un bucle negativo.

Es muy importante hacer notar que un bucle de realimentación positivo hace, por medio de la reacción en cadena, que se refuerce la variación del nivel, reforzando su desviación. Es decir, los sistemas donde prevalecen este tipo de bucles son inestables y suelen representarse por una circunferencia donde en su interior hay dibujada una bola de nieve. Por el contrario, si dominan los ciclos negativos, se debilita la variación de ese elemento con el fin de volver el sistema a su estado inicial y estabilizarlo. Se representan por una circunferencia con una balanza en equilibrio en su interior.

Según comenta *J. Martín* en “Dinámica de Sistemas. *Conceptos*” (Martín, 2001), “*La estructura básica de los sistemas estables está formada por un Estado Deseado y por un Estado Real del sistema, estos dos estados se comparan (Diferencia), y en base a este valor el sistema toma una Acción para igualar el Estado Real al Deseado.*” De esta manera se consigue un número de relaciones impares negativas, con lo que el bucle será impar, y el sistema se estabilizará en el tiempo.

Los sistemas biológicos, ambientales, ecológicos, industriales, agrícolas, económicos y sociales son ejemplos de sistemas de realimentación. Por último, es importante señalar que también puede existir en el sistema un bucle de realimentación que no sea cerrado, al haber sido desconectado, en este caso se llama sistema de bucle abierto.

### Aplicaciones.

Como se ha comentado, la DS se aplica en muchos aspectos diferentes de la actividad económica, por ejemplo en la gestión de proyectos de una empresa: la planificación estratégica y de negocios, mediante la constitución de un modelo matemático que permite realizar diferentes simulaciones de la administración de la empresa. El estudio detallado de estos resultados permite explicar comportamientos importantes como pueden ser los retrasos o las oscilaciones producidas en los niveles a lo largo del tiempo, o bien, detectar mediante un análisis de sensibilidad, cuáles son los

parámetros más vulnerables del modelo.

Pensemos también en la gran ventaja económica que supone esta metodología frente a la construcción de modelos de experimentación en laboratorio, mucho más costosos. Es por este motivo por lo que algunos autores (Martin, 2013) recomiendan que el estudio a través de la DS del modelo sea un paso previo a la experimentación en el laboratorio.

Otro ejemplo de aplicación de la DS es en ecología donde está siendo ampliamente utilizada. Por ejemplo, en el estudio del uso del agua a nivel mundial y su relación con el desarrollo industrial, poniendo de manifiesto que su contaminación es un tema de capital importancia para la evolución de nuestro planeta. El uso de la DS permite verificar y analizar la viabilidad de las diferentes teorías y así mismo es una herramienta ideal en la toma de decisiones.

Por último, citaremos una serie de actividades donde actualmente la DS está presente:

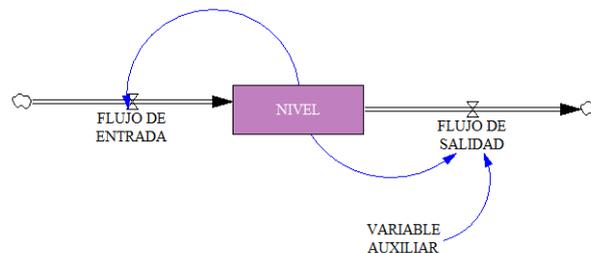
- Planificación Estratégica y Negocios.
- Diseño de procesos de negocio.
- Desarrollo de la Gestión y Políticas Públicas.
- Los modelos biológicos y médicos.
- Energía y Medio Ambiente.
- El desarrollo teórico de las Ciencias Naturales y las Ciencias Sociales.
- Dinámica de sistemas complejos no lineales.

### 6.3.3. Diagrama de Forrester

El Diagrama de *Forrester*, también conocido como diagrama de flujos, se genera a partir del Diagrama Causal, y permite que el modelo pueda ser implementado en un ordenador para su posterior simulación. Cada uno de los elementos que aparecen en el Diagrama Causal pueden ser representados por medio de variables que pueden ser: niveles, flujos y variables auxiliares.

- Las **variables de nivel**, o de estados, indican en todo momento la situación o el estado del sistema, lo que aporta información básica para la toma de decisiones posteriores. Se representa por medio de un rectángulo con un nombre en su interior. Por ejemplo, el número de empresas de una ciudad en un momento determinado.
- Es evidente que los niveles no son constantes y que evolucionan con el tiempo, el cambio se debe a la variable conocida como **flujo**, que refleja las modificaciones de estos niveles. En el ejemplo que nos ocupa el nivel de empresas se modifica debido a un flujo de entrada (creación) y a un flujo de salida (destrucción).

- El resto de **variables son auxiliares**, y suelen describir a los procesos intermedios necesarios para la toma de decisiones. En la figura 6.4 puede verse un ejemplo de Diagrama de *Forrester* para un modelo genérico.



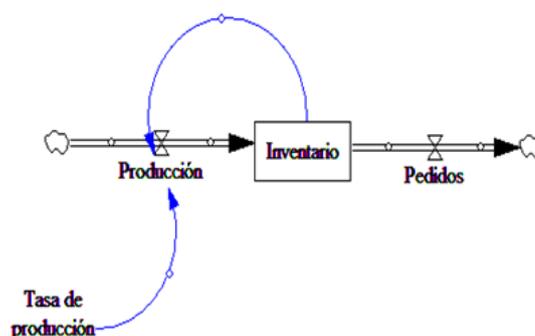
**Figura 6.4:** Ejemplo de diagrama de *Forrester*.

En el diagrama de *Forrester* de la Figura 6.5 podemos ver: una variable de nivel *Inventario*, el flujo de entrada *Producción*, el flujo de salida *Pedidos*, y la variable auxiliar *Tasa de producción*. Si las ecuaciones del modelo fuesen, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Valor inicial Inventario} &= 12000 \\ \text{Producción} &= \text{Inventario} * \text{Tasa de producción} \\ \text{Pedidos} &= 200 \\ \text{Tasa de producción} &= 0.05 \end{aligned}$$

entonces, estaríamos representando al modelo matemático, del tipo exponencial modificado, correspondiente al problema de valores iniciales (PVI):

$$y'(t) = 0.05y(t) - 200 \quad ; \quad y(0) = 12000$$



**Figura 6.5:** Diagrama de *Forrester*  $y'(t) = 0.05y(t) - 200$ .

#### 6.3.4. Simulación de modelos con Vensim.

Existen en el mercado diferentes programas gráficos que permiten la creación de modelos de simulación. Entre los mas populares se encuentran:

- **Ithink:** muy utilizado en modelos dinámicos relacionados con el mundo económico y empresarial. Su uso es relativamente sencillo, por lo que es muy recomendable a los pocos iniciados en DS, y además posee una gran potencia en las representaciones gráficas.
- **Stella:** es la versión mejorada del primer software desarrollado por *Forrester* y su equipo que recibió el nombre de **Dynamo**. Su uso ha quedado muy centralizado en la enseñanza, especialmente en los niveles de secundaria, y en la investigación.
- **Powersim:** Se utiliza casi con exclusividad en el mundo empresarial, en modelos relacionados con la gestión de clientes, los recursos humanos y los análisis financieros.
- **Vensim:** es sin duda el programa más utilizado puesto que es capaz de cubrir todas las áreas relacionadas con la creación y simulación de modelos complejos. Permite la construcción de modelos basados en los diagramas causal y de *Forrester*.

De todos ellos, por la sencillez de su manejo y la gratuidad del mismo, utilizaremos para el desarrollo del presente trabajo el programa **Vensim PLE**<sup>®</sup>, acrónimo de Ventana de Simulation Environment Personal Learning Edition. El programa fue desarrollado en 1985 por la compañía Ventana Systems de Harvard MS, con el objetivo de ayudar a las empresas en la toma de decisiones ante problemas complicados por medio de las distintas simulaciones que el programa aporta. Puede ser descargado, en su versión de prueba, de su página web: <https://vensim.com/>

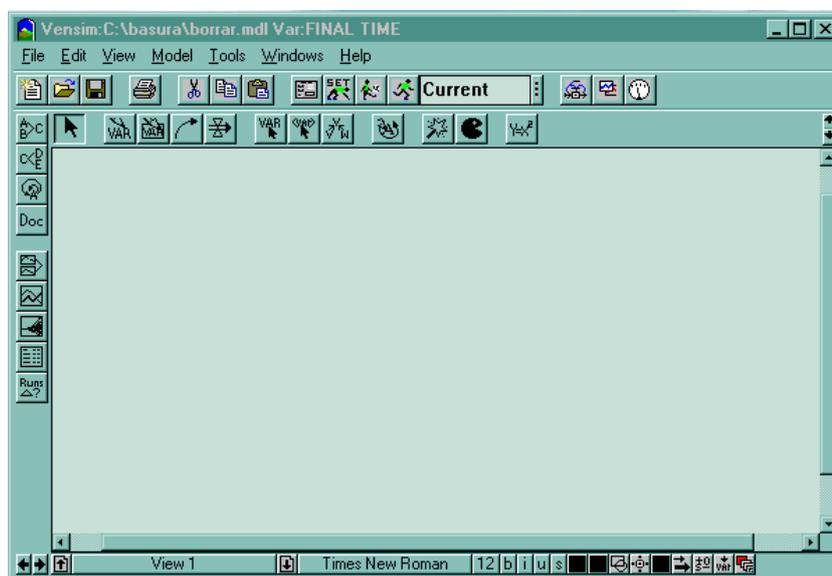
De una forma resumida, las principales características del programa son:

- **El uso de gráficos para la construcción del modelo.** Al ejecutarse el programa bajo el sistema operativo Windows, entonces su uso es idéntico al resto de los programas que utilizan este entorno. Existen diferentes barras de herramientas que utilizadas de forma adecuada simplifican la construcción del modelo. Se procede en primer lugar a la construcción del Diagrama de *Forrester* haciendo uso de los niveles, flujos y variables auxiliares. A continuación se introducen las ecuaciones y los valores de los parámetros, y por último se procede a la simulación.
- **Proporciona diferentes métodos de análisis.** Las herramientas que permiten analizar el modelo son de dos tipos. La primera de ellas es de tipo estructural, como por ejemplo “**cause tree**” con la que permite visualizar las diferentes relaciones causales existentes entre variables, o bien el icono “**loops**” con el que es posible ver todos los bucles de realimentación que tiene el modelo. El otro tipo de herramientas se corresponde con la visualización de los datos obtenidos en la simulación, cuya presentación puede hacerse en forma de salida de gráficos o en bien en forma de tablas.

- Posibilidad de corrección del modelo.** A la vista de los datos históricos de los que disponemos y los resultados ofrecidos por la simulación se puede llevar a cabo, de una manera muy sencilla, distintas correcciones de las variables del modelo para que después de nuevas simulaciones los resultados conseguidos sean muy parecidos a los datos reales obtenidos.

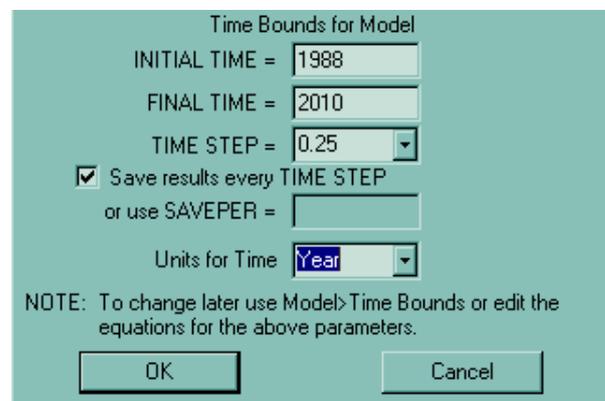
Comenzaremos con la construcción de un modelo económico muy simple que nos analice la evolución del déficit, y posteriormente construiremos y simularemos los modelos más sencillos que estudian el crecimiento de poblaciones.

Para comenzar necesitamos cargar el programa. Al abrir por primera vez Vensim PLE<sup>®</sup> nos aparecerá la siguiente pantalla.



**Figura 6.6:** Pantalla principal del Vensim PLE<sup>®</sup> .

Para empezar a trabajar en un nuevo modelo seleccionamos **New Model** en el menú **file**, y el programa nos mostrará el siguiente cuadro de diálogo (Figura 6.7)



**Figura 6.7:** Horizonte temporal del modelo.

En primer lugar debemos elegir el horizonte temporal del modelo (cuando debe comenzar y acabar la simulación), el paso temporal apropiado (como deseamos exactamente que simule nuestro modelo), y la unidad de tiempo. En nuestro ejemplo, el déficit se iniciará en 1988 y deseamos acabar la simulación en el año 2010. Como paso temporal seleccionamos 0.25 años. Finalmente, cambiamos la unidad del tiempo de mes a año. Para finalizar hacemos clic en OK con el ratón.

Para darle un nombre al modelo, elegimos **Save as** del menú **file** e introducimos el nombre deseado. El programa asignará automáticamente la extensión **.mdl** al nombre del archivo, y ya estaremos en condiciones para construir nuestro modelo.

### Niveles (stock), Flujos (flow) y estructuras de retroalimentación (feedback)

El área grande vacía en la mitad de la pantalla es el área de trabajo. Los diferentes botones en el borde superior del área de trabajo representan las distintas “herramientas” disponibles para trabajar con el modelo. La barra superior contiene a la barra del título, la barra de herramientas principal y las herramientas del escritorio. La barra de herramientas principal consiste en dos conjuntos: operación con archivos, que controla las funciones standard con archivos (**abrir, cerrar, grabar, imprimir, cortar, copiar y pegar**)

Además están las herramientas de simulación y gráficos que nos permiten realizar distintas simulaciones y diferentes representaciones gráficas. Las herramientas de escritorio nos permiten construir los distintos componentes de un modelo. Las herramientas de la barra de estado nos permiten cambiar la forma del diagrama. Las herramientas de análisis a la izquierda de la ventana se utilizan para analizar el modelo y entender su comportamiento.

Comenzamos dibujando un nivel que representará a la Deuda federal pendiente de pago de nuestro modelo (Figura 6.8). Hacemos **clic** en el botón correspondiente de la barra de herramientas del escritorio (tercero por la izquierda) y a continuación volvemos a pulsar el botón correspondiente. Tecleamos la palabra **Deuda** y pulsamos la tecla **Enter**.

Ya hemos creado la primera variable en nuestro modelo, el nivel de dinero que constituye la Deuda federal. Ahora añadimos un flujo de entrada a la **Deuda**. Pulsamos en el quinto de los iconos de la barra de herramientas y nos situamos a la izquierda de la variable **Deuda**, pulsamos el ratón y posteriormente nos desplazamos hasta situarnos dentro del rectángulo del nivel flujo, en este momento volvemos de nuevo a pulsar el botón izquierdo del ratón. El programa nos dará una caja de texto vacía y el cursor parpadeante. Tecleamos **déficit federal neto** y pulsamos la tecla **Enter**. Nuestra pantalla tiene ahora el aspecto que aparece en la Figura 6.8 Observemos que el dibujo de la nube representa la frontera del modelo. En este caso la nube nos indica que no debemos preocuparnos, por el momento, de donde viene el déficit. Pero debemos ser cuidadosos hacia donde va dicho flujo, ya que lo estamos acumulando

en el nivel **Deuda**.

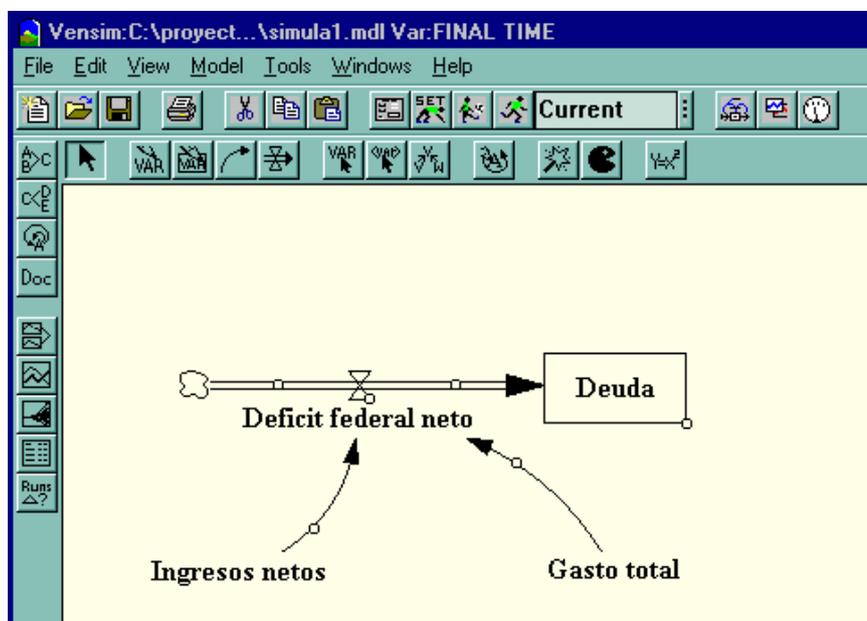


Figura 6.8: Construcción diagrama de Forrester inicial.

Si deseamos borrar algo del escritorio, elegimos el undécimo de los iconos de la barra de herramientas (comecoco) nos situamos encima de lo que deseamos borrar y pulsamos el botón del ratón. También podemos cambiar el nombre del nivel **Deuda**. Elegimos el tercer botón de la barra de herramientas, pulsamos encima del nivel **Deuda** y escribimos el nuevo nombre.

Ahora necesitamos crear las variables necesarias para determinar el flujo **déficit federal neto**. Asumamos que está determinada por dos variables, **Ingresos netos** y **Gasto total**. Seleccionamos el segundo de los iconos (VAR) y añadimos estas dos variables al modelo. Estas variables no están conectadas a la válvula o a la caja y reciben el nombre de variables auxiliares. Para mostrar gráficamente que el **déficit federal neto** está determinado por las variables auxiliares, tenemos que conectarlo a través de flechas. En primer lugar, elegimos de la barra de herramientas el cuarto de los botones, pulsamos encima de la variable auxiliar **Ingresos netos** y arrastramos el ratón hasta colocarnos encima del flujo **déficit federal neto**, finalmente volvemos a pulsar el botón del ratón.

Si pulsamos en el primer botón de la barra de herramientas (aquella que tiene dibujada una flecha), entonces podemos seleccionar la variable que hemos creado y moverla por la pantalla. También podemos pulsar en el pequeño círculo que tienen las flechas y cambiar su curvatura. En este momento nuestro modelo tiene el aspecto que muestra la Figura 6.9.

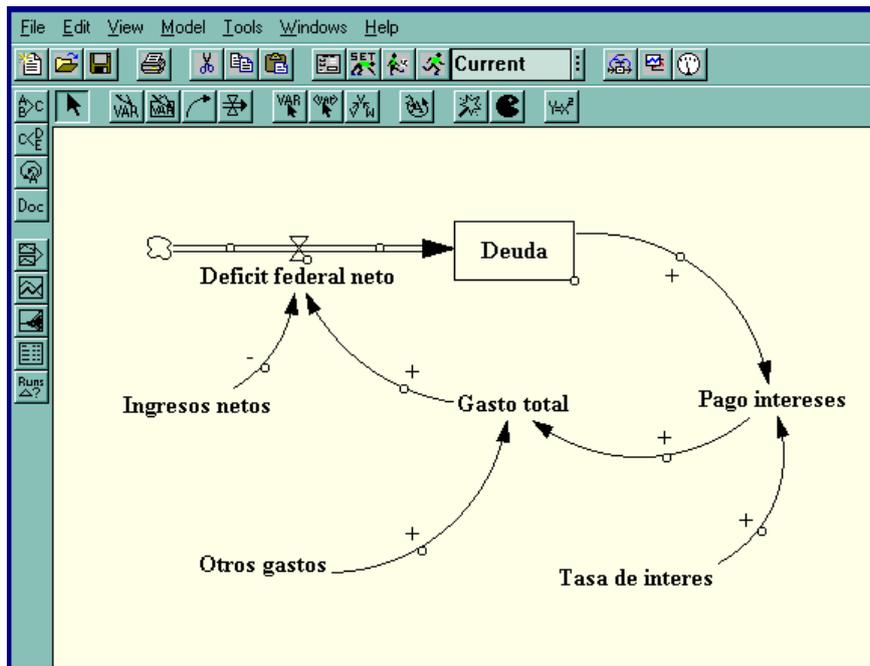


Figura 6.9: Construcción diagrama de Forrester final.

Ahora, deseamos simbolizar en el diagrama la manera como afectan las variables auxiliares al flujo que hemos construido. Un incremento de los **Ingresos netos** hace disminuir la **Deuda**, mientras que un incremento del **Gasto total** ocasiona un aumento del **déficit**. Seleccionamos el primer botón de la barra de las herramientas (el que tiene dibujada una flecha), elegimos el círculo de la flecha que deseamos etiquetar con (+) o (-). Ahora, pulsamos con el ratón la tecla  $+-S0$  que está situada en la barra inferior del escritorio (segunda por la derecha) y aparecerá un menú del que elegimos el valor que nos interese. Repitiendo los pasos anteriores debemos completar el modelo hasta que tenga el aspecto de la Figura 6.9.

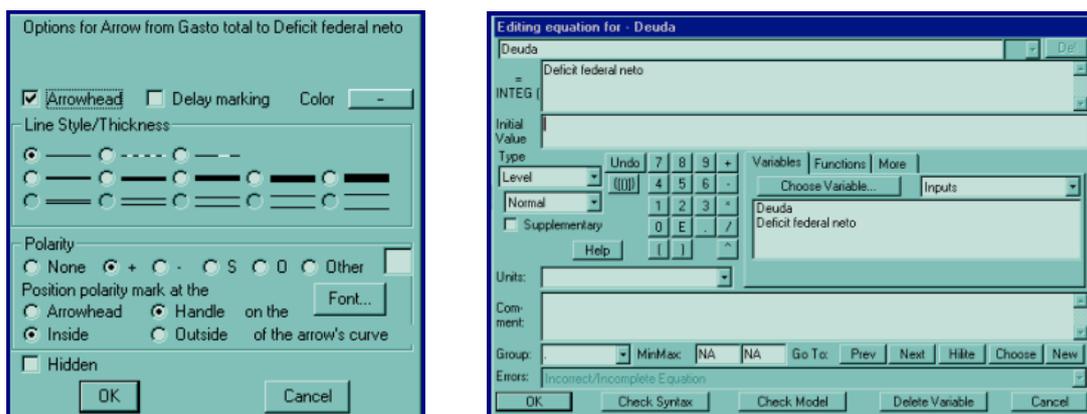


Figura 6.10: Ventanas emergentes para introducir las ecuaciones.

Finalmente, si deseamos etiquetar de forma positiva el ciclo de retroalimentación que hemos creado, procedemos de la siguiente manera: Elegimos el noveno de los botones de la barra de herramientas del escritorio y pulsamos en el centro del ciclo de

retroalimentación. Después de pulsar en el centro del ciclo, nos aparecerá el cuadro de diálogo situado a la izquierda de la Figura 6.10.

### Especificación de las ecuaciones

Una vez que hemos construido nuestro modelo, necesitamos escribir las ecuaciones para cada una de las variables. La formulación de las ecuaciones es un paso fundamental en el proceso de construcción de un modelo dinámico.

Para comenzar a escribir las ecuaciones, pulsamos el último de los botones ( $y = x^2$ ) de la barra de herramientas del escritorio. Entonces se iluminarán las variables de nuestro diagrama en el escritorio. Una variable iluminada nos indica que la ecuación para esa variable está incompleta. Las variables se clasifican en exógenas o endógenas. Las variables exógenas son aquellas que no forman parte del ciclo de retroalimentación. La **Deuda** de nuestro modelo tiene tres variables exógenas (**Ingresos netos**, **Otros gastos**, **Tasa de interés**) y cuatro variables endógenas.

Comenzamos escribiendo las ecuaciones para las variables exógenas. Pulsamos en la variable iluminada **Ingresos netos**. Entonces veremos el cuadro de diálogo que aparece a la derecha de la Figura 6.10.

Una buena práctica en la construcción de modelos requiere que cada ecuación en un modelo tenga tres elementos: la ecuación, la unidad de medida y un comentario completo. Para escribir una ecuación para los **Ingresos netos** asumimos que éstos son constantes, y necesitamos introducir el número apropiado. En 1988 los **Ingresos netos** fueron aproximadamente de  $9 \times 10^{12}$  dólares anuales. Ahora, necesitamos rellenar las unidades. Los ingresos son una variable del flujo, por lo tanto una unidad apropiada para esta ecuación es dólares/year. Finalmente, necesitamos dar una descripción de esta ecuación. Podemos por ejemplo escribir el siguiente texto: *Hemos asumido como constante el Ingreso neto, con un valor de 9 billones de dólares anuales, basado en el valor actual de 1988.*

Cuando pulsamos OK volvemos al escritorio y aparecerán iluminadas todas las variables del diagrama excepto aquellas que hemos completado sus ecuaciones (**Ingresos netos**). A continuación proseguimos con el proceso de escribir las ecuaciones para el resto de las variables exógenas. Para ello utilizaremos la siguiente información:

- *Los gastos, excluidos los intereses de la deuda, fueron aproximadamente de 900 billones de dólares en 1988.*
- *El porcentaje de interés de la deuda nacional en 1988 fue alrededor del 7% anual.*

Ahora nos debemos centrar en las variables endógenas. Escribir las ecuaciones para los niveles y los flujos es ligeramente diferente. Empezamos por el nivel **Deuda**, para ello pulsamos de la barra de herramientas del escritorio el botón de las ecuaciones ( $y = x^2$ ) y posteriormente pulsamos dentro del nivel **Deuda**. Nos aparecerá la siguiente ventana de diálogo.

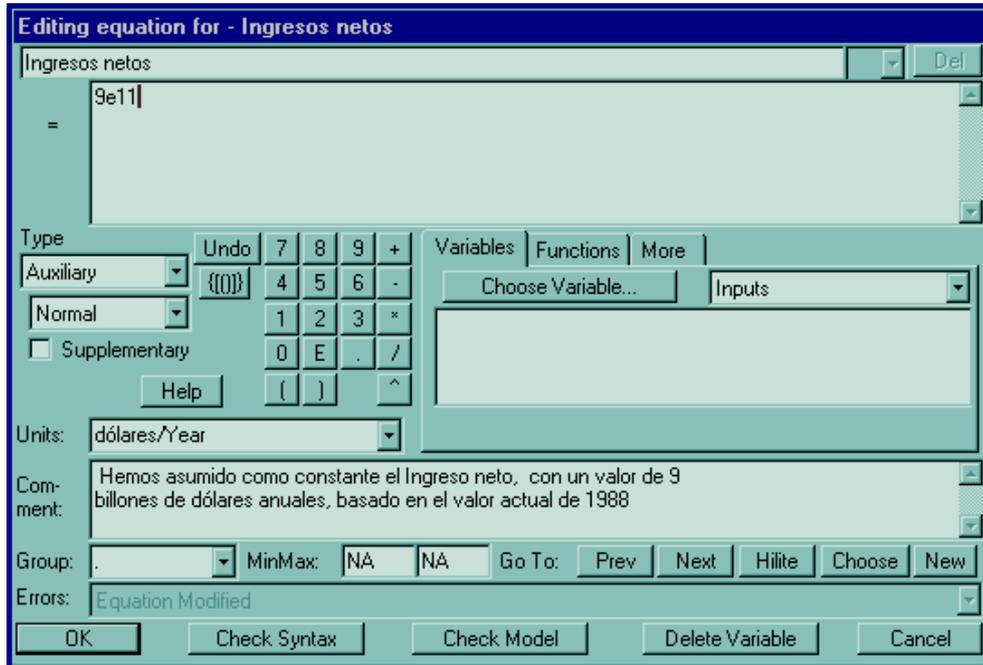


Figura 6.11: Introducción de comentarios.

Al contrario que los flujos y las constantes, los niveles requieren especificar un elemento adicional en su formulación. Después de escribir la ecuación, en primer lugar necesitamos un valor inicial. Escribimos la ecuación para el nivel en la caja correspondiente a la palabra *Integ*, que son las iniciales de *Integrate*. Significa que el nivel en cualquier momento en el tiempo es igual a la suma de todos los flujos de entrada, menos los flujos de salida, más el valor inicial.

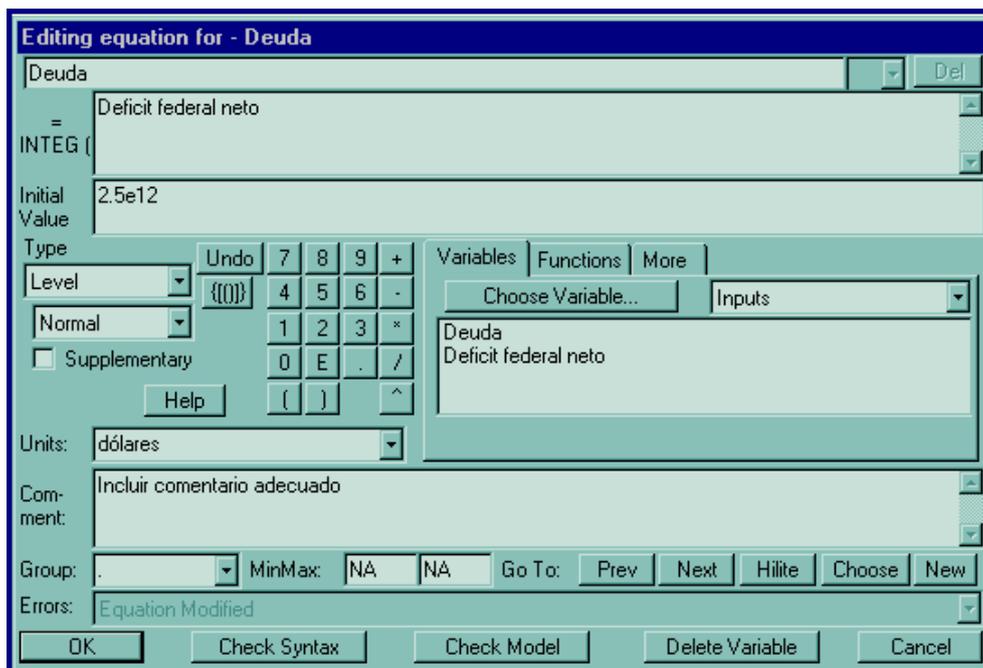


Figura 6.12: Introducción de comentarios.

Cuando creamos el diagrama con el nivel, los flujos, y la retroalimentación, habíamos conectado el **déficit federal neto** al nivel **Deuda**. El programa captura esta dependencia entre el flujo y el nivel, proporcionando una lista de las variables que se requieren y aparecen a la derecha de la caja de diálogo de la ecuación. (La variable que estamos formulando **Deuda**, también aparece por sí misma en la caja de las variables, pero nosotros solo necesitamos la entrada correspondiente al **Déficit federal neto**.) Debajo de la caja **Integ** está la correspondiente al valor inicial. En este lugar colocamos nuestro punto de partida para el correspondiente nivel. En 1988 la deuda federal era aproximadamente  $2.5e12$  de dólares. Escribimos por tanto  $2.5e12$ , con lo cual completamos todas las especificaciones para la Deuda. Es decir, la Deuda es simplemente la acumulación del déficit federal neto desde 1988 añadida al valor inicial.

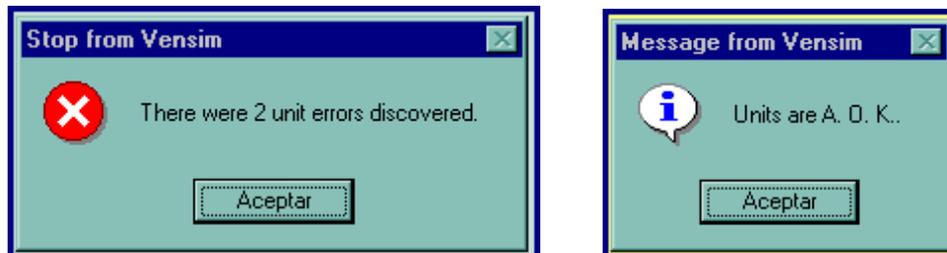
A continuación necesitamos especificar las ecuaciones para las variables auxiliares y el flujo. Usando la herramienta de las ecuaciones ( $y = x^2$ ), y pulsando sobre el **Pago de intereses**, nos aparecerá la ventana de diálogo correspondiente a esta variable. Esta caja es idéntica a la anterior, y nos aparecen dos variables en su correspondiente caja. Estamos obligados a usar estas dos variables en nuestra ecuación. Cuando dibujamos el diagrama del modelo, habíamos conectado con flechas la variable **Deuda** y la constante **Tasa de interés** a la variable **Pago de intereses**. Si intentamos escribir la ecuación sin hacer uso de estas dos variables, **Vensim PLE**<sup>®</sup> nos dará un mensaje de error.

La cantidad de interés pagado es igual a la deuda actual que tenemos en el nivel multiplicada por la tasa de interés. Para introducir esta ecuación, pulsamos la variable **Deuda** de la caja de las variables, a continuación introducimos el signo  $*$  de multiplicar y a continuación volvemos a pulsar **Tasa de interés** de la caja de las variables. Para completar la ecuación, necesitamos especificar las unidades, *Dólares/year*, e introducir un comentario adecuado para esta variable. Seguimos un proceso similar para completar el modelo.

### Usando las herramientas de análisis de la estructura del modelo

El programa tiene cinco herramientas para analizar y entender la estructura de nuestro modelo, pero la más interesante es la herramienta de revisar (**unit-checking**). Lo más importante en las ecuaciones de cualquier sistema dinámico es su consistencia dimensional, que es tanto como decir que las unidades de medida deben ser las mismas a la izquierda y a la derecha de una ecuación. Por ejemplo, supongamos que hemos elegido como unidades en la **Deuda** los *dólares* y en la **Tasa de interés** *dólares/year*. Si pulsamos en **Units Check** nos aparecerá el siguiente mensaje de la Figura 6.13 (izquierda), el problema es que, en este ejemplo, la ecuación **Pago de intereses** no está consistentemente dimensionada: el lado izquierdo y el derecho de la ecuación tienen unidades diferentes. Los **Intereses pagados** están medidos en *dólares/year*. La **Deuda**, al ser un nivel, está medida en *dólares*. Si multiplicamos **Deuda** por algo con unidades en *dólares/year* el resultado estará medido en

$dólares^2/year$  y aquí aparece el error. La unidad apropiada para la **Tasa de interés** es  $1/year$ . Si la introducimos en el lugar apropiado y pulsamos **Units Check** nos aparecerá el mensaje de la Figura 6.13 (derecha).

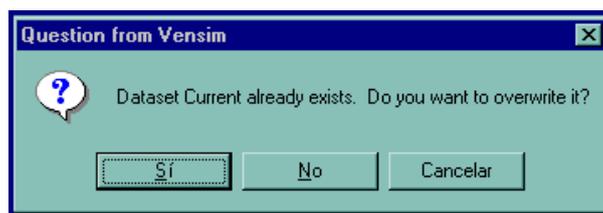


**Figura 6.13:** Ventanas de análisis del modelo.

### Simulando el modelo

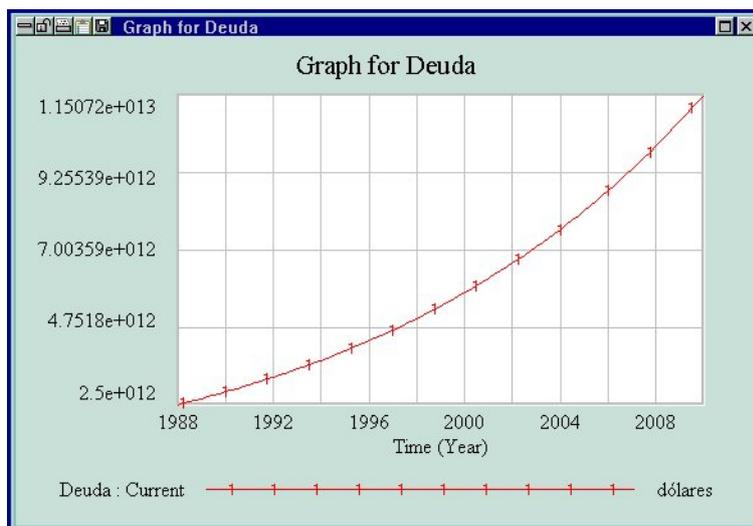
El programa que estamos utilizando también tiene herramientas para analizar el comportamiento de nuestro modelo. Para ejecutar una simulación debemos pulsar el icono del hombre corriendo en la barra de herramientas superior, Vensim PLE® nos mostrará la ventana de diálogo de la Figura 6.14

Si deseamos crear otra base de datos, pulsamos **No**, en caso contrario si queremos sobrescribir pulsamos **Sí**, y empezará la simulación de nuestro modelo. Si hemos pulsado **No** debemos guardar los datos con un nombre (por ejemplo *simula1*), y a continuación pulsamos **Save**.



**Figura 6.14:** Ventana de diálogo.

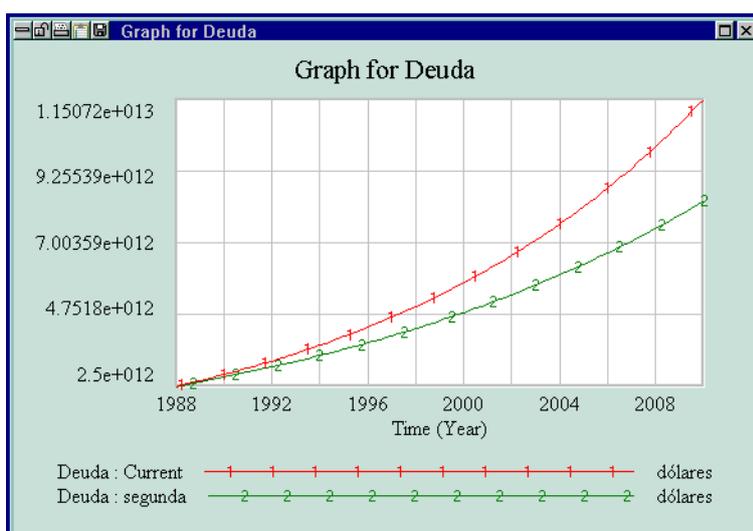
Una vez que la simulación se ha completado, podemos mirar los resultados. Tenemos muchas opciones diferentes, pero la más útil es la herramienta gráfica. Para crear un gráfico de la **Deuda** debemos seleccionarla en primer lugar. Para visualizar el gráfico, pulsamos el sexto de los botones en la barra de herramientas vertical (barra de herramienta de análisis). Para el año 2010, bajo los supuestos realizados, la deuda federal será de más de 10 trillones de dólares, cuatro veces la deuda de 1988.



**Figura 6.15:** Resultado gráfico para la variable **Deuda**.

El programa tiene otras maneras diferentes de presentar el resultado de la simulación. Pulsando el quinto de los botones de la barra de herramientas de análisis, nos aparecerá un gráfico de la variable seleccionada, con todas las variables que la determinan. También podemos presentar las salidas en forma de tablas, eligiendo el penúltimo de los botones de la barra de herramientas de análisis.

Una vez que hemos realizado una simulación, podemos ejecutar diferentes simulaciones modificando por ejemplo la tasa de interés anual. Supongamos que ésta fuera un 5.5 % en lugar de un 7 %. Para ello pulsamos el botón correspondiente a las ecuaciones ( $y = x^2$ ) y cambiamos el valor en la variable adecuada. Volvemos a realizar la simulación y obtenemos el siguiente resultado (Figura 6.16).



**Figura 6.16:** Resultado gráfico para distintas simulaciones.





## PRÁCTICA 7

---

# SIMULACIÓN DE MODELOS CON VENSIM PLE

---

### 7.1. Objetivo

En esta práctica construiremos, simularemos y analizaremos diversos modelos dinámicos elementales, a través del programa *Vensim PLE*<sup>®</sup>, que nos permitirán entender mejor los modelos objetos del presente trabajo. Esta práctica está extraída de los Trabajo Fin de Grado de las alumnas *Mengyu Xu*<sup>1</sup>, y *Runjie Wu*<sup>2</sup>, y han sido tutorizados por el profesor *Juan Navas Ureña*.

### 7.2. Modelo lineal

El primer modelo que estudiaremos es el que tiene por hipótesis de partida la más elemental, y es la de admitir que la tasa de crecimiento de una determinada función es constante.

Para ello, supongamos la siguiente situación relacionada con el control de inventarios de un almacén.

**EJERCICIO 8** Una empresa dispone inicialmente de 100 unidades. Además, cada día se producen 15 unidades y se gestionan 10 pedidos. Deseamos saber cómo evolucionará el inventario a lo largo del tiempo.

Si llamamos  $y(t)$  al inventario en el día  $t$ , entonces es evidente que el PVI:

$$y'(t) = 15 - 10 \quad ; \quad y(0) = 100$$

<sup>1</sup>Modelos de gestión de existencias de una empresa a través de Dinámica de Sistemas

<sup>2</sup>El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la economía

modeliza a la situación planteada. Su solución es trivial y vale  $y(t) = 5t + 100$ , es decir la evolución, a lo largo del tiempo, del inventario es una recta y por ello recibe el nombre de modelo lineal.

Para analizar el modelo con Vensim PLE<sup>®</sup> procedemos como sigue. En primer lugar hacemos clic en el botón para crear un nuevo modelo y nos mostrará el cuadro de la figura 7.1 correspondiente al horizonte temporal con datos que tenemos que completar, como son el tiempo inicial y final de la simulación, el método de aproximación numérica utilizado, el tiempo de paso, así como la unidad para el tiempo.

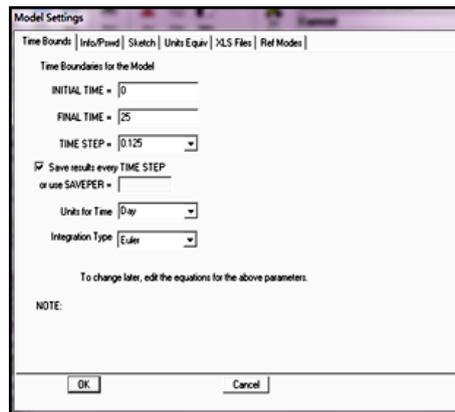


Figura 7.1: Horizonte temporal modelo lineal.

Abordamos ahora la construcción del diagrama de *Forrester* del modelo (Figura 7.2) constituido por el nivel Inventario, el flujo de entrada Producción y el flujo de salida Pedidos.

Es el momento, una vez grabado el modelo con la extensión mdl, de introducir las ecuaciones. Para ello, pulsamos sobre el botón donde aparece el icono de  $f(x)$  y se iluminaran cada una de las variables. Seleccionamos una de ellas, por ejemplo Inventario y el programa nos mostrará la ventana de la figura 7.3, que se corresponde con su editor de ecuaciones.

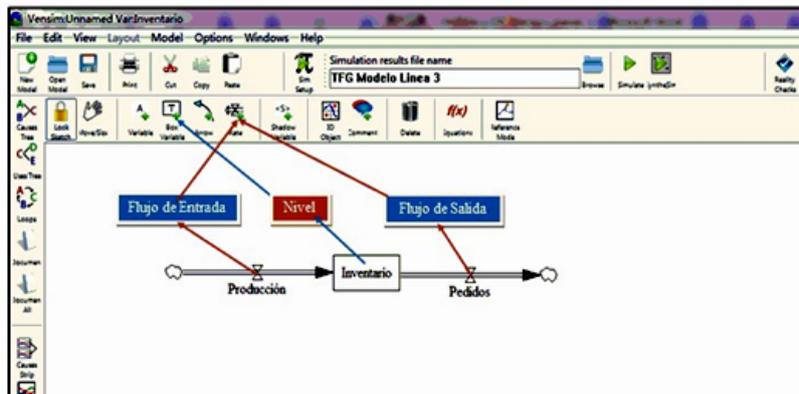


Figura 7.2: Editor de ecuaciones para la variable de nivel.

De manera similar introducimos el resto de las ecuaciones:

- Inventario = Produccion - Pedidos
  - Valor inicial =100 unidades
- Pedidos = 10 unidades/dia
- Produccion = 15 unidades/dia

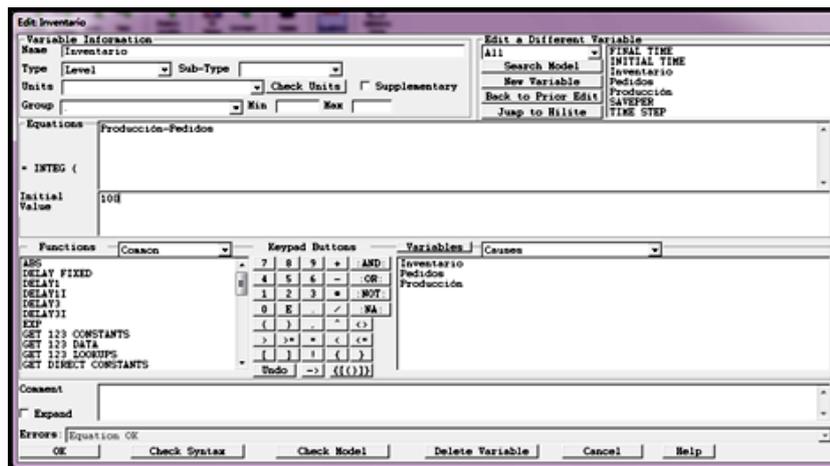


Figura 7.3: Editor de ecuaciones para la variable de nivel.

El paso siguiente será guardar el archivo de datos correspondiente a la simulación y posteriormente pulsar el botón, que se muestra en la figura 7.4, para realizar la simulación.



Figura 7.4: Simulación del modelo lineal.

El resultado obtenido puede verse en forma de tabla (horizontal o vertical), pulsando en el icono **Table** que aparece en la barra de herramientas vertical de la izquierda del escritorio, o bien en forma de gráfico pulsando sobre el icono **Graph**. A la izquierda del dibujo de la figura 7.5 se puede ver la tabla con el resultado de la simulación, y a su derecha su representación gráfica, que se corresponde con la recta de ecuación  $y = 100 + 5t$ .

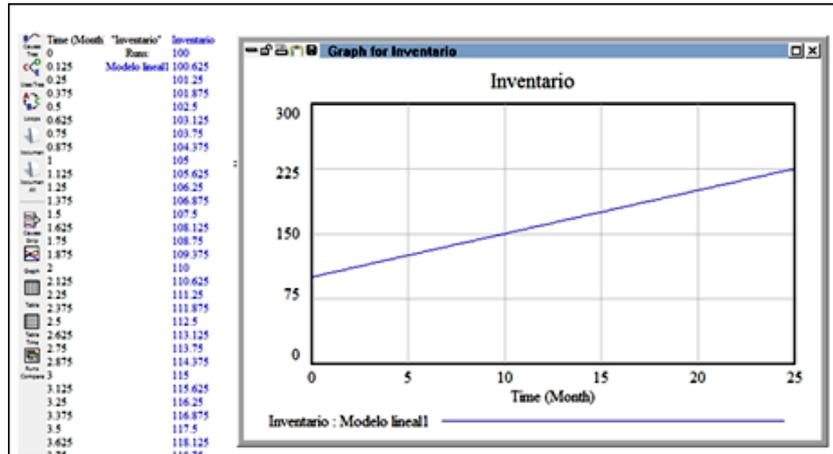


Figura 7.5: Resultado de la simulación.

Si se han realizado varias simulaciones distintas del mismo modelo, cambiando, por ejemplo, los valores de las variables, entonces pueden compararse los resultados obtenidos, tal como se muestra la gráfica de la derecha de la figura 7.6. Además, se pueden manipular los tres archivos de salida accediendo al panel de control pulsando en el botón y seleccionando la pestaña Datasets

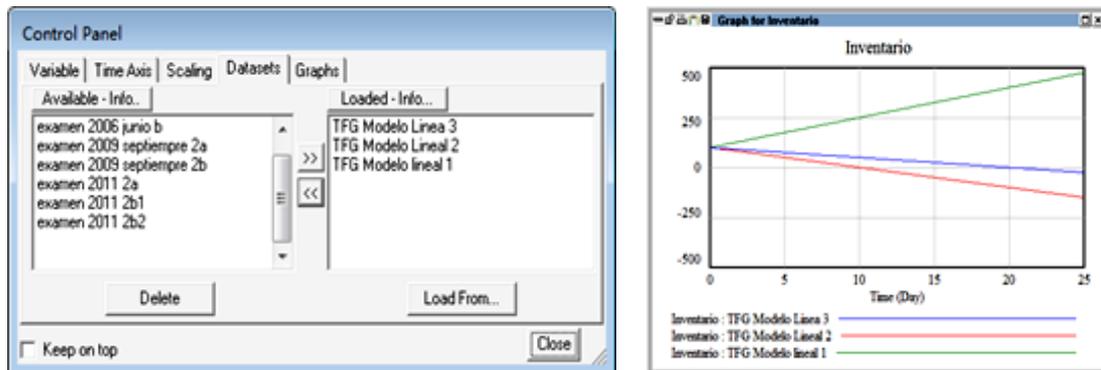


Figura 7.6: Panel de control.

### 7.3. Modelo exponencial

Podemos darnos cuenta de que las hipótesis del modelo lineal son poco realistas, la producción no será siempre constante, es mucho más coherente suponer que esta producción depende de la cantidad de unidades disponibles en cada momento. Supongamos ahora que la producción es directamente proporcional a la cantidad de unidades disponibles. Ahora el modelo vendrá dado por el siguiente PVI:

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad ; \quad y(0) = y_0$$

cuya solución es inmediata  $y(t) = y_0 e^{\alpha t}$ ; que se conoce con el nombre de modelo exponencial. Una ligera variación de este modelo es suponer además que al mismo

tiempo de incrementarse el inventario con la producción, se reduce debido a los pedidos tramitados. Sea  $m$  el número de unidades por unidad de tiempo de pedidos facturados. Entonces el modelo vendrá dado por

$$y'(t) = \alpha y(t) - m \quad ; \quad y(0) = y_0$$

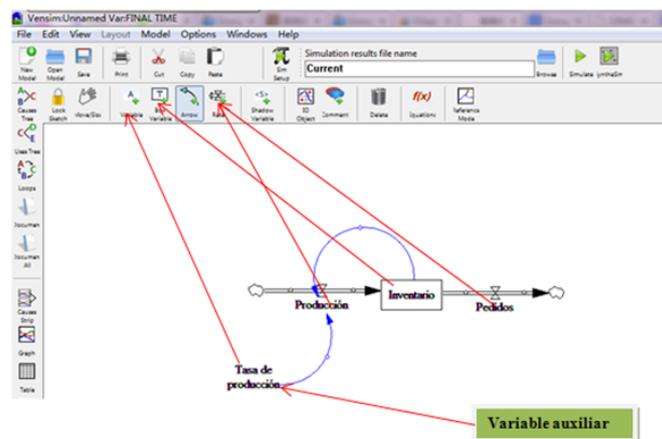
Esta ecuación diferencial puede ser resuelta haciendo uso del método de variables separadas. Es fácil demostrar que la solución es:

$$y(t) = \frac{m + (\alpha y_0 - m)e^{\alpha t}}{\alpha}$$

Este problema puede ser estudiado desde el punto de vista de la Dinámica de Sistemas.

**EJERCICIO 9** Supongamos que la empresa tiene inventariado inicialmente 100 unidades, que el número de pedidos sea de 10 unidades al día, y que la producción sea directamente proporcional al inventario, siendo la constante de proporcionalidad del 15% (tasa de producción).

Modificamos el Diagrama de *Forrester* de modelo lineal (figura 7.1) para adaptarlo a esta nueva situación.

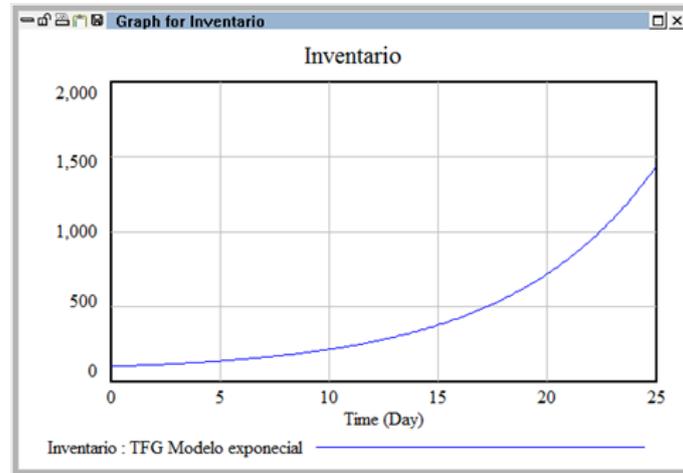


**Figura 7.7:** Diagrama de *Forrester* del modelo exponencial.

Introducimos como variable auxiliar Tasa de producción y con el botón **arrow** conectamos la tasa de producción con el flujo de entrada Producción y la variable de nivel Inventario con ese mismo flujo de entrada. Observemos que hemos generado un ciclo de realimentación. Posteriormente debemos introducir las ecuaciones para cada una de las variables del modelo, teniendo en cuenta que:

$$\text{Produccion} = \text{Tasa de produccion} * \text{Inventario}$$

Si ejecutamos la simulación con los datos anteriores, se obtiene como resultado la gráfica de la figura 7.8; es decir, la cantidad de unidades depositadas en la fábrica crecerá de una manera exponencial.

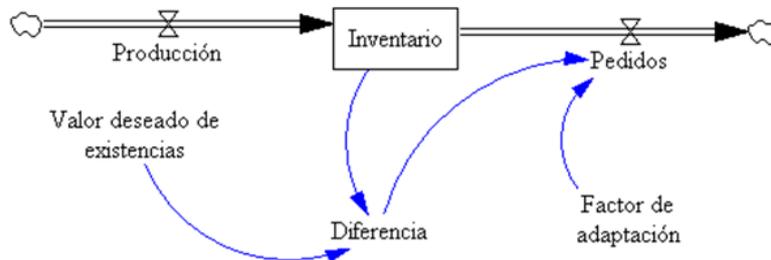


**Figura 7.8:** Resultado simulación modelo exponencial.

Es evidente que el inventario no puede crecer, a largo plazo, al infinito y por ese motivo es necesario introducir algunas modificaciones en el modelo que pongan límite al crecimiento. Existen modelos elementales cuyo crecimiento dependen de la densidad, como veremos en modelos próximos, pero se puede obtener un resultado similar mediante la introducción en el Diagrama de *Forrester* de un bucle de realimentación negativa. Recordemos que los bucles positivos tienden a aumentar el valor de las variables mientras que los negativos estabilizan el sistema.

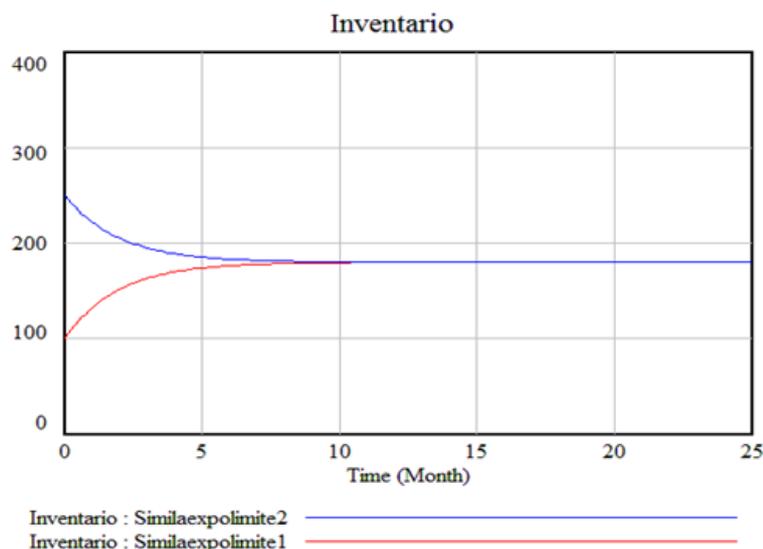
En el diagrama de la figura 7.9 se han introducido las variables auxiliares:

- Valor deseado de existencias = 150
- Factor de adaptación = 0.5
- Diferencia = Inventario - Valor deseado de existencias



**Figura 7.9:** Diagrama de *Forrester* del modelo exponencial modificado.

Si simulamos el modelo con los valores iniciales  $y(0) = 100$ ;  $y(0) = 250$  se puede ver en la Figura 7.10 que el modelo tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en  $y^* = 180$ .



**Figura 7.10:** Simulaciones del modelo para  $y(0) = 100; y(0) = 250$ .

El problema de valores iniciales que se encuentra detrás del modelo es

$$y'(t) = 15 - 0.5(y(t) - 150) \quad ; \quad y(0) = 100,$$

cuya ecuación diferencial es de variables separadas. Es fácil encontrar su solución,  $y(t) = 180 - 80e^{-0.2t}$ , y comprobar que en efecto, cuando el tiempo  $t$  tiende a infinito, la función  $y(t)$  tiende al valor del punto de equilibrio 180; y esto es cierto sea cual sea el valor inicial.

## 7.4. Modelo Logístico

Los modelos estudiados hasta ahora son aquellos que no dependen de la densidad, sin embargo esta hipótesis que en un primer momento puede ser cierta, deja de serlo a medida que pasa el tiempo. En efecto, supongamos que tenemos una empresa y deseamos vender nuestro producto, es evidente que al principio por la ausencia del producto en el mercado el crecimiento de las ventas será exponencial hasta que muchas personas ya dispongan del artículo y el ritmo de ventas disminuirá. Es decir, el crecimiento dependerá de la densidad, y el número de ventas no podrá superar al de personas existentes (que será su capacidad de carga).

Para poner de manifiesto esta situación es necesario introducir en la ecuación diferencial que define al modelo exponencial una función  $G(y(t))$  que refleje el hecho de que los individuos compiten entre sí por los recursos limitados,  $y'(t) = \alpha y(t)G(y(t))$ ,  $\alpha > 0$ ; lo cual hace que el nuevo modelo sea no lineal.

Las posibilidades de elección de la función  $G$  son infinitas y dependiendo de su elección se obtendrá un modelo u otro. Se ha observado, al analizar una campaña de ventas, que los datos obtenidos adoptan una típica función en  $S$ , y para poder

modelizar esta situación lo ideal es tomar la función lineal  $G(y) = 1 - y/K$ , donde  $K > 0$  es la capacidad de carga o valor de saturación del modelo.

En consecuencia, el modelo adopta la forma:

$$y'(t) = \alpha y \left(1 - \frac{y}{K}\right) = \alpha y - \frac{\alpha}{K} y^2 \quad ; \quad y(0) = y_0$$

los parámetros  $\alpha$  y  $\alpha/K$  reciben el nombre de coeficientes vitales de la población y fueron introducidos por el biólogo-matemático *Verhust* en 1837 al analizar los censos de estados Unidos entre los años 1790 y 1840.

La constante  $\alpha/K$  suele ser mucho menor que la  $\alpha$ , de tal manera que cuando la función  $y(t)$  es pequeña, entonces el término  $(\alpha/K)y^2$ , es muy pequeño comparado con  $\alpha y$ , y por tanto la función  $y(t)$  crecerá de forma exponencial. Al aumentar el valor de la función  $y(t)$ , el término negativo de la ecuación diferencial debe tenerse en cuenta puesto que disminuye la tasa de crecimiento de la función  $y(t)$ .

La ecuación diferencial del modelo es de variables separadas y puede ser resuelta, siendo su solución:

$$y(t) = \frac{K}{1 + A e^{-\alpha t}} \quad ; \quad A > 0$$

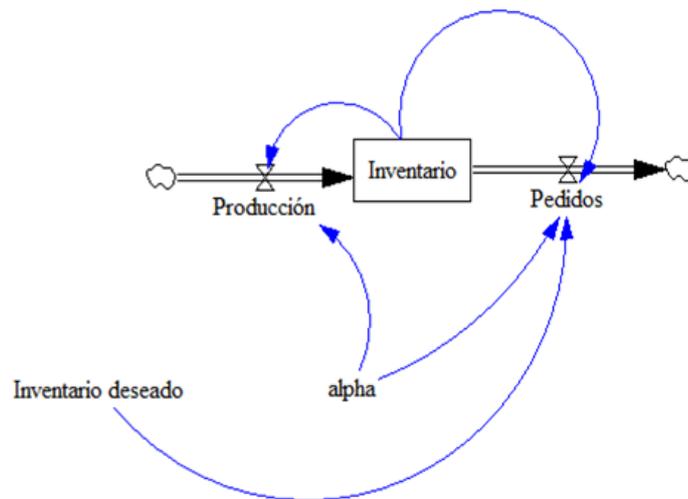
que cumple con el requisito de tender hacia la capacidad de carga  $K$  cuando el tiempo  $t$  tiende a infinito.

A continuación vamos a simular este modelo haciendo uso de la Dinámica de Sistemas.

**EJERCICIO 10** Consideremos el mismo modelo de inventario introducido en el modelo exponencial, pero con la limitación de que la empresa quiere mantener el inventario en un determinado nivel  $K$  con objeto de controlar los costes. Supongamos que este nivel es de  $k = 500$  unidades y que la tasa de crecimiento sea  $\alpha = 0.15$ . Entonces,

$$y'(t) = 0.15 y \left(1 - \frac{y}{500}\right) = 0.15 y - \frac{0.15}{500} y^2$$

El Diagrama de *Forrester* del modelo anterior (figura 7.11), consta de un nivel, dos flujos y dos variables auxiliares.

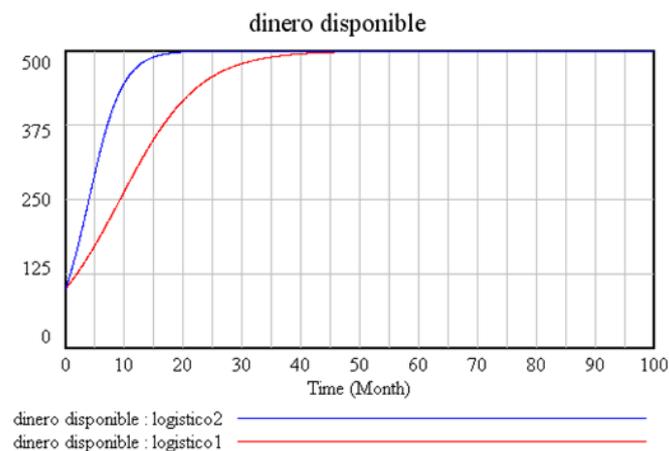


**Figura 7.11:** Diagrama de *Forrester* del modelo logístico.

Las ecuaciones del modelo son:

- `Inventario deseado = 500`
- `Alpha = 0.15`
- `Produccion = alpha*Inventario`
- `Pedidos = alpha*Inventario^2/Inventario deseado`
- `Inventario = INT(Produccion-Pedidos,100)`

La figura 7.12 muestra el resultado de la simulación entre los valores  $t = 0$ , y  $t = 100$ , utilizando el método de *Euler* y con un paso  $h = 0.125$ , con  $\alpha = 0.15$  (en rojo) y  $\alpha = 0.35$  (azul).



**Figura 7.12:** Resultados simulación modelo logístico.

Obtenemos la gráfica en forma de  $S$ , y puede apreciarse que el ritmo de crecimiento desciende hasta que se ha alcanzado el límite máximo, por lo tanto, podemos decir que el inventario tiende a estabilizar debido, entre otras cosas, al espacio disponible en el almacén. Es importante observar también en la gráfica 7.12, que cuando el valor del  $\alpha$  se incrementa, entonces la curva tiende más rápidamente a su capacidad de carga.

### 7.4.1. Estructura genérica

Un sistema que responde al modelo logístico, comienza con ciclo de retroalimentación positivo. Un gran incremento en este ciclo despierta a un dormido ciclo negativo. El ciclo negativo no aparece espontáneamente, está presente en cualquier momento, pero su tamaño depende de la fuerza de una variable que está en el ciclo positivo. Cuando el ciclo positivo comienza a incrementar todas las variables que aparecen involucradas en él, el ciclo negativo se ve también amplificado hasta que cambia la dominación y el ciclo negativo se hace dueño de la situación.

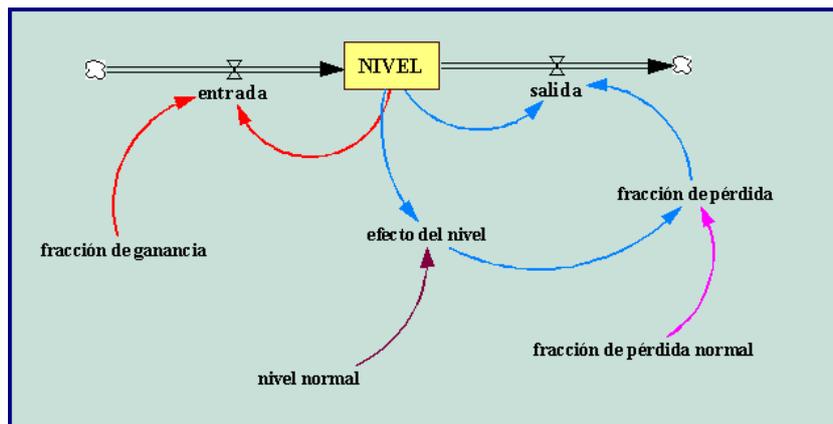


Figura 7.13: Diagrama de Forrester de la estructura genérica.

Supongamos una población de conejos situados en un medioambiente con recursos limitados. La variable crítica es el número de conejos que comen por el prado. La población de conejos aumenta debido a la tasa de nacimientos. Esta tasa de nacimientos refuerza el ciclo de retroalimentación positivo. Sin embargo, un ciclo de retroalimentación negativo está latente. Al aumentar el número de conejos y al ser fija la cantidad de agua, esto hace que el agua que corresponde a cada conejo disminuya. Cuando la cantidad de agua no es suficiente algunos conejos empiezan a morir. El ciclo negativo reduce la velocidad de crecimiento hasta que la cantidad de agua es suficiente para soportar a la población de conejos.

Los sistemas que siguen un comportamiento logístico están caracterizados por contenciones o límites del crecimiento. En el caso de los conejos, la contención es la cantidad fija de agua. Esta contención indica el número máximo de conejos que el sistema puede soportar. En el ejemplo de una epidemia, la contención podría ser la población total expuesta a la enfermedad.

Varios niveles y flujos producen un comportamiento del tipo logístico. La figura 7.13 representa a una estructura genérica que muestra de forma intuitiva ciclos de retroalimentación y la contención de un sistema.

El modelo está compuesto por tres ciclos de retroalimentación. El ciclo positivo está asociado con la entrada **NIVEL**. El flujo **entrada** es el producto del **NIVEL** y la variable constante **fracción de ganancia**, el cual lleva al sistema a un crecimiento del tipo exponencial.

Dos ciclos de retroalimentación regulan el flujo **salida** del **NIVEL**. Un conector enlaza el valor actual del **NIVEL** al flujo de **salida** y origina un ciclo negativo. El segundo de los ciclos negativos pasa a través de la variable **fracción de pérdida**, la cual es la responsable de que cambie la dominación del ciclo.

El **NIVEL** inicialmente crece solamente si la **fracción de ganancia** es más grande que la **fracción de pérdida**. Cuando la **fracción de ganancia** es más grande que la **fracción de pérdida**, el flujo de **entrada** es mayor que el flujo de **salida** y el sistema crece exponencialmente. El **NIVEL**, sin embargo, no puede crecer siempre. Cuando el **NIVEL** aumenta, hace que la variable **efecto del nivel** se multiplique. Esta variable determina el efecto del **NIVEL** en la variable **fracción de pérdida**. Cuando el **efecto del nivel** toma valores mayores de 1, la variable **fracción de pérdida** aumenta. Cuando **efecto del nivel** aumenta hasta que las variables **fracción de pérdida** y **fracción de ganancia** sean iguales, entonces el flujo de **salida** coincide con el flujo de **entrada** y cesa el crecimiento. El sistema se encuentra en equilibrio.

El tamaño del flujo positivo es constante. Por el contrario, el ciclo negativo va aumentando a medida que lo hace el **NIVEL**. El flujo de **salida** es el producto del **NIVEL** y la variable **fracción de pérdida**. Aquí está la clave para entender cual es el ciclo que domina: la **fracción de pérdida** aumenta cuando lo hace el **NIVEL**. Cuando éste es pequeño el ciclo de retroalimentación negativa es muy pequeño, pero cuando el nivel aumenta, el ciclo negativo se va haciendo cada vez mayor. Finalmente la retroalimentación negativa conduce al sistema al equilibrio.

¿Qué tipo de curva origina la variable efecto del nivel?. Esta curva está determinada por las características de la acción de la contención sobre el sistema. En nuestro diagrama la contención está modelada por el **nivel normal**, el cual determina cuanto puede crecer el **NIVEL**. Cuando el valor del **NIVEL** llega a ser más grande con respecto al **nivel normal**, la **fracción de pérdida** aumenta debido al aumento de la presión de la contención.

A continuación escribimos las ecuaciones del modelo.

- $NIVEL(t) = NIVEL(t - dt) + (entrada - salida) * dt$ 
  - Valor inicial = 10
  - Unidades = conejos

- ENTRADA:
- Entrada = fracción de ganancia \* NIVEL
- Unidades = conejos /time
- SALIDA:
- Salida = fracción de pérdida \* NIVEL
- Unidades = conejos /time.
- fracción de ganancia = una constante
  - Unidades: 1/time.
  - Comentario: *La fracción de ganancia debe ser mayor que la fracción de pérdida normal para que inicialmente el NIVEL crezca.*
- fracción de pérdida = fracción de pérdida normal \* efecto del nivel
  - Unidades: 1/time.
  - Comentario: *La fracción de pérdida es un múltiplo de la fracción de pérdida normal, la cual depende del tamaño relativo del NIVEL. La fracción de pérdida cuando aumenta determina cual de los ciclos es el que domina.*
- nivel normal = una constante
  - Unidades: conejos.
- fracción de pérdida normal = una constante
  - Unidad = 1/Time.
  - Comentario: *La fracción de pérdida normal debe ser menor que la fracción de ganancia para que inicialmente crezca el NIVEL. La fracción de pérdida normal representa la fracción de pérdida inicial. Si no actuaran contenciones sobre el sistema la fracción de pérdida sería igual a la fracción de pérdida normal.*
- Efecto del nivel = gráfico (NIVEL / nivel normal)
  - Por ejemplo = (0,1), (0.2,1.4), (0.4,1.80), (0.6, 2.20), (1,3), (1.2,3.40), (1.4,3.8), (1.6,4.2), (1.8,4.6), (2,5).
  - Unidades = dimensionless
  - Comentario: *La curva más simple que genera un crecimiento logístico, es una línea recta que aumenta linealmente. Cuando el nivel es 0, el factor de multiplicación es 1.*

**EJERCICIO 11** Modelo para estudiar el crecimiento de una población de conejos.

La figura 7.14, representa al diagrama causal para un modelo que analiza el crecimiento de una población de conejos en un medioambiente que cuenta con recursos limitados.

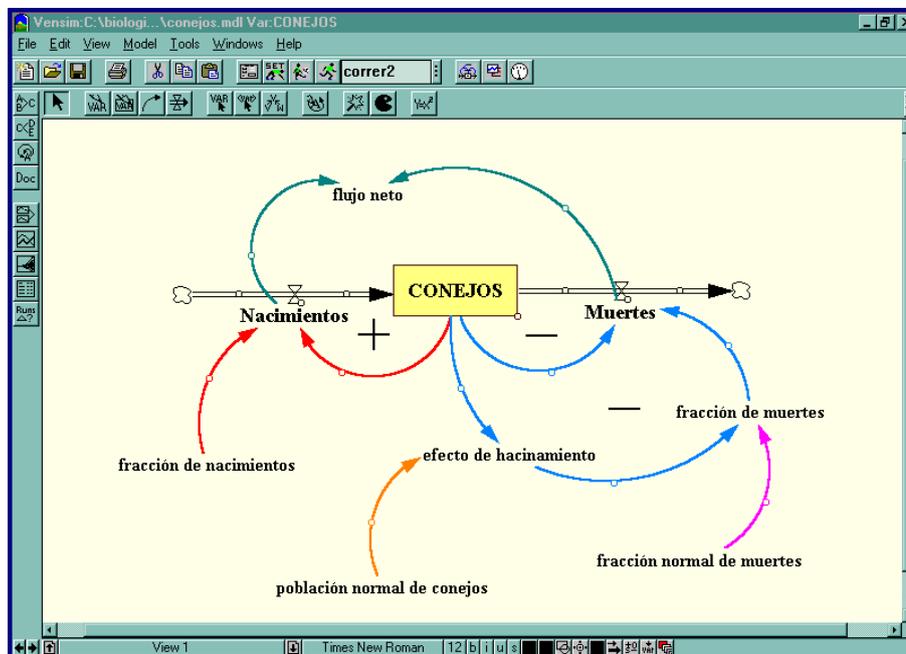


Figura 7.14: Diagrama de *Forrester* del modelo del ejercicio 4.

Las ecuaciones del modelo son las siguientes:

- $CONEJOS(t) = CONEJOS(t - dt) + (Nacimientos - Muertes) * dt$ 
  - Valor inicial = 10
  - Unidades = *conejos*
  - ENTRADA:
    - $Nacimientos = fracción\ de\ nacimientos * CONEJOS$
    - Unidades = *conejos /mes*
  - SALIDA:
    - $Muertes = fracción\ de\ muertes * CONEJOS$
    - Unidades = *conejos /mes*
- $fracción\ de\ nacimientos = 0.5$ 
  - Unidades: *1/mes*
  - Comentario: *La fracción de nacimientos es la velocidad con que los conejos pueden reproducirse.*
- $fracción\ de\ muertes = fracción\ normal\ de\ muertes * efecto\ de\ hacinamiento$ 
  - Unidades: *1/mes*

- Comentario: *La fracción de muertes es la velocidad actual con la que los conejos mueren.*
- Población normal de conejos = 500
  - Unidades: conejos.
  - Comentario: *La población normal de conejos representa a la capacidad de carga del sistema.*
- fracción normal de muertes =  $0.5/3$ 
  - Unidad =  $1/\text{mes}$
  - Comentario: *La fracción normal de muertes es la velocidad con la que cada conejo moriría si la fuente de alimentos fuese ilimitada. Es la tercera parte de la fracción de nacimientos.*
- efecto del hacinamiento = gráfico (CONEJOS / población normal de conejos)
  - Por ejemplo = (0,1), (0.2,1.1), (0.4,1.20), (0.6, 1.3), (0.8,2), (1,3), (1.2,4.2), (1.4,5.6), (1.6,7.8), (1.8,11.1), (2,15)
  - En nuestro ejemplo hemos utilizado la función:  
efecto de hacinamiento =  $\text{FUNCION}(\text{CONEJOS} / \text{población normal de conejos}) = 5 * \text{CONEJOS} / \text{población normal de conejos} - 3 * \text{CONEJOS} / \text{población normal de conejos} + 1$
  - Unidades = dimensionless
  - Comentario: *El hacinamiento no tiene efecto en la fracción de muertes cuando el número de conejos no alcanza la mitad de la capacidad de carga (aproximadamente). Cuando el número de conejos llega a ser el máximo de la población, el factor de multiplicación aumenta de 1 a 3.*

A continuación simulamos el modelo, y obtenemos para la población de conejos, la siguiente gráfica:

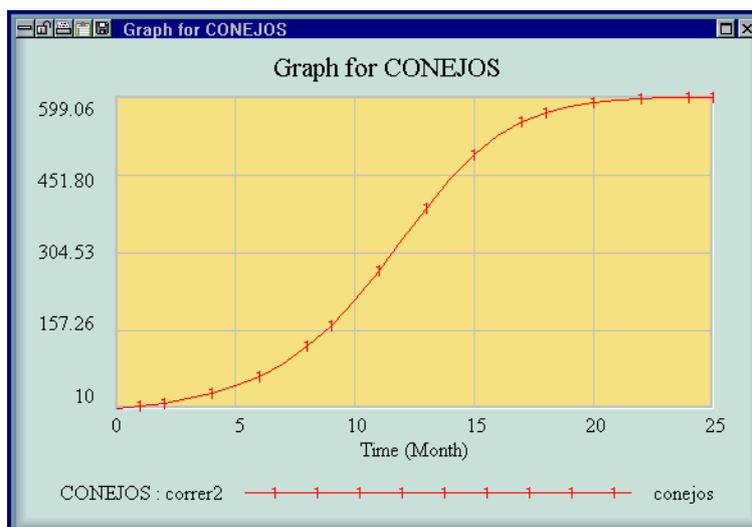


Figura 7.15: Simulación del modelo del ejercicio 4.

En la gráfica podemos observar un crecimiento del tipo exponencial en los primeros meses, como consecuencia del ciclo de retroalimentación positivo. Aproximadamente a los 12 meses, la curva cambia la concavidad. Los conejos están empezando a sentir la contención debido a un medio ambiente con recursos limitados. El crecimiento exponencial se convierte en un crecimiento asintótico.

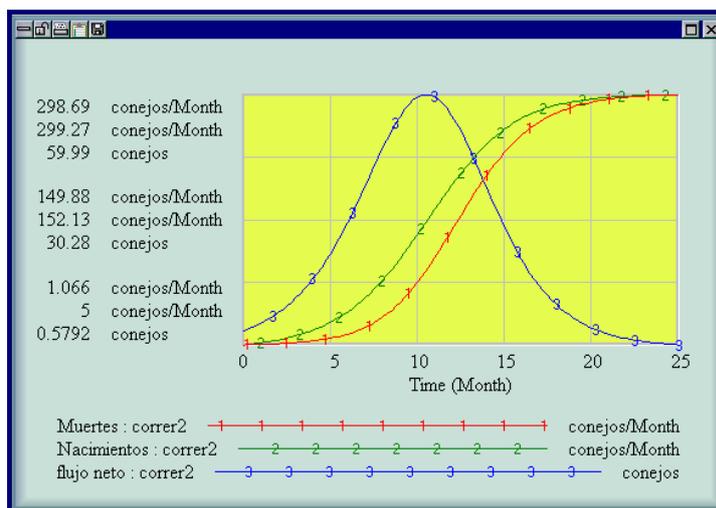


Figura 7.16 Flujos.

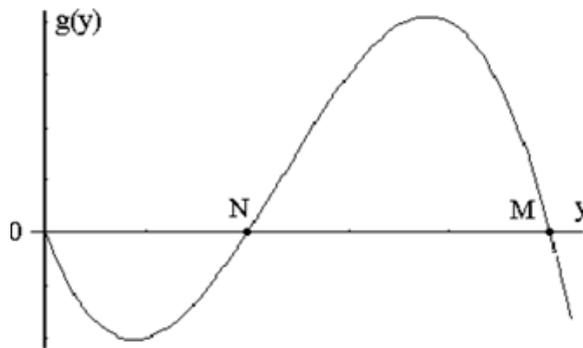
El punto de la curva en el cual cambia la concavidad es el punto de inflexión y está situado en aquel valor donde la población llega a ser la mitad de la capacidad de carga (300 conejos).

En el modelo podemos observar que también hemos creado una variable llamada **flujo neto** que es la diferencia entre los **Nacimientos** y las **Muertes**. Existen dos posibles puntos de equilibrio en todo modelo logístico. El primero de ellos corresponde al valor cero del tiempo. No habrán nacidos los conejos y ninguno habrá muerto. Los nacimientos y las muertes son cero, y el sistema está en equilibrio. Sin embargo, se necesitan solo dos conejos para que el equilibrio se rompa, pero 25 meses después el sistema volverá a estar de nuevo en equilibrio. La diferencia entre los nacimientos y las muertes es cero. El primer punto de equilibrio es inestable y el segundo es estable.

El comportamiento obtenido de la población de conejos nos sirve para ilustrar las características que determinan el crecimiento. Los cambios en el flujo neto del nivel hace cambiar la forma del crecimiento. Cuando el flujo neto tiene pendiente positiva (derivada) el ciclo de retroalimentación positivo es el que domina y entonces el crecimiento es del tipo exponencial. Cuando el ciclo que domina es el negativo, la pendiente a la curva del flujo neto es negativa y entonces el nivel tiene un crecimiento del tipo asintótico. El cambio de uno al otro ocurre cuando la pendiente del flujo neto es cero. Esto significa que el flujo neto alcanza el valor máximo. El nivel cesa de crecer cuando el flujo neto es cero.

### 7.4.2. Modelos Logísticos modificados

A pesar de las bondades del modelo logístico, existen situaciones donde si la función  $y(t)$  es grande entonces su ritmo de crecimiento disminuye y lo mismo si  $y(t)$  es demasiado pequeña. Supongamos que  $M$  sea la capacidad de carga del sistema y  $N$  la constante necesaria para tener en cuenta el nivel mínimo, en este caso, si  $y'(t) = g(y)$ , entonces la función  $g$  debería ser del tipo representada en la figura siguiente.



**Figura 7.17:** Forma de la función  $g(y)$ .

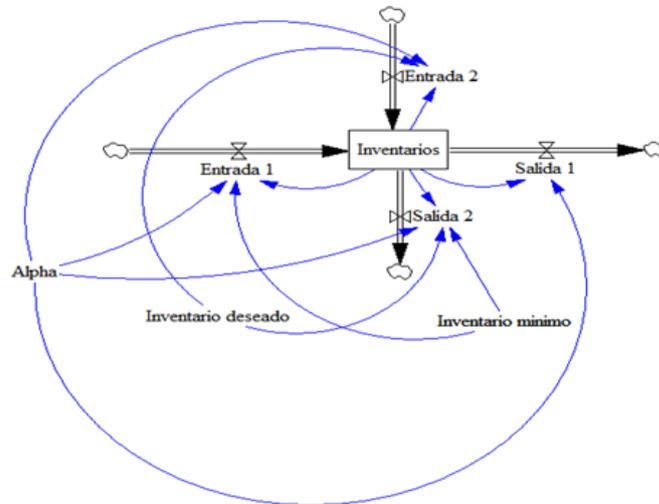
Esta función  $g(y)$  es negativa cuando  $y(t) > M$  o bien cuando  $0 < y(t) < N$ , y es positiva en el caso en que  $N < y(t) < M$ . Además  $g(0) = g(N) = g(M) = 0$ . Una de las posibilidades de elección viene dada por el siguiente modelo:

$$y'(t) = \alpha y \left(1 - \frac{y}{M}\right) \left(\frac{y}{N} - 1\right) \quad ; \quad M, N > 0 \quad ; \quad y(0) = y_0$$

que tiene por soluciones constantes (puntos de equilibrio)  $y(t) = 0$ ;  $y(t) = M$ ;  $y(t) = N$ .

**EJERCICIO 12** Simular el modelo logístico modificado con Vensim PLE<sup>®</sup>, para los valores:  $\alpha = 0.15$ ,  $N = 50$ ;  $M = 120$ ,  $y(0) = 100$ .

El Diagrama de *Forrester* del modelo (figura 7.18) consta de un nivel, dos flujos de entrada, dos flujos de salida, y tres variables auxiliares.

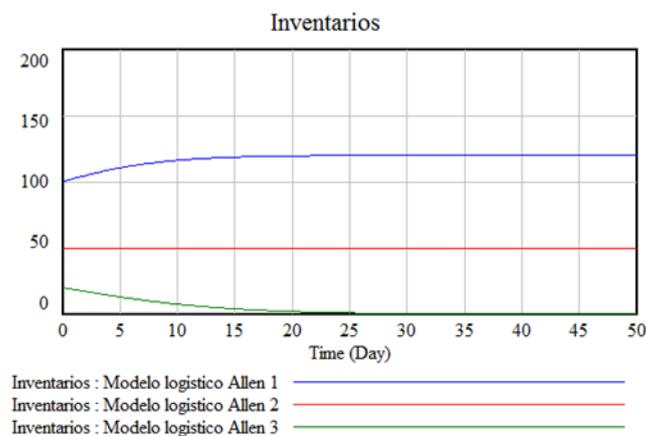


**Figura 7.18:** Diagrama de *Forrester* del modelo logístico modificado.

Las ecuaciones que debemos introducir en el modelo son:

- $\text{Alpha} = 0.15$ ;  $\text{Inventario deseado} = 120$ ;  $\text{Inventario mínimo} = 50$
- $\text{Entrada1} = \text{Alpha} \cdot \text{Inventarios}^2 / \text{Inventario mínimo}$
- $\text{Entrada2} = \text{Alpha} \cdot \text{Inventario}^2 / \text{Inventario deseado}$
- $\text{Salida 1} = \text{Alpha} \cdot \text{Inventario}$
- $\text{Salida 2} = \text{Alpha} \cdot \text{Inventario}^3 / (\text{Inventario deseado} \cdot \text{Inventario mínimo})$
- $\text{Inventarios} = \text{INT}(\text{Entrada 1} + \text{Entrada 2} - \text{Salida 1} - \text{Salida 2}, 100)$

En la figura 7.19 se encuentran los resultados de tres simulaciones para valores iniciales diferentes  $y(0) = 100; 50; 20$ , y es interesante destacar como ahora el comportamiento a largo plazo de la función  $y(t)$  dependerá del valor inicial.



**Figura 7.19:** Simulaciones del modelo logístico modificado.

Si este valor se encuentra por debajo del valor mínimo ( $N = 50$ ) entonces a largo plazo  $y(t)$  tiende a cero (curva en verde), mientras que si el valor inicial supera este valor mínimo (curva en azul) entonces  $y(t)$  tenderá siempre al valor deseado ( $M = 120$ ). Evidentemente si  $y(t)$  coincide con el valor mínimo (curva roja) entonces su gráfica será una recta, ya que la solución sería constante al tratarse de un punto de equilibrio.

Otra posible modificación del modelo logístico es la siguiente. En ocasiones la capacidad de carga  $K$  del modelo logístico no es constante, sino que debido a cuestiones de temporalidad cambia de forma periódica.

Por ejemplo  $K = b + c \text{sen}(wt)$ , donde  $b, c$ , y  $w$  son constantes positivas con  $b > c$ . Ahora la nueva ecuación diferencial:

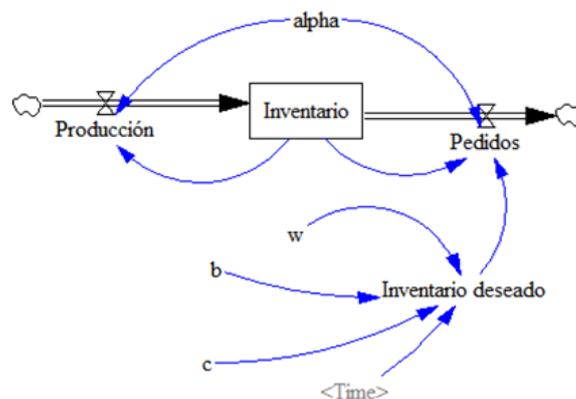
$$y'(t) = \alpha y \left( 1 - \frac{y}{K} \right) = \alpha y \left( 1 - \frac{y}{b + c \text{sen}(wt)} \right)$$

no es autónoma (el segundo miembro depende del tiempo) y es muy difícil de resolver de forma exacta, pero podemos abordar la resolución del problema a través de técnicas numéricas por medio de la Dinámica de Sistemas. En la figura 7.20 se presenta el diagrama de *Forrester* correspondiente al modelo:

**EJERCICIO 13** Simular el modelo logístico modificado:

$$y'(t) = 0.15 y \left( 1 - \frac{y}{70 + 15 \text{sen}(0.5t)} \right)$$

para los valores iniciales  $y(0) = 100$ ,  $y(0) = 25$ , con Vensim PLE®



**Figura 7.20:** Diagrama de *Forrester* del modelo logístico modificado II.

Una vez realizada la simulación (figura 7.21) se comprueba cómo una vez que una curva solución entra en la región  $60 < y(t) < 75$ , entonces queda atrapada ahí y empieza a oscilar.

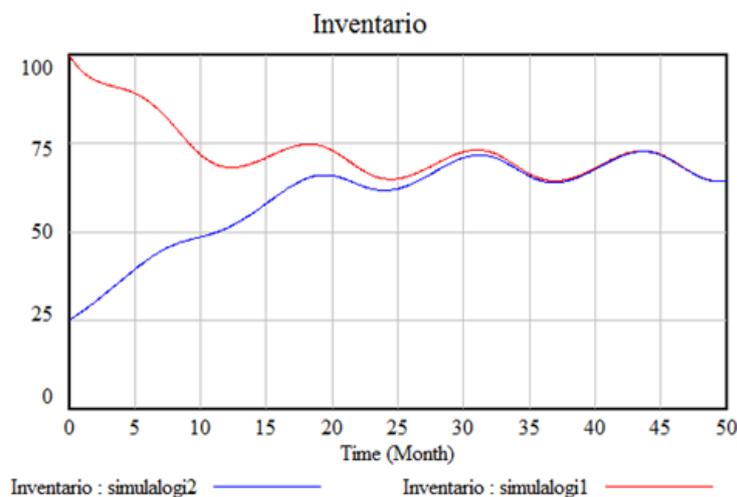


Figura 7.21: Simulación del modelo logístico modificado II.

## 7.5. Modelo de Gompertz

El modelo logístico, a pesar de su sencillez, es utilizado ampliamente puesto que se ha observado que los sistemas tienden a estabilizarse en su capacidad de carga, tal y como hemos comprobado en el apartado anterior. Sin embargo, la forma en  $S$  de la curva solución en ocasiones no se adapta fielmente a los datos históricos disponibles, puesto que el momento de mayor crecimiento de la función no coincide, exactamente, con aquél instante donde se obtiene la mitad de la capacidad de carga.

En 1825 el demógrafo *B. Gompertz* propuso una modificación del modelo logístico, suponiendo que la función  $g(y) = -\ln(y(t)/K)$ , con lo que ahora el modelo es de la forma,

$$y'(t) = -ay(t)\ln(y(t)/K) \quad ; \quad a > 0; \quad y(0) = y_0$$

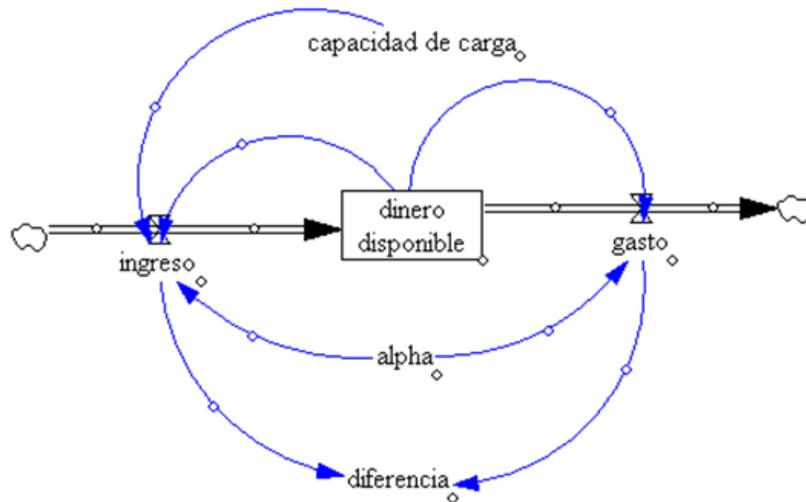
Observemos que los puntos de equilibrio se corresponden con las soluciones constantes, aquellas donde su derivada vale cero,  $y(t) = 0, y(t) = K$ . Además, si el valor inicial es tal que  $0 < y(0) < K$ , la derivada  $y'(t)$  será positiva, y por lo tanto la función solución  $y(t)$  será creciente, mientras que si  $y(0) > K$ , entonces usando el mismo argumento, la función solución es decreciente. El punto de equilibrio  $y(t) = 0$ , es localmente inestable y el  $y(t) = K$  será asintóticamente estable.

Para encontrar el punto de inflexión de la función  $y(t)$  bastaría resolver la ecuación  $y''(t) = 0$ . Es inmediato comprobar que el resultado obtenido es  $y(t) = K/e$ . Es decir, a diferencia del modelo logístico, la curva sigmoide (en forma de  $S$ ) obtenida no será simétrica.

Todos estos resultados, logrados matemáticamente, se pueden observar si utilizamos la Dinámica de Sistemas como metodología.

$$y'(t) = -ay(t)\ln(y(t)/K) = -ay \ln(y) + ay \ln(K) \quad ; \quad a > 0; \quad y(0) = y_0$$

En la figura 7.22 se encuentra el Diagrama de *Forrester* del modelo de *Gompertz*,

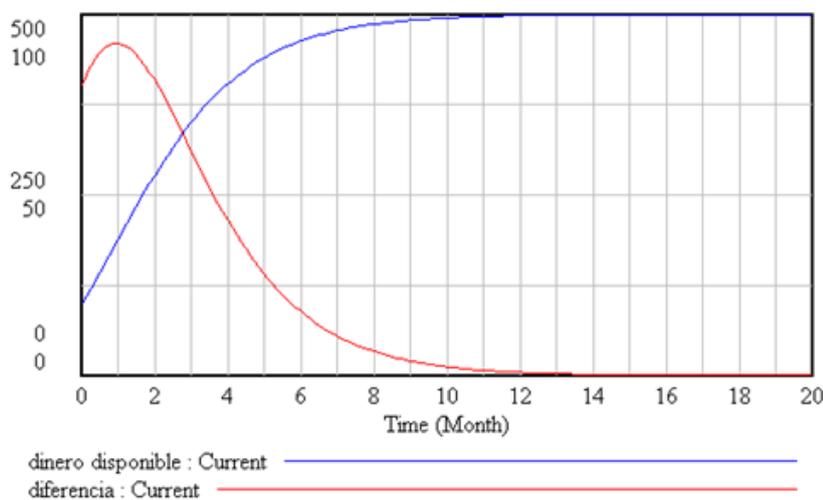


**Figura 7.22:** Diagrama de *Forrester* del modelo de *Gompertz*.

que es idéntico al modelo logístico, siendo sus ecuaciones:

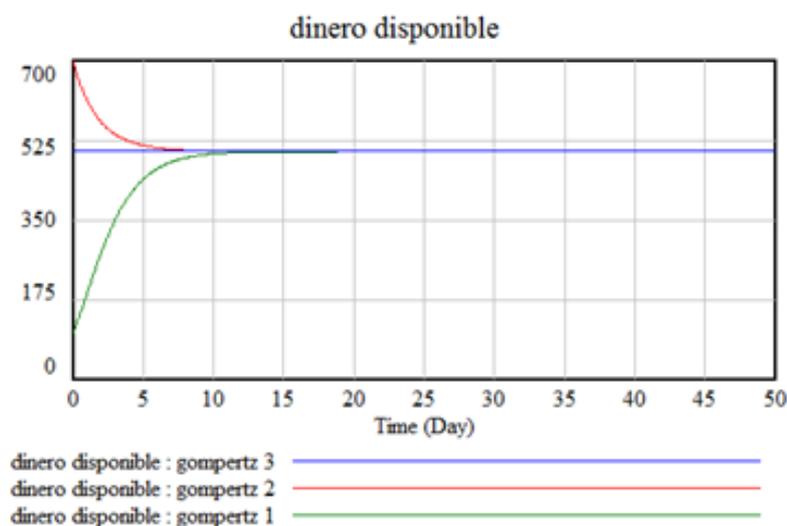
- $\text{ingreso} = \alpha \cdot \text{dinero disponible} \cdot \text{LN}(\text{capacidad de carga})$
- $\text{gasto} = \alpha \cdot \text{dinero disponible} \cdot \text{LN}(\text{dinero disponible})$
- valor inicial dinero disponible = 100
- capacidad de carga = 500
- $\alpha = 0.5$
- $\text{diferencia} = \text{ingreso} - \text{gasto}$

Si simulamos el modelo obtenemos como curva solución la que se encuentra en la figura 7.23, y además puede comprobarse como ahora el valor máximo de la variable diferencia no se alcanza para  $y(t) = K/2 = 250$ , sino que está en  $y(t) = K/e \simeq 184$ .



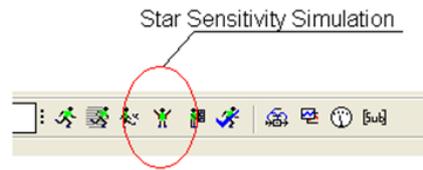
**Figura 7.23:** Máximo crecimiento en el modelo de *Gompertz*.

Para poner de manifiesto el carácter de estabilidad del punto de equilibrio  $K=500$ , se han realizado tres simulaciones diferentes tomando como valores iniciales  $100/500/700$ . En la figura 7.24 se prueba que, independientemente del valor inicial, a largo plazo el dinero disponible tiende al valor 500 (su capacidad de carga).



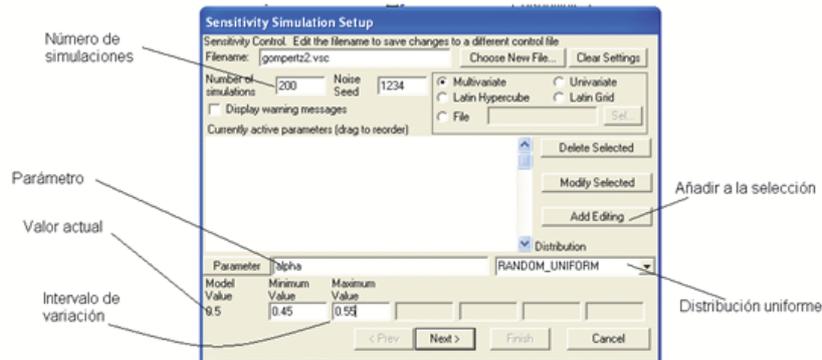
**Figura 7.24:** Distintas simulaciones del modelo de *Gompertz*.

Por supuesto que sería necesario realizar un número más elevado de simulaciones para confirmar el resultado anterior, y esto puede lograrse realizando un análisis de sensibilidad del modelo. Por ejemplo, modifiquemos el valor de la variable auxiliar  $\alpha$  cuyo valor es de 0.5 realizando 200 simulaciones para valores elegidos al azar entre 0.45 y 0.55.



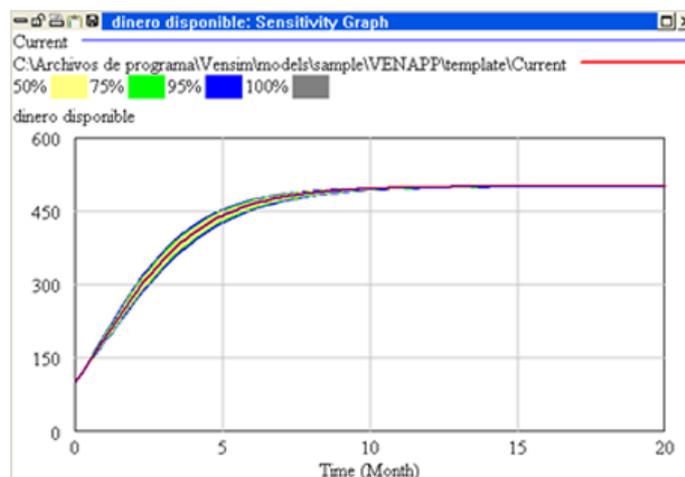
**Figura 7.25:** Herramienta para el análisis de sensibilidad.

Para ello se utiliza el icono que se muestra en la figura 7.26 correspondiente a Star Sensitivity Simulation. Pulsando sobre ella aparece la ventana de la figura 7.24, donde se debe de seleccionar en primer lugar el valor del parámetro a estudiar (alpha), a continuación se introduce el intervalo para los diferentes valores del parámetro, (desde 0.45 a 0.55), y por último se debe pulsar sobre los botones Add Editing y Next. Por defecto, el programa ajusta a 200 el número de simulaciones siendo la elección de los nuevos valores del parámetro aleatoria según una distribución uniforme.



**Figura 7.26:** Cálculo del análisis de sensibilidad.

En la nueva ventana elegimos el nombre de la variable donde queremos ver el resultado y una vez realizadas las simulaciones el resultado obtenido se corresponde con la figura 7.27.



**Figura 7.27:** Resultado del análisis de sensibilidad.

Se puede ver cómo, independientemente, de los valores de  $\alpha$ , a largo plazo, las soluciones tienden a la capacidad de carga (500).

## 7.6. Modelos de disolución

Dentro del estudio de los modelos elementales, tienen especial relevancia los relacionados con problemas de disolución. Para introducir el modelo en un contexto determinado.

**EJERCICIO 14** Supongamos que dirigimos un parque donde existen atracciones acuáticas y deseamos controlar el contenido de cloro en un minuto cualquiera de una de sus piscinas. La piscina tiene una capacidad de 2.5 millones de litros de agua y se encuentra llena con 2 millones de litros, en el que hay disuelto 50 Kg de cloro. Se conoce que entra agua clorada a una velocidad de 500 litros/minuto con una concentración de cloro de 0.225 gramos/litro. Al mismo tiempo el agua sale de la instalación a la misma velocidad de 500 litros/minuto. El cloro se evapora a una velocidad de 75 gramos/minuto. Deseamos conocer cuál es la cantidad de cloro en un minuto  $t$  cualquiera, a lo largo de un día.

Si  $y(t)$  representa a la cantidad (en gramos) de cloro existente en el minuto  $t$ , entonces  $y'(t)$  que representa la rapidez de cambio del cloro en el minuto  $t$ , viene dado por:

$$y'(t) = 500 * 0.225 - 75 - \frac{500}{2 * 10^6} y(t) = 37.5 - \frac{2.5}{10^4} y(t) \quad ; \quad y(0) = 50000$$

Este modelo es muy sencillo y básicamente coincide con el exponencial modificado tratado en secciones anteriores.

Por este motivo, modificaremos el enunciado inicial suponiendo que los ritmos de entrada y salida del agua clorada son diferentes (por ejemplo, 450 litros/minuto la velocidad de salida), entonces el modelo anterior adoptará la forma:

$$y'(t) = 500 * 0.225 - 75 - \frac{500}{2 * 10^6 + 50t} y(t) = 37.5 - \frac{2.5}{10^4 + 50t} y(t) \quad ; \quad y(0) = 50000$$

Esta nueva ecuación diferencial ya no es de variables separadas, sino que estamos ante una ecuación diferencial lineal de primer orden que puede ser simulada por medio de la Dinámica de Sistemas.

El Diagrama de *Forrester* de la figura 7.28 consta de un nivel, un flujo de entrada, dos de salida, cinco variables auxiliares, y la variable predefinida `<time>`.

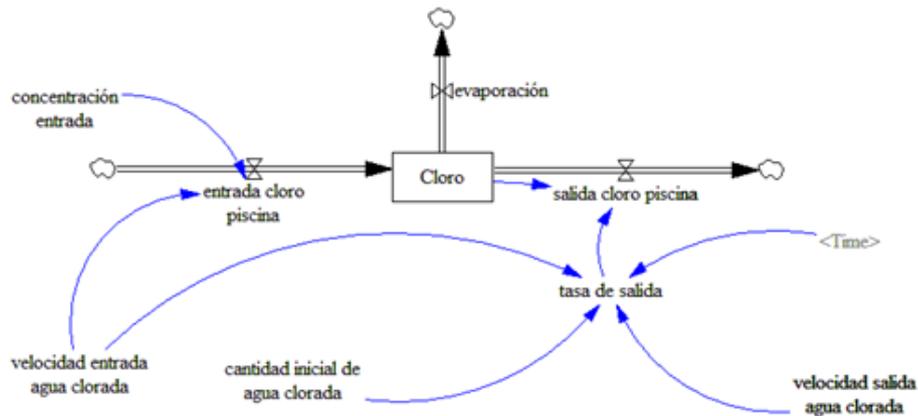


Figura 7.28: Diagrama de Forrester del modelo de disolución.

En este modelo las ecuaciones son:

```

concentracion entrada=0.225
velocidad entrada agua clorada=500
cantidad inicial de agua clorada=2e+006
velocidad salida agua clorada=400
evaporacion=75
entrada cloro piscina=velocidad entrada agua clorada*concentracion entrada
salida cloro piscina=tasa de salida*Cloro
cloro=INT(entrada cloro piscina-evaporacion-salida cloro piscina,50000)
tasa de salida=velocidad salida agua clorada/(cantidad inicial de agua clorada+
(velocidad entrada agua clorada-velocidad salida agua clorada)*Time)

```

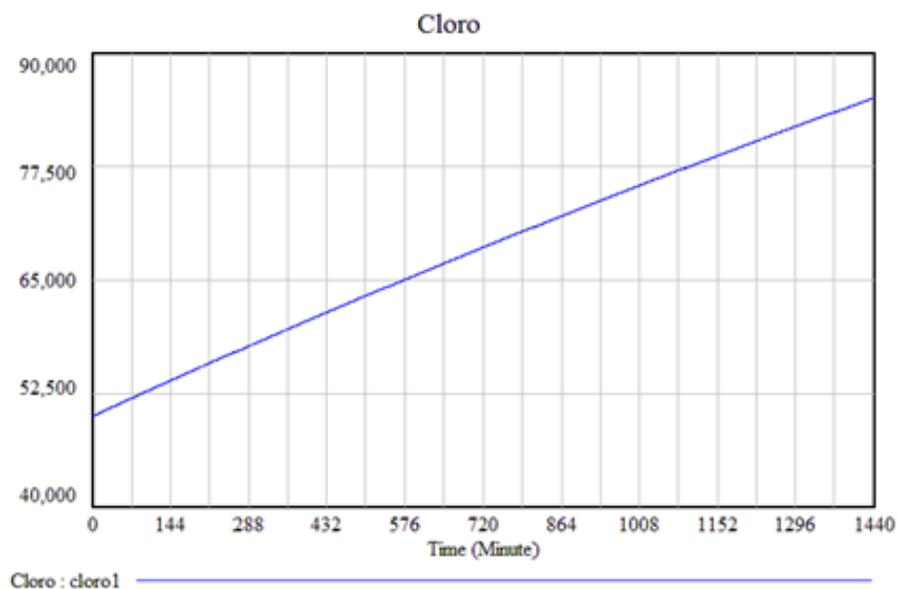


Figura 7.29: Simulación versión 1 del modelo disolución.

Una vez realizada la simulación, la evolución durante un día de la cantidad (en

gramos) de cloro en la piscina (figura 7.29) es de 85078 gramos. Se puede comprobar que, el cloro en el agua, en un principio va a disminuir y luego aumentar a partir del minuto 70.

La gran potencia de este método de análisis de modelo que estamos utilizando es la posibilidad de cambiar las hipótesis establecidas para su construcción así como modificar los valores de los parámetros y ver cómo afecta al comportamiento final del modelo. **Vensim PLE**<sup>®</sup> dispone de una herramienta que permite realizar estos cambios de manera dinámica. Para ello se debe pulsar sobre el icono **SyntheSym** y a continuación aparecerá la pantalla de la figura 7.30.

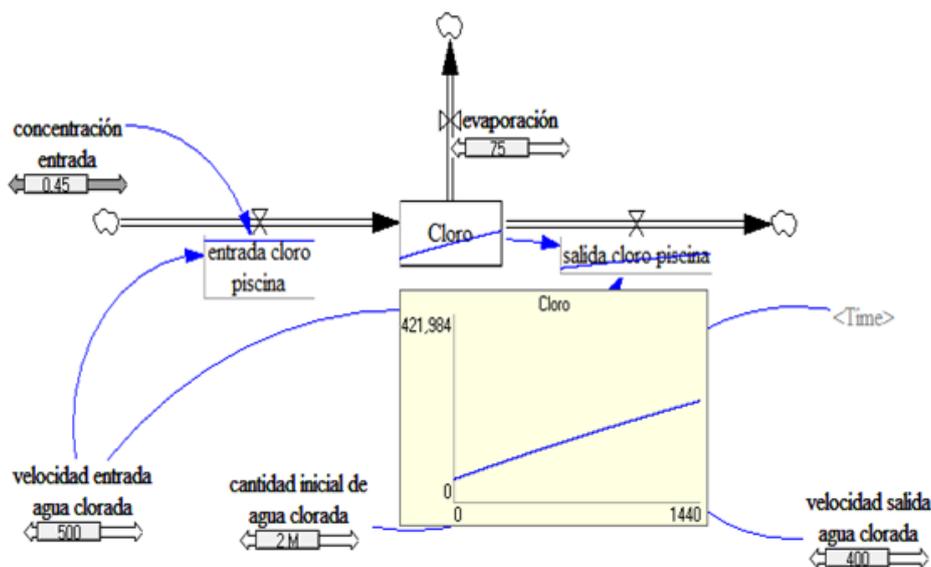


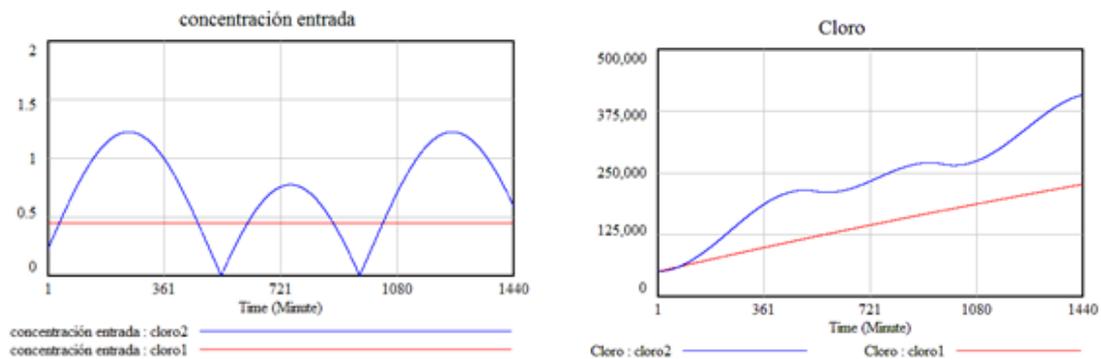
Figura 7.30: Simulación del modelo con SyntheSim.

Se debe observar como debajo de cada una de las variables numéricas aparece un cursor que al desplazarlo genera una nueva simulación y puede verse de forma instantánea el efecto (gráfico) que produce en el resto de las variables. Esta opción del programa es muy interesante puesto que antes de redefinir el modelo se pueden ver previamente las distintas modificaciones de las hipótesis de partida.

Se puede suponer que la incorporación del cloro a la piscina no es constante en el tiempo sino que se realizan aportaciones que cambian de forma periódica. Por ejemplo, imaginemos que la concentración de entrada sea de  $|0.225 + \text{sen}(2\pi t/1000)|$  gramos/minuto. Lo único que tenemos que hacer en el Diagrama de *Forrester* de la figura 7.28 es conectar la variable <Time> con la variable concentración de entrada y modificar su ecuación,

$$\text{Concentraci3n de entrada} = \text{ABS}(0.225 + \text{SIN}(2 * 3.14 * \text{Time}/1000))$$

La figura 7.31 muestra las dos simulaciones, en rojo cuando la concentración es constante y en azul cuando es periódica. En la gráfica de la izquierda nos aparece la concentración del cloro introducido, mientras que la gráfica de la derecha se corresponde con la evolución de la cantidad de cloro en la piscina.

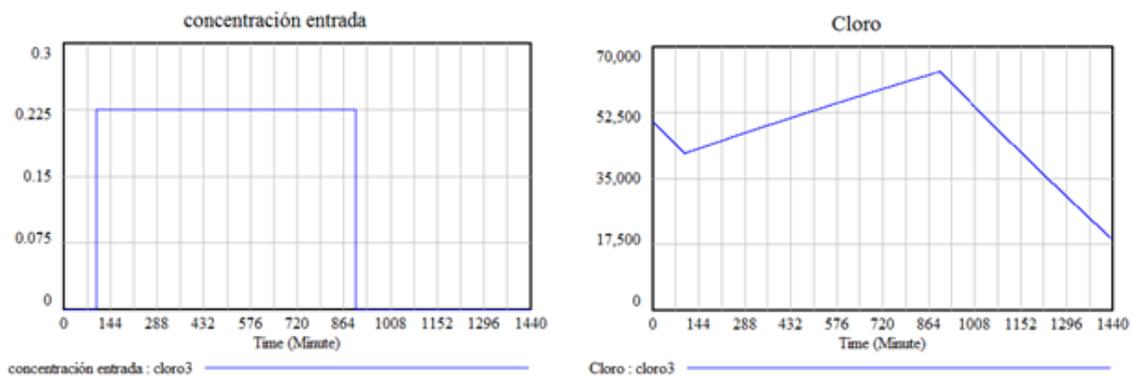


**Figura 7.31:** Simulación de la segunda versión del modelo de disolución.

De manera similar podríamos suponer que la aportación de cloro constante en cantidad de 0.225 gramos/minuto solo se realiza entre los minutos 100 y 900. En este caso, el Diagrama de *Forrester* coincidiría con la última versión realizada siendo la nueva ecuación,

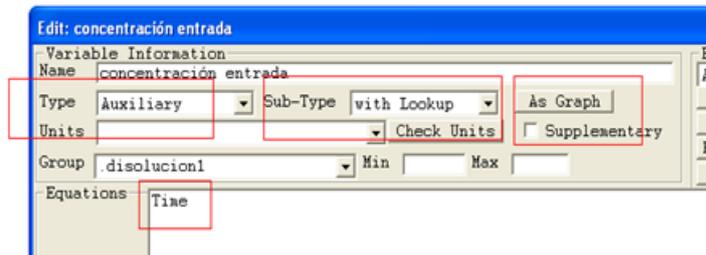
$$\text{Concentracion de entrada} = \text{IF THEN ELSE}(\text{Time} \geq 100 : \\ \text{AND} : \text{Time} \leq 900, 0.225, 0)$$

Los resultados obtenidos una vez realizada la simulación aparecen en figura 7.32. A la izquierda se puede comprobar que la concentración de entrada es una función típica en escalón, mientras que la gráfica de la derecha nos indica el comportamiento de la cantidad de cloro en cada minuto del día y se comprueba cómo esta cantidad sólo es creciente en los momentos en que hay aporte desde el exterior.



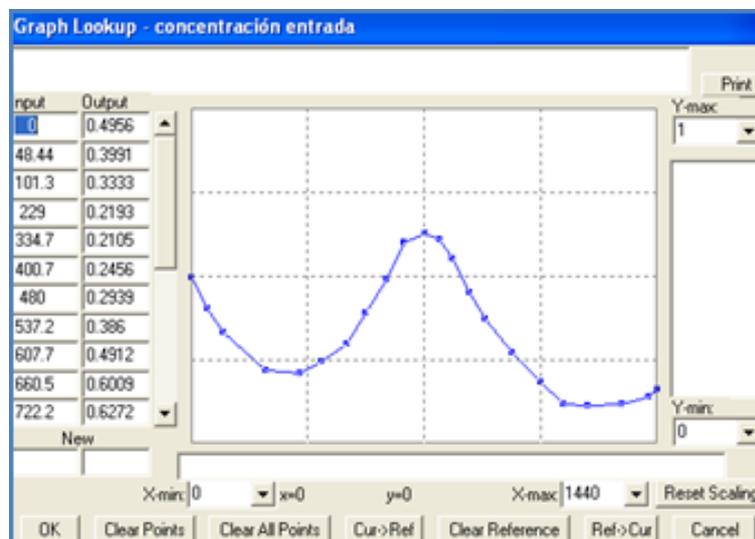
**Figura 7.32:** Simulación de la tercera versión del modelo de disolución.

En ocasiones, aunque es conocida la forma de la función, sin embargo no se dispone de una expresión explícita de la misma. En este caso, Vensim PLE<sup>®</sup> dispone de una herramienta que hace posible la incorporación de esta función en el modelo. En el editor de ecuaciones para la variable **Concentracion de entrada** que aparece en la figura 7.33, seleccionamos el subtipo **with Lookup**, introducimos como ecuación el tiempo **Time**, y a continuación se pulsa sobre **As Graph**.



**Figura 7.33:** Introducción ecuaciones con with Lookup.

Aparecerá la ventana de la figura 7.34 que nos permite dibujar la forma de la función correspondiente a la concentración de entrada en función del tiempo.



**Figura 7.34:** Introducción del gráfico en with Lookup.

Lo único que quedaría sería realizar la simulación para esta nueva situación y su posterior comparación con el resto de las simulaciones realizadas.



# PRÁCTICA 8



---

## EL MODELO PRESA DEPREDADOR Y LA DINÁMICA DE SISTEMAS

---

### 8.1. Objetivo

En esta práctica utilizaremos la Dinámica de Sistemas para simular y analizar diversos modelos del tipo Lotka-Volterra, a través del programa **Vensim PLE®**, y ha sido extraída del Trabajo Fin de Grado de la alumna *Runjie Wu*<sup>1</sup>, tutorizado por el profesor *Juan Navas Ureña*.

### 8.2. Antecedentes

Uno de los modelos matemáticos más clásico, y más utilizado, es el sistema dinámico constituido por dos elementos (en general dos especies de animales) que interactúan de tal manera que una de la especie (depredadora) se alimenta de la otra (presa). Ejemplo típico es el sistema formado por zorros y conejos, pero que puede ser trasladado, sin pérdida de generalidad, a cualquier otro contexto, como por ejemplo, el formado por vendedores (depredadores) y compradores (presas).

Los zorros se alimentan de conejos y los conejos de hierba que supondremos que nunca se agota. Cuando hay muchos conejos, la población de zorros aumentará puesto que el alimento es abundante, pero llegará un momento en el que la población de conejos disminuirá al ser los zorros demasiados. Al no tener, los zorros, comida suficiente su población disminuirá, lo que favorecerá de nuevo a la población de conejos. Es decir, se producen ciclos de crecimiento y decrecimiento de ambas poblaciones. ¿Existe algún modelo matemático que explique este comportamiento periódico?

---

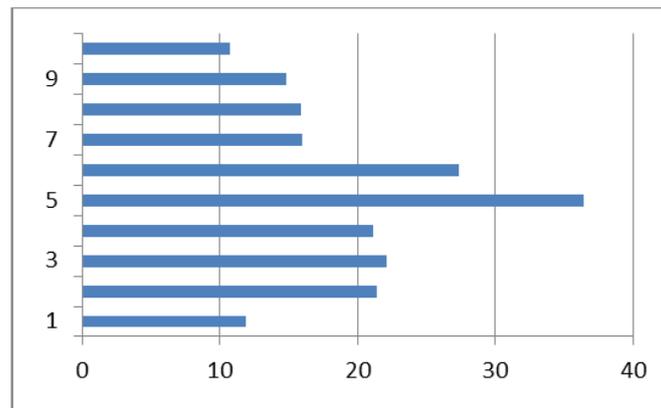
<sup>1</sup>*El modelo presa-depredador y sus aplicaciones a la economía*

Por otro lado, en la segunda década del siglo XX el biólogo italiano *Umberto D'Ancona* estudió y recopiló datos de capturas de dos tipos de peces en algunos puertos del Mediterráneo, por un lado selacios (tiburones, pez raya, etc.), y por otro peces que eran comidos por los anteriores (sardinias, boquerones, etc.). Es decir, unas presas (los peces comestibles) y otros depredadores (selacios). En la tabla 8.1 aparece el porcentaje de tiburones capturados, en el puerto de *Fiume*, en el período 1914-1923 respecto a la cantidad total de peces.

Año	1914	1915	1916	1917	1918
Porcentaje	11.9	21.4	22.1	21.1	36.4
Año	1919	1920	1921	1922	1923
Porcentaje	27.3	16	15.9	14.8	10.7

**Tabla 8.1** Porcentaje de capturas 1914-1923.

El porcentaje aumenta de manera significativa entre los años 1915 y 1919 y *D'Ancona* se preguntó cuál era el motivo de este incremento.



**Figura 8.1:** Porcentajes de capturas de selacios.

Una de las primeras razones en que pensó estaba relacionada con la Primera Guerra Mundial. En efecto, en estas fechas se desarrolló la primera gran guerra y esto obligaba a que menos barcos salieran a pescar, y por lo tanto, al disminuir la intensidad de la pesca, esto provocaba el aumento en el número de peces depredadores (selacios). Sin embargo, este argumento tenía un problema y era que también habían aumentado el número de peces comestibles. De hecho, si la intensidad de pesca es pequeña, entonces este hecho beneficia más a los depredadores que a las presas. La pregunta pertinente era, ¿por qué?

De manera resumida, se planteaban dos cuestiones:

- ¿Cómo explicar el comportamiento cíclico de la evolución de dos poblaciones, donde una especie se alimenta de la otra?

- ¿Por qué una intensidad baja de captura favorece más a los depredadores que a las presas?

### 8.3. La construcción del modelo

Para encontrar las respuestas a estas preguntas *D'Ancona* pidió ayuda al matemático *Vito Volterra*, quien elaboró el siguiente modelo. Llamaremos  $x(t)$ ,  $y(t)$  al número de presas y depredadores, respectivamente, existentes en el tiempo  $t$ . En ausencia de los depredadores las presas aumentarían de manera exponencial (puesto que su alimento es inagotable y no hay depredadores). Por otro lado, sin presas los depredadores morirán de forma exponencial (por falta de comida). Es decir, el modelo que describiría esta situación sería:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx}{dt} = ax(t) & ; & a > 0 \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} = -cy(t) & ; & c > 0 \end{cases}$$

En el momento en el que entran en contacto los depredadores con las presas, el ritmo de crecimiento de las presas disminuye a una tasa proporcional al encuentro de una presa con un depredador ( $bx(t)y(t)$ ); mientras que los depredadores aumentarían de la misma manera ( $dx(t)y(t)$ ). En consecuencia, ahora el modelo sería:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) & ; & a > 0, b > 0 \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) & ; & c > 0, d > 0 \end{cases}$$

Sistema que puede ser reescrito como:

$$\begin{cases} x'(t) = bx(t) \left( \frac{a}{b} - y(t) \right) & ; & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = dy(t) \left( x(t) - \frac{c}{d} \right) & ; & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

El modelo fue descubierto de forma independiente por *Lotka* y por *Volterra*, y por este motivo se le conoce como modelo presa-depredador o bien modelo *Lotka-Volterra* y describe bastante bien la evolución de presas y depredadores cuando se encuentran en un ecosistema aislado.

No obstante, tenemos que aclarar que dos poblaciones distintas en un mismo medio ambiente tienen varias maneras de sobrevivir, por ejemplo:

- La **competencia mutua**, es decir compiten por la misma fuente alimentaria, tienden a provocar la extinción de una población de ellos, y la otra tiende a aprovechar la máxima capacidad de los recursos ambientales.
- La **interdependencia**, es decir las dos poblaciones proporcionan algunos recursos alimenticios, viven pacíficamente entre ellos, y tienden a un estado de equilibrio.

- La **ley de la selva**, es decir una población sobrevive dependiendo de la abundancia de recursos naturales, llamada la presa; mientras que la otra población vive dependiendo de las poblaciones de presas, llamada el depredador. Los dos elementos están compuestos por el modelo presa-depredador. Por ejemplo, Los peces comestibles y los peces selacios, los conejos y los linces, las cochinillas y los pulgones, son típicos ejemplos de esta forma de convivencia.

## 8.4. Simulación del modelo con Vensim

Para situar el modelo a estudiar en un contexto económico apropiado consideraremos que las presas  $x(t)$  representan al número de compradores de un artículo en el día  $t$ , mientras que los depredadores  $y(t)$  coinciden con el número de vendedores de este artículo en el día  $t$ . En esta situación la evolución del número de compradores y el de vendedores está modelada por el sistema presa-depredador cuyo Diagrama de *Forrester* es el del tipo que aparece en la figura 8.2.

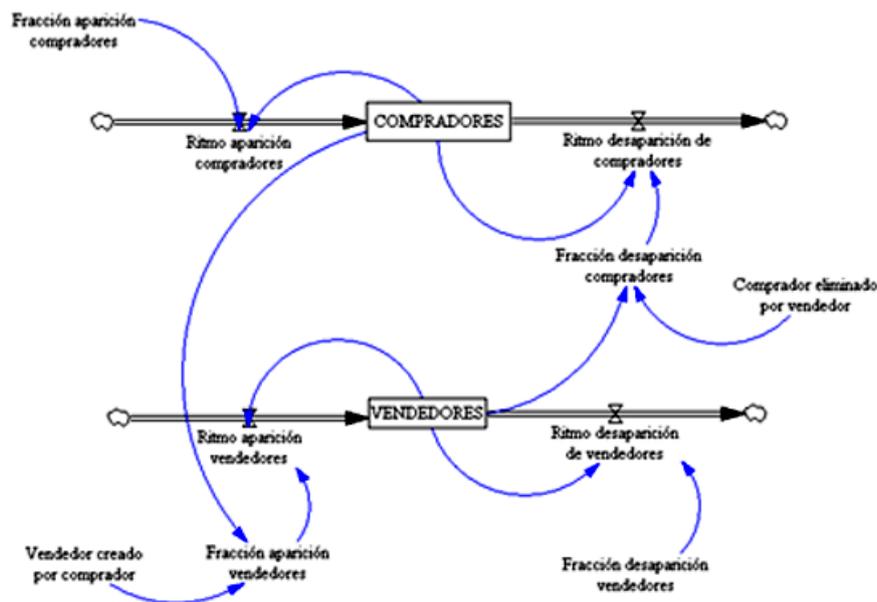


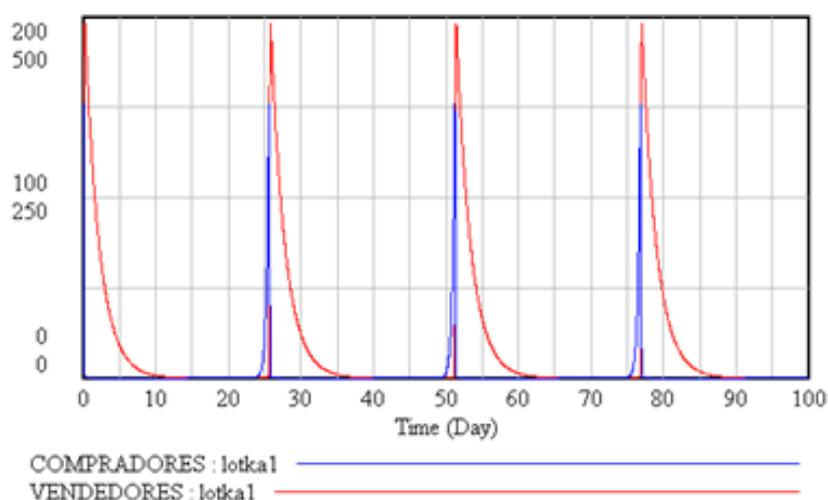
Figura 8.2: Diagrama de Forrester del modelo presa-depredador.

Las ecuaciones de este modelo junto con los valores de los parámetros son:

$$\begin{aligned}
 \text{Fracción aparición compradores} &= 3.3 \\
 \text{Fracción aparición vendedores} &= \text{COMPRADORES} * \text{Vendedor creado por comprador} \\
 \text{Fracción desaparición compradores} &= \text{VENDEDORES} * \text{Comprador eliminado por vendedor} \\
 \text{Fracción desaparición vendedores} &= 0.5 \\
 \text{Comprador eliminado por vendedor} &= 0.08 \\
 \text{Vendedor creado por comprador} &= 0.2
 \end{aligned}$$

<i>Ritmo aparición compradores</i>	=	<i>COMPRADORES * Fraccion aparición compradores</i>
<i>Ritmo desaparición de compradores</i>	=	<i>COMPRADORES * Fraccion desaparición compradores</i>
<i>Ritmo aparición vendedores</i>	=	<i>Fraccion aparición vendedores * VENDEDORES</i>
<i>Ritmo desaparición vendedores</i>	=	<i>Fraccion desaparición vendedores * VENDEDORES</i>
<i>COMPRADORES</i>	=	<i>INT(Ritmo aparición compradores – Ritmo desaparición de compradores, 150)</i>
<i>VENDEDORES</i>	=	<i>INT(Ritmo aparición vendedores – Ritmo desaparición de vendedores, 25)</i>

El modelo se ha simulado entre  $t = 0$  y  $t = 100$ , utilizando como método de aproximación numérica el de *Runge-Kutta* de cuarto orden y con un paso de  $h = 0.015625$ . Como se aprecia en la figura 8.3, el comportamiento de ambas poblaciones es cíclico, siendo su período de aproximadamente 25 días. Con lo que queda explicada la primera de las preguntas planteadas.



**Figura 8.3:** Resultado simulación del modelo presa-depredador.

Los puntos de equilibrio del modelo,

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 0.08x(t)y(t) \\ y'(t) = -0.5y(t) + 0.2x(t)y(t) \end{cases}$$

son las soluciones constantes, es decir aquellos valores obtenidos al resolver el sistema  $x'(t) = 0, y'(t) = 0$ , que son  $x(t) = 0.2/0.5 = 0.4$ ;  $y(t) = 3.3/0.08 = 41.25$ .

Se puede construir de una manera muy simple el plano fase del sistema, para ello, con el botón de **Panel de Control** seleccionamos la pestaña **Graph** y posteriormente el icono **new** y aparecerá la ventana de la figura 8.4.

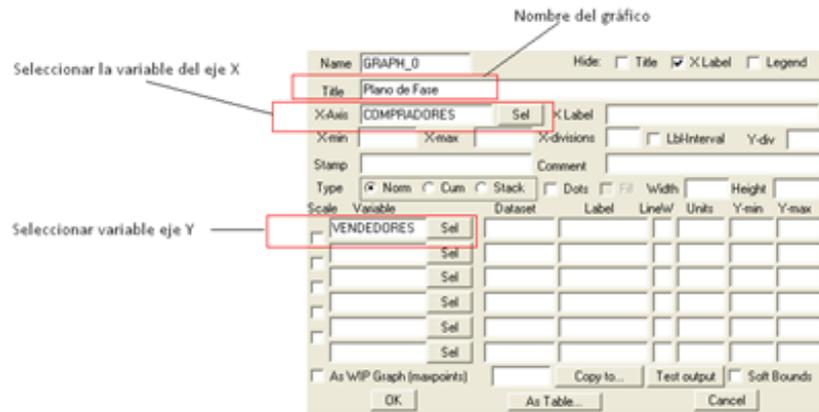


Figura 8.4: Construcción del Plano fase.

La figura 8.5 muestra la órbita del sistema dinámico,

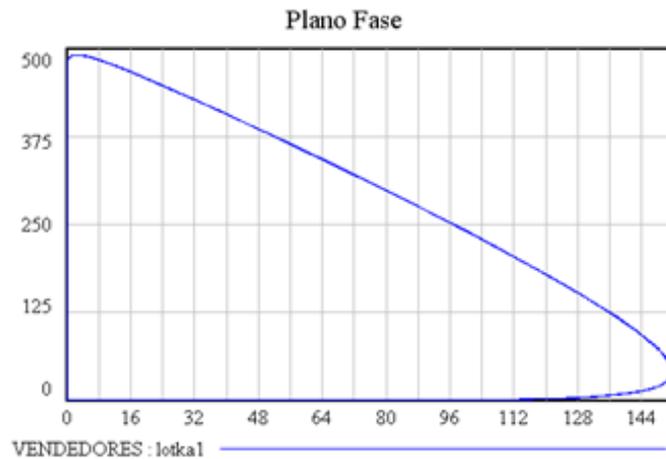


Figura 8.5: Plano fase del modelo presa-depredador.

que cómo puede verse se trata de una curva cerrada que gira en torno al centro que es el punto de equilibrio  $(0.4, 41.25)$  donde las poblaciones se mantendrían indefinidamente si los valores iniciales se correspondiesen con  $x(0) = 0.4; y(0) = 41.25$

Para poder dar respuesta a la segunda de las preguntas que motivaron el modelo, es necesario hablar de valores promedios. Se puede encontrar el promedio de depredadores  $y(t)$  en el intervalo  $[0, T]$  siendo  $T$  el período correspondiente a la curva solución, mediante la integral:

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt,$$

cuyo valor es  $a/b$ , el mismo que el obtenido para el punto de equilibrio. Del mismo modo el promedio de las presas es  $c/d$ . Obtenemos una propiedad importante que es: *no importa cuál sea el tamaño de las poblaciones iniciales, su promedio será siempre el mismo*. Esta propiedad suele recibir el nombre de **ley de conservación de la naturaleza**.

Si introducimos en el modelo inicial el efecto extra de la pesca, con una intensidad  $\alpha$ , entonces ahora el modelo adoptaría la forma,

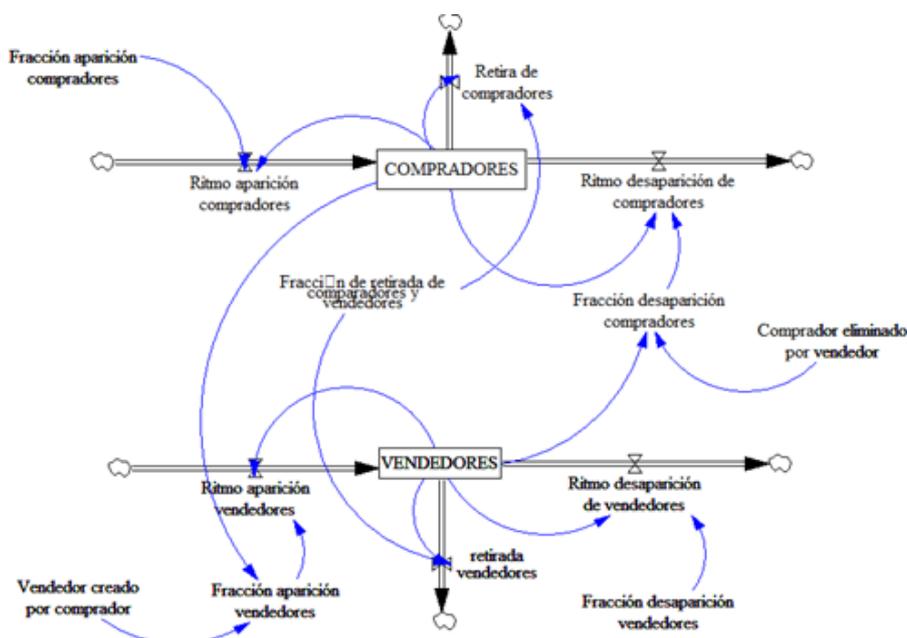
$$\begin{cases} x'(t) = a x(t) - b x(t)y(t) - \alpha x(t) \\ y'(t) = -c y(t) + d x(t)y(t) \alpha y(t) \end{cases}$$

que puede reescribirse como,

$$\begin{cases} x'(t) = (a - \alpha) x(t) - b x(t)y(t) \\ y'(t) = -(c + \alpha) y(t) + d x(t)y(t) \alpha y(t) \end{cases}$$

es decir, es otro modelo del tipo presa-depredador idéntico al primero, donde el coeficiente  $a$  se ha transformado en  $a - \alpha$ , y el  $c$  en  $c + \alpha$ . Por lo tanto si  $\alpha < a$ , para este nuevo modelo los valores promedios serán para los depredadores  $(a - \alpha)/b$ , y para las presas  $(c + \alpha)/d$ . Para un valor de  $a > \alpha$ , en promedio, al incluir la pesca, las presas aumentan y disminuyen los depredadores.

Veamos este efecto modificando nuestro modelo con Vensim PLE<sup>®</sup> con objeto de introducir el efecto de la pesca. En nuestro caso sería incorporar una nueva variable auxiliar *Fracción de retirada de compradores y vendedores* y los dos flujos de salida *Retirada de compradores* y *Retirada de vendedores*, que aparecen en la figura 8.6



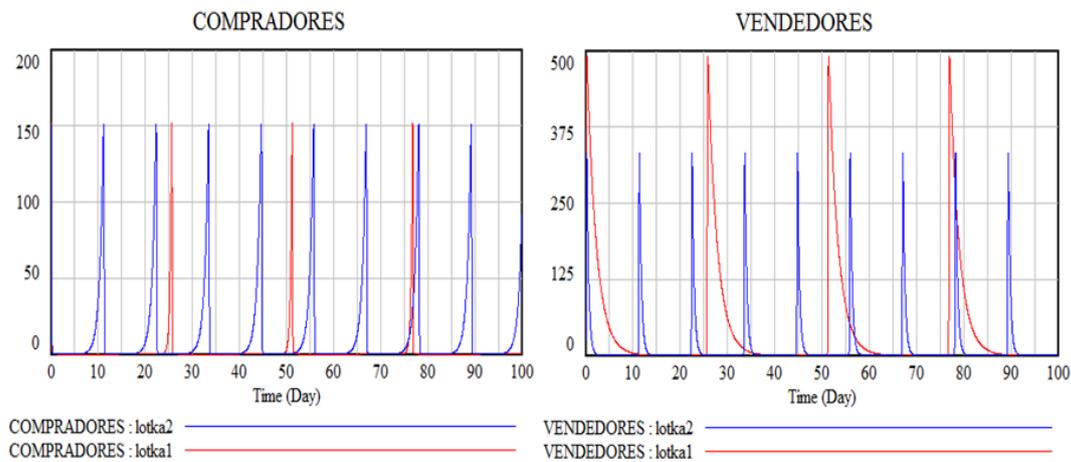
**Figura 8.6:** Diagrama de *Forrester* del modelo presa-depredador con efecto de pesca.

Las nuevas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \text{Fracción de retirada de compradores y vendedores} &= 2 \\ \text{Fracción de retirada de compradores y vendedores} &= 2 \\ \text{Retirada de compradores} &= \text{COMPRADORES} * \text{Fracción de} \\ &\quad \text{retirada de comparadores y vendedores} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Retirada de vendedores} &= \text{VENDEDORES} * \text{Fraccion de} \\
 &\quad \text{retirada de comparadores y vendedores} \\
 \text{COMPRADORES} &= \text{INT}(\text{Ritmo aparicion compradores} - \text{Retira} \\
 &\quad \text{de compradores} - \text{Ritmo desaparicion de compradores}, 150) \\
 \text{VENDEDORES} &= \text{INT}(\text{Ritmo aparicion vendedores} - \text{retirada} \\
 &\quad \text{vendedores} - \text{Ritmo desaparicion de vendedores}, 25)
 \end{aligned}$$

La simulación se ha realizado con el nombre Lotka2 y aparece en azul en las gráficas de la figura 8.7, y en rojo se han mantenido los resultados de la simulación sin el efecto de la pesca.



**Figura 8.7:** Comparación de las simulaciones.

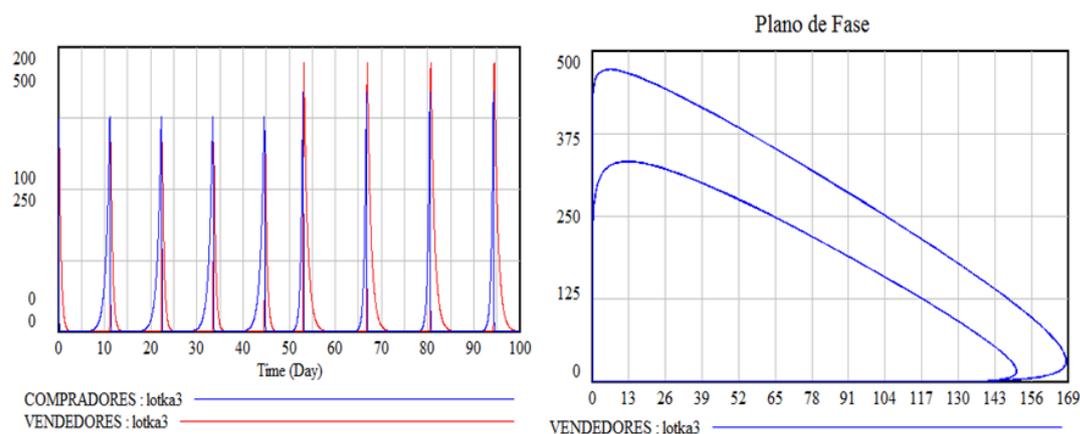
Nótese como, en efecto, en promedio los depredadores disminuyen y las presas aumentan, y que además se ha modificado la duración del período.

Por último, estamos en condición de explicar la respuesta de la segunda pregunta planteada. Observemos que si en la expresión  $(a - \alpha)/b$  disminuimos la intensidad de la pesca (el valor del  $\alpha$ ), entonces todo el cociente aumentará, y que por el contrario la expresión  $(c + \alpha)/d$  disminuirá. Este principio hoy se conoce con el nombre de **efecto Volterra**. Cuando se disminuye la intensidad de captura entonces, en promedio, salen más favorecidos los depredadores que las presas.

Para poner de manifiesto el efecto *Volterra* en el modelo presa-depredador, se tiene que incluir el tiempo en el Diagrama de *Forrester* como *Shadow variable*, conectarla con la variable auxiliar *Fraccion de retirada de compradores y vendedores* y definir su ecuación como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Fraccion de retirada de compradores y vendedores} = \\
 &\text{IF THEN ELSE}(\text{Time} < 50, 2, 0.75)
 \end{aligned}$$

Es decir, la intensidad de captura es de 2 desde el momento inicial hasta  $t = 50$ , y partir de aquí desciende al valor 0.75. En la figura 8.8 se aprecia como a partir de  $t = 50$  se modifica el comportamiento del modelo en el sentido que se ha comentado.



**Figura 8.8:** Efecto *Volterra*.

El modelo *Lotka-Volterra* es muy interesante a nivel teórico pero adolece de ciertos problemas que en la realidad hacen que su aplicación sea muy limitada. Entre los problemas más importantes que el modelo no incorpora podemos destacar:

- Los ecosistemas no están aislados.
- No se tiene en cuenta la interacción entre las presas y entre los depredadores. Sería preferible añadir al modelo un crecimiento del tipo logístico.
- El modelo no es estructuralmente estable, de tal forma que las órbitas de su plano fase no son curvas cerradas perfectas.
- En los experimentos en laboratorio siempre los depredadores eliminan a las presas.

## 8.5. Modificaciones del modelo presa-depredador.

### 8.5.1. Primera versión

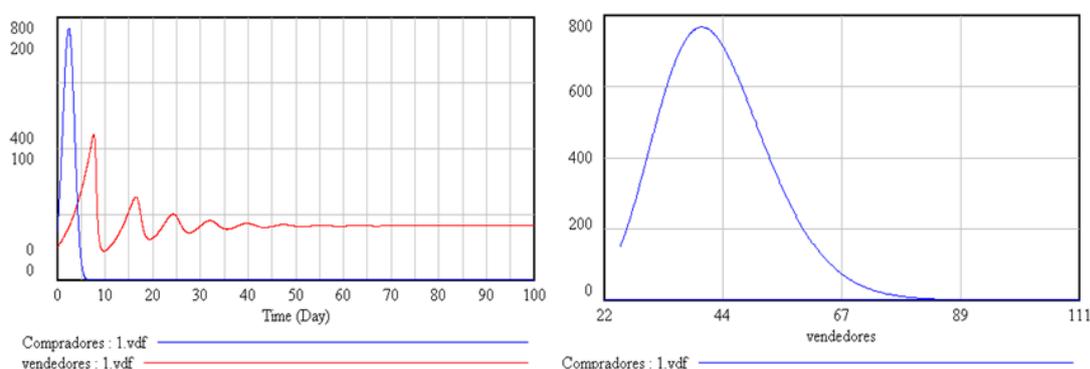
Existe un gran número de variaciones del modelo *Lotka-Volterra*, y de todas ellas presentaremos algunas que consideramos más interesantes. En 1926 *Leslie* propuso una primera modificación, suponiendo que el crecimiento de las presas no es exponencial sino del tipo logístico, con una capacidad de carga  $K$ . Además se supone que el ritmo de evolución de los depredadores (vendedores) es otro modelo logístico donde ahora su capacidad de carga depende de los compradores disponibles tal y como se expresa en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

$$\begin{cases} x'(t) = ax - \frac{ax^2}{K} - bxy \\ y'(t) = dy(1 - \frac{dy}{nx}) \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Comprador eliminado por vendedor} &= 0.08 \\
 \text{Vendedor creado por comprador} &= 0.2 \\
 \text{Ritmo aparición compradores} &= \text{Compradores} * \text{Fraccion} \\
 &\quad \text{aparición compradores} * (1 - \text{Compradores}/\text{Capacidadde carga}) \\
 \text{Ritmo desaparición de compradores} &= \text{Compradores} * \text{Fraccion desaparición compradores} \\
 \text{Ritmo aparición vendedores} &= \text{Fraccion aparición vendedores} * \text{vendedores} \\
 \text{Ritmo desaparición vendedores} &= \text{Fraccion desaparición vendedores} * \text{vendedores}^2 \\
 \text{Compradores} &= \text{INT}(\text{Ritmo aparición compradores} - \text{Ritmo desaparición de compradores}, 150) \\
 \text{vendedores} &= \text{INT}(\text{Ritmo aparición vendedores} - \text{Ritmo desaparición de vendedores}, 25)
 \end{aligned}$$

El modelo se ha simulado entre  $t = 0$  y  $t = 100$ , utilizando como método de aproximación numérica el de *Euler* y con un paso de  $h = 0.015625$ .



**Figura 8.10:** Simulación del modelo presa-depredador modificado tipo *Leslie*.

A largo plazo el comportamiento del modelo deja de ser cíclico, con la eliminación del número de compradores disponibles por parte de los vendedores que se estabilizarán en un valor aproximado de 41 (figura 8.10 izquierda). En el plano fase (figura 8.10 derecha) puede apreciarse como la órbita que se inicia en el punto  $(150, 25)$  acaba en el punto  $(0, 41)$ .

## 8.6. Modelos en competencia

En los modelos presa-depredador que hemos estudiado no se ha tenido en cuenta un hecho importante como es la interacción de los compradores, ya que compiten por los mismos productos, provocando, por ejemplo, que los compradores tienda a la extinción, mientras que los vendedores se aproximen a su capacidad de carga, o bien pudiese ocurrir que compradores y vendedores, en función de los recursos disponibles, tiendan a un estado de equilibrio.

Para poner de manifiesto estos diversos comportamientos, vamos a construir un nuevo modelo alterando ligeramente las hipótesis del presa-depredador. Supongamos que  $x(t)$  representa al número de compradores en un tiempo  $t$ , mientras que  $y(t)$  sean los vendedores presentes en el tiempo  $t$ . En el modelo modificado de Lotka-Volterra observamos que en ausencia de vendedores, los compradores evolucionan

según el modelo logístico,

$$x'(t) = x(t) (a - b x(t))$$

Simultáneamente, si no existieran compradores, la velocidad de crecimiento de los vendedores estaría gobernada por la ecuación diferencial,

$$y'(t) = y(t) (c - d y(t))$$

Es decir, se ha introducido la interacción entre compradores dada por  $b x(t)x(t)$ , y la de los vendedores  $d y(t)y(t)$ , dependiendo su intensidad de los parámetros  $b$  y  $d$ . A continuación debemos tener en cuenta en las ecuaciones la reducción de la velocidad de crecimiento debido a las interferencias entre los compradores y vendedores, expresado como  $-m y(t)x(t)$ , donde  $m$  es la medida del grado en que los vendedores interfieren con los compradores. De la misma forma también aparecerá  $-n x(t)y(t)$ , donde  $n$  es la medida del grado en que los compradores interactúan con los vendedores. Finalmente, las ecuaciones del modelo en competencia son:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (a - b x(t) - m y(t)) & ; \quad x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = y(t) (c - d y(t) - n x(t)) & ; \quad y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Un análisis cualitativo detallado del modelo prueba que los posibles resultados, a largo plazo, dependiendo de los valores positivos de los parámetros, son:

- Primer caso: los compradores ganan a los vendedores. Esto es, los compradores tienden a un valor constante, mientras que los vendedores, a la larga, desaparecen.
- Segundo caso: los vendedores ganan a los compradores.
- Tercer caso: los compradores y vendedores tienden a coexistir en un punto de equilibrio estable.
- Cuarto caso: los compradores y vendedores tienden a coexistir en un punto de equilibrio inestable.

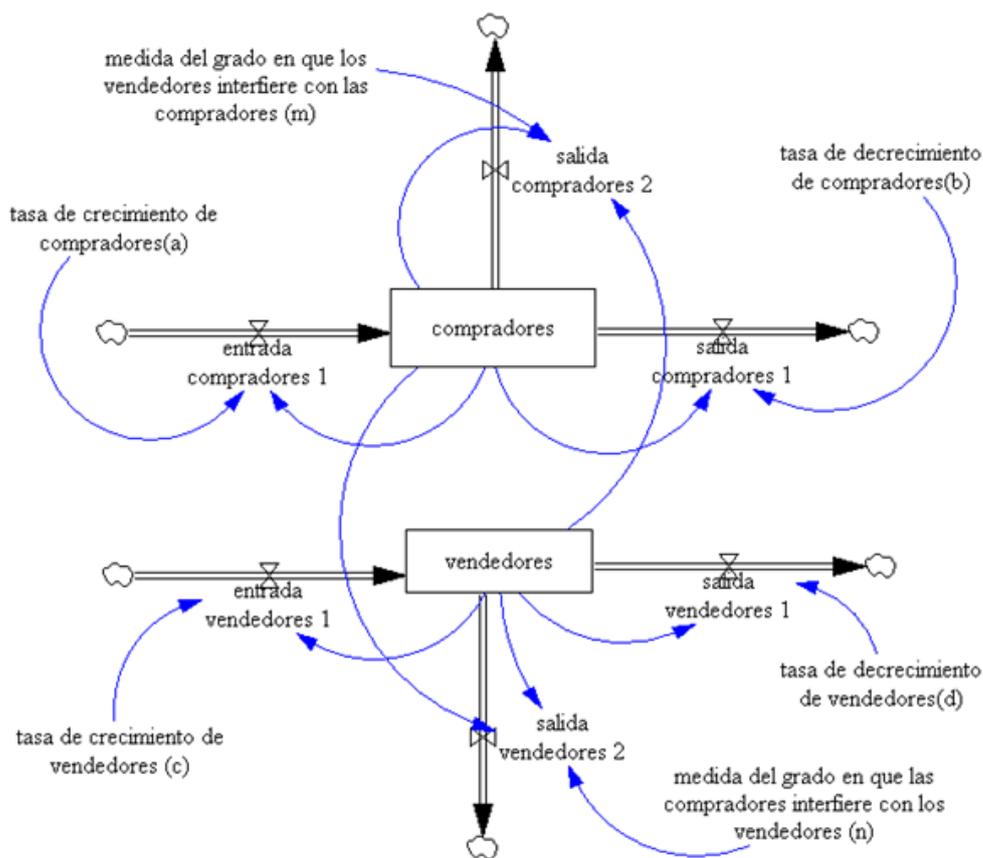
Nuestro próximo objetivo será el de poner de manifiesto estos comportamientos realizando diferentes simulaciones con **Vensim PLE**<sup>®</sup>.

### 8.6.1. Primer caso

Por trabajar con un caso concreto, supongamos que el modelo de competencia a estudiar sea:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (0.3 - 0.01 x(t) - 0.06 y(t)) & ; \quad x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t) (0.03 - 0.009 y(t) - 0.0055 x(t)) & ; \quad y(0) = 20 \end{cases}$$

En la figura 8.11 puede verse el Diagrama de *Forrester*, que consta de dos niveles correspondientes al número de compradores y vendedores existentes en cualquier día  $t$ , dos flujos de entrada, cuatro flujos de salida, y seis variables auxiliares identificadas con los distintos parámetros del modelo.



**Figura 8.11:** Diagrama de Forrester de competencia1.

Las ecuaciones del modelo son:

$$\text{compradores} = \text{INT}(\text{entrada compradores 1} - \text{salida compradores 1} - \text{salida compradores 2}, 75)$$

$$\text{vendedores} = \text{INT}(\text{entrada vendedores 1} - \text{salida vendedores 1} - \text{salida vendedores 2}, 20)$$

$$\text{medida del grado en que los vendedores interfieren con los compradores (m)} = 0.06$$

$$\text{medida del grado en que los compradores interfieren con los vendedores (n)} = 0.0055$$

$$\text{entrada compradores 1} = \text{tasa de crecimiento de compradores(a)} * \text{compradores}$$

$$\text{salida compradores 1} = \text{tasa de decrecimiento de compradores(b)} * \text{compradores}^2$$

$$\text{salida compradores 2} = \text{medida del grado en que los vendedores interfiere con los compradores (m)} * \text{compradores} * \text{vendedores}$$

$$\text{tasa de crecimiento de compradores (a)} = 0.3$$

$$\text{tasa de decrecimiento de compradores (b)} = 0.01$$

$$\text{entrada vendedores 1} = \text{tasa de crecimiento de vendedores (c)} * \text{vendedores}$$

$$\text{salida vendedores 1} = \text{tasa de decrecimiento de vendedores(d)} * \text{vendedores}^2$$

$$\text{salida vendedores 2} = \text{medida del grado en que los compradores interfiere con los vendedores (n)} * \text{compradores} * \text{vendedores}$$

$$\text{tasa de crecimiento de vendedores(c)} = 0.03$$

$$\text{tasa de decrecimiento de vendedores (d)} = 0.009$$

Una vez simulado el modelo, utilizando el método de *Runge-Kutta* de orden 4 y un paso de  $h = 0.015625$  (figura 8.12), se comprueba que, independientemente del

número inicial, el número de compradores se estabiliza en 30 mientras que desaparecen los vendedores.

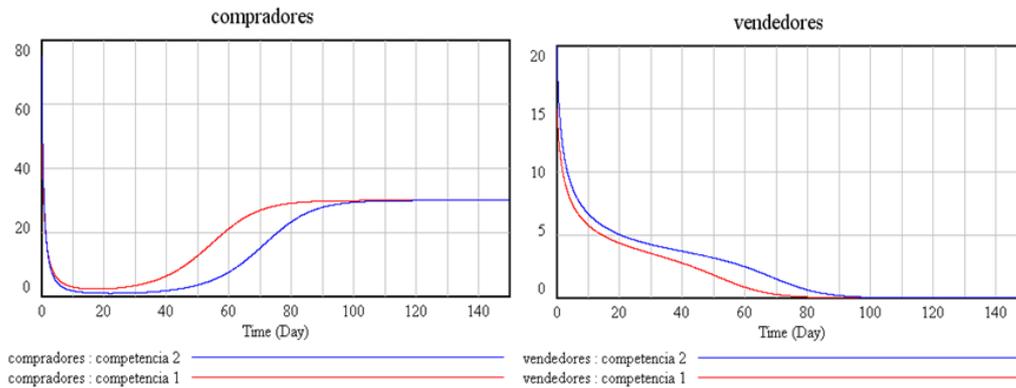


Figura 8.12: Resultados simulación modelo competencia 1.

Simultáneamente se ha ejecutado el análisis de sensibilidad de uno de los parámetros, concretamente a la medida del grado en que los compradores interfieren con los vendedores. Se han realizado 200 simulaciones aleatorias, según una distribución uniforme, para valores de  $n$  comprendidos en el intervalo  $[0,005 \ 0,006]$ . Los resultados de la figura 8.13 confirman el estudio anterior.

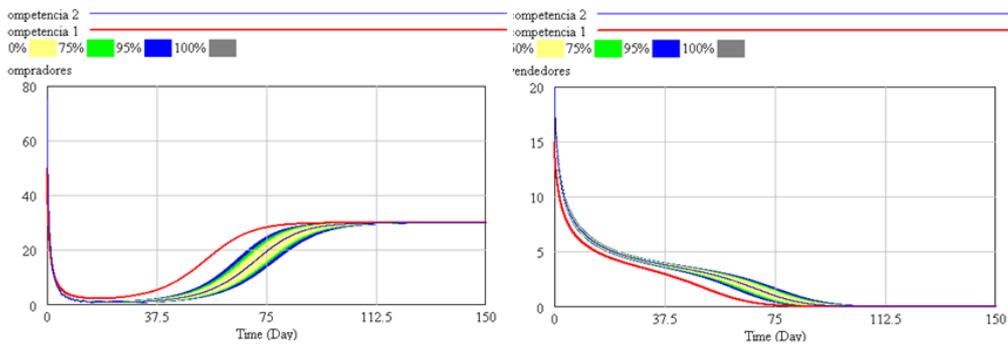


Figura 8.13: Análisis de sensibilidad del modelo competencia 1.

El mismo tipo de análisis de sensibilidad podría realizarse con el resto de las variables auxiliares, o bien realizar una simulación dinámica con el icono SyntheSim, que ofrece la posibilidad de modificar los valores de los parámetros *online* y ver el efecto que se produce sobre los diferentes niveles.

Una vez mostrado el camino de resolución del primero de los casos, el resto de ellos se proponen como ejercicios complementarios.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

- Modelo 2:** Simular con Vensim PLE<sup>®</sup> el siguiente modelo de competencia:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (0.26 - 0.2x(t) - 0.06y(t)) & ; x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t) (0.06 - 0.01y(t) - 0.015x(t)) & ; y(0) = 20 \end{cases}$$

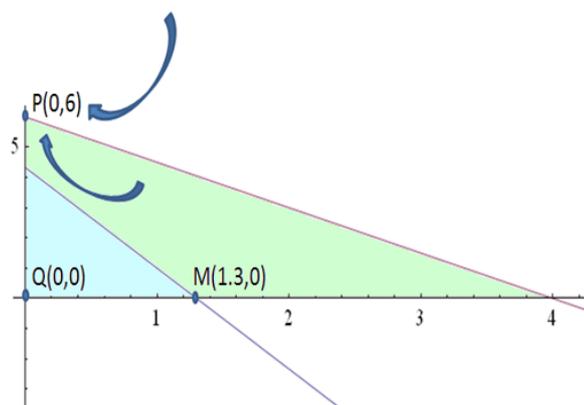


Figura 8.14: Estudio cualitativo modelo 2

- Modelo 3:** Simular con Vensim PLE<sup>®</sup> el siguiente modelo de competencia:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (0.26 - 0.02x(t) - 0.06y(t)) & ; x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t) (15.5 - 0.9y(t) - 4.2x(t)) & ; y(0) = 20 \end{cases}$$

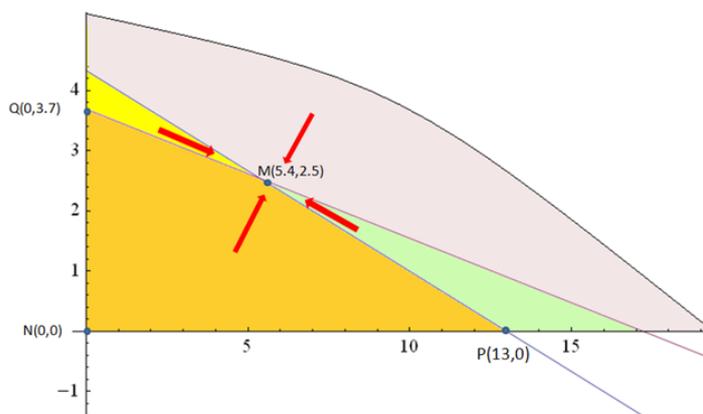


Figura 8.15: Estudio cualitativo modelo 3

- Modelo 4: Simular con Vensim PLE<sup>®</sup> el siguiente modelo de competencia:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) (0.26 - 0.021 x(t) - 0.06 y(t)) & ; x(0) = 75 \\ y'(t) = y(t) (0.06 - 0.01 y(t) - 0.01 x(t)) & ; y(0) = 20 \end{cases}$$

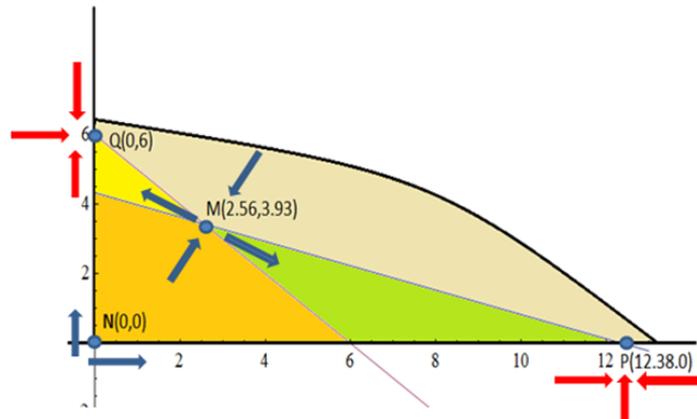


Figura 8.16: Estudio cualitativo modelo 4

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALLMAN, E.S.; RHODES, J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press. (2004).
- [2] ARACIL, J. *Dinámica de Sistemas*, Isdefe, Madrid, (1995).
- [3] ARACIL, J.; TORO, M. *Métodos cualitativos en dinámica de sistemas*, Tecnos, Madrid, (1993).
- [4] ARACIL, J.; GORDILLO, F. *Dinámica de Sistemas*, Alianza Editorial, Madrid, (1997).
- [5] BEGON, M.; MORTIMER, M.; THOMPSON, D.J. *Population Ecology. A unified study of animals and plants*. 3ª ed. Blackwell Science, (2000).
- [6] BERMUDEZ, L.; POCIELLO, E.; RUÍZ, M.E.; VAREA, J. *Ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas*. Ediciones Media, Sant Cugat del Vallés, (1995).
- [7] BLANCHARD, P.; DEVANEY, R.L.; HALL, G.R. *Ecuaciones Diferenciales*. International Thomson Editores, S.A. de C.V., (1999).
- [8] BORRELLI, R.; COLEMAN, C.S. *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico. (2002).
- [9] BURDEN, R.L.; FAIRES, J.D. *Análisis Numérico*, 2ª ed. Grupo Editorial Iberoamericano S.A., (1996).
- [10] CANALETA, K. *Estudio desde el punto de vista de teoría de sistemas del modelo de Wilson para la gestión de inventarios*. Disponible online: <http://users.salleurl.edu/xavic/material/ModelWilson.pdf>
- [11] CASWELL, H. *Matrix Population Models (construction, analysis, and interpretation)*, 2ª ed. Sinauer Associates Inc. Publishers, Sunderland, Massachusetts, (1995).
- [12] DORMIDO CANTOS, S., MORILLA GARCIA, F. *Tutorial del Vensim*, Disponible online: <http://www.slideshare.net/jes4791/manual-completo-de-vensim>

- [13] DAVILA CARDENES, N; Y OTROS *El uso del ordenador en las Matemáticas para la Economía y Empresa: Una experiencia en la Universidad de Las Palmas de G.C.*
- [14] DEVANEY, R.L. *Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics.* Addison - Wesley, (1990).
- [15] ERNESTO, M.I., LAGARDA, A. *Introducción a la Dinámica de Sistemas.* Disponible online: <http://jmonzo.net/blogeps/ids1.pdf>
- [16] FORRESTER, J. *Road Maps. A Guide to Learning System Dynamics. System Dynamic in Education Projet.* Sloan School of Management Massachusetts Institute of Tecnology, Cambridge, Massachussets, USA, (1999).
- [17] FORRESTER, J. *Industrial Dynamics.* Massachusetts Institute of Technology Press, Massachussets, USA, (1961).
- [18] FORRESTER, J. *System Dynamics andLearner-Centered-Learning inKindergarten through 12th Grade Education.* Disponible online: <ftp://www.clexchange.org/documents/sdintro/D-4337.pdf>
- [19] GOTELLI, N.J. *A primer of ecology.* Sinauer Associates, Inc. Publishers, Sunderland, Massachusetts, (1995).
- [20] HANNON, B.; RUTH, M. *Modeling dynamic biological systems.* Springer - Verlag, New York, Inc., (1997).
- [21] HASTINGS, A. *Population Biology (Concepts and Models).* Springer - Verlag, New York, Inc., (1997).
- [22] JUAN; A.A.; BAUTISTA, G. *Didáctica de las matemáticas en enseñanza superior: la utilización de software especializado.* UUOC, (2000).
- [23] LOMEN D.; LOVELOCK, D. *Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos.* Compañía Editorial Continental S.A. de C.V., México, (2000).
- [24] MAHAFFY, J.M. *Modeling Mathematical.* San Diego State University, USA, (2001).
- [25] MARTÍN, GARCIA J. *Teoría y ejercicios prácticos de Dinámica de Sistemas.* Editorial Juan Martín Garca, Barcelona, (2003).
- [26] MARTÍN, GARCIA J. *Dinámica de Sistemas. Ejercicios.* Editorial Juan Martín Garca, Barcelona, (2011).
- [27] MARTÍN, GARCIA J. *Dinámica de Sistemas.* Disponible online: <http://dinamica-de-sistemas.com/>

- [28] MARTÍN, GARCIA J. *Tutorial completo del Vensim*. Disponible online: <http://www.slideshare.net/jes4791/manual-completo-de-vensim>
- [29] MARTÍNEZ VICENTE, S.; LÓPEZ DÍAZ-DELGADO, E. *Iniciación a la Simulación Dinámica*. Editorial Ariel, S.A., Barcelona, (2000).
- [30] MORALES M.D., BARRERA D., CAMPOS J., FERNÁNDEZ J., GONZÁLEZ P., LÓPEZ A.J., PASADAS M.; RAMÍREZ V. *Matemáticas para Económica y Empresariales con Mathematica*. Proyecto Sur, Granada, (1998).
- [31] MEADOWS, D.H.; MEADOWS, D.L.; RANDERS, J. *Mas allá de los límites del crecimiento*. El Pas Aguilar,S.A., Madrid, (1992).
- [32] MEADOWS, D.H. *Limits to Growth*. New York, University Books. (1972).
- [33] NAVAS, J. *Modelos Matemáticos en Biología*. Disponible online: [http://matema.ujaen.es/jnavas/web\\_modelos/index.htm](http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/index.htm)
- [34] RAMÍREZ V., GONZÁLEZ P., PASADAS M.; BARRERA D. *Matemáticas con Mathematica para estudiantes del 1<sup>er</sup> curso de Escuelas Técnicas*. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Granada.
- [35] RODRÍGUEZ, J. *Ecología*. Pirámide, Madrid, (1999).
- [36] ROJAS RIVERO, D.; PERDONO, A. *Teoría General de Sistemas*. Disponible online: <http://tgs7233.galeon.com/>
- [37] ROMERO, J.L.; GARCÍA, C. *Modelos y Sistemas Dinámicos*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Cádiz, (1998).
- [38] VANDERMEER, J. *Elementary Mathematical Ecology*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, (1990).
- [39] ZAMORANO, H. *La dinámica de sistemas y los modelos de simulación por computadora*. Disponible online: <http://galleanoyzamorano.com.ar/sociocib.pdf>