

Tema 3

MODELOS BASADOS EN SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

EJERCICIO 3.1 Dos poblaciones $x(t)$ e $y(t)$, compuestas inicialmente por $x(0) = 20$ e $y(0) = 185$ individuos, crecen de acuerdo con la ley logística de parámetros $r_1 = 0.3; K_1 = 3000$ la $x(t)$ y $r_2 = 0.2; K_2 = 3000$ la $y(t)$, respectivamente.

- 1.- Hallar el instante en que coinciden los efectivos de las dos poblaciones.
- 2.- ¿Coinciden en ese instante, en el que lo hacen los efectivos, las tasas instantáneas de crecimiento?.
- 3.- Calcular las coordenadas del punto en que la velocidad de crecimiento es máxima para cada una de las poblaciones.
- 4.- Si una tercera población $z(t)$ crece según la ley de *Malthus* y sus efectivos para $t = 0$ y $t = 4$ son, respectivamente, $z(0) = x(0) = 20$ y $z(4) = y(0) = 185$, ¿cuántos efectivos componen esta población en el instante t obtenido en el primero de los apartados?.
- 5.- Representar gráficamente $x(t)$ e $y(t)$.

- Del enunciado deducimos

$$x(t) = \frac{K_1}{1 + A_1 e^{-r_1 t}} \Rightarrow x(t) = \frac{3000}{1 + A_1 e^{-0.3t}}, \quad x(0) = 20,$$

sustituyendo

$$20 = \frac{3000}{1 + A_1} \Rightarrow A_1 = 149.$$

La primera de las leyes es

$$x(t) = \frac{3000}{1 + 149e^{-0.3t}}.$$

Razonando de la misma manera puede comprobarse que

$$y(t) = \frac{3000}{1 + 15.2e^{-0.2t}}.$$

- Si igualamos estas dos expresiones

$$\frac{3000}{1 + 149e^{-0.3t}} = \frac{3000}{1 + 15.2e^{-0.2t}} \Rightarrow 15.2e^{-0.2t} = 149e^{-0.3t} \Rightarrow \frac{15.2}{149} = e^{-0.1t},$$

tomando logaritmos neperianos

$$t = -\frac{1}{0.1} \ln\left(\frac{15.2}{149}\right) \approx 23.$$

En este momento ($t = 23$) las tasas instantáneas de crecimiento $T(t) = x'(t)/x(t)$, toman los valores

$$T_1(23) = 0.3 \left(1 - \frac{x(23)}{3000}\right) = 0.3 \left(1 - \frac{2608}{3000}\right) \approx 0.0392$$

$$T_2(23) = 0.2 \left(1 - \frac{y(23)}{3000}\right) = 0.2 \left(1 - \frac{2602}{3000}\right) \approx 0.02653$$

- Para el tercero de los apartados necesitamos saber el valor de t tal que $x(t) = K/2, y(t) = K/2$. Es decir,

$$x(t) = \frac{3000}{1 + 149e^{-0.3t}} = \frac{3000}{2} \Rightarrow t = -\frac{1}{0.3} \ln\left(\frac{1}{149}\right) \approx 16.67$$

$$y(t) = \frac{3000}{1 + 15.2e^{-0.2t}} = \frac{3000}{2} \Rightarrow t = -\frac{1}{0.2} \ln\left(\frac{1}{15.2}\right) \approx 13.6$$

Las coordenadas pedidas son (16.67, 1500) en el primer caso y (13.6, 1500) en el segundo.

- Para el siguiente apartado estamos ante el crecimiento exponencial

$$z(t) = z(0)e^{rt} = 20e^{rt}, \quad z(4) = y_0 = 185.$$

El valor de la constante r de crecimiento es

$$185 = 20e^{4r} \Rightarrow r = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{185}{20} \right) \approx 0.556.$$

El modelo propuesto es

$$z(t) = 20e^{0.556t}$$

- La siguiente figura corresponde a la representación gráfica de las funciones $x(t)$ e $y(t)$.

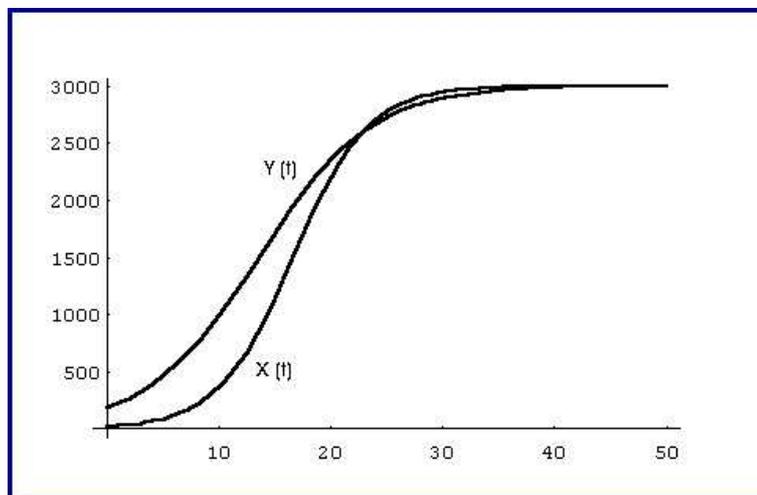


Figura 6.1.

EJERCICIO 3.2 Las funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ representan los efectivos de dos especies animales competitivas, inicialmente integradas por 200 y 100 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\begin{cases} y_1'(t) = 0.05y_1(t) - 0.02y_2(t) \\ y_2'(t) = -0.02y_1(t) + 0.03y_2(t) \end{cases}$$

medido el tiempo t en años.

- 1.- Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.
- 2.- Encontrar el número de individuos para $t = 30$ años.

- Empezamos expresando el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = 10^{-2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores y vectores propios de la matriz,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \{\{5, -2\}, \{-2, 3\}\} \\ \text{Eigenvalues}[\mathbf{A}] \\ \text{Eigenvectors}[\mathbf{A}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 10^{-2}(4 + \sqrt{5}), & \vec{v}_1 &= (2, 1 - \sqrt{5}) \\ \lambda_2 &= 10^{-2}(4 - \sqrt{5}), & \vec{v}_2 &= (2, 1 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

La solución general es

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t},$$

Al ser $y_1(0) = 200$, $y_2(0) = 100$, entonces si sustituimos y resolvemos el sistema obtenemos que $c_1 = c_2 = 50$. La solución particular es ahora

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = 50 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 50 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t}}$$

- La función $y_1(t)$ que nos da los efectivos de la primera de las especies es

$$y_1(t) = 100e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 100e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t},$$

la cual es siempre creciente, lo que implica que para la primera especie, siempre aumentará el número de efectivos. Sin embargo,

$$y_2(t) = 50(1 - \sqrt{5})e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 50(1 + \sqrt{5})e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t},$$

tiene un término negativo, que se anula cuando

$$50(1 - \sqrt{5})e^{10^{-2}(4+\sqrt{5})t} + 50(1 + \sqrt{5})e^{10^{-2}(4-\sqrt{5})t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t \approx 21.5 \text{ años.}$$

Es decir, al cabo de los 21.5 años, la segunda de las especies desaparecerá y sólo quedará la primera de ellas. El sistema de ecuaciones diferenciales quedará en estos momentos reducida a la ecuación

$$y_1'(t) = 0.05y_1(t) \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = y_0e^{0.05t},$$

y en consecuencia $y(30) = 896$ individuos.

EJERCICIO 3.3 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 10 y 5 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx}{dt} = -3x(t) \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} = 2y(t) \end{cases}$$

medido el tiempo t en meses.

- 1.- Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.
- 2.- Encontrar el número de individuos al cabo de un año.
- 3.- Encontrar y analizar el plano fase.
- 4.- Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.

- En primer lugar, debemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

y para ello, es necesario encontrar los valores propios de la matriz que define el sistema

$$\mathbf{A} := \{-3, 0\}, \{0, 2\}$$

$$\text{Eigenvalues}[\mathbf{A}]$$

$\{-3, 2\}$. Es decir, dos valores propios reales con signos distintos. Siendo sus vectores propios asociados

$$\text{Eigenvectors}[\mathbf{A}]$$

$\{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}$. En consecuencia, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = k_1 e^{-3t} \\ y(t) = k_2 e^{2t} \end{cases}$$

Las constantes $k_1 = 10$ y $k_2 = 5$ las determinamos de las condiciones iniciales $x(0) = 10$ e $y(0) = 5$. Por tanto,

$$x(t) = 10e^{-3t}, \quad y(t) = 5e^{2t}.$$

Observemos que si $t \rightarrow +\infty$, entonces $x(t) \rightarrow 0$, e $y(t) \rightarrow +\infty$. Por otro lado, si $t \rightarrow -\infty$, entonces $x(t) \rightarrow +\infty$, e $y(t) \rightarrow 0$.

- La población al cabo de un año será de

$$x(12) \approx 2.3 \times 10^{-15}, \quad y(12) \approx 1.3 \times 10^{11}$$

- El plano fase lo construimos haciendo uso del programa Mathematica®.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{-3x, 2y}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25}]
```

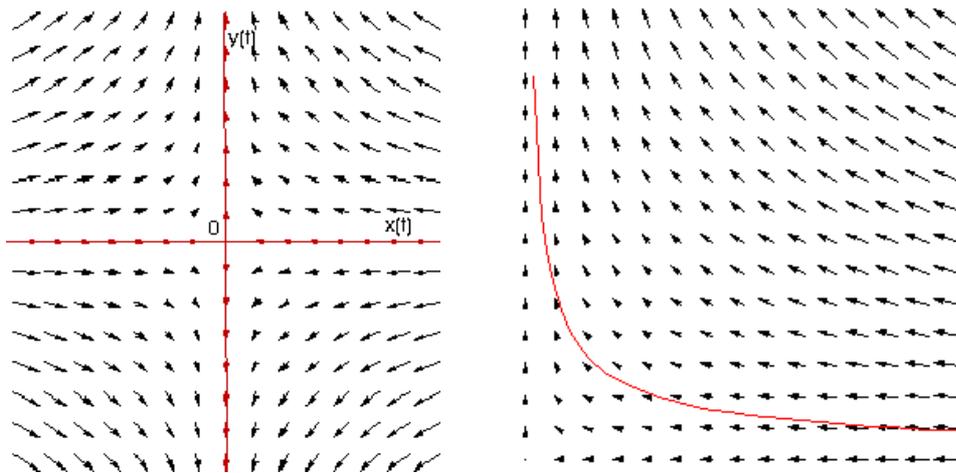


Figura 6.2. Plano fase y curva solución para el sistema.

- Es inmediato comprobar que las únicas soluciones constantes son $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Por tanto, el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema. En la Figura 6.2 podemos observar que en la dirección del eje de abscisas el origen es un sumidero. En cambio, según el eje de ordenadas el $(0, 0)$ es una fuente. A este tipo de puntos de equilibrio se le conoce con el nombre de **punto de silla**. Además, el punto de equilibrio es **inestable**.

Como en este ejercicio

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{-3x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{y} dy = \frac{2}{x} dx,$$

es una ecuación diferencial de variables separables, entonces es posible encontrar de forma explícita la ecuación de las trayectorias (las curvas solución del sistema).

$$-3 \ln |y| = 2 \ln |x| + \ln |k| \quad \Rightarrow \quad y^{-3} = kx^2,$$

o bien,

$$y = c \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

De todas ellas, la solución particular $x(0) = 10$, $y(0) = 5$ corresponde a $c = 5\sqrt[3]{100}$. Es decir

$$y(x) = 5\sqrt[3]{\frac{100}{x^2}}.$$

EJERCICIO 3.4 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 5 y 10 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx}{dt} = -x(t) \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} = -4y(t) \end{cases}$$

medido el tiempo t en años.

- 1.- Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.
- 2.- Encontrar el número de individuos al cabo de un 5 año.
- 3.- Encontrar y analizar el plano fase.
- 4.- Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.

- El sistema anterior puede escribirse matricialmente

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz anterior son

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \{\{-1, 0\}, \{0, -4\}\} \\ \text{Eigenvalues}[\mathbf{A}] \end{aligned}$$

$\{-1, -4\}$. Es decir, dos valores propios reales diferentes de signo negativo. Es de esperar dos soluciones en líneas rectas que tiendan a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Los vectores propios asociados son

$$\text{Eigenvectors}[\mathbf{A}]$$

$\{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}$. En consecuencia, la solución general viene dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = k_1 e^{-t} \\ y(t) = k_2 e^{-4t} \end{cases}$$

Encontramos $k_1 = 5$ y $k_2 = 10$ a partir de las condiciones iniciales $x(0) = 5$ e $y(0) = 10$. Por tanto, $x(t) = 5e^{-t}$ e $y(t) = 10e^{-4t}$.

- La población al cabo de cinco años será de

$$x(5) = 5e^{-3t} \approx 0.0336897, \quad y(5) = 10e^{2t} \approx 2.06115 \times 10^{-8}$$

- A continuación construimos el plano fase

```
<< Graphics'PlotField'
PlotVectorField[{-x, -4y}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25}]
```

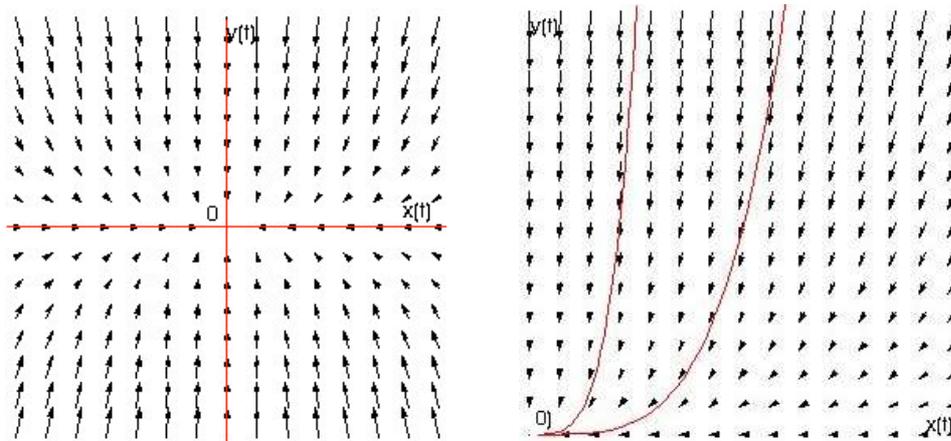


Figura 6.3. Plano fase y curva solución para el sistema.

- Es fácil comprobar que el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema. En la Figura 6.3 podemos observar que en la direcciones de los ejes, el origen es un sumidero. En este caso, el origen es un punto de equilibrio **estable**. A largo plazo, independientemente de las condiciones iniciales, las dos especies desaparecerán.

Como en el ejercicio anterior,

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{-4y}{-x} \Rightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{4}{x}dx,$$

es una ecuación diferencial de variables separables. Podemos encontrar la ecuación de las trayectorias

$$\ln |y| = 4 \ln |x| + \ln |k| \Rightarrow y = kx^4,$$

La solución particular $x(0) = 5$, $y(0) = 10$ corresponde a $k = 10/5^4$. Es decir

$$y(x) = \frac{10}{5^4}x^4.$$

EJERCICIO 3.5 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 5 y 5 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} = x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

medido el tiempo t en años.

- 1.- Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.
- 2.- Encontrar el número de individuos al cabo de 3 años.
- 3.- Encontrar y analizar el plano fase.
- 4.- Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.

- Estamos ante el sistema de ecuaciones diferenciales lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Para resolverlo encontramos los valores propios de la matriz

$$\mathbf{A} := \{\{2, 2\}, \{1, 3\}\}$$

$$\text{Eigenvalues}[\mathbf{A}]$$

$\{4, 1\}$. Es decir, dos valores propios reales con signos positivos. Siendo sus vectores propios asociados

$$\text{Eigenvectors}[\mathbf{A}]$$

$\{\{1, 1\}, \{-2, 1\}\}$. En consecuencia, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = k_1 e^{4t} - 2k_2 e^t \\ y(t) = k_1 e^{4t} + k_2 e^t \end{cases}$$

Las soluciones en líneas rectas las obtendremos suponiendo que $k_1 = 0$ y a continuación $k_2 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Si } k_1 = 0 &\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ \text{Si } k_2 = 0 &\Rightarrow y = x \end{aligned}$$

La solución particular pedida, la deducimos de las condiciones iniciales $x(0) = 10$ e $y(0) = 5$. Por tanto, $k_1 = 5$, $k_2 = 5$, y en consecuencia, $x(t) = 5e^{4t}$ e $y(t) = 5e^{4t}$.

- La población en el tercer año será $x(3) = y(3) = 813774$.
- El plano fase lo construimos haciendo uso del programa Mathematica[®].

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{2x + 2y, x + 3y}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25}]
```

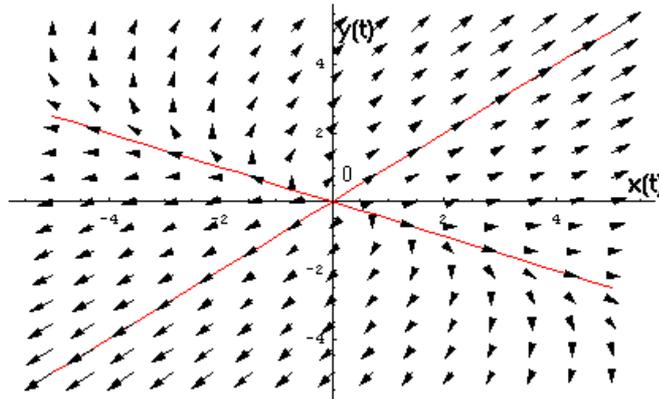


Figura 6.4. Plano fase y curvas solución $y = x$, $y = -0.5x$.

- Las únicas soluciones constantes son $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Por tanto, el $(0,0)$ es un punto de equilibrio del sistema. En la Figura 6.4 podemos observar que el origen es una **fuerza**, todas las soluciones se alejan del origen cuando el tiempo crece. Además, el punto de equilibrio es **inestable**.

Veamos ahora que en este caso es imposible obtener una expresión explícita de las órbitas o trayectorias. Razonando de manera similar a los ejercicios anteriores,

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{2x + 2y} \Rightarrow (2x + 2y)dy = (x + 3y)dx,$$

es una ecuación diferencial homogénea de grado uno. Para resolverla, es necesario dividir la ecuación diferencial por x y hacer posteriormente el cambio $y/x = z$, con lo cual $dy = xdz + zdx$. Sustituyendo

$$(1 + 3z)dx = (2 + 2z)(xdz + zdx) \Rightarrow (1 + z - 2z^2)dx = (2 + 2z)xdz,$$

se convierte en una ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{1}{x} dx = \frac{2 + 2z}{1 + z - 2z^2} dz.$$

Procedemos a descomponer la fracción que aparece en el segundo miembro, como suma de fracciones simples

$$\frac{2 + 2z}{1 + z - 2z^2} = -\frac{1 + z}{(z - 1)(z + 0.5)} = -\frac{4/3}{z - 1} + \frac{1/3}{z + 0.5}.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{2+2z}{1+z-2z^2} dz &\Rightarrow \ln|x| = -\int \frac{4/3}{z-1} dz + \int \frac{1/3}{z+0.5} dz \\ &= -\frac{4}{3} \ln|z-1| + \frac{1}{3} \ln|z+0.5| \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio anterior

$$\ln|x| = -\frac{4}{3} \ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| + \frac{1}{3} \ln\left|\frac{y}{x} + 0.5\right| + k,$$

donde puede apreciarse las dificultades de poder encontrar una expresión explícita del tipo $y = \varphi(x)$.

EJERCICIO 3.6 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 5 y 5 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx}{dt} = -2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} = 3x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

medido el tiempo t en meses.

- 1.- Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.
- 2.- Encontrar el número de individuos al cabo de un año.
- 3.- Encontrar y analizar el plano fase.
- 4.- Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.

- Empezamos escribiendo el sistema matricialmente

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Para resolverlo es necesario encontrar los valores propios de la matriz

$$\begin{aligned} A &:= \{-2, -3\}, \{3, -2\} \\ \text{Eigenvalues}[A] \end{aligned}$$

$\{-2+3i, -2-3i\}$. Es decir, dos números complejos conjugados. Siendo sus vectores propios asociados

$$\text{Eigenvectors}[A]$$

$\{\{i,1\},\{-i,1\}\}$. Para poder encontrar la solución general del sistema, necesitamos conocer dos soluciones particulares linealmente independientes. Para ello, procedemos de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-2+3i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t} (-\operatorname{sen} 3t + i \cos 3t) \\ y(t) = e^{-2t} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) \end{cases}$$

La solución general vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \operatorname{sen} 3t \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

o bien

$$\begin{cases} x(t) = -k_1 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t + k_2 e^{-2t} \cos 3t \\ y(t) = k_1 e^{-2t} \cos 3t + k_2 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t \end{cases}$$

De todas ellas, la que pasa por el punto $(x(0), y(0)) = (5, 5)$ corresponde a $k_1 = 5$ y $k_2 = 5$.

- El número de animales al cabo de 1 año será,

$$\begin{cases} x(12) = -5e^{-24} \operatorname{sen} 36 + 5e^{-24} \cos 36 \\ y(12) = 5e^{-24} \cos 36 + 5e^{-24} \operatorname{sen} 36 \end{cases}$$

- Observemos que ahora no existen soluciones en línea recta, ya que si $k_1 = 0$, entonces

$$x(t) = k_2 e^{-2t} \cos 3t, \quad y(t) = k_2 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t,$$

y no podemos expresar $y = \text{cte } x$.

- Este hecho se observa fácilmente si dibujamos el plano fase.

```
<< Graphics'PlotField'
PlotVectorField[{-2x - 3y, 3x - 2y}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25}]
```

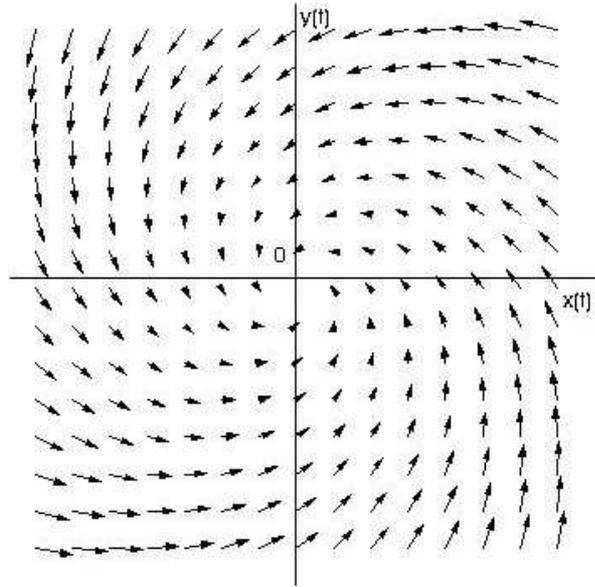


Figura 6.5. Plano fase.

La figura siguiente muestra la evolución a lo largo del tiempo de las soluciones $x(t) = 5e^{-2t} \cos 3t$ e $y(t) = 5e^{-2t} \sin 3t$.

Las dos poblaciones se extinguen a largo plazo.

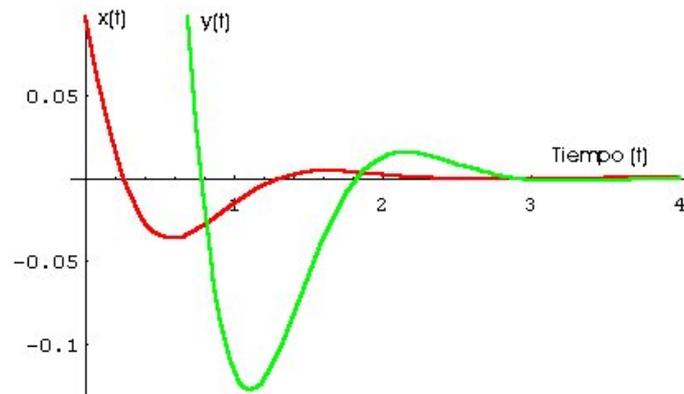


Figura 6.6. Curvas solución $x(t)$, $y(t)$.

En la Figura 6.5 se aprecia que el punto de equilibrio $(0,0)$ es un **sumidero en espiral**.

EJERCICIO 3.7 Las funciones $x(t)$, $y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales, inicialmente integradas por 6 y 9 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx}{dt} = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} = -2y(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

medido el tiempo t en meses.

- 1.- Determinar los efectivos de las especies a lo largo del tiempo.
- 2.- Encontrar el número de individuos al cabo de un año.
- 3.- Encontrar y analizar el plano fase.
- 4.- Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.

- Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Si encontramos los valores propios de la matriz que define el sistema

$$\begin{aligned} A &:= \{-2, 1\}, \{0, -2\} \\ \text{Eigenvalues}[A] \end{aligned}$$

$\{-2, -2\}$. En este caso, sólo existe un valor propio que es un número real positivo. Los vectores propios asociados son

$$\text{Eigenvectors}[A]$$

$\{\{1,0\},\{0,0\}\}$. Existe un único valor propio linealmente independiente. Ahora, sólo podemos encontrar la solución

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o bien

$$x(t) = e^{-2t}, \quad y(t) = 0.$$

Observemos que el eje de abscisas ($y = 0$) es una recta solución del sistema. Para el resto de las soluciones, no podemos encontrar la solución general, pero podemos analizar el sistema de manera cualitativa.

- Empezamos dibujando el plano fase.

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{-2x + y, -2y}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25}]
```

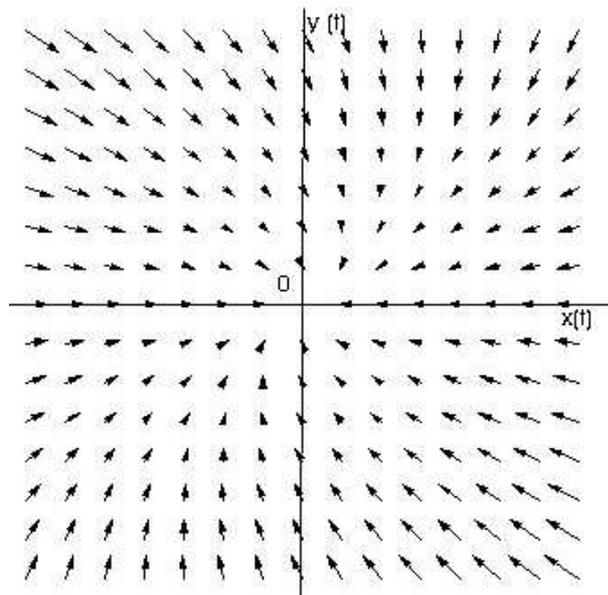


Figura 6.7. Plano fase.

- Podemos observar, que el origen es un sumidero. Si empezamos con unas condiciones iniciales $(x(0), y(0))$ que no se encuentren sobre uno de los ejes, entonces la órbita gira y llega al origen en dirección tangente a la solución en línea recta ($y = 0$). El punto de equilibrio $(0, 0)$ en una **fuelle en espiral**.

Por último, encontremos la solución general del sistema (??). De la segunda ecuación deducimos

$$y' = -2y \Rightarrow y(t) = k_1 e^{-2t},$$

sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones

$$x' = -2x + k_1 e^{-2t} \Rightarrow x' + 2x = k_1 e^{-2t},$$

que es una ecuación diferencial lineal.

$$\mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t},$$

multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(t)$,

$$x' e^{2t} + 2x e^{2t} = k_1 \Rightarrow x e^{2t} = k_1 t + k_2 \Rightarrow x = k_1 t e^{-2t} + k_2 e^{-2t}$$

En resumen, la solución general viene dada por

$$x(t) = k_1 t e^{-2t} + k_2 e^{-2t}, \quad y(t) = k_1 e^{-2t}.$$

La solución particular pedida $(x(0), y(0)) = (6, 9)$ corresponde a $k_2 = 6$, $k_1 = 9$.

$$x(t) = 9te^{-2t} + 6e^{-2t}, \quad y(t) = 9e^{-2t}$$

- Al cabo de un año, el número de animales será de

$$x(12) \approx 4.30365 \times 10^{-9}, \quad y(12) \approx 3.39762 \times 10^{-10}$$

EJERCICIO 3.8 Sean $x(t)$, $y(t)$ las poblaciones de dos especies que compiten por recursos. Un incremento en cualquier especie tiene un efecto adverso sobre la razón de crecimiento de la otra. En concreto

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x'(t) = 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} = y'(t) = 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy \end{cases}$$

Analizar el comportamiento a largo plazo de ambas poblaciones.

- Supongamos en primer lugar que $y = 0$, entonces el sistema se reduce al modelo logístico $x'(t) = 2x(1 - x/2)$. La línea fase de esta ecuación coincidirá con el eje de abscisas del plano fase. Del mismo modo, si $x(t) = 0$, entonces estamos ante el modelo logístico $y'(t) = 3y(1 - y/3)$, y de nuevo su línea fase coincidirá con el eje de ordenadas del plano fase. En consecuencia, tenemos los puntos de equilibrio

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (2, 0), \quad P_3 = (0, 3).$$

Existe otro punto de equilibrio $P_4 = (1, 1)$ que se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) - y = 0 \\ 3 \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2x = 0 \end{cases}$$

Por el teorema de unicidad de las soluciones, si partimos de condiciones iniciales situadas en el primer cuadrante (en el resto de los puntos no tiene sentido biológico), las órbitas deben de permanecer siempre en esta región.

De los cuatro puntos de equilibrio el P_4 presenta especial interés, ya que nos informa de que las dos especies pueden convivir.

Para realizar el estudio cualitativo del sistema, tenemos que representar $y = 2 - x$ e $y = 3 - 2x$. Estas rectas se cortan en el cuarto punto de equilibrio y divide al primer

cuadrante en cuatro regiones.

El crecimiento o decrecimiento de las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ puede estudiarse fácilmente analizando el signo de sus primeras derivadas. Para ello, escribimos el sistema como

$$\begin{cases} x'(t) = x(2 - x - y) \\ y'(t) = y(3 - y - 2x) \end{cases} \quad (3.2)$$

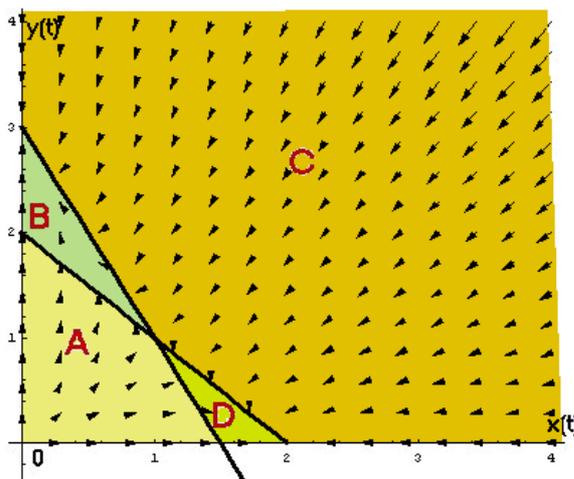


Figura 6.8. Plano fase del sistema.

Para puntos situados en la región A, tanto $x'(t)$ como $y'(t)$ son positivas, y por lo tanto, las dos poblaciones aumentan. Si nos trasladamos a la segunda de las regiones B, entonces $x(t)$ disminuye e $y(t)$ aumenta. Para puntos situados en C, disminuyen ambas poblaciones. Finalmente en D, la población $x(t)$ aumenta y disminuye $y(t)$. En la figura siguiente hemos dibujado en el plano fase algunas de las trayectorias.

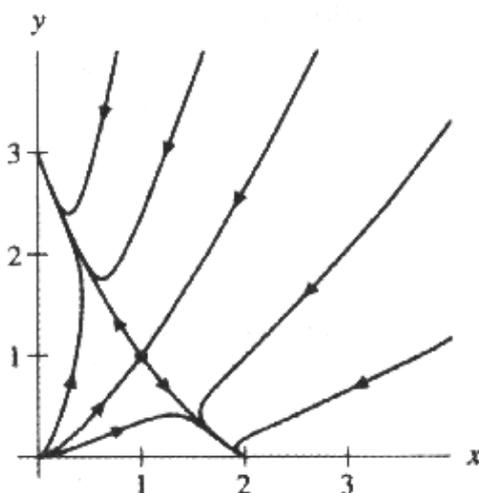


Figura 6.9. Órbitas del sistema.

Observemos como el punto de equilibrio $(1, 1)$ es un punto de silla. Los dibujos sugieren que las soluciones que no tienden al $(1, 1)$ lo hacen hacia $(0, 3)$ o bien al $(2, 0)$.

Conclusión: la mayor parte de las soluciones tienden a una población de equilibrio con una especie extinta y la otra en su capacidad de carga. La separatriz estable del punto de silla $(1, 1)$ divide los dos comportamientos a largo plazo del modelo.

EJERCICIO PROPUESTO:

- 1.- Encontrar todos los puntos de equilibrio para los sistemas siguientes. Explicar la importancia de estos puntos para las poblaciones de presa y depredadores.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x \left(1 - \frac{x}{10}\right) - 20xy \\ \frac{dy}{dt} = -5y + \frac{xy}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.3x - \frac{xy}{100} \\ \frac{dy}{dt} = 15y \left(1 - \frac{y}{15}\right) + 25xy \end{cases}$$
