

## Tema 4

---

# MODELOS CONTINUOS I

---

**EJERCICIO 4.1** Los siguientes datos fueron reunidos por un investigador durante los primeros 10 minutos de un experimento destinado a estudiar el aumento de bacterias.

Número de minutos	0	10
Número de bacterias	5.000	8.000

Suponiendo que el número de bacterias crece exponencialmente, ¿cuántas bacterias habrá después de 30 minutos?.

- Sea  $y(t)$  el número de bacterias presentes en el cultivo después de  $t$  minutos. Como el número de bacterias crece exponencialmente, y puesto que al comienzo había 5.000 bacterias,  $y(t)$  será una función de la forma

$$y(t) = y(0)e^{rt} = 5.000e^{rt}.$$

Ya que pasados 10 minutos hay 8.000, se obtiene

$$8.000 = 5.000e^{10r} \Rightarrow r = 0.047.$$

En consecuencia, al cabo de 30 minutos el número de bacterias será

$$y(30) = 5.000e^{0.047 \times 30} = 20.479$$

**EJERCICIO 4.2** Sea el modelo de población

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.3 \left( 1 - \frac{y(t)}{200} \right) \left( \frac{y(t)}{50} - 1 \right) y(t), \quad (4.1)$$

donde  $y(t)$  es el número de individuos en tiempo  $t$ .

- 1.- ¿Para qué valores de  $y(t)$  está en equilibrio la población?
- 2.- ¿Para qué valores de  $y(t)$  está creciendo la población?
- 3.- ¿Para qué valores de  $y(t)$  está decreciendo la población?

- Los puntos de equilibrio corresponden a las soluciones constantes y se encuentran anulando  $y'(t)$ .

$$y'(t) = 0.3 \left( 1 - \frac{y(t)}{200} \right) \left( \frac{y(t)}{50} - 1 \right) y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0, y(t) = 200, y(t) = 50.$$

- Por otro lado, la población crecerá cuando  $y'(t)$  sea positiva. De (1.1) se tiene

$$y'(t) = 0.3 \left( 1 - \frac{y(t)}{200} \right) \left( \frac{y(t)}{50} - 1 \right) y(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) \in (-\infty, 0) \cup (50, 200).$$

- Del mismo modo, la población decrecerá cuando

$$y'(t) = 0.3 \left( 1 - \frac{y(t)}{200} \right) \left( \frac{y(t)}{50} - 1 \right) y(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) \in (0, 50) \cup (200, \infty).$$

**EJERCICIO 4.3** Una curva de *Gompertz* es la gráfica de una función de la forma  $y(t) = c a^{r^t}$  donde  $0 < r < 1$  es la tasa de crecimiento y  $a$  y  $c$  son constantes positivas. Los psicólogos y otros investigadores utilizan este tipo de curvas para describir aspectos como crecimiento y aprendizaje.

Con base en diversas proyecciones, una compañía predice que el número de empleados que tendrá en  $t$  años será  $y(t) = 500(0.03)^{(0.4)^t}$ .

- 1.- ¿Cuántos empleados tiene ahora la compañía ( $t=0$ )?
- 2.- ¿Cuántos empleados tendrá en 5 años?

**EJERCICIO 4.4** Consideremos las dos siguientes ecuaciones diferenciales que modelan las tasas de memorización de un poema por dos estudiantes. La tasa de Juan es proporcional a la cantidad por aprender. La tasa de Carmen es proporcional al cuadrado de la cantidad por aprender.

$$\frac{dL_J}{dt} = 2(1 - L_J), \quad \frac{dL_C}{dt} = 3(1 - L_C)^2,$$

donde  $L_J(t)$  y  $L_C(t)$  son las fracciones del poema memorizadas en el tiempo  $t$  por Juan y Carmen, respectivamente.

- 1.- ¿Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en  $t = 0$ , si ambos empiezan la memorización juntos y nunca antes han visto el poema?
- 2.- ¿Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en  $t = 0$ , si ambos comienzan a memorizar juntos habiendo aprendido la mitad del poema?
- 3.- ¿Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en  $t = 0$ , si ambos comienzan a memorizar juntos habiendo aprendido un tercio del poema?

- En el primero de los casos, sustituimos en las ecuaciones diferenciales los valores  $L_J(0) = L_C(0) = 0$ . En consecuencia,  $L'_J(0) = 2$  y  $L'_C(0) = 3$ , y por tanto la respuesta es Carmen.
- En el caso siguiente es Juan quien tiene una tasa más rápida de aprendizaje en  $t = 0$ , ya que  $L'_J(0) = 1$  y  $L'_C(0) = 0.75$ .
- Por último, es inmediato comprobar que en el tercero de los casos las tasas son iguales.

**EJERCICIO 4.5** Se estima que dentro de  $t$  meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de  $4 + 5t^{2/3}$  personas por mes. Si la población actual es de 10.000 personas, ¿cuál será la población dentro de 8 meses.?

- Si  $y(t)$  es el número de habitantes del pueblo en el mes  $t$ , entonces la ecuación diferencial que modeliza la situación planteada es

$$y'(t) = 4 + 5t^{2/3} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 4t + 3t^{5/3} + y(0) = 4t + 3t^{5/3} + 10000.$$

Por tanto,

$$y(8) = 10.128 \text{ personas.}$$

**EJERCICIO 4.6** Los psicólogos creen que cuando a una persona se le pide que recuerde una serie de hechos, el número de hechos recordados después de  $t$  minutos está dado por una función de la forma

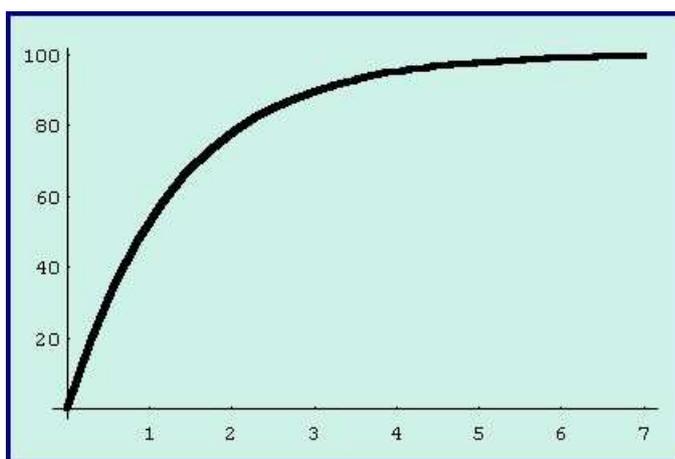
$$y(t) = A(1 - e^{-rt})$$

donde  $r$  es una constante positiva y  $A$  es el número total de hechos importantes almacenados en la memoria de la persona.

- 1.- Trazar la gráfica de  $y(t)$ .
- 2.- ¿Qué le sucede a la gráfica cuando  $t$  crece sin límite?. Interpretar el resultado.

- La función  $y(t)$  vale cero para  $t = 0$  y tiende al valor  $A$  cuando  $t$  tiende hacia infinito. Además, al ser  $y'(t) = rAe^{-rt}$ , para valores de  $t > 0$  siempre será creciente. a continuación utilizamos el programa Mathematica<sup>®</sup> para hacer la representación gráfica.

```
A := 100
r := 0.75
y[t_] := A * (1 - Exp[-r * t])
Plot[y[t], {t, 0, 15}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]]
```



**Figura 4.1.** Representación gráfica de  $y(t) = 100(1 - e^{-0.75t})$ .

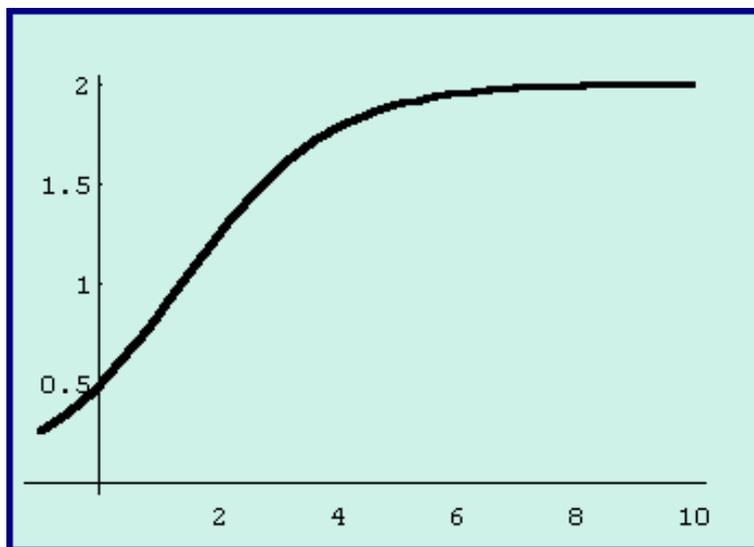
La altura de la gráfica tiende al valor  $A$  porque el número de hechos recordados se aproxima al número total de hechos relevantes en la memoria de la persona.

**EJERCICIO 4.7** Los registros de salud pública indican que  $t$  semanas después del brote de cierta clase de gripe, aproximadamente

$$y(t) = \frac{2}{1 + 3e^{-0.8t}}$$

miles de personas han contraído la enfermedad.

- 1.- Trazar una gráfica de  $y(t)$ .
- 2.- ¿Cuántas personas tenían la enfermedad al comienzo?.
- 3.- ¿Cuántas habían contraído la enfermedad al final de la tercera semana?.
- 4.- Si la tendencia continúa, aproximadamente ¿cuántas personas en total contraerán la enfermedad?.



**Figura 4.2.** Representación gráfica de  $y(t) = \frac{2}{1+3e^{-0.8t}}$

- Es inmediato comprobar que  $y(0) = 0.5$ ,  $y(3) = 1.572$  y que  $y(t)$  tiende hacia 2 cuando  $t$  tiende hacia infinito.

**EJERCICIO 4.8** Una epidemia se propaga en una comunidad de manera que  $t$  semanas después del brote, el número de personas infectadas está dado por una función de la forma:

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}, \quad (4.2)$$

donde  $K$  es el número de residentes en la comunidad que son propensos a contraer la enfermedad. Si  $1/5$  de los residentes propensos estaban infectados al principio y  $1/2$  de ellos habían sido infectados al final de la cuarta semana, ¿qué fracción de residentes propensos a la enfermedad habrá sido infectada al final de la octava semana.?

- Sustituimos en (1.2) los valores  $y(0) = K/5$ ,  $y(4) = K/2$ , y deducimos que  $A = 4$  y  $r = (\ln 4)/4$ . El número de personas infectadas  $t$  semanas después viene dado por

$$y(t) = \frac{K}{1 + 4e^{-\frac{\ln 4}{4}t}}.$$

Al cabo de 8 semanas la fracción de residentes propensos a la enfermedad será  $\frac{4K}{5}$ .

**EJERCICIO 4.9** Sea  $y(t)$  la velocidad de vuelo, en Km/h, de un ave, en función del tiempo  $t$ . Si  $y(t)$  cumple la ecuación diferencial

$$2ky' + 2ty = kt^3y^2. \quad (4.3)$$

- 1.- Calcular  $y(t)$  en función de  $k$
- 2.- Si la velocidad inicial es de 4 Km/h, y  $k = 0.5$ , calcular la velocidad al cabo de dos horas. ¿Cuál será la velocidad a la larga?.

- La ecuación diferencial (1.3) es de *Bernoulli*. Para resolverla dividimos por  $y^2$ ,

$$\frac{2k}{y^2}y' + 2t\frac{1}{y} = kt^3.$$

A continuación hacemos el cambio de variable

$$z = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad z' = -\frac{1}{y^2}y'.$$

La ecuación diferencial se transforma entonces en la ecuación lineal

$$z' - \frac{t}{k}z = -\frac{t^3}{2}.$$

Calculamos el factor integrante  $\mu(t) = e^{-\int \frac{t}{k} dt} = e^{-\frac{t^2}{2k}}$ . Multiplicamos ecuación diferencial por  $\mu(t)$ ,

$$e^{-\frac{t^2}{2k}} z' - \frac{t}{k} e^{-\frac{t^2}{2k}} z = -\frac{t^3}{2} e^{-\frac{t^2}{2k}},$$

que puede expresarse como

$$\left( z \cdot e^{-\frac{t^2}{2k}} \right)' = -\frac{t^3}{2} e^{-\frac{t^2}{2k}}. \quad (4.4)$$

Como podemos ver necesitamos resolver la integral

$$-\int \frac{t^3}{2} e^{-\frac{t^2}{2k}} dt, \quad (4.5)$$

la cual se simplifica con el cambio

$$w = -\frac{t^2}{2k} \Rightarrow dw = -\frac{t}{k} dt,$$

ya que (1.5) queda como

$$-k^2 \int w e^w dw,$$

que es una integral que se resuelve aplicando el método de integración por partes.

$$-k^2 \int w e^w dw = k^2 (e^w - w e^w) = k^2 e^{-\frac{t^2}{2k}} \left( 1 + \frac{t^2}{2k} \right). \quad (4.6)$$

Sustituyendo (1.6) en (1.4)

$$z e^{-\frac{t^2}{2k}} = k^2 e^{-\frac{t^2}{2k}} \left( 1 + \frac{t^2}{2k} \right) + c \Rightarrow z = \frac{1}{y} = k^2 \left( 1 + \frac{t^2}{2k} \right) + c e^{\frac{t^2}{2k}}$$

y despejando

$$y(t) = \frac{1}{k^2 \left( 1 + \frac{t^2}{2k} \right) + c e^{\frac{t^2}{2k}}} = \frac{1}{c e^{\frac{t^2}{2k}} + k^2 + k/2 t^2}.$$

- Por el enunciado del ejercicio  $y(0) = 4$  Km/h, y  $k = 0.5$ , entonces

$$y(t) = \frac{1}{c e^{t^2} + 0.25 + 0.25 t^2} \Rightarrow 4 = \frac{1}{c + 0.25} \Rightarrow c = 0.$$

La solución particular pedida es

$$y(t) = \frac{1}{0.25 + 0.25 t^2}$$

que evidentemente tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por tanto, a la larga el ave tiende a detenerse.

**EJERCICIO 4.10** Una proyección a 5 años de las tendencias de la población señala que dentro de  $t$  años la población de cierta comunidad será  $y(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 50$  miles.

- 1.- ¿En qué momento, durante el período de 5 años, crecerá la población con mayor rapidez?.
- 2.- ¿En que momento, durante el período de 5 años, crecerá la población con menor rapidez?.

- La función que nos da el crecimiento de  $y(t)$  es su derivada

$$\varphi(t) = y'(t) = -3t^2 + 18t + 48.$$

Esta función es creciente desde  $t = 0$  hasta  $t = 3$  y decreciente en  $[3, 5]$ . Por tanto, la población crecerá con mayor rapidez en  $t = 3$  (que coincide con el punto de inflexión de la función  $y(t)$ ).

- Por otro lado, como  $\varphi(0) < \varphi(5)$  el momento en el que la población crecerá con menor rapidez será ahora ( $t = 0$ ).

**EJERCICIO 4.11** Con base a la estimación de que hay 10.000 millones de acres cultivables en la Tierra y que cada acre puede producir suficiente comida para alimentar a 4 personas, algunos demógrafos creen que la Tierra puede soportar una población de no más de 40.000 millones de personas. La población de la Tierra era aproximadamente de 3.000 millones en 1960 y de 4.000 millones en 1975. Si la población de la Tierra crece exponencialmente, ¿cuándo alcanzaría el límite teórico de 40.000 millones?.

- Si  $y(t)$  es el número de personas  $t$  años después del 1960, entonces  $y(t) = y(0)e^{rt}$ . Si tenemos en cuenta que  $y(0) = 3000$  millones e  $y(15) = 4000$  millones, entonces

$$4000 = 3000e^{15r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{15} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.01917.$$

Por tanto,

$$y(t) = 3000e^{0.01917t},$$

y en consecuencia, el tiempo buscado lo encontramos resolviendo la ecuación  $y(t) = 40000$ . Es decir

$$40000 = 3000e^{0.0191788t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 135 \text{ años}.$$

**EJERCICIO 4.12** En la escala de *Richter* la magnitud de un terremoto de intensidad  $I$  está dada por

$$R = \frac{\ln I}{\ln 10}$$

- 1.- Hallar la intensidad del terremoto de San Francisco, ocurrido en 1906, cuya magnitud fue 8.3 en la escala *Richter*.
- 2.- ¿Qué tan intenso fue ese terremoto con relación al de la Bay Area World Series de 1989, cuya magnitud fue 6.9 en la escala *Richter*?

- Como  $R = (\ln I)/(\ln 10)$ , despejamos y obtenemos como intensidad del terremoto de San Francisco,

$$e^{\ln 10 \times 8.3} = 1.99526 \times 10^8.$$

La intensidad del terremoto de Bay Area World Series fue de

$$e^{\ln 10 \times 6.9} = 7.94328 \times 10^6.$$

La proporción entre ambos terremotos viene dada por

$$\frac{1.99526 \times 10^8}{7.94328 \times 10^6} = 25.1188$$

**EJERCICIO 4.13** Se estima que dentro de  $t$  años el valor de cierta parcela se incrementará a una razón de  $r(t)$  euros por año. Hallar una expresión para la cantidad que aumentará el valor de la tierra durante los próximos 5 años.

- La ecuación diferencial que modeliza a la situación planteada es

$$y'(t) = r(t),$$

cuya solución es

$$y(t) = \int r(t)dt + y(0),$$

y el valor de la tierra en euros durante los próximos 5 años será

$$y(5) = \left( \int r(t)dt \right)_{t=5} + y(0).$$

**EJERCICIO 4.14** Se estima que dentro de  $t$  años la población de cierta comunidad a la orilla de un lago cambiará a una razón de  $0.6t^2 + 0.2t + 0.5$  miles de personas por año. Los especialistas en medio ambiente han encontrado que el nivel de contaminación en el lago aumenta a una razón aproximada de 5 unidades por cada 1.000 personas. Si en la actualidad el nivel de polución del lago es de 60 unidades. ¿En cuánto se incrementará la contaminación en el lago durante los próximos 2 años.?

- Si  $y(t)$  es el número de miles de personas en la comunidad en el año  $t$ , sabemos que

$$y'(t) = 0.6t^2 + 0.2t + 0.5 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0.2t^3 + 0.1t^2 + 0.5t + y(0).$$

Como inicialmente existen 60 unidades de contaminación, esto equivale a  $y(0) = 60 \times 200 = 12000$  habitantes. Si calculamos la población al cabo de dos años  $y(2) = 12 + 1.6 + 0.4 + 1 + 12$  mil. El incremento ha sido de 3000 personas, o lo que es equivalente  $3000/200 = 15$  unidades.

**EJERCICIO 4.15** Supongamos que dentro de  $t$  meses un pozo petrolífero producirá crudo a razón de  $r(t)$  barriles por mes y que el precio será  $p(t)$  euros por barril. Suponiendo que el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, hallar una expresión para los ingresos totales obtenidos del pozo en los próximos dos años.

- El número de barriles al cabo de  $t$  meses vendrá dado por

$$B(t) = \int r(t)dt + B(0),$$

con  $B(0) = 0$ . En consecuencia, los ingresos para  $t$  meses serán  $I(t) = p(t) \times B(t)$  y la solución del ejercicio será

$$I(2) = p(t) \int r(t)dt,$$

evaluada en  $t = 2$ .

**EJERCICIO 4.16** Cierta pozo petrolífero que produce 400 barriles de petróleo crudo al mes se secará en 2 años. En la actualidad el precio del petróleo crudo es 18 euros por barril y se espera que aumente a una razón constante de 3 céntimos de euro mensuales por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuales serán los ingresos futuros totales obtenidos por el pozo.?

- El ritmo con el que aumentarán los ingresos es

$$y'(t) = 400(18 + 0.03t) \Rightarrow y(t) = 7200t + 6t^2 + k.$$

Como  $y(0) = 0$  entonces  $k = 0$ . Los ingresos futuros serán  $y(24) = 7200 \times 24 + 6 \times 24^2 = 176256$  euros.

**EJERCICIO 4.17** Los promotores de una feria estiman que si las puertas se abren a las 9 : 00 a.m.,  $t$  horas después, los visitantes entran a la feria a una razón de  $-4(t+2)^3 + 54(t+2)^2$  personas por hora. ¿Cuántas personas entrarán a la feria entre las 10 : 00 a.m. y el mediodía.?

- Si  $y(t)$  el número de personas que han entrado en la feria en la hora  $t$ , entonces

$$y'(t) = -4(t+2)^3 + 54(t+2)^2 \Rightarrow y(t) = -(t+2)^4 + 18(t+2)^3 + y(0).$$

El número de personas que han entrado a la feria entre las 10 y las 12 horas será

$$y(12) - y(10) = 608 \text{ personas.}$$

**EJERCICIO 4.18** La cantidad de bacterias presentes en cierto cultivo después de  $t$  minutos de un experimento era  $y(t) = 2000e^{0.05t}$ . ¿Cuál fue la cantidad media de bacterias presentes durante los primeros 5 minutos del experimento.?

$$\frac{1}{5} \int_0^5 2000e^{0.05t} dt = 2272.2$$

**EJERCICIO 4.19** Escribir una ecuación diferencial que describa el hecho de que la razón a la que las personas oyen hablar sobre un nuevo aumento en las tarifas postales es proporcional al número de personas en el país que no ha oído hablar al respecto.

- Sea  $y(t)$  la cantidad de personas que han oído hablar sobre el aumento de los precios en el tiempo  $t$ . Entonces,  $y'(t)$  será la razón a la que las personas oyen hablar acerca del aumento. El número de personas que no han oído hablar sobre el asunto es  $B - y(t)$ . Por tanto, la ecuación diferencial pedida es

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = k(B - y),$$

siendo  $k$  la constante de proporcionalidad, que evidentemente debe ser positiva ya que  $y'(t) > 0$ .

**EJERCICIO 4.20** Un pozo de petróleo que produce 300 barriles de petróleo crudo al mes se secará en 3 años. Se estima que dentro de  $t$  meses el precio del petróleo crudo será  $p(t) = 18 + 0.3\sqrt{t}$  dólares por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso futuro total obtenido por el pozo?

- La ecuación diferencial que describe el proceso es

$$\frac{dy}{dt} = 300p(t) = 300(18 + 0.3\sqrt{t}) = 5.400 + 90\sqrt{t},$$

siendo  $y(t)$  el ingreso generado durante los próximos  $t$  meses.

Resolviendo la ecuación diferencial

$$y(t) = 5.400t + 60t^{\frac{3}{2}} + c,$$

como  $y(0) = 0$ , se obtiene que  $c = 0$ , y así la solución particular buscada es

$$y(t) = 5.400t + 60t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y(36) = 207.360.$$

**EJERCICIO 4.21** Resolver la ecuación diferencial planteada en el Ejercicio 1.19.

- La ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dt} = k(B - y),$$

donde  $k$  es la constante de proporcionalidad. Separando las variables

$$\frac{1}{B - y} dy = k dt,$$

e integrando

$$-\ln|B - y| = kt + c,$$

al ser  $B - y > 0$ , entonces podemos eliminar el valor absoluto. Por tanto

$$-\ln(B - y) = kt + c \Rightarrow \ln(B - y) = -kt - c$$

$$B - y = e^{-kt-c} = e^{-kt}e^{-c} \Rightarrow \boxed{y(t) = B - e^{-c}e^{-kt}}$$

**EJERCICIO 4.22** El ritmo al que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional a la cantidad de residentes que han sido infectados y al número de residentes propensos a la enfermedad que no han sido infectados. Expresar el número de residentes que han sido infectados como una función del tiempo.

- Sea  $y(t)$  el número de residentes que han sido infectados en el tiempo  $t$ , y  $K$  la cantidad total de residentes propensos a la enfermedad. Entonces, la cantidad de residentes propensos que no han sido infectados es  $K - y$ , y la ecuación diferencial que describe la propagación de la epidemia es

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(K - y) = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad r = \alpha K.$$

Esta es una ecuación diferencial de variables separadas cuya solución es

$$\int \frac{1}{y(1 - \frac{y}{K})} dy = \int r dt,$$

que integrando obtenemos

$$\ln|y| - \ln|1 - y/K| = rt + C,$$

o bien

$$\ln\left(\frac{Ky}{K - y}\right) = rt + C \quad \text{ya que } y > 0, \quad K > y,$$

despejando  $y$

$$\frac{Ky}{K - y} = e^{rt+C} = A_1 e^{rt},$$

siendo  $A_1 = e^C$ . Simplificando

$$y(t) = \frac{KA_1 e^{rt}}{K + A_1 e^{rt}}$$

Dividimos numerador y denominador por  $A_1 e^{rt}$  y llamamos  $A = K/A_1$ .

$$y(t) = \frac{K}{1 + A e^{-rt}},$$

que corresponde a la ecuación general de una curva logística.

**EJERCICIO 4.23** Los residentes en cierto pueblo han votado para acabar con la fluorización de su reserva de agua. La presa local tiene actualmente 200 millones de litros de agua fluorada, que contiene 1.600 kilos de fluoruro. El agua fluorada fluye de la presa a un ritmo de 4 millones de litros por día y se reemplaza al mismo ritmo por agua no fluorada. En todo momento, el fluoruro restante está distribuido de manera uniforme en la presa. Expresar la cantidad de fluoruro existente en la presa como una función del tiempo.

- El ritmo de cambio del fluoruro con respecto al tiempo es igual a la concentración de fluoruro en el agua multiplicada por el ritmo de flujo de agua fluorada. Si  $y(t)$  es el número de kilos de fluoruro en la represa después de  $t$  días, entonces  $y'(t)$  será el ritmo de cambio del fluoruro con respecto al tiempo. La concentración de fluoruro en el agua, vale el número de kilos de fluoruro en la presa ( $y$ ), dividido por el número de millones de litros de agua en la presa (200). Por último, el ritmo de agua fluorada es de  $-4$  millones de litros por día.

Como el ritmo de cambio del fluoruro en la presa es igual al ritmo de entrada menos el ritmo de salida, se obtiene que

$$\frac{dy}{dt} = 0 - \frac{y}{200}(4) = -\frac{y}{50}.$$

Resolviendo esta ecuación de variables separadas obtenemos

$$y(t) = y(0) e^{-\frac{t}{50}} \quad \text{donde} \quad y(0) = e^c,$$

finalmente

$$y(t) = 1600e^{-\frac{t}{50}},$$

es decir, la cantidad de fluoruro en la presa decrece exponencialmente.

**EJERCICIO 4.24** Un tanque contiene 20 kilos de sal disueltas en 50 litros de agua. Supongamos que 3 litros de salmuera que contiene 2 kilos de sal disuelta por litro fluyen hacia el tanque cada minuto y que la mezcla (que se mantiene uniforme al agitarla) sale del tanque al ritmo de 2 litros por minuto. Hallar una ecuación para saber la cantidad de sal que hay en el tanque después de  $t$  minutos.

- Sea  $y(t)$  la cantidad de sal que hay en el tanque en el minuto  $t$ . Como 3 litros de salmuera fluyen hacia el tanque cada minuto y cada litro contiene 2 kilos de sal, entonces  $3 \times 2 = 6$  kilos de sal fluyen hacia el tanque cada minuto. Para hallar el

número de kilos de sal que fluyen desde el tanque cada minuto, observemos que, en el tiempo  $t$ , hay  $y(t)$  kilos de sal y  $50 + (3 - 2)t = 50 + t$  litros de solución en el tanque (porque hay un incremento de sal en la solución 1 litro de solución cada minuto). Así, la concentración de sal en la solución en el momento es  $y(t)/(50 + t)$  kilos por litro, y la sal sale del tanque al ritmo

$$\left( \frac{y(t)}{50 + t} \text{ kilos/litro} \right) (2 \text{ litros /minuto}) = \frac{2y(t)}{50 + t} \text{ kilos/minuto.}$$

Se concluye que el ritmo de cambio neto  $y'(t)$  de sal en el tanque está dado por

$$\frac{dy}{dt} = 6 - \frac{2y}{50 + t},$$

que podemos escribirla como

$$y'(t) + \frac{2}{50 + t}y(t) = 6,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden con

$$p(t) = \frac{2}{50 + t}, \quad g(t) = 6,$$

cuya solución general es

$$y(t) = 2(50 + t) + \frac{c}{(50 + t)^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Para calcular  $c$ , observemos que en principio hay 20 kilos de sal en el tanque

$$20 = y(0) = 2(50 + 0) + \frac{c}{(50 + 0)^2} \Rightarrow c = -80(50)^2$$

$$y(t) = 2(50 + t) - \frac{80(50)^2}{(50+t)^2}$$

- Ahora veremos que también puede ser simulado utilizando Vensim®. La Figura 4.3 muestra el diagrama causal del modelo.

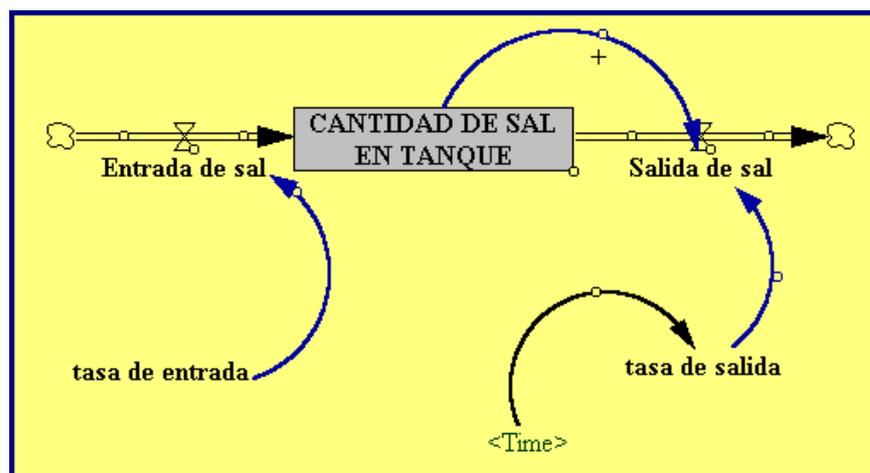


Figura 4.3.

Las ecuaciones que definen el modelo son:

---

CANTIDAD DE SAL EN TANQUE = INTEG(Entrada de sal – Salida de sal)

Valor inicial = 20

Unidades : Kilos

Entrada de sal = tasa de entrada

Unidades : Kilos/Minute

Salida de sal = CANTIDAD DE SAL EN TANQUE  $\times$  tasa de salida

Unidades : Kilos/Minute

tasa de entrada = 6

Unidades : 1/Minute

tasa de salida =  $2/(50 + \text{Time})$

Unidades = 1/Minute

---

$t$	$S(t)$	$t$	$S(t)$	$t$	$S(t)$	$t$	$S(t)$
1	25.2	25	115.16	50	180.6	75	237.66
5	44.25	30	129.46	55	192.43	80	248.6
10	65.01	35	143.01	60	204.01	85	259.44
15	83.33	40	155.97	65	215.39	90	270.19
20	99.89	45	168.47	70	226.60	95	280.86

**Tabla 4.1.**

Una vez que ejecutamos el programa podemos ver la simulación en forma numérica (Tabla 4.1), o bien gráficamente (Figura 4.4).

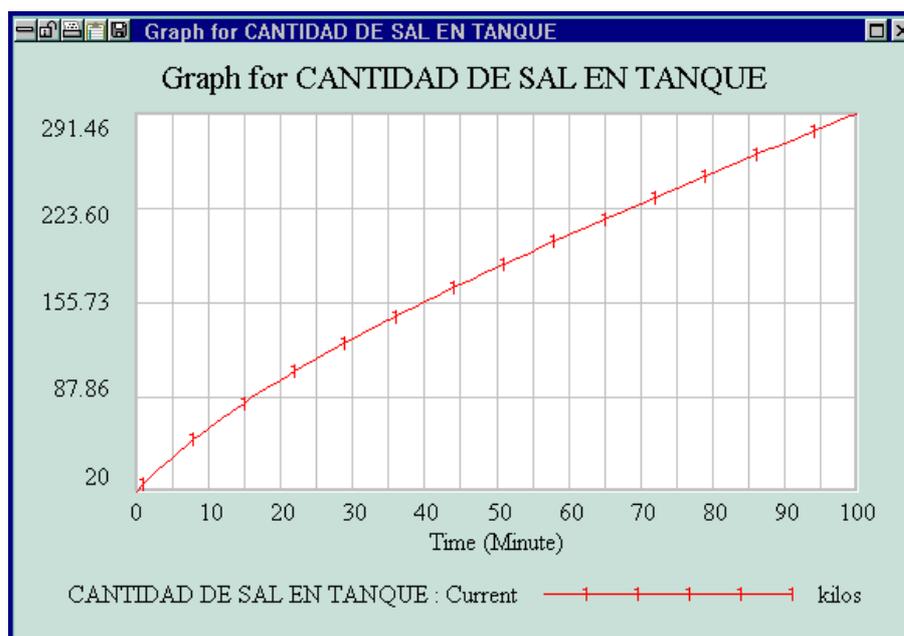


Figura 4.4.

Puede comprobarse que dicha gráfica corresponde a la función solución

$$S(t) = 2(50 + t) - \frac{80 \times 50^2}{(50 + t)^2}$$

**EJERCICIO 4.25** Un depósito de 50 litros contiene una solución compuesta por un 90% de agua y 10% de alcohol. Mediante un tubo se introduce en el depósito una segunda solución que contiene agua y alcohol a partes iguales, a un ritmo de 4 litros/minuto. Al mismo tiempo se vacía el tanque a una velocidad de 5 litros/minuto. Suponiendo que la solución del depósito se agita constantemente, hallar el alcohol que queda en él después de 10 minutos.

- Sea  $y(t)$  el número de litros de alcohol que hay en el depósito en el instante  $t$  (en minutos). Del enunciado se desprende que el ritmo con el que cambia  $y(t)$  viene dado por la cantidad de alcohol que entra menos el que sale. Es decir,

$$y'(t) = 2 - \frac{5}{50 - t}y(t), \quad y(0) = 50 \times 0.10 = 5.$$

Esta ecuación puede ser escrita

$$y'(t) + \frac{5}{50 - t}y(t) = 2, \tag{4.7}$$

que es una ecuación lineal de primer orden. Para resolverla, encontramos su factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{5}{50-t} dt} = e^{-5 \ln(50-t)} = e^{\ln(50-t)^{-5}} = \frac{1}{(50-t)^5}.$$

Multiplicamos (1.7) por  $\mu(t)$  y obtenemos

$$\frac{1}{(50-t)^5} y'(t) + \frac{5}{(50-t)^6} y(t) = \frac{2}{(50-t)^5},$$

o bien

$$\left( y(t) \frac{1}{(50-t)^5} \right)' = \frac{2}{(50-t)^5}.$$

Integrando en los dos miembros

$$y(t) \frac{1}{(50-t)^5} = \int \frac{2}{(50-t)^5} = \frac{1}{2(50-t)^4} + c.$$

Despejando

$$y(t) = c(50-t)^5 + \frac{50-t}{2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Para determinar el valor de  $c$  hacemos uso del valor inicial  $y(0) = 5$ .

$$5 = 25 + c(50)^5 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{20}{50^5}.$$

La función  $y(t)$  vale

$$y(t) = \frac{50-t}{2} (50-t)^5 + \frac{50-t}{2}$$

El valor pedido  $y(10) = 20 - 20(0.8)^5 \approx 13.45$  litros de alcohol.

**EJERCICIO 4.26** Un tanque de 400 litros de capacidad contiene inicialmente una solución salina de 150 litros de agua y 25 gramos de sal. Una solución salina de 2 gramos por litro de sal entra en el tanque a 10 litros por minuto, mientras que la mezcla resultante sale por un sumidero a 5 litros por minuto. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en el momento en que éste empieza a rebosar?.

- Si  $y(t)$  es la cantidad de gramos de sal que hay en el tanque después de  $t$  minutos, entonces

$$y'(t) = 20 - \frac{5}{150 + 5t}y(t),$$

o bien

$$y'(t) + \frac{1}{30 + t}y(t) = 20.$$

Esta ecuación diferencial es lineal de primer orden. Para resolverla necesitamos el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{30+t} dt} = 30 + t.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$(30 + t)y'(t) + y(t) = 20(30 + t),$$

que puede escribirse

$$((30 + t)y(t))' = 600 + 20t \quad \Rightarrow \quad (30 + t)y(t) = 600t + 10t^2 + c,$$

despejando

$$y(t) = \frac{600t + 10t^2 + c}{30 + t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar el valor de la constante  $c$  tendremos en cuenta  $y(0) = 25$ , obteniéndose  $c = 750$ . Por tanto,

$$y(t) = \frac{600t + 10t^2 + 750}{30 + t}.$$

A continuación es necesario saber el tiempo necesario para que el tanque se llene

$$400 = 150 + 5t \quad \Rightarrow \quad t = 50 \text{ minutos.}$$

Finalmente, la respuesta al ejercicio será  $y(50) = 696.8$  gramos de sal.

**EJERCICIO 4.27** El ritmo al que cierto medicamento se absorbe en el sistema circulatorio está dado por  $dy/dt = r - sy$ , donde  $y(t)$  es la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en el tiempo  $t$ ;  $r$  y  $s$  son constantes positivas. Supongamos que al comienzo no había indicios del medicamento en la sangre.

- 1.- Hallar  $y(t)$ .
- 2.- ¿Qué le sucede a  $y(t)$  a “largo plazo”?

- Al ser la ecuación diferencial autónoma, será por tanto de variables separadas.

$$-\frac{1}{s} \int \frac{-sdy}{r - sy} = \int dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{s} \ln |r - sy| = t + c.$$

Si despejamos el valor de  $y(t)$  obtenemos

$$y(t) = \frac{1}{s} (r - e^{-sc} e^{-st}), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como  $y(0) = 0$

$$0 = \frac{1}{s} (r - e^{-sc}) \quad \Rightarrow \quad r = e^{-sc},$$

y finalmente

$$y(t) = \frac{r}{s} (1 - e^{-st}).$$

Observemos que si hacemos  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $y(t) \rightarrow r/s$ .

**EJERCICIO 4.28** Se estima que dentro de  $t$  años cierta central nuclear producirá residuos radiactivos a una razón de  $r(t) = 400t$  kilos por año. Los residuos se desintegran exponencialmente a una razón del 2% por año. ¿Qué le sucederá a la acumulación de residuos radiactivos de la central a largo plazo?.

- La cantidad de residuos presentes después de  $N$  años será

$$\int_0^N 400te^{-0.02(N-t)} dt = 400e^{-0.02N} \int_0^N te^{0.02t} dt.$$

- La cantidad de residuos radiactivos presentes a largo plazo es el límite de esta expresión cuando  $N$  tiende a infinito. Es decir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 400e^{-0.02N} \int_0^N te^{0.02t} dt =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 400e^{-0.02N} (50te^{0.02t} - 2.500e^{0.02t}) \Big|_0^N = \infty$$

**EJERCICIO 4.29** Para describir el crecimiento de ciertas poblaciones se utiliza en biología la ecuación de crecimiento de Gompertz

$$y' = -ay \ln\left(\frac{y}{b}\right), \quad (4.8)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas. Encontrar la forma general de las soluciones de esta ecuación.

- La ecuación diferencial (1.8) se simplifica con el cambio

$$\ln\left(\frac{y}{b}\right) = z \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = e^z \quad \Rightarrow \quad y = be^z. \quad (4.9)$$

Si sustituimos (1.9) en (1.8) y simplificamos

$$z' = -az \quad \Rightarrow \quad z = e^{-at+k},$$

o bien

$$\ln\left(\frac{y}{b}\right) = e^{-at+k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = be^{e^{-at+k}}}.$$

**EJERCICIO 4.30** En ciertas situaciones se plantea determinar la relación entre algún estímulo físico y la relación correspondiente que se produce en el sujeto. Supongamos que la fuerza de un estímulo es  $s$  y que la intensidad de la reacción es una función de  $s$ ,  $\varphi(s)$ . Algunos datos experimentales sugieren que la razón de cambio de la intensidad de la reacción con respecto al estímulo es directamente proporcional a la intensidad de la reacción e inversamente proporcional a la fuerza del estímulo. Resolver esta ecuación diferencial.

- La ecuación diferencial que modela a la situación planteada es

$$\varphi'(s) = k\varphi(s)\frac{1}{s}.$$

En este caso no estamos ante una ecuación diferencial autónoma, pero permite ser resuelta separando las variables

$$\int \frac{d\varphi(s)}{\varphi(s)} = \int \frac{k}{s} ds \quad \Rightarrow \quad \ln|\varphi(s)| = k \ln|s| + c.$$

Si despejamos el valor de la intensidad de la reacción

$$\ln\left|\frac{\varphi(s)}{s^k}\right| = c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(s) = s^k e^c, \quad c \in \mathbb{R} .}$$

**EJERCICIO 4.31** Plantear y resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- 1.- Una muestra de radio se desintegra a un ritmo que es proporcional a su tamaño.
- 2.- La razón a la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la del medio que lo rodea.

- Sea  $y(t)$  la cantidad de radio presente en el tiempo  $t$ . Según el enunciado

$$y'(t) = -rt,$$

con la constante  $r$  positiva. Una vez resuelta nos proporciona la solución  $y(t) = e^{-rt+c}$ . Si  $y(0) = e^c$ , entonces

$$y(t) = y(0)e^{-rt},$$

que es la conocida fórmula de la desintegración radiactiva.

Para el segundo apartado, supondremos que  $T(t)$  es la temperatura de un cuerpo en el tiempo  $t$  y  $M$  corresponde a la temperatura del medio. El enunciado nos permite escribir

$$T'(t) = k(T(t) - M), \quad k > 0.$$

La ecuación diferencial anterior tiene por solución

$$T(t) = M + e^{kt+c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**EJERCICIO 4.32** Sea  $y(t)$  la población de un cierto país en un tiempo  $t$ . Supongamos que la tasa de natalidad  $r$  y la de mortalidad  $s$  del país son constantes y que hay una tasa constante de inmigración  $m$ .

- 1.- Explicar por qué la población satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = (r - s)y(t) + m$$

- 2.- Hallar  $y(t)$ .
- 3.- Si la población del país era 100 millones en 1990, con una tasa de crecimiento (tasa de natalidad menos tasa de mortalidad) del 2%, y si se permite la inmigración a la tasa de 300.000 personas por año, ¿cuál será la población en el año 2000?.

- El ritmo con el que se modifica la población en cada momento es igual a los que se incorporan  $ry(t) + m$  menos los que abandonan  $sy(t)$  la población. Es decir,

$$y'(t) = ry(t) + m - sy(t) = (r - s)y(t) + m = ky(t) + m,$$

siendo  $k > 0$  si la población aumenta y  $k < 0$  en caso contrario. Estamos ante una ecuación diferencial lineal

$$y'(t) - ky(t) = m,$$

que posee a  $\mu(t) = e^{-kt}$  como factor integrante. Por tanto

$$\left(y(t)e^{-kt}\right)' = me^{-kt} \Rightarrow y(t)e^{-kt} = -\frac{m}{k}e^{-kt} + c,$$

o bien

$$\boxed{y(t) = -\frac{m}{k} + ce^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}} \quad (4.10)$$

- Para la segunda parte del ejercicio supondremos  $t = 0$  en 1990, y en consecuencia es necesario conocer  $y(10)$ . Si sustituimos  $k = 0.02$ ,  $m = 0.3$  millones en (1.10)

$$y(t) = ce^{0.02t} - 15,$$

podemos encontrar el valor de  $c = 115$  haciendo uso del dato  $y(0) = 100$ . Ahora

$$y(t) = 115e^{kt} - 15 \Rightarrow y(10) = 115e^{0.2} - 15 \approx 125.$$

**EJERCICIO 4.33** El suministro de glucosa al torrente sanguíneo es una técnica médica importante. Para estudiar este proceso, definimos  $y(t)$  como la cantidad de glucosa presente en la sangre de un paciente en el tiempo  $t$ . Supongamos que la glucosa se suministra al sistema sanguíneo a una tasa constante de  $k$  gramos por minuto. Al mismo tiempo la glucosa se transforma y se separa de la sangre a una tasa proporcional a la cantidad de glucosa presente.

- La función  $y(t)$  satisface la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = k - ay,$$

donde  $a$  es una constante positiva. Resolviendo esta ecuación diferencial

$$\boxed{y(t) = \frac{k}{a} + \left(y(0) - \frac{k}{a}\right)e^{-at}.$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la concentración de glucosa tiende al valor de equilibrio  $k/a$ .

**EJERCICIO 4.34** Si unas vacas lecheras comen heno que contenga mucho yodo 131, su leche no se podrá beber. Supongamos que cierta cantidad de heno contiene 10 veces la cantidad máxima permitida de yodo 131. ¿Cuántos días deberá estar almacenado el heno antes de que se les pueda dar a comer a las vacas.? La vida media del yodo 131 es de 8 días.

- Sea  $y(0)$  la cantidad de yodo 131 presente en el heno. Entonces la cantidad al tiempo  $t$  es  $y(t) = y(0)e^{-rt}$  ( $t$  en días). La vida media del yodo 131 es de 8 días, entonces

$$y(0)e^{-8r} = 0.5y(0) \quad \Rightarrow \quad e^{-8r} = 0.5,$$

despejando, obtenemos  $r \approx 0.087$ . En consecuencia

$$y(t) = y(0)e^{-0.087t}.$$

A continuación buscamos el valor de  $t$  tal que  $y(t) = 0.1y(0)$

$$y(0)e^{-0.087t} = 0.1y(0) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 0.1}{-0.087} \approx 26.$$

El heno debe estar almacenado 26 días para que la cantidad de yodo se reduzca a la décima parte.

**EJERCICIO 4.35** Se encontró que un fragmento de pergamino tenía alrededor del 80% del nivel de C-14 que se encuentra hoy en día en la materia viva. Estimar la edad del pergamino, sabiendo que la  $k$  del carbono vale 0.00012.

- Aplicando la fórmula de la desintegración radiactiva,

$$y(t) = y(0)e^{-rt} = y(0)e^{-0.00012t},$$

como  $y(t) = 0.8y(0)$

$$0.8y(0) = y(0)e^{-0.00012t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 1.900 \text{ años.}$$

**EJERCICIO 4.36** Una sustancia radiactiva A se descompone según la ley  $x(t) = x(0)e^{-\alpha t}$ , transformándose en una nueva sustancia B, la cual, a su vez, se descompone a una velocidad  $v_b = v_a - \alpha_1 y = \alpha x(t) - \alpha_1 y(t)$ , ya que en cada instante los  $\alpha x$  átomos que se descomponen de la primera sustancia se transforman en átomos de la segunda, la cuál pierde un número de átomos igual a  $\alpha_1 y$ . Suponiendo que en el instante inicial existiesen  $y_0$  átomos de la segunda sustancia, expresar  $y$  en función del tiempo  $t$ . Como aplicación, determinar el número de átomos de “emanación de radio” que se forman en un día, si al empezar la transformación estuvieran en presencia de  $5 \times 10^5$  átomos de radio y otros tantos de emanación de (radon), sabiendo que  $\alpha = 1.26 \times 10^{-11}$  y  $\alpha_1 = 2.1 \times 10^{-6}$ .

- Del enunciado deducimos

$$v_B = \frac{dy}{dt} = \alpha x(t) - \alpha_1 y(t) = \alpha x(0)e^{-\alpha t} - \alpha_1 y(t),$$

o bien

$$y'(t) + \alpha_1 y(t) = \alpha x(0)e^{-\alpha t},$$

que es una ecuación lineal que tiene por factor integrante,

$$\mu(t) = e^{\int \alpha_1 dt} = e^{\alpha_1 t}.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante encontrado

$$e^{\alpha_1 t} y'(t) + \alpha_1 e^{\alpha_1 t} y(t) = e^{\alpha_1 t} \alpha x(0) e^{-\alpha t},$$

que corresponde a

$$(y(t)e^{\alpha_1 t})' = \alpha x(0)e^{(\alpha_1 - \alpha)t}.$$

La solución es

$$y(t)e^{\alpha_1 t} = \alpha x(0) \int e^{(\alpha_1 - \alpha)t} = \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha} e^{(\alpha_1 - \alpha)t},$$

y despejando

$$y(t) = \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha} e^{-\alpha t} + k e^{-\alpha_1 t}.$$

- Ahora tenemos que calcular  $k$  a partir de la condición inicial.

$$y_0 = \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha} + k \quad \Rightarrow \quad k = y_0 - \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha},$$

quedando la solución

$$y(t) = \frac{\alpha x(0)}{\alpha_1 - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\alpha_1 t}) + y_0 e^{-\alpha_1 t}.$$

- Por último, en el caso particular  $x_0 = y_0 = 5$  y  $\alpha = 1.26 \times 10^{-11}$ ,  $\alpha_1 = 2.1 \times 10^{-6}$ , se obtiene

$$y(24) \approx 400.000 \text{ átomos de emanación de radio}$$

**EJERCICIO 4.37** La población de gaviotas en Norteamérica se ha estado duplicando cada trece años desde 1900. Proporcionar una ecuación diferencial que satisfaga  $y(t)$ , la población  $t$  años después de 1900. ¿Cuántas veces más gaviotas hay en 1993 que en 1900?.

- Supongamos que  $y(t)$  sea la población de gaviotas en períodos de 13 años, y que  $t = 0$  en 1900. Del enunciado deducimos

$$y(1) = 2y(0), y(2) = 2y(1) = 2^2y(0), y(3) = 2y(2) = 2^3y(0), \dots, y(t) = 2^t y(0).$$

Estamos ante el crecimiento exponencial

$$y(t) = 2^t y(0) = y(0)e^{\ln 2t}.$$

Si derivamos la expresión anterior obtenemos la respuesta a la primera de las preguntas

$$y'(t) = y(0) \ln 2e^{\ln 2t} = \ln 2y(t).$$

- La población en 1993 será  $y(t_1)$  con  $t_1 = (1993 - 1990)/13 = 7.15$ . Por tanto  $y(7.15) = y(0)2^{7.15}$ , la población de palomas en 1993 será  $2^{7.15}$  veces la población en 1990.

**EJERCICIO 4.38** Supóngase que un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Si se supone que la rapidez con que el virus se propaga es proporcional no sólo al número  $y$  de estudiantes contagiados, sino también, al número de alumnos no contagiados. Determinar el número de estudiantes contagiados después de 6 días, si además se observa que después de 4 días  $y(4) = 50$ .

- Suponiendo que nadie sale del campus durante el transcurso de la enfermedad, se debe resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1000 - y) = ry \left(1 - \frac{y}{1000}\right), \quad y(0) = 1.$$

que tiene por solución:

$$y(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-rt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-rt}},$$

donde el valor  $A = 999$  se ha obtenido de la condición  $y(0) = 1$ . Ahora bien, usando el hecho  $y(4) = 50$  determinamos el valor de  $r$  en la expresión anterior

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4r}} \Rightarrow r = 0.9906, ,$$

con lo cual

$$y(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}},$$

finalmente

$$y(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9436}} = 276 \text{ estudiantes.}$$

**EJERCICIO 4.39** Muchos científicos creen que han ocurrido cuatro glaciaciones en el último millón de años. Antes de que se conociera la técnica de fechado con carbono, los geólogos creían que el deshielo de la Cuarta Glaciación empezó hace 25000 años. En 1950, se encontraron troncos de antiguos abetos debajo de restos glaciares cercanos a Two Creeks, Wisconsin. Los geólogos determinaron que esos árboles habían caído por el avance de hielo durante la Cuarta Glaciación. La madera de los abetos derrumbados contenían el 27 % del nivel de C-14 que se encuentra en los árboles vivos. ¿Cuántos años hace que ocurrió la Cuarta Glaciación?

- El modelo que debemos utilizar es el que describe la desintegración radiactiva del carbono 14. Si  $y(t)$  es la cantidad de carbono 14 en el tiempo  $t$ , entonces

$$y(t) = y(0)e^{-0.00012t}.$$

Haciendo uso del enunciado sabemos que  $y(t) = 0.27y(0)$ , entonces

$$0.27y(0) = y(0)e^{-0.00012t}, \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\ln 0.27}{0.00012} \approx 10911 \text{ años.}$$

**EJERCICIO 4.40** Una infección común en el tracto urinario en los humanos es producido por la bacteria *Escherichia coli*. Generalmente la infección se hace patente cuando la colonia de bacterias alcanza una población alrededor de  $10^8$ . La colonia duplica su tamaño cada 20 minutos. Cuando se vacía una vejiga llena (alrededor de un litro) se elimina alrededor del 90 % de las bacterias. Supongamos que al inicio de cierto período de tiempo, la vejiga y tracto urinario de una persona contiene  $10^8$  bacterias de *E. coli*. Durante un intervalo de  $T$  minutos la persona ingiere suficiente líquido para llenar la vejiga. Encontrar el valor de  $T$  tal que si se vacía la vejiga después de  $T$  minutos, alrededor de  $10^8$  bacterias permanecerán dentro del organismo. (Nota: Raras veces es posible eliminar una infección de *E. coli* por diuresis, sin utilizar medicamentos, bebiendo grandes cantidades de agua).

- Sea  $y(t)$  la población de bacterias *E. coli* en el tiempo  $t$  (en minutos). Si suponemos que la población sigue la distribución exponencial  $y(t) = y(0)e^{rt}$ , entonces al ser  $y(20) = 2y(0)$  implica que  $r = \ln 2/20$ . Por tanto,

$$y(t) = y(0)e^{\frac{\ln 2}{20}t} = y(0)2^{t/20}.$$

Teniendo en cuenta el enunciado, el número de bacterias que quedan en el tracto urinario después de  $T$  minutos viene dada por

$$y(T) = 10^8 \times 2^{T/20} \times 0.1.$$

y este número debe ser  $10^8$ . En consecuencia

$$10^8 \times 2^{T/20} \times 0.1 = 10^8 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{20 \ln 10}{\ln 2} \approx 66 \text{ minutos.}$$

**EJERCICIO 4.41** En 1974 Estados Unidos tenía alrededor de 80 millones de litros de productos radiactivos de plantas nucleares y otros reactores nucleares. Los desechos fueron almacenados en distintos tipos de contenedores, y los contenedores fueron enterrados en el suelo o sumergidos en el océano. Los científicos piensan que se debe evitar que los desechos contaminen el resto del planeta hasta que más del 99.99 % de la radiactividad haya desaparecido. Si un cilindro de almacenamiento contiene productos de desecho cuya vida media es de 1500 años, ¿cuántos años debe sobrevivir el contenedor sin fugas.?

- Sea  $y(t)$  la cantidad de residuos radiactivos en el tiempo  $t$  (en años). El modelo que debemos utilizar viene dado por  $y(t) = y(0)e^{-rt}$ , donde la constante de desintegración  $r$  se obtiene a partir del dato de la vida media.

$$y(t) = \frac{y(0)}{2} = y(0)e^{-1500r} \quad \Rightarrow \quad r \approx 0.001073.$$

Tenemos entonces que  $y(t) = y(0)e^{-0.001073t}$ , y deseamos encontrar el tiempo  $t$  que ha de transcurrir para que  $y(t) = 0.0001y(0)$ . Planteando la ecuación

$$0.0001y(0) = y(0)e^{-0.001073t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 8583 \text{ años.}$$

**EJERCICIO 4.42** Supongamos que el precio  $p(t)$  de una determinada especie animal, varía de modo que su razón de cambio con respecto al tiempo es proporcional a la escasez  $D - S$  donde  $D(p)$  y  $S(p)$  son las funciones de demanda y de oferta,

$$D(p) = 8 - 2p \quad S(p) = 2 + p,$$

- 1.- Si el precio es de 1000 euros cuando  $t = 0$  y 600 euros cuando  $t = 2$ , calcular  $p(t)$
- 2.- Determinar que le sucede a  $p(t)$  a “largo plazo”

- Es inmediato deducir que

$$p'(t) = k(D - S) = 6 - 3p, \quad p(0) = 1000, \quad p(2) = 600,$$

que es una ecuación diferencial de variables separables

$$\int \frac{dp}{3(2-p)} = \int k dt \Rightarrow -\frac{1}{3} \ln |2-p| = kt + c_1,$$

o bien

$$\ln |2-p| = -3kt + c_2 \Rightarrow p(t) = 2 - e^{c_2} e^{-3kt}.$$

Ahora, teniendo en cuenta  $p(0) = 1000$ , entonces  $e^{c_2} = -998$ . Por otro lado,  $p(2) = 600$  obliga a que  $k \approx 0.085$ . Por tanto, la ecuación buscada es

$$p(t) = 2 + 998e^{-0.255t}.$$

Es evidente, que  $p(t) \rightarrow 2$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**EJERCICIO 4.43** Supongamos que los recursos mundiales sólo proporcionan alimento suficiente para seis mil millones de seres humanos. La población mundial fue de 1.6 mil millones en 1900 y de 2.4 mil millones en 1950. Usando la ecuación logística, averiguar cual será la población mundial en el año 2000.

- Si  $y(t)$  es el número de personas en el año  $t$ , entonces

$$y(t) = \frac{6 \times 10^9}{1 + Ae^{-rt}}.$$

Como conocemos la población en 1900 que corresponde al tiempo  $t = 0$ , y en 1950

$$\begin{aligned} y(0) = 1.6 \times 10^6 &= \frac{6 \times 10^9}{1+A} \Rightarrow A = 624 \\ y(50) = 2.4 \times 10^6 &= \frac{6 \times 10^9}{1+624e^{-50r}} \Rightarrow r \approx 0.0038. \end{aligned}$$

Es decir

$$y(t) = \frac{6 \times 10^9}{1 + 624e^{-0.038t}},$$

que nos permite encontrar el valor deseado. La población en el año 2000 será de  $y(100) \approx 4.01 \times 10^8$  personas.

**EJERCICIO 4.44** En 1981 se pescó un cierto número de percas de un año en Nueva Jersey, y se llevaron al otro lado del continente en vagones tanque de ferrocarril, para ser liberadas en la bahía de San Francisco. Solamente un total de 435 percas sobrevivieron a la dureza del viaje. Sin embargo, en 1989, la sola pesca comercial capturó 1.234.000 kilos de percas. Dado que el crecimiento de la población fue tan acelerado, es razonable suponer que obedeció a la ley de *Malthus*  $dy(t)/dt = ay(t)$ . Suponiendo que el peso promedio de una perca es de 3 kilos, y que en 1989 se capturó una de cada diez percas, determinar un límite inferior para la constante de crecimiento  $a$ .

- El número de percas después de  $t$  años vendrá dado por  $y(t) = y(0)e^{rt}$ . En primer lugar, el número de percas existentes en 1989 será de  $1234000 \times 10/3 = 4113330$ . Llevando este valor en  $y(t)$  con  $t = 8$  y  $y(0) = 435$ , obtenemos

$$4113330 = 435e^{8r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{8} \ln \left( \frac{4113330}{435} \right) = 1.1443.$$

**EJERCICIO 4.45** Una familia de salmones que habita en las costas de Alaska se rige por la ley multhusiana de crecimiento de población

$$dy(t)/dt = 0.003y(t),$$

donde  $t$  se mide en minutos. En el tiempo  $t = 0$  un grupo de tiburones se establece en esas aguas y empieza a atacar a los peces. La tasa a la cual el tiburón mata a los salmones es de  $0.001y^2(t)$ , donde  $y(t)$  es la población de salmones en el tiempo  $t$ . Más aún, dado que un elemento indeseable se incorporó a su hábitat 0.002 salmones por minuto abandonan las aguas en Alaska.

- 1.- Modificar la ley de Malthus de crecimiento de población para tener en cuenta estos factores.
- 2.- Supongamos que en el tiempo  $t = 0$  hay un millón de salmones. Calcular la población  $y(t)$ . ¿Qué pasa cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

- Si consideramos  $y'(t) = 0.003P(t)$ , entonces  $y(t) = y(0)e^{0.003t}$ . La modificación supone que

$$y'(t) = 0.003y(t) - 0.001y^2(t) - 0.002.$$

- Para resolver la ecuación diferencial anterior, descomponemos

$$\frac{dy(t)}{0.003y(t) - 0.001y^2(t) - 0.002} = dt,$$

$$\frac{dy(t)}{(y(t) - 2)(y(t) - 1)} = \frac{1}{y(t) - 2} + \frac{-1}{y(t) - 1},$$

integrando

$$\ln \left| \frac{y(t) - 2}{y(t) - 1} \right| = -0.001t + \ln c,$$

despejando

$$y(t) = \frac{2 - ce^{-0.001t}}{1 - ce^{-0.001t}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Para  $t = 0$  tenemos

$$c = \frac{y(0) - 2}{y(0) - 1} = \frac{999.998}{999.999},$$

por lo tanto

$$y(t) = \frac{1.999.998 - 999.998e^{-0.001t}}{999.999 - 999.998e^{-0.001t}},$$

si hacemos tender  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $y(t) \rightarrow 2$ .

**EJERCICIO 4.46** Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura  $T$  del cuerpo y la temperatura  $T_0$  del aire. Si la temperatura del aire es de  $20^{\circ}$  C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde  $100^{\circ}$  C hasta  $60^{\circ}$  C, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta  $30^{\circ}$  C?

- Si  $T(t)$  representa la temperatura en grados centígrados del cuerpo en el minuto  $t$ , entonces la ecuación diferencial que modela a la situación planteada es

$$T'(t) = k(T(t) - T_0) = k(T(t) - 20).$$

Es fácil comprobar que la solución de esta ecuación es de la forma

$$T(t) = 20 + e^c e^{kt}.$$

Si tenemos en cuenta que  $T(0) = 100$ , entonces  $e^c = 80$  y en este caso

$$T(t) = 20 + 80e^{kt}.$$

Por otro lado,  $T(20) = 60$ , sustituyendo

$$60 = 20 + 80e^{kt} \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{20} \approx -0.03465.$$

Finalmente

$$T(t) = 20 + 80e^{-0.03465t}.$$

La respuesta a la pregunta planteada se obtiene resolviendo la ecuación  $30 = T(t)$ .  
En efecto,

$$30 = 20 + 80e^{-0.03465t} \Rightarrow t = \frac{\ln 8}{0.03465} \approx 60 \text{ minutos.}$$

---

**EJERCICIOS PROPUESTOS:**

- 1.- Escribir una ecuación diferencial que describa el hecho de que cuando los factores ambientales imponen un límite superior sobre su tamaño, la población crece a un ritmo que es conjuntamente proporcional a su tamaño actual y a la diferencia entre su límite superior y su tamaño actual.
- 2.- La población de cierto país está creciendo exponencialmente. La población total (en millones) en  $t$  años está dada por la función  $y(t)$ . Relacionar cada una de las siguientes respuestas con su correspondiente pregunta:
  - 2.a.- Resolver  $y(t) = 2$  para  $t$ .
  - 2.b.-  $y(2)$ .
  - 2.c.-  $y'(2)$ .
  - 2.d.- Resolver  $y'(t) = 2$  para  $t$ .
  - 2.e.-  $y' = ky$ .
  - 2.f.- Resolver  $y(t) = 2y(0)$  para  $t$ .
  - 2.g.-  $y_0 e^{kt}$ ,  $k > 0$ .
  - 2.h.-  $y(0)$ .

Preguntas:

  - 2.a.- Cómo de rápido estará creciendo la población dentro de 2 años.
  - 2.b.- Dar la forma general de la función  $y(t)$ .
  - 2.c.- Cuánto tiempo tardará en duplicarse la población actual.
  - 2.d.- Cuál será el tamaño inicial de la población.
  - 2.e.- Cuándo será el tamaño de la población de 2 millones.
  - 2.f.- Cuándo estará creciendo la población a una tasa de 2 millones de personas al año.
  - 2.g.- Dar una ecuación diferencial que satisfaga  $y(t)$ .
- 3.- *Paramecia* con suficiente comida y sin limitaciones de espacio, crece exponencialmente. Inicialmente, hay 1500. Cuatro horas más tarde, la población es de 2000 individuos. Encontrar la población de *Paramecia* en función del tiempo, y determinar el tiempo que ha de transcurrir para que se duplique la población.
- 4.- Las matemáticas del crecimiento incontrolado son terroríficas. Una simple célula de bacterias *E. Coli* podría bajo condiciones ideales, dividirse cada 25 minutos. Esto no es particularmente desconcertante hasta que no pensamos

detenidamente sobre ello, pero el hecho es que la bacteria se multiplica geométricamente. De una obtenemos dos, cuatro, ocho, dieciséis, ... De esta manera, puede probarse que en un día, una célula de *E. Coli* puede producir una supercolonia igual en tamaño y peso al planeta tierra. Probar que esta afirmación es cierta, sabiendo que la masa media de una bacteria de *E. Coli* es  $10^{-12}$  gramos y que la masa de la tierra es aproximadamente  $5.9763 \times 10^{24}$  kilos.

- 5.- Una gran población de 5000 individuos se traslada a una lugar donde la comida es limitada, lo cual afecta a la dinámica de su crecimiento, que viene dada por la ecuación diferencial

$$y'(t) = -0.1y(t) + 100.$$

Resolver la ecuación diferencial anterior y encontrar lo que le sucede a la población a largo plazo.

- 6.- La constante de decaimiento para el estroncio 90 es 0.0244, donde el tiempo está medido en años. ¿Cuánto tiempo le llevará a una cantidad  $y(0)$  de estroncio 90 reducirse a la mitad de su tamaño original.?
- 7.- En 1947 se descubrió en Lascaux, Francia, una cueva con bellas pinturas murales prehistóricas. Se encontró allí mismo un trozo de carbón de madera que contenía el 20 % de  $C^{14}$  que se esperaba encontrar en los árboles vivos. ¿Cuántos años tienen las pinturas de Lascaux.?
- 8.- Un pedazo de carbón de leña encontrado en Stonehenge contenía el 63 % del nivel de C-14 que se encuentra en los árboles vivos.
- 9.- Sea  $y(t)$  la longitud de un determinado pez en el tiempo  $t$  y supongamos que crece de acuerdo a la ley de *von Bertalanffy*

$$y'(t) = k(34 - y(t)), \quad y(0) = 2.$$

- 9.a.- Resolver la ecuación diferencial.
- 9.b.- Utilizar la solución anterior para determinar el valor de  $k$  suponiendo que  $y(4) = 10$ . Representar gráficamente  $y(t)$ .
- 9.c.- Encontrar la longitud del pez cuando  $t = 10$ . ¿Cuál será su longitud a largo plazo.?
- 10.- Al sacar un pastel de un horno su temperatura es de  $148^{\circ}$  C. tres minutos después, su temperatura es de  $93^{\circ}$  C. ¿ Cuánto tardará en enfriarse hasta una temperatura ambiente de  $21^{\circ}$  C.?

- 11.- En el estudio de los efectos de la selección natural sobre una población, aparece la siguiente ecuación diferencial

$$y'(t) = -0.0001y(t)^2(1 - y(t))$$

donde  $y(t)$  es la frecuencia de un gen  $a$ . ¿Contra quién va la presión selectiva?. Trazar la solución de esta ecuación cuando  $y(0)$  está cerca, pero es ligeramente menor de 1.

Trazar las soluciones representativas de las ecuaciones

$$y' = y(1 - y)(0.15 - 0.5y)$$

$$y' = 0.05y(1 - y)(2y - 1)$$

Considerar distintas condiciones iniciales con  $y(0)$  entre 0 y 1 y discutir posibles interpretaciones genéticas para esas curvas, es decir, describir los efectos de la selección sobre la frecuencia genética  $y$  en términos de las distintas condiciones iniciales.

- 12.- Sea  $y(t)$  el número de peces de una población en el instante  $t$ . La población está modelada por el problema de valor inicial:  $y'(t) = y(t) - y^2(t)/9 - 8/9$ ,  $y(0) = y_0$ , donde  $y_0$  es una constante positiva.

12.a.- ¿Cuál es el coeficiente de sobrepoblación?. ¿Cuál es la tasa de captura?

12.b.- Resolver la ecuación diferencial.

12.c.- Realizar un análisis cualitativo de la ecuación diferencial, e interpretar el resultado obtenido en términos del futuro de la población de peces.

- 13.- Obtener las soluciones de equilibrio de las ecuaciones diferenciales siguientes y trazar sus gráficas. Dibujar las curvas solución representativas arriba, abajo y entre las curvas de equilibrio. Para cada solución acotada  $y(t)$ , estudiar  $y(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

$$(a) \quad y' = (1 - y)(y + 1)^2 \quad (b) \quad y' = \sin(y/2)$$

$$(c) \quad y' = y(y - 1)(8y - 2) \quad (a) \quad y' = y^3 - 2y^2 - y + 2$$

- 14.- Una solución que contiene 2 libras de sal por galón empieza a fluir a un depósito de 50 galones de agua pura a razón de 3 galones/minuto. Después de 3 minutos la mezcla empieza a salir a 3 galones/minuto.

14.a.- ¿Cuánta sal hay en el depósito cuando  $t=2$  minutos? ¿Y cuando  $t=25$  minutos?

14.b.- ¿Cuánta sal hay en el depósito cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

- 15.- Una población crece exponencialmente durante  $T$  meses con una constante de crecimiento de 0.03 por mes. Luego, la constante aumenta de manera repentina a 0.05 por mes. Después de 20 meses, la población se duplica. ¿En qué momento  $T$  cambió la constante de crecimiento?
- 16.- e acuerdo con la *ley de Newton del enfriamiento*, la tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea.
- 16.a.- Escribir una ecuación diferencial que sirva de modelo para la temperatura del cuerpo, dada la temperatura del medio.
- 16.b.- Un veterinario desea saber la temperatura de un caballo enfermo. Las lecturas del termómetro siguen la ley de Newton. Al momento de insertar el termómetro marca  $82^{\circ}\text{F}$ . Después de tres minutos la lectura es de  $90^{\circ}\text{F}$  y tres minutos más tarde es de  $94^{\circ}\text{F}$ . Una convulsión repentina destruye el termómetro antes de la lectura final. ¿Cuál es la temperatura del caballo?
- 16.c.- Un huevo duro se saca de una cacerola con agua caliente y se pone a enfriar en una mesa. Al principio, la temperatura del huevo es de  $180^{\circ}\text{F}$ . Después de una hora es de  $140^{\circ}\text{F}$ . Si la temperatura de la habitación es de  $65^{\circ}\text{F}$ , ¿en qué momento tendrá el huevo una temperatura de  $120^{\circ}\text{F}$ .
-