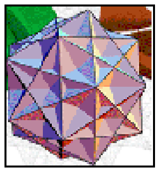

# Tema 4

# INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

**EJERCICIO 4.1 Sea el problema de valor inicial:**

$$\frac{dy}{dt} = (t - y)\,, \qquad y(0) = 2\,.$$

**Encontrar** $y(1)$ **utilizando el método de** *Euler* **de paso** $h = 0.2$

- La ecuación diferencial permite ser resuelta por diversos métodos de integración, siendo su solución general

  $$y(t) = t - 1 + ce^{-t}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

  La solución particular que pasa por $y(0) = 2$ es

  $$y(t) = t - 1 + 3e^{-t}\,.$$

  En consecuencia

  $$\boxed{y(1) = 1.10364}$$

- A continuación vamos a utilizar el método de *Euler*

  $$y_{k+1} = y_k + h\,f(t_k, y_k)\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots, n-1$$

para encontrar un valor aproximado de $y(1)$. En este ejercicio,

$$h = 0.2, \quad n = 5\,, \quad f(t,y) = t - y, \quad (t_0, y_0) = (0, 2)\,.$$

De esta manera:

$$\begin{array}{l}
y(0.2) = y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0) = 2 + 0.2\,(0.0 - 2) = 1.6 \\
y(0.4) = y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1) = 1.6 + 0.2\,(0.2 - 1.6) = 1.32 \\
y(0.6) = y_3 = y_2 + h\, f(t_2, y_2) = 1.32 + 0.2\,(0.4 - 1.32) = 1.136 \\
y(0.8) = y_4 = y_3 + h\, f(t_3, y_3) = 1.136 + 0.2\,(0.6 - 1.136) = 1.0288 \\
y(1.0) = y_5 = y_4 + h\, f(t_4, y_4) = 1.0288 + 0.2\,(0.8 - 1.0288) = \boxed{0.98304}
\end{array}$$

El error que se comete será de $1.10364 - 0.98304 = 0.1206$, o en forma de porcentaje

$$\frac{|1.10364 - 0.98304|}{1.10364} = 0.1092 \quad \Rightarrow \quad 10.92\%\,.$$

- El ejercicio también puede ser resuelto haciendo uso del `Mathematica`®. Empezamos introduciendo los datos,

```
f[t_, y_] := t - y;
a = 0.;
b = 1.;
datos = {2.};
n = 5;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
```

A continuación aplicamos el método de *Euler* y guardamos los resultados en la lista que tiene por nombre `datos`.

```
For[i = 2, i <= n + 1, i + +, AppendTo[datos, datos[[i - 1]]+
hf[nodo[[i - 1]], datos[[i - 1]]]]];
```

La respuesta a nuestro ejercicio será

```
Table[{nodo[[i]], datos[[i]]}, {i, n + 1}]
```

$$\boxed{\{\{0., 2.\}, \{0.2, 1.6\}, \{0.4, 1.32\}, \{0.6, 1.136\}, \{0.8, 1.0288\}, \{1., 0.98304\}\}\,.}$$

Estos datos podemos representarlos a través de la siguiente instrucción:

```
aproximada = ListPlot[Table[{nodo[[i]], datos[[i]]}, {i, n + 1}],
PlotJoined− > True]
```

El resultado puede verse en la Figura 7.1.

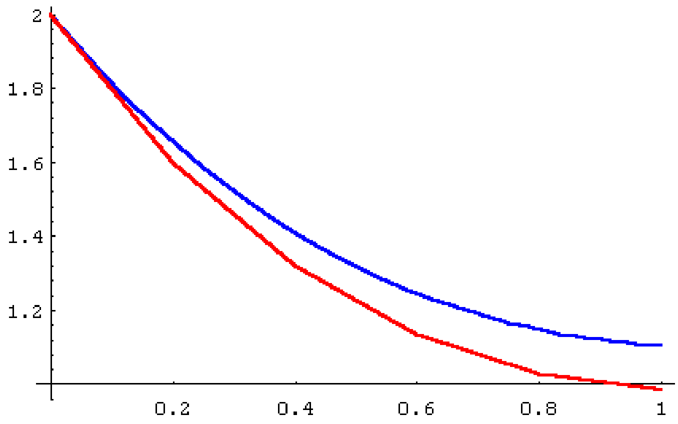


**Figura 7.1.** Rojo: solución aproximada. Azul: solución exacta.

- También podemos resolver el problema de valores iniciales con las siguientes instrucciones.

```
solucion = DSolve[y'[t] == t − y[t], y[t], t]
solecuacion = y[t]/.solucion[[1]]
constante = Solve[(solecuacion/.t → 0) == 1, C[1]]
solucionexacta = solecuacion/.constante[[1]]
```

Finalmente dibujamos la solución exacta (ver Figura 7.1.)

```
graficaexacta = Plot[solucionexacta, {t, a, b},
PlotStyle → {Dashing[{0.02, 0.02}]}];
```

y superponemos las dos gráficas:

```
Show[aproximada, graficaexacta];
```

**EJERCICIO 4.2 Utilizar el método de *Euler* para aproximar la solución del problema de valor inicial:**

$$\frac{dy}{dt} = y' = y - t^2 + 1\,, \quad 0 \le t \le 2\,, \quad y(0) = 0.5\,,$$

**con $n = 10$.**

- La ecuación diferencial es lineal de primer orden. La solución exacta del ejercicio viene dada por

$$y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(2) = 5.3054720\,.}$$

- Si utilizamos el método de *Euler* con

$$h = 0.2, \quad n = 10\,, \quad f(t, y) = y - t^2 + 1, \quad (t_0, y_0) = (0, 0.5)\,,$$

obtenemos los valores reflejados en la Tabla 7.1.

| $t_k$ | $y_k$ | $y(0)$ | *ERROR* |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000000 | 0.5000000 | 0.0000000 |
| 0.2 | 0.8000000 | 0.8292986 | 0.0292986 |
| 0.4 | 1.15200000 | 1.2140877 | 0.0620877 |
| 0.6 | 1.5504000 | 1.6489406 | 0.0985406 |
| 0.8 | 1.9884800 | 2.1272295 | 0.1387495 |
| 1.0 | 2.4581760 | 2.6408591 | 0.1826831 |
| 1.2 | 2.9498112 | 3.1799415 | 0.2301303 |
| 1.4 | 3.4517734 | 3.7324000 | 0.2806266 |
| 1.6 | 3.9501281 | 4.2834838 | 0.3333557 |
| 1.8 | 4.4281538 | 4.8151763 | 0.3870225 |
| 2.0 | **4.8657845** | **5.3054720** | **0.4396874** |

**Tabla 7.1.**

Observemos como los errores crecen a medida que aumentamos los valores de $t_k$. Esto es consecuencia de la poca estabilidad del método de *Euler*.

**EJERCICIO 4.3 Aplicar el método de *Euler* con $h = 0.1$, para calcular un valor aproximado de $y(1)$ del problema,**

$$y' = -2ty\,, \quad y(0) = 1\,.$$

- Es fácil comprobar que $y = e^{-t^2}$, es la solución del problema de valor inicial. Por tanto

$$\boxed{y(1) = 0.3678794412}$$

- Tomamos el intervalo $[0,\ 1]$ y lo dividimos en diez partes. Obtenemos de esta manera la partición $t_j$ con $j = 0, 1, 2, \cdots, 10$. Si aplicamos el método de *Euler*

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k,\, y_k) = y_k - 2ht_ky_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, 9\,,$$

con $y_0 = y(0) = 1$, entonces obtenemos los valores que aparecen en la Tabla 7.2.

| $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ | $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.00000 | 0.00000 | 0.6 | 0.73224 | 0.03456 |
| 0.1 | 1.00000 | 0.00995 | 0.7 | 0.64437 | 0.03174 |
| 0.2 | 0.98000 | 0.01921 | 0.8 | 0.55416 | 0.02686 |
| 0.3 | 0.94080 | 0.02686 | 0.9 | 0.46549 | 0.020637 |
| 0.4 | 0.88435 | 0.03220 | **1.0** | **0.38170** | **0.01382** |
| 0.5 | 0.81360 | 0.03480 | – | – | – |

**Tabla 7.2.**

- Podemos comprobar como el error crece cuando aumentamos el valor de $k$. Utilizando el software adecuado es fácil ver que $y_{100} = 0.3691201$ es un valor aproximado de $y(1)$. Ahora, el error cometido es $|0.3691201 - 0.3678794| = 0.0012406$, que es mucho menor que cuando el paso era $h = 0.1$

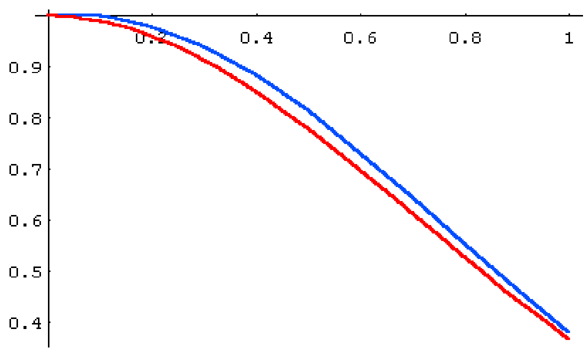


**Figura 7.2.** Rojo: valor exacto. Azul: valor. aproximado.

**EJERCICIO 4.4 Resolver el problema de valor inicial**

$$\frac{dy}{dt} = t - y\,, \qquad y(0) = 2\,,$$

**utilizando el método de** *Taylor* **de segundo orden y con un paso** $h = 0.2$**.**

- Sabemos que para este método

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k,\, y_k) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t,y)}{dt}\right)_{(t_k,y_k)}\,, \quad k = 0,\, 1,\, \cdots,n\,,$$

donde

$$\frac{df(t,\, y)}{dt} = \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}\,.$$

En nuestro caso,

$$\frac{df(t,\,y)}{dt} = 1 - t + y\,,$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
y_1 = y(0.2) \quad &= y_0 + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t,y)}{dt}\right)_{(t_0,y_0)}\\
&= y_0 + h(t_0 - y_0) + \frac{h^2}{2!}(1 - t_0 + y_0)\\
&= 2 + 0.2(0-2) + \frac{0.2^2}{2}(1 - 0 + 2) = 1.66\,.
\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}
y_2 = y(0.4) \quad &= y_1 + hf(t_1, y_1) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t,y)}{dt}\right)_{(t_1,y_1)}\\
&= y_1 + h(t_1 - y_1) + \frac{h^2}{2!}(1 - t_1 + y_1)\\
&= 1.66 + 0.2(0.2 - 1.66) + \frac{0.2^2}{2}(1 - 0.2 + 1.66) = 1.4172\,.
\end{aligned}$$

Aplicando de forma reiterativa este proceso obtenemos

$$y_3 = y(0.6) = 1.254\,, \quad y_4 = y(0.8) = 1.15637,, \quad \boxed{y_5 = y(1) = 1.11222}$$

El error absoluto que cometemos es $1.11222 - 1.10364 = 0.00858$, y un error porcentual del $0.78\%$.

- A continuación resolveremos este mismo ejercicio con Mathematica®. Las primeras instrucciones corresponden a la introducción de los datos.

```
y'[t] = t − y[t];
a = 0.;
b = 1.;
n = 5;
datos = {2.};h = (b − a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
```

Ahora, tenemos que construir las funciones que nos dan las derivadas primera y segunda de cualquier solución de la ecuación diferencial asociada a nuestro problema.

```
dy1 = y'[t];
dy2 = D[y'[t], t];
s1[u_, v_] := dy1/.{y[t]− > v, t− > u}
s2[u_, v_] := dy2/.{y[t]− > v, t− > u}
```

Posteriormente construimos las aproximaciones, programando el método de *Taylor*

```
For[i = 2, i <= n + 1, i + +, aux = datos[[i − 1]]+
h ∗ s1[nodo[[i − 1]], datos[[i − 1]]]+
(h^2/2)s2[nodo[[i − 1]], datos[[i − 1]]];
AppendTo[datos, aux]];
```

El resultado puede visualizarse a través de la instrucción

```
Print[Table[{nodo[[i]], datos[[i]]}, {i, n + 1}]]
```

$$\boxed{\{\{0., 2.\}, \{0.2, 1.66\}, \{0.4, 1.4172\}, \{0.6, 1.2541\}, \{0.8, 1.15637\}, \{1., 1.11222\}\}}$$

**EJERCICIO 4.5 Aplicar el método de *Taylor* de órdenes dos y cuatro al problema de valor inicial**

$$\frac{dy}{dt} = y' = y - t^2 + 1\,, \quad 0 \leq t \leq 2\,, \quad y(0) = 0.5\,,$$

**con $n = 10$.**

- Empezamos analizando el caso de orden dos. Para ello necesitamos conocer

$$\frac{df(t, y(t))}{dt} = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1) = y' - 2t = y - t^2 + 1 - 2t\,, \tag{4.1}$$

con lo cual podemos aplicar

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k,\, y_k) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t, y)}{dt}\right)_{(t_k, y_k)}\,, \quad k = 0,\, 2,\, \cdots, n\,,$$

y obtenemos los valores que aparecen en la Tabla 7.3.

| $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ | $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000000 | 0 | 1.2 | 3.1913480 | 0.011465 |
| 0.2 | 0.8300000 | 0.0007014 | 1.4 | 3.7486446 | 0.0162446 |
| 0.4 | 1.2158000 | 0.0017123 | 1.6 | 4.3061464 | 0.0226626 |
| 0.6 | 1.6520760 | 0.0031354 | 1.8 | 4.8462986 | 0.0311223 |
| 0.8 | 2.13233327 | 0.0051032 | **2.0** | **5.3476843** | **0.0422123** |
| 1.0 | 2.6486459 | 0.0077868 | - | - | |

**Tabla 7.3.**

- Para aplicar el método de *Taylor* de orden cuatro previamente necesitamos conocer las siguientes derivadas,

$$\frac{d^2 f(t,y(t))}{dt^2} = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1 - 2t) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

$$\frac{d^3 f(t,y(t))}{dt^3} = \frac{d}{dt}(y - t^2 - 2t - 1) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

y sustituir en la expresión

$$\begin{aligned} y_{k+1} = \; & y_k + hf(t_k,\, y_k) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{df(t,y)}{dt}\right)_{(t_k,y_k)} + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{d^2 f(t,y)}{dt^2}\right)_{(t_k,y_k)} \\ & + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{d^3 f(t,y)}{dt^3}\right)_{(t_k,y_k)} . \end{aligned}$$

Un valor aproximado de $y(0.2)$ lo calculamos como

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.5 + 0.1 f(0,0.5) + \tfrac{0.1^2}{2} f'(0,0.5) + \tfrac{0.1^3}{6} f''(0,0.5) + \tfrac{0.1^4}{2} f'''(0,0.5) \\ &= 0.82930\,. \end{aligned}$$

Aplicando de forma reiterada la fórmula anterior, obtenemos los valores que aparecen en la Tabla 7.4.

| $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ | $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000000 | 0 | 1.2 | 3.1799640 | 0.0000225 |
| 0.2 | 0.8293000 | 0.0000014 | 1.4 | 3.7324321 | 0 .0000321 |
| 0.4 | 1.2140910 | 0.0000034 | 1.6 | 4.2835285 | 0.0000447 |
| 0.6 | 1.6489468 | 0.0000062 | 1.8 | 4.8152377 | 0.0000615 |
| 0.8 | 2.1272396 | 0.0000101 | **2.0** | **5.3055554** | **0.0000834** |
| 1.0 | 2.6408744 | 0.0000153 | - | - | |

**Tabla 7.4.**

**EJERCICIO 4.6 Aplicar el método de** *Taylor* **de orden dos para calcular el valor aproximado de $y(1)$ en el problema de valores iniciales**

$$y' = -2ty\,, \quad y(0) = 1\,,$$

**tomando $h = 0.1$.**

- Calculamos la derivada de la función $y' = f(t,\, y) = -2ty$, respecto de $t$.

$$\frac{df(t,y)}{dt} = y''(t) = -2y - 2ty' = -2y - 2t(-2ty) = -2y + 4t^2 y\,.$$

En consecuencia,

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\frac{df(t_k, y_k)}{dt} = y_k - 2ht_k y_k + \frac{h^2}{2}(-2y_k + 4t_k^2 y_k)$$

Los resultados que se obtienen pueden verse en la tabla siguiente.

| $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ | $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0.6 | 0.69550 | $2.17608927 \times 10^{-3}$ |
| 0.1 | 0.99 | $4.98337491 \times 10^{-5}$ | 0.7 | 0.61009 | $2.53358646 \times 10^{-3}$ |
| 0.2 | 0.96049 | $2.91439152 \times 10^{-4}$ | 0.8 | 0.52455 | $2.73462797 \times 10^{-3}$ |
| 0.3 | 0.91324 | $6.89686871 \times 10^{-4}$ | 0.9 | 0.44209 | $2.76075569 \times 10^{-3}$ |
| 0.4 | 0.85095 | $1.18536075 \times 10^{-4}$ | **1.0** | **0.36526** | **2.61864321** $\times 10^{-3}$ |
| 0.5 | 0.77709 | $1.70555464 \times 10^{-3}$ | | | |

**EJERCICIO 4.7 Encontrar un valor aproximado de $y(1)$, por el método de Runga-Kutta de cuarto orden, del siguiente problema de valores iniciales**

$$y' = f(t, y) = t - y\,, \quad y(0) = 2\ ,$$

**con** $h = 0.2$

- En primer lugar debemos encontrar las constantes

$$k_1 = f(t_0,\, y_0) = f(0,\, 2) = 0 - 2 = -2$$

$$k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2},\, y_0 + \frac{hk_1}{2}) = f(0 + \frac{0.2}{2},\, 2 + \frac{0.2(-2)}{2}) = -1.7$$

$$k_3 = f(t_0 + \frac{h}{2},\, y_0 + \frac{hk_2}{2}) = f(0 + \frac{0.2}{2},\, 2 + \frac{0.2(-1.7)}{2}) = -1.73$$

$$k_4 = f(t_0 + h,\, y_0 + hk_3) = f(0 + 0.2,\, 2 + 0.2 \times (-1.73)) = -1.454$$

y a continuación aplicar la fórmula

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\ ,$$

para saber un valor aproximado de $y(0.2)$.

$$y_1 = \quad y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) =$$

$$2 + \frac{0.2}{6}(-2 + 2(-1.7) + 2(-1.73) - 1.454) = 1.6562$$

Repitiendo el proceso, obtenemos las aproximaciones

$$\begin{array}{ll} y_2 = y(0.4) = 1.41097\,, & y_3 = y(0.6) = 1.24645 \\ y_4 = y(0.8) = 1.14801\,, & y_5 = y(1.0) = 1.10366\,. \end{array}$$

El error que se comete es de 0.00001 y un error porcentual del 0.0009%.

- A continuación utilizaremos el programa `Mathematica`®.

```
f[t_, y_] := t - y;
a = 0.;
b = 1.;
datos = {2.};
n = 5;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
For[i = 2, i <= n + 1, i + +,
k1 = f[nodo[[i - 1]], datos[[i - 1]]];
k2 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, datos[[i - 1]] + (h/2)k1];
k3 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, datos[[i - 1]] + (h/2)k2];
k4 = f[nodo[[i - 1]] + h, datos[[i - 1]] + hk3];
AppendTo[datos, datos[[i - 1]] + (h/6)(k1 + 2k2 + 2k3 + k4)]];
```

e imprimimos los resultados

```
Print[Table[{nodo[[i]], datos[[i]]}, {i, n + 1}]]
```

$$\boxed{\{\{0., 2.\}, \{0.2, 1.6562\}, \{0.4, 1.41097\}, \{0.6, 1.24645\}, \{0.8, 1.148\}, \{1., 1.10366\}\}}$$

**EJERCICIO 4.8 Aplicar el método de** *Runge-Kutta* **de orden cuatro con** $h = 0.1$ **para obtener un valor aproximado de** $y(1)$ **en el siguiente problema de valor inicial,**

$$y' = -2ty\,, \quad y(0) = 1\,.$$

- Utilizando el mismo procedimiento del ejercicio anterior se llega a la tabla:

| $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ | $t_k$ | $y_k$ | $ERROR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.00000 | 0.00000 | 0.6 | 0.69767 | $6.11067 \times 10^{-8}$ |
| 0.1 | 0.99004 | $4.15834\times 10^{-10}$ | 0.7 | 0.61262 | $2.15806\times 10^{-7}$ |
| 0.2 | 0.96078 | $3.91674\times 10^{-9}$ | 0.8 | 0.52729 | $5.06502\times 10^{-7}$ |
| 0.3 | 0.91393 | $1.12525\times 10^{-8}$ | 0.9 | 0.44485 | $9.70467\times 10^{-7}$ |
| 0.4 | 0.85214 | $1.64987\times 10^{-8}$ | **1.0** | **0.36788** | $\mathbf{1.62525}\times 10^{-6}$ |
| 0.5 | 0.77880 | $2.52770\times 10^{-9}$ | - | - | |

**EJERCICIO 4.9 Aplicar el método de *Runge-Kutta* de orden cuatro para calcular el valor aproximado de $x(1)$ e $y(1)$ en el problema de valores iniciales**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) = f(t,x,y) = -4y + \cos t & ; & x(0) = 0 \\ y'(t) = g(t,x,y) = x & ; & y(0) = 0 \end{array} \right.$$

**tomando $h = 0.1$.**

- Tenemos que utilizar

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(\alpha_{k1} + 2\alpha_{k2} + 2\alpha_{k3} + \alpha_{k4})$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(\beta_{k1} + 2\beta_{k2} + 2\beta_{k3} + \beta_{k4})$$

donde

$$\alpha_{k1} = f(t_k, x_k, y_k) \qquad \beta_{k1} = g(t_k, x_k, y_k)$$

$$\alpha_{k2} = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h\alpha_{k1}}{2}, y_k + \frac{h\beta_{k1}}{2}) \qquad \beta_{k2} = g(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h\alpha_{k1}}{2}, y_k + \frac{h\beta_{k1}}{2})$$

$$\alpha_{k3} = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h\alpha_{k2}}{2}, y_k + \frac{h\beta_{k2}}{2}) \qquad \beta_{k3} = g(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h\alpha_{k2}}{2}, y_k + \frac{h\beta_{k2}}{2})$$

$$\alpha_{k4} = f(t_k + h, x_k + h\alpha_{k3}, y_k + h\beta_{k3}) \qquad \beta_{k4} = g(t_k + h, x_k + h\alpha_{k3}, y_k + h\beta_{k3})$$

La tabla de las soluciones con $h = 0.1$ es la siguiente

| $t_k$ | $x_k$ | $y_k$ | $t_k$ | $x_k$ | $y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.6 | 0.43314 | 0.15432 |
| 0.1 | 0.09917 | 0.00498 | 0.7 | 0.44223 | 0.19829 |
| 0.2 | 0.19339 | 0.01967 | 0.8 | 0.42726 | 0.24196 |
| 0.3 | 0.27792 | 0.04333 | 0.9 | 0.38813 | 0.28293 |
| 0.4 | 0.34843 | 0.07478 | **1.0** | **0.32571** | **0.31881** |
| 0.5 | 0.40117 | 0.11242 | – | – | – |

## EJERCICIOS PROPUESTOS:

1.- Considerar el problema de valor inicial:

$$y' = f(t,\, y) = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8.5\,, \quad t \in [0,\, 4]\,, \quad y(0) = 1\,.$$

1.a.- Encontrar la solución exacta $y(t)$.

1.b.- Supongamos que $h = 0.1$. Encontrar la solución por el método de *Euler* en los puntos 1, 2, 3 y 4.

1.c.- Representar en un mismo gráfico, la solución exacta y la solución aproximada.

2.- Usar el método de *Euler* para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas:

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} & y' = te^{3t} - 2y & , \ t \in [0\,,\, 1]\,, & y(0) = 0\,, & h = 0.2 \\ \text{(b)} & y' = 1 + (t-y)^2 & , \ t \in [2\,,\, 3]\,, & y(2) = 1\,, & h = 0.1 \end{array}$$

3.- Resolver el ejercicio anterior haciendo uso del método de *Taylor* de orden dos y de orden cuatro.

4.- Usar el método de *Taylor* de orden dos para aproximar las solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial:

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} & y' = \left(\dfrac{y}{t}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{t}\right) & , \ t \in [1\,,\, 1.4]\,, & y(1) = 1\,, & h = 0.1 \\ \text{(b)} & y' = \operatorname{sen} t + e^{-t} & , \ t \in [0\,,\, 1.0]\,, & y(0) = 0\,, & h = 0.25 \end{array}$$

5.- Considerar el problema de valor inicial:

$$y' = f(t,\, y) = 4e^{0.8t} - 0.5y\,, \quad t \in [0\,,\, 4]\,, \quad y(0) = 2$$

5.a.- Encontrar la solución exacta $y(t)$.

5.b.- Supongamos que $h = 0.1$. Encontrar la solución por el método de *Runge-Kutta* de orden cuatro, en el punto 4.

5.c.- Representar en un mismo gráfico, la solución exacta y la solución aproximada.