Tema 3

PRELIMINARES MATEMÁTICOS

EJERCICIO 3.1 Comprobar que la función $y(t) = ct^2 + t + 3$ es una solución del problema de valor inicial

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = 6\,, \qquad y(0) = 3\,, \qquad y'(0) = 1\,, \tag{3.1}$$

en $-\infty < t < \infty$, para cualquier valor del parámetro c.

- Derivando $y(t)$, sustituyendo en (**??**), y simplificando se obtiene

  $$t^2(2c) - 2t(2ct + 1) + 2(ct^2 + t + 3) = 6\,.$$

  Observemos que la solución de la ecuación diferencial (**??**) no es única (depende del valor de c), aunque sus coeficientes y la función $g(t) = 6$ son continuas para todo valor de t. La pérdida de la unicidad se debe a que el coeficiente $a_2(t) = t^2$ se anula en $t = 0$.

EJERCICIO 3.2 Comprobar que $y(t) = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t$ es una solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y = 12t\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 1\,. \tag{3.2}$$

- Derivando dos veces la función $y(t)$,

$$y'(t) = 6e^{2t} - 2e^{-2t} - 3\,, \quad y''(t) = 12e^{2t} + 4e^{-2t}\,. \tag{3.3}$$

A continuación, sustituimos (**??**) en (**??**)

$$(12e^{2t} + 4e^{-2t}) - 4(3e^{2t} + e^{-2t} - 3t) = 12t\,.$$

Además, es inmediato comprobar que $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.

La ecuación diferencial (**??**) es lineal, los coeficientes $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -4$, y la función $g(t) = 12t$ son funciones continuas en cualquier intervalo que contenga al valor $t = 0$. Por lo tanto, $y(t) = 3e^{2t} + e^{-2t} - 3t$ es solución única de (**??**).

EJERCICIO 3.3 Demostrar que la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 9y = 0$$

tiene dos soluciones

$$y_1(t) = e^{3t} \quad , \quad y_2(t) = e^{-3t}$$

linealmente independientes.

- En primer lugar, es inmediato comprobar que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial. Su Wronskiano vale

$$W[e^{3t}, e^{-3t}] = \begin{vmatrix} e^{3t} & , & e^{-3t} \\ 3e^{3t} & , & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -6 \neq 0\,,\ \forall t\,,$$

entonces y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en $-\infty < t < \infty$.

La solución general de la ecuación diferencial en $(-\infty, \infty)$ es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 3.4 Demostrar que la ecuación $y'' - y' - 6y = 0$ tiene dos soluciones distintas de la forma $y(t) = e^{at}$.

- Si $y = e^{at}$ es una solución para algunos valores de a, tenemos

$$y' = ae^{at} \quad , \quad y'' = a^2 e^{at}\,,$$

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$(a^2 e^{at}) - (ae^{at}) - 6(e^{at}) = e^{at}(a^2 - a - 6) = 0\,,$$

que se satisface para $a = 3$ y $a = -2$. Luego $y(t) = e^{3t}$, $y(t) = e^{-2t}$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea.

EJERCICIO 3.5 **Dada la ecuación diferencial**

$$t^3 y''' - 6ty' + 12y = -4 + 12\ln t\,. \tag{3.4}$$

1.- **Comprobar que $y_p(t) = \ln t$ es una solución particular de la ecuación diferencial (??).**

2.- **Comprobar que $y_h(t) = c_1t^2 + c_2t^3 + c_3t^{-2}$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a (??).**

3.- **Encontrar la solución general de (??).**

1.- Sustituyendo $y_p(t)$ y sus derivadas en (**??**) se tiene

$$y_p'(t) = \frac{1}{t},\ y_p''(t) = -\frac{1}{t^2},\ y_p'''(t) = \frac{2}{t^3} \quad \Rightarrow \quad t^3\frac{2}{t^3} - 6t\frac{1}{t} + 12\ln t = -4 + 12\ln t\,.$$

2.- Por otro lado, es fácil comprobar que $y_h(t) = c_1t^2 + c_2t^3 + c_3t^{-2}$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea. Derivando

$$y_h'(t) = 2c_1t + 3c_2t^2 - 2c_3t^{-3},\ y_h''(t) = 2c_1 + 6c_2t + 6c_3t^{-4},\ y_h'''(t) = 6c_2 - 24c_3t^{-5}\,,$$

y sustituyendo en $t^3y''' - 6ty' + 12y$ se obtiene,

$$t^3(6c_2 - 24c_3t^{-5}) - 6t(2c_1t + 3c_2t^2 - 2c_3t^{-3}) + 12(c_1t^2 + c_2t^3 + c_3t^{-2}) = 0\,.$$

3.- Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial (**??**) es

$$\boxed{y(t) = c_1t^2 + c_2t^3 + c_3t^{-2} + \ln t\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 3.6 Resolver el problema de valores iniciales siguiente:

$$y' + y = y(te^{t^2} + 1)\,, \quad y(0) = 1\,.$$

- La ecuación diferencial es del tipo de variables separables. En efecto, se puede escribir como

$$y' = y\,t\,e^{t^2} \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dt} = y\,t\,e^{t^2} \ \Rightarrow\ \frac{dy}{y} = t\,e^{t^2}\,dt, \quad (y \neq 0).$$

Integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int t\,e^{t^2}\,dt, \Rightarrow\ \ln|y| = \frac{1}{2}e^{t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

o bien

$$y = k\, e^{\frac{1}{2} e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad (k = \pm\, e^c). \tag{3.5}$$

La división por y al separar las variables nos obliga a considerar la función $y = 0$. por otra parte, dicha función es también solución de la ecuación diferencial. Dicha solución se obtiene de (**??**) si admitimos el valor $k = 0$. Por tanto, la solución general será

$$y = k\, e^{\frac{1}{2} e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Para determinar la solución particular que verifica la condición inicial $y(0) = 1$, sustituimos los valores $t = 0$, $y = 1$ en (**??**),

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = k\, e^{1/2} \quad \Rightarrow \quad k = e^{-1/2}.$$

Sustituyendo en (**??**) obtenemos la solución

$$\boxed{y = e^{\frac{1}{2}\left(e^{t^2} - 1\right)}}$$

EJERCICIO 3.7 Resolver la ecuación diferencial

$$(t^2 y^2 + 1) dt + 2t^2 dy = 0\,,$$

haciendo uso del cambio de variable $ty = z$.

- Empezamos calculando dz,

$$t\, y = z \;\Rightarrow\; t\, dy + y\, dt = dz \;\Rightarrow\; dy = \frac{dz - y\, dt}{t} \qquad (t \neq 0).$$

Sustituyendo en la ecuación inicial y simplificando

$$(z - 1)^2 dt + 2t\, dz = 0\,,$$

que es una ecuación diferencial de variables separables.

$$-\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dt}{2t}, \qquad (t \neq 0,\ z \neq 1)$$

e integrando

$$-\int \frac{dz}{(z-1)^2} = \int \frac{dt}{2t} \;\Rightarrow\; \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \ln |t| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ahora, podemos deshacer el cambio

$$\frac{1}{ty-1} = \frac{1}{2}\ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

La función $t = 0$ (considerando t como variable dependiente) es también solución de la ecuación diferencial dada. Asimismo, el caso $z = 1$ nos lleva a considerar la función $y = 1/t$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se comprueba que también es solución. Ninguna de las soluciones anteriores se obtienen de (**??**) para ningún valor de la constante c. Se trata, por tanto, de dos soluciones singulares.

EJERCICIO 3.8 Resolver la ecuación diferencial

$$(2ty + 3y^2)dt - (2ty + t^2)dy = 0\,,$$

- La ecuación diferencial es homogénea de grado dos y puede escribirse como,

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{2ty + 3y^2}{2ty + t^2}\,,$$

donde estamos suponiendo que $2ty + t^2 \neq 0$. Dividiendo por t^2,

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{2\left(\frac{y}{t}\right) + 3\left(\frac{y^2}{t^2}\right)}{2\left(\frac{y}{t}\right) + 1}\,,$$

y haciendo el cambio $z = y/t$,

$$z = \frac{y}{t} \;\Rightarrow\; y = t\,z \;\Rightarrow\; y' = z + t\,z'\,.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$z + t\,z' = \frac{2z + 3z^2}{2z + 1} \;\Rightarrow\; t\,z' = \frac{2z + 3z^2}{2z + 1} - z = \frac{z^2 + z}{2z + 1},$$

se llega a la ecuación de variables separables

$$t\,\frac{dz}{dt} = \frac{z^2 + z}{2z + 1} \;\Rightarrow\; \frac{(2z + 1)dz}{z^2 + z} = \frac{dt}{t}, \quad (z^2 + z \neq 0).$$

Integrando, se tiene,

$$\int \frac{(2z + 1)dz}{z^2 + z} = \int \frac{dt}{t} \;\Rightarrow\; \ln|z^2 + z| = \ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

que puede expresarse en la forma

$$z^2 + z = k\,t, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad (k = \pm e^c).$$

Deshaciendo el cambio de variable,

$$\left(\frac{y}{t}\right)^2 + \frac{y}{t} = k\,t \;\Rightarrow\; y^2 + ty = k\,t^3, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.8}$$

Ahora estudiamos el caso $z^2 + z = 0$,

$$z^2 + z = 0 \Rightarrow z(z+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \Rightarrow \dfrac{y}{t} = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \\ z+1=0 \Rightarrow \dfrac{y}{t} + 1 = 0 \Rightarrow y + t = 0 \Rightarrow y = -t \end{cases}$$

Se comprueba que ambas funciones, $y = 0$ e $y = -t$, son también soluciones de la ecuación diferencial. Además, se observa que ambas soluciones se obtienen de (**??**), si admitimos el valor $k = 0$. Por tanto, la solución general vendrá dada por

$$y^2 + ty = k\,t^3, \quad k \in \mathbb{R}$$

Para concluir nos queda por estudiar el caso $2ty + t^2 = 0$,

$$2t\,y + t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t(2y+t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 0 \\ 2y + t = 0 \;\Rightarrow\; y = -\dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

La recta $t = 0$ satisface la ecuación diferencial original y podría admitirse como solución, si consideramos t como variable dependiente. En cambio, se comprueba sustituyendo en la ecuación diferencial original que la recta $y = -t/2$ no es solución.

EJERCICIO 3.9 Resolver la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dt} + y \operatorname{ctg} t = 2t \operatorname{cosec} t\,.$$

- Calculamos el factor integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp\left(\int p(t)\,dt\right) = \exp\left(\int \operatorname{ctg} t\,dt\right) = \exp\left(\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\,dt\right) \\ &= e^{\ln(\operatorname{sen} t)} = \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante, se tiene,

$$y' \operatorname{sen} t + y \cos t = 2t \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(y \operatorname{sen} t) = 2t \;\Rightarrow\; y \operatorname{sen} t = \int 2t\,dt = t^2 + c.$$

O bien,

$$\boxed{y(t) = \frac{t^2 + c}{\operatorname{sen} t}\,, \quad c \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 3.10 Resolver la ecuación diferencial lineal

$$y' + y = \operatorname{sen} t\,, \quad y(0) = 0\,.$$

- Calculamos el factor integrante,

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t)\, dt\right) = \exp\left(\int dt\right) = e^t.$$

Multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante,

$$e^t y' + e^t y = e^t \operatorname{sen} t.$$

El primer término de la igualdad anterior se corresponde con la derivada de la función $e^t y$,

$$e^t y' + e^t y = \frac{d}{dt}\left(e^t y\right) = e^t \operatorname{sen} t.$$

Esta observación nos permite resolver la ecuación,

$$e^t y = \int e^t \operatorname{sen} t\, dt\,,$$

integración por partes

$$\frac{1}{2}e^t(\operatorname{sen} t - \cos t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Despejando la variable y, se obtiene la solución general

$$y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t) + c\, e^{-t}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

- Para calcular la solución particular que satisface la condición $y(0) = 0$, sustituimos los valores $t = 0$, $y = 0$ en (**??**),

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 0 - \cos 0) + c\, e^0 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2}.$$

La solución del problema de valores iniciales vendrá dada por

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t + e^{-t})}$$

EJERCICIO 3.11 **Resolver la ecuación diferencial**

$$(6ty + 2y^2 - 5)dt + (3t^2 + 4ty - 6)dy = 0\,.$$

- Sean

$$M(t,y) = 6ty + 2y^2 - 5, \quad N(t,y) = 3t^2 + 4ty - 6\,.$$

La ecuación diferencial es exacta puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t + 4y = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Existe, por tanto, una función $F(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(t,y).$$

Las igualdades anteriores nos permiten calcular la expresión de la función $F(t,y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} = M(t,y) \;\Rightarrow\; F(t,y) &= \int M(t,y)\,dt = \int (6ty + 2y^2 - 5)dt \\
&= 3t^2y + 2ty^2 - 5t + g(y), \\
\frac{\partial F}{\partial y} = N(t,y) \;\Rightarrow\; 3t^2 + 4ty + g'(y) &= 3t^2 + 4ty - 6 \;\Rightarrow\; g'(y) = -6
\end{aligned}$$

Luego,

$$g(y) = \int -6\,dy = -6\,y.$$

La función $F(t,y)$ será

$$F(t,y) = 3t^2y + 2ty^2 - 5t - 6y,$$

y la solución general vendrá dada en forma implícita por

$$\boxed{3t^2y + 2ty^2 - 5t - 6y = c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 3.12 Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 0 \tag{3.10}$$

1.- **Probar que $y_1(t) = e^{2t}$ es una solución de (??).**

2.- **Aplicar el método de reducción del orden para poder buscar otra solución particular de (??).**

3.- **Encontrar la solución general de (??).**

- Es evidente que $y_1(t) = e^{2t}$ es una solución de (**??**). Si buscamos otra solución de la forma $y(t) = u(t)e^{2t}$, debe cumplirse

$$y(t) = u'e^{2t} + 2ue^{2t}\,, \quad y'' = u''e^{2t} + 4u'e^{2t} + 4ue^{2t}\,. \tag{3.11}$$

Sustituyendo (**??**) en (**??**) se obtiene,

$$y'' - 4y = 0 \Rightarrow e^{2t}(u'' + 4u') = 0$$

al ser $e^{2t} \neq 0$, $\forall t \in (-\infty, \infty)$, entonces $u'' + 4u' = 0$.

Llamando $w := u'$, la ecuación diferencial anterior se transformará en

$$w' + 4w = 0 \Rightarrow \frac{w'}{w} = -4 \Rightarrow \ln|w(t)| = -4t + k \Rightarrow w(t) = c_1 e^{-4t}$$

Al ser $w(t) = u'(t) = c_1 e^{-4t}$, entonces

$$u(t) = -\frac{c_1}{4}e^{-4t} + c_2$$

y finalmente

$$y(t) = u(t)e^{2t} = -\frac{c_1}{4}e^{-2t} + c_2 e^{2t}$$

Si tomamos $c_1 = -4$, $c_2 = 0$, obtenemos la segunda solución $y_2(t) = e^{-2t}$. Puesto que

$$W[e^{2t}, e^{-2t}] = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ 2e^{2t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \forall t \in (-\infty, \infty)\,,$$

entonces, las soluciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ y en consecuencia

$$\boxed{y(t) = -\frac{c_1}{4}e^{-2t} + c_2 e^{2t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

es la solución general de (**??**).

EJERCICIO 3.13 Resolver por reducción del orden la siguiente ecuación diferencial

$$(t^3 - 2t^2)y'' - (t^3 + 2t^2 - 6t)y' + (3t^2 - 6)y = 0\,, \quad t > 2\,, \tag{3.12}$$

sabiendo que admite una solución del tipo $y(t) = t^k$.

- Sustituimos la función $y = t^k$ y sus derivadas en (**??**)

$$k(k-1)(t^{k+1} - 2t^k) - k(t^{k+2} + 2t^{k+1} - 6t^k) + (3t^{k+2} - 6t^k) = 0\,.$$

Simplificando, resulta

$$(3-k)t^2 + (k^2 - 3k)t + (-2k^2 + 8k - 6) = 0\,,$$

lo cual es cierto si $k = 3$.

Tenemos por tanto como solución de (**??**) la función $y_1(t) = t^3$.

- Sea $y(t) = u(t)y_1(t) = u(t)t^3$. Derivando y sustituyendo en la ecuación diferencial inicial (**??**)

$$(t^3 - 2t^2)(6tu + 6t^2u' + t^3u'') - (t^3 + 2t^2 - 6t)(3t^2u + t^3u') + (3t^2 - 6)(ut^3) = 0\,,$$

que una vez simplificada

$$t(t-2)u'' - (t^2 - 4t + 6)u' = 0$$

Reduciendo el orden, $w(t) := u'(t)$ nos proporciona la ecuación

$$t(t-2)w' - (t^2 - 4t + 6)w = 0\,.$$

A continuación resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{w'}{w} = \frac{t^2 - 4t + 6}{t^2 - 2t}\,,$$

de variables separadas

$$\begin{aligned} \ln|w| &= \int \left(1 + \frac{-2t+6}{t(t-2)}\right) dt \\ &= t + \int \tfrac{-3}{t} dt + \int \tfrac{1}{t-2} dt \\ &= t - 3\ln|t| + \ln|t-2| = t + \ln \tfrac{t-2}{t^3} + k \end{aligned}$$

Podemos expresar la solución anterior de la siguiente manera

$$|w| = e^t e^{\ln\left|\frac{t-2}{t^3}\right| + k} = c\left(\frac{t-2}{t^3}\right)e^t\,.$$

Finalmente, al ser $u' = w$, calculamos el valor de la función $u(t)$

$$u = c\int e^t\left(\frac{t-2}{t^3}\right)dt = c\int \frac{e^t(t^2-2t)}{t^4}dt = c\left(\frac{e^t}{t^2}\right) + k\,.$$

Es decir, $y(t) = u(t)y_1(t) = cte^t + kt^3$. Si $c = 1$, $k = 0$ obtenemos $y(t) = te^t$.

- Las soluciones t^3, te^t forman un conjunto fundamental, ya que

$$W[t^3, te^t] = e^t t^3 (t-2) \neq 0\,, \quad \forall t > 2\,,$$

y entonces

$$\boxed{y(t) = c_1 te^t + c_2 t^3\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

es la solución general de la ecuación diferencial (**??**).

EJERCICIO 3.14 **Resolver** $y'' + 6y' + 8y = 0$.

- El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4)\,.$$

Las raíces son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$. En consecuencia, la solución general de nuestro problema es de la forma

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 3.15 **Resolver** $y''' + y'' - 2y' = 0$

- El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2)\,,$$

y sus raíces características son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. La solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-2t}\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 3.16 **Resolver** $(y'' - 2y' + 5)^2 = 0$

- Las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación diferencial son $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$, $\lambda_3 = 1 + 2i$, $\lambda_4 = 1 - 2i$.

La solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) + te^t(c_3 \cos 2t + c_4 \operatorname{sen} 2t) \\ &= e^t((c_1 + c_3 t)\cos 2t + (c_2 + c_4 t)\operatorname{sen} 2t)\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

EJERCICIO 3.17 Resolver

$$y'' - 3y' = 8e^{3t} + 4\,\mathrm{sen}\,t\,. \tag{3.13}$$

- **Paso 1.** La ecuación diferencial homogénea tiene cómo raíces del polinomio característico $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. En consecuencia

$$y_h(t) = c_1 + c_2e^{3t}\,.$$

- **Paso 2.** A continuación intentaremos encontrar a partir de (**??**) otra ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes pero homogénea. Para ello derivamos en (**??**)

$$\begin{array}{l} y''' - 3y'' = 24e^{3t} + 4\cos t \\ y^{4)} - 3y''' = 72e^{3t} - 4\,\mathrm{sen}\,t\,. \end{array} \tag{3.14}$$

sumando (**??**) y (**??**)

$$y^{4)} - 3y''' + y'' - 3y' = 80e^{3t}\,, \tag{3.15}$$

derivando en la ecuación anterior

$$y^{5)} - 3y^{4)} + y''' - 3y'' = 240e^{3t}\,, \tag{3.16}$$

finalmente multiplicamos por -3 la expresión (**??**) y sumamos con (**??**)

$$y^{5)} - 6y^{4)} + 10y''' - 6y'' + 9y' = 0\,. \tag{3.17}$$

El polinomio característico

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 10\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda - 3)^2(\lambda^2 + 1)\,,$$

nos permite obtener la solución general de la ecuación diferencial homogénea (**??**)

$$y(t) = (c_1 + c_2e^{3t}) + (c_3te^{3t} + c_4\cos t + c_5\,\mathrm{sen}\,t)\,.$$

Esta expresión anterior nos sugiere que $y_p(t)$ es de la forma

$$y_p(t) = Ate^{3t} + B\cos t + C\,\mathrm{sen}\,t\,. \tag{3.18}$$

Si sustituimos (**??**) en (**??**) e identificamos coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} 3A & = & 8 \\ -B - 3C & = & 0 \\ 3B - C2C & = & 4 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad A = 8/3, \quad B = 6/5, \quad C = -2/5\,.$$

Por tanto,

$$y_p(t) = \frac{8}{3}te^{3t} + \frac{6}{5}\cos t - \frac{2}{5}\,\mathrm{sen}\,t\,.$$

- **Paso 3.** La solución general de (**??**) viene dada por

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 + c_2 e^{3t} + \frac{8}{3} t e^{3t} + \frac{6}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t\,, \quad c_1\ c_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 3.18 Resolver $y'' - 2y' + y = (t-1)e^t$ utilizando el método de variación de parámetros.

- El polinomio característico $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ tiene por raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto,

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t\,.$$

Si $y_1 = e^t$, $y_2 = te^t$ su Wronskiano vale

$$W = W[e^t, te^t] = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0,\ \forall t \in (-\infty, \infty)\,.$$

- Ahora se trata de encontrar una solución particular $y_p(t)$ de la forma

$$y_p(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) = c_1(t) e^t + c_2(t) t e^t\,.$$

Como sabemos, las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ se obtienen de las igualdades

$$c_1'(t) = \frac{-y_2(t) g(t)}{W}\,, \quad c_2'(t) = \frac{y_1(t) g(t)}{W}\,.$$

En nuestro caso,

$$c_1'(t) = \frac{-y_2 g(t)}{W} = \frac{-te^t(t-1)e^t}{e^{2t}} = -t^2 + t \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\,,$$

y

$$c_2'(t) = \frac{y_1 g(t)}{W} = \frac{e^t(t-1)e^t}{e^{2t}} = t - 1 \qquad \Rightarrow \quad c_2(t) = -\frac{t^2}{2} - t\,.$$

- Por consiguiente, $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ siendo

$$\boxed{y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right) e^t + \left(\frac{t^2}{2} - t\right) t e^t = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right) e^t}$$

EJERCICIO 3.19 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} y_1' & = & -y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & -6y_1 & + & 4y_2 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Los autovalores serán $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. A continuación encontramos el subespacio de autovectores asociado a cada autovalor

$$\begin{array}{l} S_1 = L(\lambda_1 = 1) = \{(t, 2t) : \forall t \in \mathbb{R}\} =< (1,2) > \\ S_2 = L(\lambda_2 = 2) = \{(\alpha, 3\alpha) : \forall \alpha \in \mathbb{R}\} =< (1,3) > \ . \end{array}$$

Como consecuencia de ello, las funciones

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes del sistema inicial.

La solución general tiene la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

que puede expresarse como,

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ \\ y_2(t) = 2c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} \end{array}}$$

EJERCICIO 3.20 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & 2y_1 & - & 2y_2 & + & 3y_3 \\ y_2' & = & y_1 & + & y_2 & + & y_3 \\ y_3' & = & y_1 & + & 3y_2 & - & y_3 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$.

Es fácil comprobar que los vectores

$$(-1, 1, 1), \quad (-11, -1, 4), \quad (1, 1, 1) \, .$$

son tres autovectores asociados a los tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente.

La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

o lo que es equivalente,

$$\boxed{\begin{array}{rcrrr} y_1 & = & -c_1e^t & -11c_2e^{-2t} & +c_3e^{3t} \\ y_2 & = & c_1e^t & -c_2e^{-2t} & +c_3e^{3t} \\ y_3 & = & c_1e^t & +14c_2e^{-2t} & +c_3e^{3t} \end{array}}$$

EJERCICIO 3.21 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & y_1 & - & 3y_2 & + & 3y_3 \\ y_2' & = & 3y_1 & - & 5y_2 & + & 3y_3 \\ y_3' & = & 6y_1 & - & 6y_2 & + & 4y_3 \end{array} \right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2$.

Puede comprobarse que la matriz A es diagonalizable siendo

$$(1,1,2), \quad (1,1,0), \quad (0,1,1).$$

una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Es decir,

$$\boxed{\begin{array}{rcrrr} y_1 & = & c_1e^{4t} & +c_2e^{-2t} & \\ y_2 & = & c_1e^{4t} & +c_2e^{-2t} & +c_3e^{-2t} \\ y_3 & = & 2c_1e^{4t} & & +c_3e^{-2t} \end{array}}$$

EJERCICIO 3.22 Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 2y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & -y_1 & + & 4y_2 \end{array}\right.$$

- La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

es $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. La ecuación tiene la raíz doble $\lambda_1 = 3$, se trata de un autovalor doble y es inmediato comprobar que no existen dos autovectores de A que sean linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz A no es diagonalizable. En este caso, el sistema posee soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 t + c_2)e^{3t} \\ (c_3 t + c_4)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Si sustituimos en el sistema inicial

$$\begin{array}{c} c_1 e^{3t} + 3(c_1 t + c_2)e^{3t} = 2(c_1 t + c_2)e^{3t} + (c_3 t + c_4)e^{3t} \\ c_3 e^{3t} + 3(c_3 t + c_4)e^{3t} = -(c_1 t + c_2)e^{3t} + 4(c_3 t + c_4)e^{3t} \end{array}$$

que simplificando e identificando coeficientes nos proporciona el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} 3c_1 & = & 2c_1 + c_3 \\ 3c_2 + c_1 & = & 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 & = & 4c_3 - c_1 \\ c_3 + 3c_4 & = & -c_2 + 4c_4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_3 = c_1, \quad c_4 = c_1 + c_2$$

La expresión general de la solución general viene dada por

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y_1 & = & (c_1 t + c_2)e^{3t} \\ y_2 & = & (c_1 t + (c_1 + c_2))e^{3t} \end{array}}$$

EJERCICIO 3.23 Resolver por eliminación,

$$\left\{\begin{array}{rcr} \dfrac{dx}{dt} & = & -y + t \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} & = & x - t \end{array}\right.$$

- Si derivamos la segunda de las ecuaciones y le sumamos la primera obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden,

$$y'' + y = t - 1\,. \tag{3.19}$$

Para encontrar la solución general de (**??**) debemos comenzar localizando la solución general $y_h(t)$ de la ecuación diferencial homogénea $y'' + y = 0$.

Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, lo cual nos permite escribir

$$y_h(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} = (c_1 + c_2)\cos t + (ic_1 - ic_2)\operatorname{sen} t = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t$$

Para obtener la solución particular de (**??**), utilizamos el método de los coeficientes indeterminados. Derivamos dos veces en la ecuación diferencial inicial

$$y^{4)} + y'' = 0\,.$$

Al ser $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, las raíces características podemos escribir la solución general

$$y = (k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t) + (A + Bt)\,,$$

y observamos que la solución particular responde al tipo $y_p = A + Bt$. Para determinar A y B sustituimos $y_p(t)$ en (**??**)

$$y'' + y = t - 1 \;\Rightarrow\; (0) + (A + Bt) = t - 1 \;\Rightarrow\; A = -1,\; B = 1\,.$$

En conclusión

$$y(t) = -1 + t + k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t\,, \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{3.20}$$

Para encontrar el valor de $x(t)$ procedemos de forma similar. En primer lugar, derivamos la primera de las ecuaciones del sistema y sustituimos y' de la segunda de las ecuaciones,

$$x'' = -y' + 1 \quad \Rightarrow \quad x'' = -(x - t) + 1 \quad \Rightarrow \quad x'' + x = 1 + t\,.$$

La ecuación diferencial que obtenemos es parecida a la encontrada en el primer apartado y puede comprobarse fácilmente que

$$x(t) = 1 + t + M_1 \cos t + M_2 \operatorname{sen} t\,. \tag{3.21}$$

Pero al ser (**??**) y (**??**) las soluciones, deben de verificar el sistema. Es inmediato comprobar que para que esto sea posible las constantes k_1, k_2, M_1, M_2 deben de cumplir la siguiente relación:

$$M_1 = k_2 \quad , \quad M_2 = -k_1\,.$$

Es decir

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1 + t + k_2 \cos t - k_1 \operatorname{sen} t \\ y(t) & = & -1 + t + k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t \end{array}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1.- Transformar en sistema de primer orden la siguiente ecuación diferencial

$$e^t y''' - ty'' + y' - e^t y = 0$$

2.- Transformar en ecuación diferencial lineal el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = 2x' + 5y + 3 \\ y' = -x' - 2y \end{array} \right.$$

3.- Comprobar que la función $y(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2t$ es una solución del problema de valor inicial

$$\left. \begin{array}{rcl} y'' + 4y & = & 0 \\ y(0) = 0 & ; & y'(0) = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \tag{3.22}$$

4.- Calcular la solución general de la ecuación

$$ty'' + 2y' + ty = 0 \quad , \quad t > 0$$

sabiendo que $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ es solución de la misma.

5.- Sabiendo que e^t y te^t forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea y utilizando el método de variación de las constantes, calcular la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' + y = \frac{-e^t}{t} \quad , \quad t > 0$$

6.- Resolver utilizando el método de coeficientes indeterminados, las siguientes ecuaciones diferenciales:

6.a.- $y'' + 8y = 5t + 2e^{-t}$

6.b.- $y'' + y = t \cos t - \cos t$

6.c.- $y''' - 4y'' + 4y' = 5t^2 - 6t + 4t^2 e^{2t} + 3e^{5t}$

7.- Utilizando el método de variación de parámetros, resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - y = \frac{1}{t}$$

8.- Resolver

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} & = & 4y + e^t \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} & = & 4x - e^t \end{cases}$$

9.- Resolver

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} - 5x + \dfrac{dy}{dt} & = & e^t \\ \\ \dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} & = & 5e^t \end{cases}$$

10.- Resolver

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{dy_1}{dt} = & 2y_1 + y_2 \\ \\ y_2' = \dfrac{dy_2}{dt} = & y_1 + 2y_2 \end{cases}$$