Tema 2

MODELOS CONTINUOS II

EJERCICIO 2.1 En la ecuación logística, si la capacidad de carga es $K = 10^5$, $y(0) = 100$, $y(1) = 120$, calcular las coordenadas del punto de inflexión de la curva de efectivos de la población.

- Es conocido que si $y(t)$ sigue una ley logística, entonces

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}} = \frac{10^5}{1 + Ae^{-rt}}\,.$$

Si sustituimos los valores $y(0) = 100$, $y(1) = 120$, obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 = \frac{10^5}{1+A} \\ \\ 120 = \frac{10^5}{1+Ae^{-r}}\,. \end{array} \right.$$

De la primera de las ecuaciones deducimos $A = 999$. Llevando este valor en la segunda ecuación, podemos despejar el valor de $r \approx 0.1825$. El modelo logístico vendrá dado por

$$y(t) = \frac{10^5}{1 + 999e^{-0.1825t}}\,.$$

- Por otro lado, sabemos que la población crece con mayor rapidez en el punto de inflexión de la curva que representa a $y(t)$. Sabemos que dicho punto tiene de coordenadas $(t_1, y(t_1)) = (t_1, K/2)$. Llevando estos valores en $y(t)$

$$\frac{10^5}{2} = \frac{10^5}{1 + 999e^{-0.1825t_1}} \quad \Rightarrow \quad e^{-0.1825t} = \frac{1}{999}\,,$$

y despejando

$$t_1 = -\frac{1}{0.1825} \ln\left(\frac{1}{999}\right) \approx 37.8\,.$$

Las coordenadas pedidas son $(37.8,\, 10^5/2)$.

EJERCICIO 2.2 El modelo

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \left(\frac{y(t)}{K}\right)^{\alpha}\right),$$

donde α es un número positivo que depende del organismos, ha sido propuesto como un modelo alternativo al logístico. Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

- Los valores de $y(t)$ que anulan a su primera derivada $y'(t)$ son los puntos de equilibrio $y_1 = 0$ e $y_2 = K$. Para valores $0 < y(t) < K$ es fácil comprobar que $y'(t) > 0$ y la población crecerá. Por el contrario, si $y(t) > K$, la población decrece debido a que $y'(t) < 0$.

  En conclusión, el punto $y_2(t) = K$ es un sumidero, o un punto asintóticamente estable.

EJERCICIO 2.3 Supongamos el modelo poblacional

$$\frac{dy(t)}{dt} = my(t)(1 - y(t)) - \alpha y^2(t)\,, \tag{2.1}$$

donde $y(t)$ es el número de individuos en el tiempo t y las constantes m y α son positivas.

1.- **Encontrar el punto de equilibrio del modelo**

2.- **Estudiar la estabilidad del punto de equilibrio encontrado**

3.- **Relacionar el modelo propuesto con el logístico**

- Empezamos el ejercicio encontrando los puntos de equilibrio

  $$y'(t) = my(t)(1 - y(t)) - \alpha y^2(t) = y(t)\left(m - y(t)(m + \alpha)\right) = 0\,,$$

  que corresponde a

  $$y_1(t) = 0\,, \quad y_2(t) = \frac{m}{m + \alpha}\,.$$

- Para clasificar estos puntos de equilibrio, reescribimos la ecuación diferencial (**??**) como,

$$y'(t) = (m+\alpha)y(t)\left(\frac{m}{m+\alpha} - y(t)\right). \tag{2.2}$$

  Ahora, es inmediato ver que,

  - si $y(t) < 0$, entonces $y'(t) < 0$ y la población decrece (aunque evidentemente no tiene sentido biológico),
  - si $0 < y(t) < m/(m+\alpha)$, la población aumenta al ser $y'(t) > 0$,
  - si $y(t) > m/(m+\alpha)$, entonces $y'(t) < 0$, volviendo la población a decrecer.

  En conclusión, el punto $y_2(t) = m/(m+\alpha)$ es un sumidero.

- La ecuación diferencial (**??**) puede expresarse

$$(m+\alpha)y(t)\left(\frac{m}{m+\alpha} - y(t)\right) = a\,y(t)\,(K - y(t))\,,$$

  donde $a = (m+\alpha)$ y $K = m/(m+\alpha)$. Esta última ecuación diferencial corresponde a un modelo logístico que tiene a K como capacidad de carga del sistema.

EJERCICIO 2.4 La ley de crecimiento de una población viene dada por la ecuación diferencial

$$y'(t) = at^2 y(t)\left(1 - \frac{1}{b}y(t)\right)\;; \quad a\,,b \ \textbf{ positivos}\,.$$

1.- **Calcular $y(t)$, con la condición inicial $y(0) = 100$**

2.- **Estudiar el comportamiento de $y(t)$ a largo plazo.**

3.- **Si $a = 0.2$, $b = 10^4$ y el tiempo se mide en horas; calcular $y(t)$ al cabo de 4 y 6 horas.**

- Si escribimos la ecuación diferencial como

$$y' = at^2 y - \frac{a}{b}t^2 y^2 \quad \Rightarrow \quad y' - at^2 y = -\frac{a}{b}t^2 y^2\,,$$

  podemos observar que estamos ante una ecuación diferencial de *Bernouilli.* Dicha ecuación se convierte en lineal dividiendo por y^2 y haciendo el cambio

$$z = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad z' = -\frac{1}{y^2}y'\,.$$

En efecto,

$$\frac{1}{y^2}y' - at^2\frac{1}{y} = -\frac{a}{b}t^2 \quad \Rightarrow \quad z' + at^2 z = \frac{a}{b}t^2\,. \tag{2.3}$$

Ahora necesitamos un factor integrante para esta última ecuación

$$\mu(t) = e^{\int at^2 dt} = e^{\frac{at^3}{3}}\,. \tag{2.4}$$

Multiplicando (**??**) por (**??**)

$$z' e^{\frac{at^3}{3}} + at^2 z e^{\frac{at^3}{3}} = \frac{a}{b}t^2 e^{\frac{at^3}{3}} \quad \Rightarrow \quad \left(z.e^{\frac{at^3}{3}}\right)' = \frac{a}{b}t^2 e^{\frac{at^3}{3}}\,,$$

e integrando

$$z e^{\frac{at^3}{3}} = \frac{1}{b}\int at^2 e^{\frac{at^3}{3}} dt = \frac{1}{b}e^{\frac{at^3}{3}} + c\,.$$

Despejando

$$z = \frac{1}{b} + ce^{-\frac{at^3}{3}} = \frac{1 + bce^{-\frac{at^3}{3}}}{b}\,,$$

o bien

$$z = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{b}{1 + bce^{-\frac{at^3}{3}}}\,.$$

Si $y(0) = 100$, entonces

$$100 = \frac{b}{1 + bc} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b - 100}{100b}\,,$$

y por lo tanto

$$\boxed{y(t) = \frac{b}{1 + (b - 100)10^{-2}e^{-\frac{at^3}{3}}}\,.}$$

- Par conocer el comportamiento asintótico de la población hacemos que $t \to \infty$, y obtenemos $y(t) \to b$.

- Si suponemos que $a = 0.2$ y $b = 10^4$, se cumple

$$y(t) = \frac{10^4}{1 + 99e^{-\frac{0.2t^3}{3}}}\,,$$

y en consecuencia $y(4) \approx 4186$, $y(6) \approx 9999$.

EJERCICIO 2.5 Una población de bacterias $y(t)$ crece en función del tiempo, medido en horas, siguiendo la ley logística. Es conocido que, inicialmente, el número de individuos es 100, que el máximo que puede soportar el medio es 10^5 individuos y que al final de la primera hora la población alcanzó unos efectivos de 120.

Se desea conocer la población al cabo de las 4 horas y cuanto tiempo tendrá que transcurrir para que se alcance la mitad del número de individuos que forman la capacidad máxima.

- Sabemos que si la población sigue un modelo logístico, el número de bacterias al cabo de t horas viene dado por

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}\,,$$

donde K es la capacidad de carga del sistema. En nuestro caso $K = 10^5$. Los parámetros A y r los obtenemos de

$$y(0) = 100 = \frac{10^5}{1+A} \quad \Rightarrow \quad A = 999\,.$$

y de la ecuación,

$$y(1) = 120 = \frac{10^5}{1+999e^{-r}} \quad \Rightarrow \quad r = 0.18\,.$$

En consecuencia

$$\boxed{y(t) = \frac{10^5}{1+999e^{-0.18t}}\,.} \tag{2.5}$$

La respuesta a la primera de las preguntas es inmediata, ya que $y(4) \approx 205$ bacterias.

- Ahora, necesitamos conocer el tiempo que ha de transcurrir para que $y(t) = K/2 = 10^5/2$. Sustituyendo en (**??**)

$$\frac{10^5}{2} = \frac{10^5}{1+999e^{-0.18t}} \quad \Rightarrow \quad t \approx 38 \text{ horas.}$$

EJERCICIO 2.6 Se observa que en un medio de cultivo apropiado, el crecimiento de la *Escherichia Coli* **sigue el modelo logístico (t en días),**

$$y(t) = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}} = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}},$$

alcanzando la saturación en 6×10^6 **células/ml. En modelos de este tipo la tasa de crecimiento instantánea viene dada por** $\alpha(t) = y'(t)/y(t)$**, y disminuye a medida que aumentan los efectivos de la población. Suponiendo que se parte de un hipotético número** y_0 **de efectivos y que**

$$\alpha(4) = 0.325, \quad \alpha(6) = 0.054\,.$$

1.- **Determinar el valor de** r**, sabiendo que** $y(6) = 5.5 \times 10^6$ **células/ml.**

2.- **Calcular el tamaño de la población al cabo de 4 días y al iniciar la experiencia.**

- Del enunciado deducimos que

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{1}{K}y(t)\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = r\left(1 - \frac{1}{K}y(t)\right).$$

  Sustituyendo

$$\alpha(6) = 0.054 = r\left(1 - \frac{5.5 \times 10^6}{6 \times 10^6})\right) \quad \Rightarrow \quad r \approx 0.65\,.$$

- Por otro lado,

$$\alpha(4) = 0.325 = 0.65\left(1 - \frac{1}{6 \times 10^6}y(4)\right) \quad \Rightarrow \quad y(4) \approx 3 \times 10^6\,.$$

  Finalmente

$$y(t) = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}} \quad \Rightarrow \quad y(4) = 3 \times 10^6 = \frac{6 \times 10^6 y_0}{y_0 + (6 \times 10^6 - y_0)e^{-0.65\times 4}},$$

  que da un valor de $y_0 \approx 414831$ células/ml.

EJERCICIO 2.7 Cuando se ingiere estroncio-90 (^{90}Sr,) éste puede desplazar al calcio que se encuentra en los huesos. Después de desintegrarse, se convierte en un isótopo de kriptón (un gas inerte), y se difunde abandonando el hueso dejándolo poroso.

Supongamos que un hueso determinado contiene 20 mg. de ^{90}Sr, el cual tiene una vida media de 28 años. Escribir una ecuación que nos de la cantidad de ^{90}Sr que permanece en cualquier tiempo, y determinar su cantidad después de diez años. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la cantidad de ^{90}Sr sea de 7 mg.?

- Si $y(t)$ es la cantidad de ^{90}Sr para el año t, entonces $y(t) = 20e^{-rt}$. La constante de desintegración r la calculamos haciendo uso de la vida media de la sustancia,

$$\frac{y(0)}{2} = y(0)e^{-rt} = y(0)e^{-28r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\ln 2}{28} \approx 0.02476\,.$$

  Por tanto, $y(t) = 20e^{-0.02476t}$. Después de diez años $y(10) = 15.6$ miligramos.

- Para terminar el ejercicio resolvemos la ecuación $y(t) = 7$,

$$7 = 20e^{-0.02476t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 42.4 \text{ años.}$$

EJERCICIO 2.8 Supongamos que estamos calentando un cultivo de *E. coli* a 100^{o}C, en una habitación que se encuentra a una temperatura de 22^{o}C, y comprobamos que a los 5 minutos la temperatura del cultivo es de 93^{o}C. Queremos inocular el cultivo cuando se alcancen los 40^{o}C.

Sea $T(t)$ la temperatura del cultivo. Si suponemos que se cumple la ley de enfriamiento de Newton, encontrar la ecuación diferencial que modeliza la situación anterior y resolverla.

Encontrar cuanto tiempo es necesario que transcurra para inocular el cultivo. Dibujar la gráfica de $T(t)$ para la primera hora.

- La ecuación diferencial pedida es

$$T'(t) = k(T(t) - 22), \quad k < 0\,,$$

  que es de variables separables

$$\int \frac{dT(t)}{T(t) - 22} = \int k dt \quad \Rightarrow \quad T(t) = 22 + e^{kt+c}\,.$$

Al ser $T(0) = 100$, entonces $e^c = 78$ y en consecuencia

$$T(t) = 22 + 78e^{kt}\,, \quad k < 0\,.$$

Como una vez transcurrido 5 minutos la temperatura es de 93 grados

$$93 = 22 + 78e^{5k} \quad \Rightarrow \quad k = -0.0188\,,$$

y finalmente

$$\boxed{T(t) = 22 + 78e^{-0.0188t}\,.}$$

- El tiempo que ha de pasar para que la temperatura sea de 40^oC es

$$40 = 22 + 78e^{-0.0188t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 78 \text{ minutos.}$$

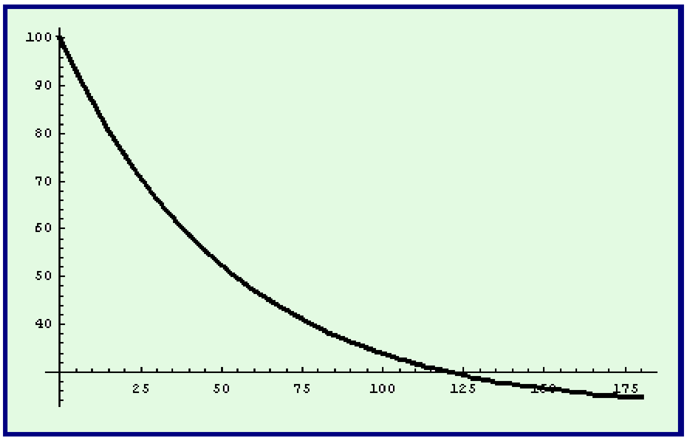

Figura 5.1.

Como podemos apreciar hacen falta aproximadamente 78 minutos para que la temperatura sea de 40^oC, mientras que al cabo de una hora $T(60) \approx 47^o$C.

EJERCICIO 2.9 El número de células que componen un tumor es, inicialmente, 10^4. El crecimiento de dicho tumor puede responder a una de las dos leyes siguientes:

$$\begin{array}{ll} y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{1}{k}y(t)\right)\,, & \textbf{Logística} \\ y'(t) = re^{-at}y(t)\,, & \textbf{de Gompertz}\ , \end{array}$$

siendo $y(t)$ el número de células para t medido en días; $r = 0.2$, $k = 22\times10^7$ y $a = 0.02$ una constante que retrasa el crecimiento en el segundo modelo.

1.- **Calcular la expresión de $y(t)$ en los dos modelos, siendo el instante inicial $t_0 = 0$.**

2.- **Comprobar que existe un tope poblacional para el segundo modelo, cuyo valor numérico coincide con el del primero de ellos.**

3.- **Es conocido que para este tipo de tumores la velocidad de crecimiento es máxima cuando $t = 50$ días. Calcular en los dos modelos los efectivos en dicho instante. Establecer cuál de los dos modelos, y por qué, describe el comportamiento previsto.**

- En primer lugar resolvemos el problema de valores iniciales

$$y'(t) = 0.2y(t)\left(1 - \frac{1}{22\times 10^7}\,y(t)\right)\,, \quad y(0) = 10^4\,.$$

Esta ecuación diferencial es de variables separables

$$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{1}{22\times10^7}y\right)} = \int 0.2dt \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} + \int\frac{\frac{1}{22\times10^7}}{1 - \frac{1}{22\times10^7}y}\,dy = 0.2t + c\,.$$

Integrando

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{1}{22\times 10^7}y\right| = 0.2t + c \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{1 - \frac{1}{22\times10^7}y}\right| = 0.2t + c\,,$$

despejando

$$y = e^{0.2t+c}\left(1 - \frac{1}{22\times 10^7}y\right) \quad \Rightarrow \quad y\left(1 + \frac{1}{22\times 10^7}e^{0.2t+c}\right) = e^{0.2t+c}\,.$$

Es decir,

$$y(t) = \frac{e^{0.2t+c}}{1 + \frac{1}{22\times10^7}e^{0.2t+c}} = \frac{22\times 10^7}{1 + 22\times 10^7\,e^{-(0.2t+c)}}\,.$$

Al ser $y(0) = 10^4$, sustituimos en la expresión anterior

$$10^4 = \frac{22 \times 10^7}{1 + 22 \times 10^7\, e^{-c}} \quad \Rightarrow \quad e^{-c} = 9999 \times 10^{-8}\,.$$

La respuesta a nuestro problema será el modelo logístico:

$$\boxed{y(t) = \frac{22 \times 10^7}{1 + 22 \times 10^7 \times 9999 \times 10^{-8} e^{-0.2t}} = \frac{22 \times 10^7}{1 + 21998 e^{-0.2t}}\,.} \tag{2.6}$$

Ahora necesitamos resolver el segundo de los problemas de valores iniciales

$$y'(t) = 0.2 e^{-0.02t} y(t)\,, \quad y(0) = 10^4\,.$$

Separando las variables, e integrando

$$\frac{y'}{y} = 0.2 e^{-0.02t} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \int 0.2 e^{-0.02t} dt = -10 e^{-0.02t} + k\,,$$

despejando el valor de la población de células

$$y(t) = e^{-10 e^{-0.02t} + k}\,.$$

Para determinar el valor de k tenemos en cuenta que $y(0) = 10^4$.

$$10^4 = e^{-10} e^k \quad \Rightarrow \quad e^k = 10^4\, e^{10}\,.$$

Finalmente

$$\boxed{y(t) = 10^4 e^{10(1 - e^{-0.02t})}\,.} \tag{2.7}$$

- La respuesta al segundo de los apartados es inmediata

$$\lim_{t \to \infty} 10^4 e^{10(1 - e^{-0.02t})} = 10^4 \times e^{10} \approx 22 \times 10^7\,.$$

Es decir, existe un límite poblacional que coincide con la capacidad de carga del modelo logístico.

- En cuanto al tercero de los apartados,

$$y_1(50) = \frac{22 \times 10^7}{1 + 21998 e^{-10}} \approx 11 \times 10^7 = \frac{k}{2}$$

$$y_2(50) = 10^4 e^{10(1 - e^{-1})} = 10^4 \times 556.6\,.$$

Por último, calculamos para el segundo de los modelos el momento en el que la velocidad de crecimiento del tumor es máxima. Sabemos que la velocidad viene dada por

$$v(t) = y'(t) = r e^{-at} y\,,$$

y el máximo se alcanza en el punto que anula su derivada (que coincide con el punto de inflexión de $y(t)$),

$$v' = -are^{-at}y + re^{-at}y' = -are^{-at}y + re^{-at}(re^{-at}y) = rye^{-at}(-a + re^{-at}) = 0$$

Es decir,

$$re^{-at} = a \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{r}\right) \approx 115 \quad \text{días}\,.$$

Luego, para la segunda de las leyes el máximo se alcanza a los 115 días (puede verse que $v''(115) < 0$).

EJERCICIO 2.10 Sea $y(t)$ el número de individuos de cierta especie animal. Supongamos que $y(t)$ cumple la siguiente ecuación logística de crecimiento,

$$\frac{dy}{dt} = 0.2y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{200}\right)\,, \qquad y(0) = 150\,. \tag{2.8}$$

1.- **¿Es la ecuación diferencial (??) de variables separables?. ¿Es (??) autónoma?. ¿Es (??) lineal.?**

2.- **Sin resolver la ecuación diferencial, dibujar de forma aproximada $y(t)$.**

3.- **Estudiar el comportamiento a largo plazo de la población.**

4.- **Comprobar que la solución es de la forma**

$$y(t) = \frac{e^{0.2t}}{A + Be^{0.2t}}\,,$$

y encontrar los valores de A y B.

5.- **¿Donde se encuentra el punto de inflexión de $y(t)$?.**

- Es evidente que esta ecuación diferencial es autónoma ya que la variable tiempo t no se encuentra en el segundo miembro de (**??**). Además, se trata de una ecuación de variables separables (toda ecuación autónoma lo es). Sin embargo, (**??**) no es lineal debido a la presencia del término $y^2(t)$. La función $y(t)$ es aproximadamente de la forma que indica la Figura 5.2.

- En el gráfico puede verse que la población tiende a estabilizarse en $y(t) = 200$, que es la capacidad de carga del sistema.

Para resolver (**??**), separamos las variables

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{200}\right)} = \int 0.2dt\,. \tag{2.9}$$

La primera de las integrales es racional con raíces reales simples en el denominador. Podemos descomponerla en

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{200}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{200-y}\right) dy\,,$$

cuya solución es

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{200}\right)} = \ln\left|\frac{y}{200-y}\right| + C_1\,. \tag{2.10}$$

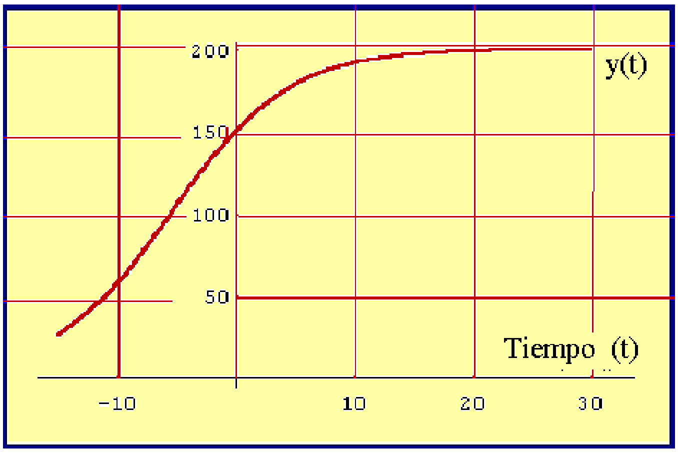

Figura 5.2.

La segunda de las integrales vale

$$\int 0.2dt = 0.2t + C_2\,. \tag{2.11}$$

Llevando (**??**) y (**??**) en (**??**)

$$\ln\left|\frac{y}{200-y}\right| = 0.2t + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{200Ke^{0.2t}}{1+Ke^{0.2t}}\,,$$

con $K = e^C$.

Para calcular la constante K hacemos uso del dato $y(0) = 150$

$$150 = \frac{200K}{1+K} \quad \Rightarrow \quad K = 3\,.$$

- Finalmente
$$y(t)=\frac{600e^{0.2t}}{1+2e^{0.2t}}=\frac{e^{0.2t}}{\frac{1}{600}+\frac{1}{200}e^{0.2t}} \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{600}\,,\; B=\frac{1}{200}\,.$$

- Para encontrar el punto de inflexión de $y(t)$ encontramos su derivada segunda,
$$y''(t)=\left(0.2\left(1-\frac{y}{200}\right)+0.2y\left(-\frac{1}{200}\right)\right)y'(t)\,,$$
la cual se anula cuando
$$0.2\left(1-\frac{y}{200}\right)+0.2y\left(-\frac{1}{200}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 0.2-0.4\frac{y}{200}=0 \quad \Rightarrow \quad y=100\,.$$
Observemos que el valor obtenido corresponde a la mitad de la capacidad de carga encontrada.

EJERCICIO 2.11 Existe un tipo de ardillas que son muy territoriales, las cuales cumplen:

- **Si la población es grande, su tasa de crecimiento decrece y puede llegar a ser negativa.**
- **Si la población es demasiado pequeña, los adultos fértiles corren el riesgo de no poder encontrar compañeros adecuados y de nuevo la tasa de crecimiento es negativa.**

Si la capacidad de carga N indica cuando la población es demasiado grande, y el parámetro M representa cuando la población es demasiado pequeña, podemos modificar el modelo logístico para que tenga en cuenta las hipótesis anteriores
$$\frac{dy}{dt}=Ky\left(1-\frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M}-1\right)\,.$$

1.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.**

2.- **Construir el campo de direcciones.**

3.- **Suponiendo que $N=100$, $M=1$ y $k=1$, encontrar la solución que cumple con la condición inicial $y(0)=20$.**

- Los puntos de equilibrio son las soluciones constantes y en consecuencia $y'(t)=0$. En nuestro caso
$$Ky\left(1-\frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M}-1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad y=0, \qquad y=N, \qquad y=M\,.$$

La Figura 3.2 corresponde a la gráfica de la función

$$\varphi(y) = Ky\left(1 - \frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M} - 1\right) ,$$

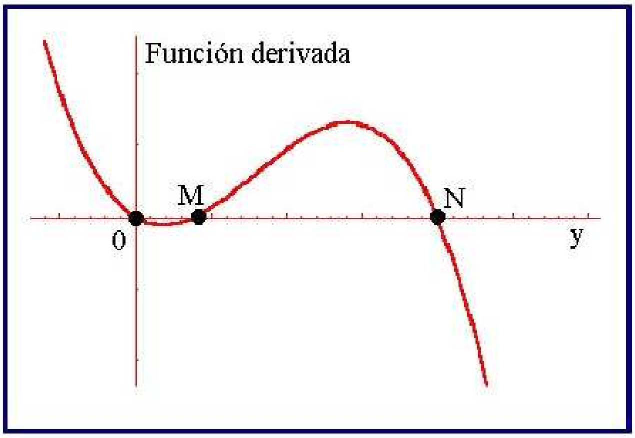

Figura 5.3.

Teniendo en cuenta la función $\varphi(y)$ podemos construir la línea fase de de los puntos de equilibrio, y el campo de direcciones

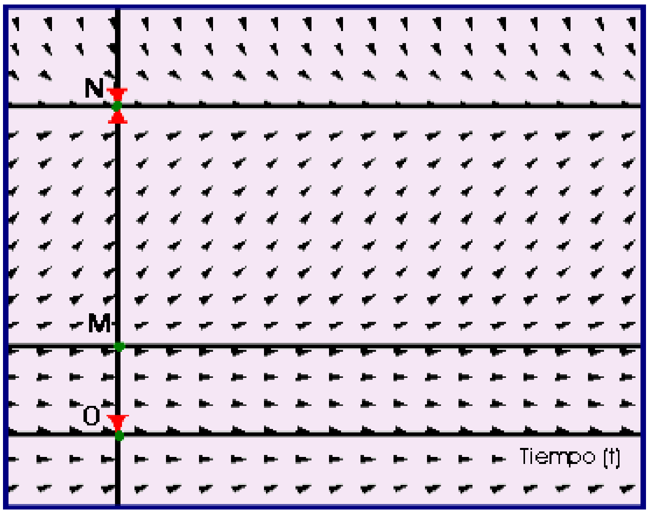

Figura 5.4.

que nos permite afirmar que $y = 0$ e $y = N$ son sumideros e $y = M$ es una fuente.

- Para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y\left(1 - \frac{y}{100}\right)(y - 1) ,$$

separamos las variables,

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{100}\right)(y-1)} = \int dt\,.$$

La primera integral es racional con raíces reales simples en el denominador. Por lo tanto, permite ser descompuesta en suma de tres integrales racionales simples.

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{100}\right)(y-1)} = -\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{0.0001}{1-0.01y}dy + \int \frac{1.01}{y-1}dy\,.$$

La solución de nuestra ecuación diferencial será

$$\ln\left(\frac{(y-1)^{1.01}}{y(1-0.01y)^{0.01}}\right) = t + C\,,$$

y la solución particular pedida que cumple $y(0) = 20$, obliga a

$$\ln\left(\frac{(20-1)^{1.01}}{20(1-0.01\times 20)^{0.01}}\right) = C \quad \Rightarrow \quad C \approx 0.98057\,.,$$

Por tanto,

$$\boxed{\ln\left(\frac{(y-1)^{0.99}}{y(1-0.01y)^{100}}\right) = t + 0.98057\,.}$$

Observemos la imposibilidad de despejar el valor de $y(t)$ de la expresión anterior. Sin embargo, podemos representar de forma aproximada la solución, para ello tendríamos que estudiar el campo de direcciones.

EJERCICIO 2.12 *Choristoneura fumiferana* **es un insecto que daña considerablemente a los bosques. Los investigadores actuales modelan su dinámica a través de la siguiente ecuación diferencial**

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1-\frac{y(t)}{k}\right) - \frac{\alpha y(t)^2}{1+\beta y(t)^2}\,,$$

donde se observa una primera parte que corresponde a un modelo logístico y una segunda consistente en el efecto de depredación, basada en la ecuación del disco de *Holling*.

Realizar un análisis cualitativo del modelo, para $r = 1$, $k = 1000$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.04$.

- Debemos comenzar encontrando los puntos de equilibrio del modelo,

$$y(t) = \text{ constante } \quad \Rightarrow \quad y\left(1-\frac{y}{1000}\right) - \frac{0.5y^2}{1+0.04y^2} = 0\,.$$

Simplificando

$$y\left(1-\frac{y}{1000}-\frac{0.5y}{1+0.04y^2}\right)=0\,.$$

Una de las soluciones es la trivial $y_1(t)=0$ y además

$$1=\frac{y+0.04y^3+500y}{1000+40y^2}\quad\Rightarrow\quad 0.04y^3-40y^2+501y-1000=0$$

Las raíces podemos encontrarlas con el programa `Mathematica`$_{®}$,

$$\texttt{NSolve}[0.04\mathrm{y}^3-40\mathrm{y}^2+501\mathrm{y}-1000==0,\mathrm{y}]$$

$\{\{\mathrm{y}\to 2.48966\},\{\mathrm{y}\to 10.1703\},\{\mathrm{y}\to 987.34\}\}$

A continuación clasificaremos cada uno de estos puntos.

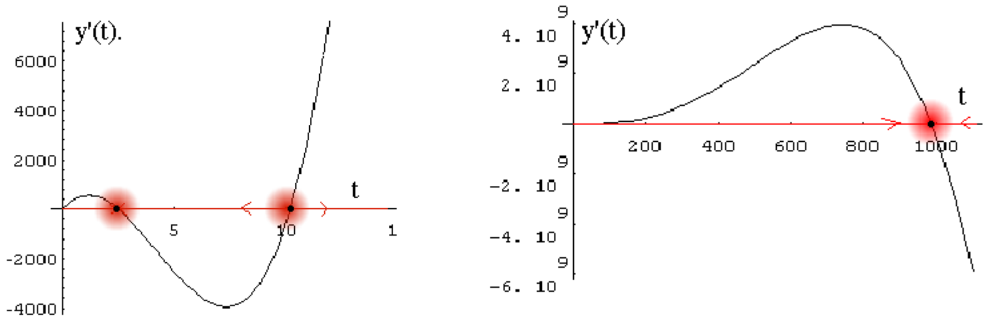

Figura 5.5.

Observemos en las gráficas anteriores que $y'(t)$ es positiva en

$$(0,\ 2.48966)\cup(10.1703,\ 987.34)$$

y negativa en el resto. Por tanto la población $y(t)$ crecerá en

$$(0,\ 2.48966)\cup(10.1703,\ 987.34)$$

y decrecerá en $(2.48966,\ 10.1703)\cup(987.34,\ +\infty)$.

Los puntos de equilibrio 2.48966 y 987.34 serán asintóticamente estables (sumideros) y el 10.1703 un punto de equilibrio inestable (fuente).

EJERCICIO 2.13 Consideremos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt}=2\,\mathrm{sen}(\pi y)$. Encontrar todos los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad. Dibujar el diagrama fase y dibujar algunas de las soluciones en el plano Oty.

- Al ser los puntos de equilibrio las soluciones constantes $y(t) = k$, entonces $y'(t) = 0$. Por tanto

$$2\,\mathrm{sen}(\pi y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = n\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

En la Figura 5.6 se muestra el diagrama fase, donde puede apreciarse que en cada número entero par existe un punto de equilibrio inestable y en el resto (los impares) son puntos de equilibrio estables.

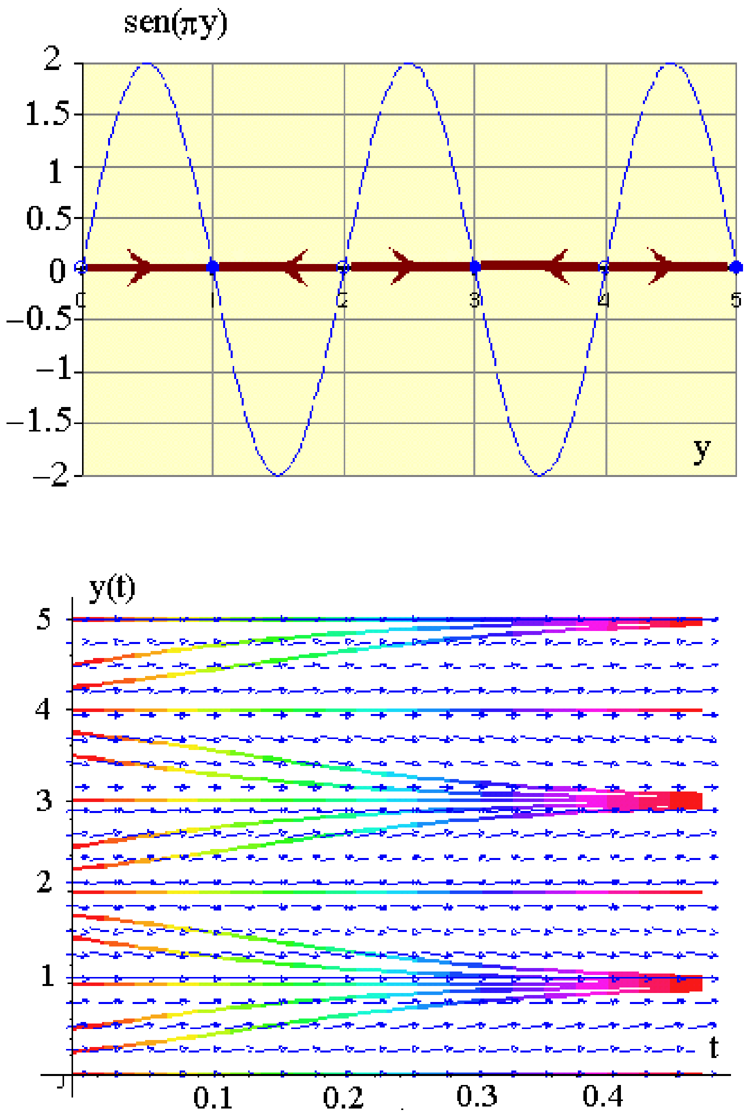

Figura 5.6.

EJERCICIO 2.14 Este ejercicio pone de manifiesto un hecho importante en el análisis cualitativo conocido con el nombre de bifurcación del comportamiento de la ecuación diferencial. La ecuación diferencial tiene un número de puntos de equilibrio dependientes de un parámetro α.

Consideremos la ecuación diferencial $dy/dt = \alpha y - y^3$, donde α puede ser positivo, negativo o cero. Encontrar todos los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad para los diferentes valores posibles de α. Para los valores $\alpha = \pm 1$, trazar el diagrama de fase y algunas de las soluciones en el plano Oyt.

- Para encontrar los puntos de equilibrio resolvemos $y(\alpha - y^2) = 0$. Por tanto, en $y = 0$ siempre existe un punto de equilibrio. Además, si $\alpha < 0$, entonces $y = 0$ es el único punto de equilibrio. Si $\alpha > 0$ existen tres puntos de equilibrio

$$y = 0\,, \quad y = -\sqrt{\alpha}\,, \quad y = +\sqrt{\alpha}\,.$$

- La Figura 5.7 muestra que si $\alpha = -1$, entonces $y = 0$ es un punto de equilibrio estable. Cuando existen tres puntos de equilibrio, entonces $y = 0$ es inestable, mientras que $y = \pm\sqrt{\alpha}$, los dos son estables. Además, como el parámetro α cambia de negativo a positivo, el comportamiento cualitativo de la ecuación diferencial cambia pasando de un único punto de equilibrio estable en $y = 0$, a una ecuación diferencial con tres puntos de equilibrio con $y = 0$ inestable y otros dos estables.

- Para el caso $\alpha = -1$, la función $\phi(y) = -y - y^3$ es siempre decreciente y corta al eje de abscisas en $y = 0$. Para valores $y < 0$ la función es positiva, lo cual implica que la solución de la ecuación diferencial es creciente hacia el punto de equilibrio. Si $y > 0$ la función es negativa y en consecuencia la solución de la ecuación diferencial es decreciente hacia el punto de equilibrio.

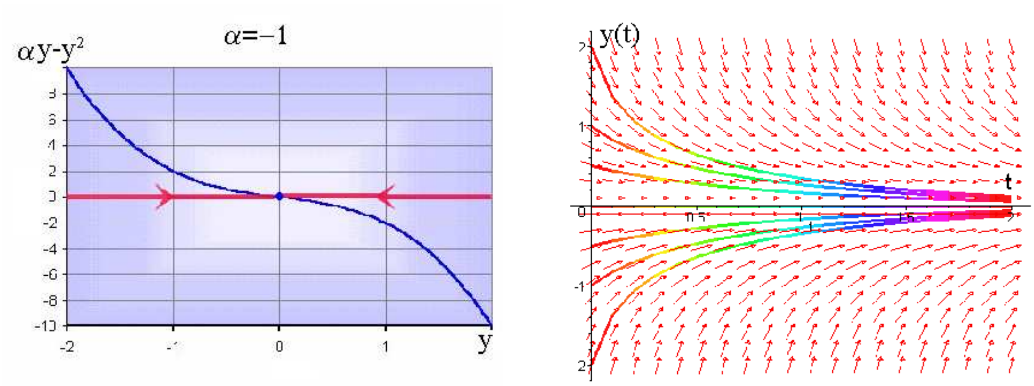

Figura 5.7: Estudio cualitativo de $y' = -y - y^3$.

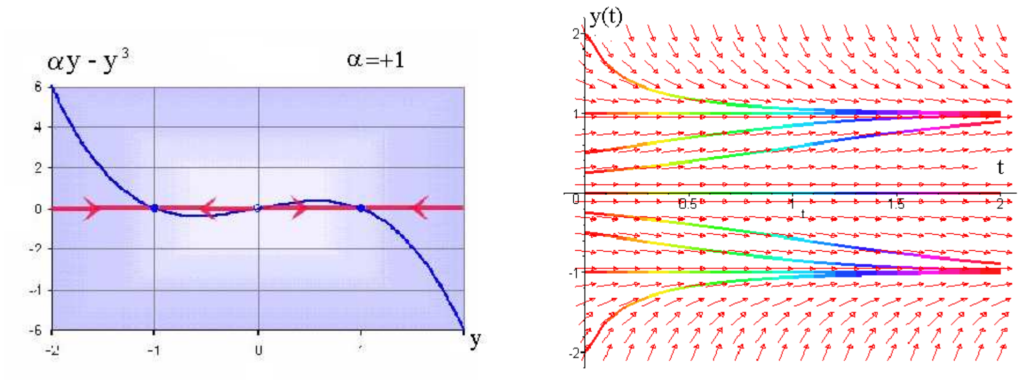

Figura 5.8: Estudio cualitativo de $y' = y - y^3$.

A continuación resolveremos un ejercicio en donde se pone de manifiesto el **Efecto** *Allen* aplicado a un tipo de loros (*Rhynchopsitta pachyrhycha*) de Mexico. Estos pájaros viven en grandes colonias lo que les permiten defenderse mejor de sus depredadores, especialmente de los halcones. Cuando la población de loros desciende de un determinado número, entonces son fáciles presas de sus depredadores, y esto afecta de forma considerable a sus colonias de cría.

EJERCICIO 2.15 Supongamos que en un tiempo t la población de loros viene expresada por $y(t)$, y que cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y(r - a(y-b)^2)\,,$$

donde $r = 0.04\,, a = 10^{-8}$ y $b = 2200$. Encontrar los puntos de equilibrio de esta ecuación diferencial y estudiar su estabilidad. Dibujar su diagrama de fase y algunas de sus soluciones para diferentes valores iniciales.

- Es inmediato comprobar que los puntos de equilibrio son

$$y = 0\,, \quad y = b + \sqrt{\frac{r}{a}}\,, \quad y = b - \sqrt{\frac{r}{a}}\,.$$

  El primero de ellos es la solución trivial, lo cual significa, desde el punto de vista del modelado, que si no existe población presente, entonces no habrá población en el futuro (extinción).

  Particularizando los valores de los parámetros obtenemos los puntos de equilibrio, $y = 0$, $y = 200$ e $y = 4200$.

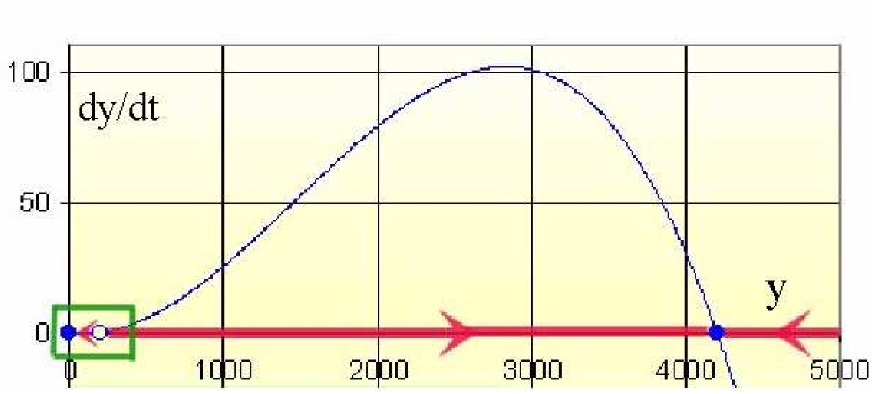

Figura 5.9: Diagrama fase de $dy/dt = y(0.04 - 10^{-8}(y - 2200))$.

En la Figura 5.9 se ha dibujado la función $\phi(y) = y(0.04 - 10^{-8}(y - 2200))$ y en la Figura 5.10 puede verse una ampliación de la misma correspondiente a los valores de y pertenecientes al intervalo $[0, 300]$.

- Observemos que los puntos de equilibrio $y = 0$ e $y = 4200$ son estables, mientras que el $y = 200$ es inestable. De acuerdo con la interpretación del modelo, si la población de loros supera los 200 individuos, entonces al cabo de "mucho tiempo" su número tiende a la capacidad de carga del sistema y llega a estabilizarse en el punto de equilibrio 4200. Por el contrario, si el número inicial es inferior a los 200, entonces el modelo predice la extinción de la especie. Observemos también, que si el número inicial de loros supera los 4200 entonces el modelo predice que la población se reducirá hasta alcanzar el valor de la capacidad de carga 4200.

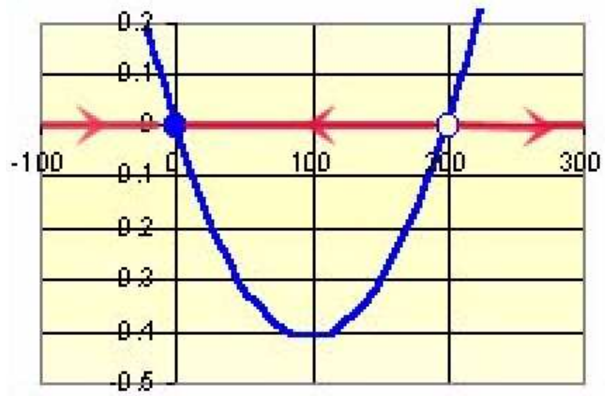

Figura 5.10: Diagrama fase de $dy/dt = y(0.04 - 10^{-8}(y - 2200))$.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1.- Completar la tabla siguiente, y encontrar las soluciones de las distintas ecuaciones diferenciales para comprobar que las soluciones que aparecen son las correctas.

$y' = 1 - y$	$y(t) = ce^{2t}$	$y' = 2ty$	$y(t) = 1 - ce^{t}$
$y' = -y$	$y(t) = ce^{-t} + 1$	-	$y(t) = ce^{t^2}$
$y' = 1 - 2t$	$y(t) = ce^{-2t} + t$	-	$y(t) = t - t^2 + c$
$y' = 2y$	ce^{-t}	$y' = k(100 - y)$	-

2.- Utilizar los siguientes datos para hacer estimaciones de la población de España en los próximos años.

AÑO	POBLACIÓN	AÑO	POBLACIÓN	AÑO	POBLACIÓN
1789	10268150	1860	15655467	1920	21303162
1797	10541221	1877	16631869	1930	23563867
1833	12286941	1887	17560352	1940	25877971
1846	12162872	1897	18065635	1970	34041531
1850	10942280	1900	18594405	1981	37682355
1857	15495212	1910	19927150	1991	38872279

3.- Realizar el estudio cualitativo de las siguientes ecuaciones diferenciales. Dibujar sus líneas de fase y sus campos de direcciones.

(a) $$\frac{dy}{dt} = y' = 3y(1-y)$$

(b) $\frac{dy}{dt} = y' = y^2 - 6y - 16$

(c) $\frac{dy}{dt} = y' = (y-2)\operatorname{sen} y$