Tema 2

MODELOS DISCRETOS II

EJERCICIO 2.1 [Ajuste por mínimos cuadrados]. Durante cinco días seguidos medimos el tamaño de una población de *Drosophila*, obteniéndose 100, 158, 315, 398 y 794 individuos. Dibujar el logaritmo neperiano del tamaño de la población para estimar el parámetro r en $y(t) = y(0)e^{rt}$.

- Dado que debemos ajustar la función $y(t) = y(0)e^{rt}$, al aplicar logaritmos neperianos

$$\ln(y(t)) = \ln(y(0)) + rt\,.$$

Llamando $\ln(y(t)) = Y$ y $\ln(y(0)) = A$, entonces la función inicial $y(t) = y(0)e^{rt}$ se nos transforma en esta otra $Y = A + rt$. Ahora, procedemos a un ajuste lineal utilizando el método de los mínimos cuadrados. Para ello, debemos minimizar la función:

$$\begin{aligned}\Phi(r, A) &= (\ln 100 - (r + A))^2 + (\ln 158 - (2r + A))^2\\ &+ (\ln 315 - (3r + A))^2 + (\ln 398 - (4r + A))^2\\ &+ (\ln 794 - (5r + A))^2\end{aligned}$$

Calculando las derivadas parciales e igualando a cero, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales,

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial\Phi(r,A)}{\partial A} = 0 & \Rightarrow & 55r + 15A = 89.3193\\[2ex] \dfrac{\partial\Phi(r,A)}{\partial r} = 0 & \Rightarrow & 15r + 5A = 28.0839\end{array}\right.$$

que tiene por solución $r = 0.50676$ y $A = 4.0965$. Es decir, la ecuación de la recta buscada es $y = 0.50676t + 4.0965$.

El siguiente dibujo corresponde a la situación estudiada.

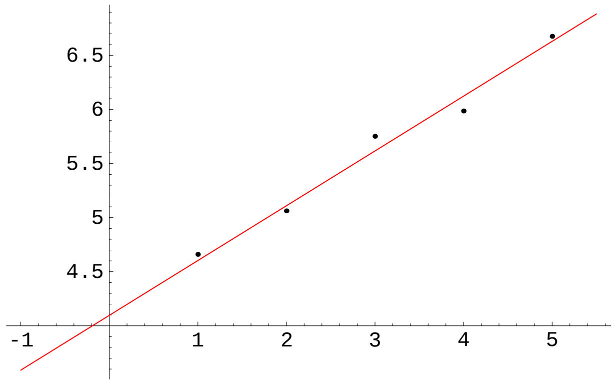

Figura 2.1. Representación gráfica de los puntos y la recta de ajuste.

El ejercicio también puede resolverse haciendo uso del software adecuado, por ejemplo, `Statgraphics`$_{®}$.

Los resultados que se obtienen se resumen en la siguiente tabla:

Parámetro	Estimación	Error Standard	T Statistic	p-valor
A	4.09647	0123613	33.1395	0.0001
r	**0.506767**	0.0372708	3.5969	00009

Estos datos corresponden a la figura siguiente:

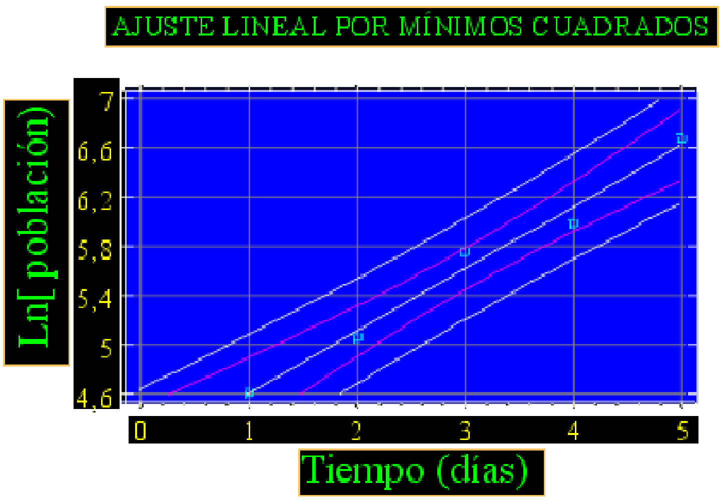

Figura 2.2. Resultado del ajuste usando `Statgraphics`$_{®}$.

EJERCICIO 2.2 Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma:

$$y_{t+2} = \frac{3}{2} y_{t+1} - \frac{1}{2} y_t \,, \quad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots ,$$

probar que la población se estabiliza a largo plazo.

- La ecuación en diferencias anterior es homogénea ya que puede ser escrita como,

$$2y_{t+2} - 3y_{t+1} + y_t = 0 \,,$$

y tiene como ecuación característica

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \,,$$

luego la solución general

$$\boxed{y_t = k_1 + k_2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t = k_1 + \frac{k_2}{2^t} \,, \quad k_1 \,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

- Si tomamos límites cuando t tiende a infinito se obtiene de manera inmediata que $y_t \to k_1$.

EJERCICIO 2.3 Resolver la ecuación en diferencias de orden dos

$$y_{t+2} + y_t = 1 + t \,.$$

- La solución general se construye a partir de una solución particular de la ecuación completa y la solución general de la ecuación homogénea asociada. Empezamos, por tanto, encontrando las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i \,.$$

Es decir, dos números complejos conjugados de módulo 1 y argumento $\pi/2$. La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\boxed{y_t^h = k_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\, t\right) + k_2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\, t\right) \,, \quad k_1 \,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

Para buscar una solución particular de la ecuación completa, observamos que el término independiente $1 + t$, es un polinomio de primer grado. Ensayamos con la solución $y_t^p = a + bt$. Al imponer que sea solución de la ecuación en diferencias, se obtiene,

$$a + b(t+2) + a + bt = 1 + t \quad \Rightarrow \quad 2a + 2b = 1, \quad 2b = 1 \quad \Rightarrow a = 0,\, b = 1/2\,,$$

luego, la solución particular buscada es $y_t^p = 1/2\,t$. La solución general de la ecuación completa será

$$\boxed{y_t = k_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\,t\right) + k_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,t\right) + \frac{1}{2}\,t\,, \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 2.4 Resolver la siguiente ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 5y_t = 3^t\,.$$

- Para encontrar la solución y_t de la ecuación completa empezamos buscando y_t^h, que es la solución general de la homogénea

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 5y_t = 0.$$

Al ser las raíces del polinomio característico $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$,

$$\boxed{y_t^h = k_1 + k_2 5^t\,.}$$

Para conocer una solución particular de la ecuación completa nos fijamos en el término independiente 3^t y ensayamos la solución $y_t^p = c3^t$. Sustituyendo en la ecuación inicial y simplificando

$$c3^{t+2} - 6c3^{t+1} + 5c3^t = 3^t \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{4}\,.$$

La solución general vendrá dada por

$$\boxed{y_t = k_1 + k_2 5^t - \frac{1}{4}3^t\,, \quad k_1\,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 2.5 [Modelo de la telaraña.] **Para el ajuste dinámico de un bien en el mercado, se suele utilizar un modelo discreto, que se fundamenta en las siguientes hipótesis:**

- **La oferta del bien depende del precio del período anterior (la producción del producto se decide teniendo en cuenta el precio en ese momento, pero tarda en realizarse un período de tiempo, por ejemplo en los productos agrícolas),**

$$S_t = -c + dP_{t-1}, \quad c,\, d > 0$$

- **La demanda en cada período depende del precio del bien en el mismo período de tiempo**

$$D_t = a - bP_t, \quad a,\, b > 0$$

- **La condición de equilibrio será $D_t = S_t$, siendo el valor del precio inicial P_0.**

Analizar el comportamiento del modelo.

- De la tercera de las hipótesis que nos da la condición de equilibrio, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$P_t = -\frac{d}{b}P_{t-1} + \frac{a+c}{b} \quad \Rightarrow \quad P_{t+1} = -\frac{d}{b}P_t + \frac{a+c}{b}\,,$$

que para resolverla, damos al tiempo los valores $t = 0,\, 1,\, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}
P_1 &= -\frac{d}{b}P_0 + \frac{a+c}{b} \\
P_2 &= -\frac{d}{b}P_1 + \frac{a+c}{b} = -\frac{d}{b}\left(-\frac{d}{b}P_0 + \frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&= \left(-\frac{d}{b}\right)^2 P_0 - \frac{d}{b}\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
P_3 &= -\frac{d}{b}P_2 + \frac{a+c}{b} = -\frac{d}{b}\left(\left(-\frac{d}{b}\right)^2 P_0 - \frac{d}{b}\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&= \left(-\frac{d}{b}\right)^3 P_0 + \left(-\frac{d}{b}\right)^2\left(\frac{a+c}{b}\right) + \left(-\frac{d}{b}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&\;\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
P_t &= \left(-\frac{d}{b}\right)^t P_0 + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t-1}\left(\frac{a+c}{b}\right) + \cdots + \left(-\frac{d}{b}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right) + \frac{a+c}{b} \\
&= \left(-\frac{d}{b}\right)^t P_0 + \left(\frac{a+c}{b}\right)\left[\left(-\frac{d}{b}\right)^{t-1} + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t-2} + \cdots + \left(-\frac{d}{b}\right) + 1\right]
\end{aligned}
$$

Los sumandos que se encuentran dentro del corchete son la suma[1] de t términos de una progresión geométrica de razón $-\frac{d}{b}$, cuyo valor es

$$\frac{1-(-d/b)^t}{1-(-d/b)}\,,$$

si sustituimos este valor en P_t y simplificamos convenientemente,

$$P_t = \left(-\frac{d}{b}\right)^t P_0 + \frac{a+c}{b+d}\left[1-\left(-\frac{d}{b}\right)^t\right] = \left(-\frac{d}{b}\right)^t\left[P_0 - \frac{a+c}{b+d}\right] + \frac{a+c}{b+d}\,.$$

Llamando

$$P_e := \frac{a+c}{b+d}\,,$$

que se conoce con el nombre de precio teórico de equilibrio para las funciones de oferta y demanda dada. Sustituyendo

$$P_t = (P_0 - P_e)\left(-\frac{d}{b}\right)^t + P_e\,.$$

Si suponemos que $d < b$, entonces $d/b < 1$ y P_t tiende a P_e cuando t tiende a infinito. Es decir, las fuerzas del mercado harán que el precio del producto tienda al precio de equilibrio teórico. Esta situación queda reflejada en la figura siguiente:

[1]La suma de n términos de una progresión geométrica de razón r vale

$$S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

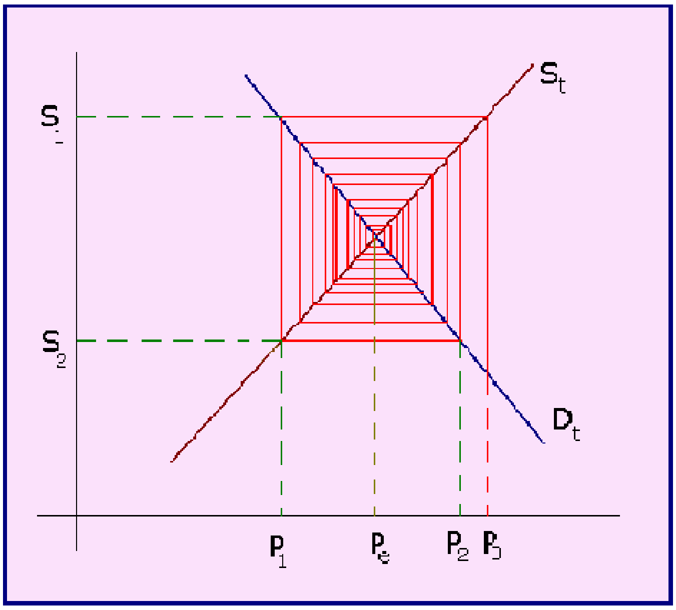

Figura 2.3. Modelo de telaraña.

Para un precio inicial P_0, los productores ofrecen en el período la oferta S_1, pero la demanda cubrirá dicha oferta a un precio diferente P_1. A este último precio la oferta del período siguiente será S_2, que será cubierta por la demanda a un precio P_2, y así sucesivamente.

EJERCICIO 2.6 El modelo formal a tiempo discreto, que describe la convivencia de dos especies con funciones de efectivos x_t e y_t, con medidas mensuales, es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = x_t + y_t - \frac{12}{2^t} \\ y_{t+1} = y_t + \frac{8}{2^t} \, . \end{array} \right.$$

Al principio $x_0 = 40$, $y_0 = 31$. ¿En qué situación está el ecosistema al cabo de 4 meses?.

- Al no depender la segunda de las ecuaciones de x_t, empezamos resolviéndola. Su ecuación homogénea asociada es $\lambda - 1 = 0$, que tiene por raíz $\lambda = 1$, dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea $y_t = k_1$.

  Para encontrar la solución general de la ecuación completa, ensayamos la solución particular $y_t = a/2^t$. Sustituyendo

$$\frac{a}{2^{t+1}} = \frac{a}{2^t} + \frac{8}{2^t} \quad \Rightarrow \quad a = -16 \, ,$$

y la solución general de la ecuación completa es:

$$\boxed{y_t = k_1 - \frac{16}{2^t}}$$

- Si sustituimos este valor en la primera de las ecuaciones del sistema

$$x_{t+1} = x_t + k_1 - \frac{16}{2^t} - \frac{12}{2^t} \quad \Rightarrow \quad x_{t+1} - x_t = -\frac{28}{2^t} + k_1\,.$$

La ecuación homogénea tiene a $\lambda = 1$ como raíz de su ecuación característica asociada, por tanto, $y = k_2$ será su solución general. Para encontrar una solución particular de la solución completa nos fijamos en el término independiente $-28/2^t + k_1$, que como podemos ver está formado por dos términos $-28/2^t$ y la constante k_1 (un polinomio de grado cero). Al ser $\lambda = 1$ raíz de la ecuación característica, debemos tener en cuenta la observación realizada en la teoría, y tenemos que ensayar con un polinomio de un orden mayor. En resumen, debemos probar con $x_t = a/2^t + bt + c$. Sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$\frac{a}{2^{t+1}} + b(t+1) + c - \left(\frac{a}{2^t} + bt + c\right) = -\frac{28}{2^t} + k_1\,.$$

Simplificando

$$\frac{a}{2^t}\left(-\frac{1}{2}\right) + b = -\frac{28}{2^t} + k_1 \quad \Rightarrow \quad a = 56, \quad b = k_1\,.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación completa es

$$\boxed{x_t = k_2 + k_1 t + \frac{56}{2^t}\,, \quad k_1\,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

- Si estamos interesados en encontrar la solución particular para los valores $x_0 = 40$ e $y_0 = 31$, debemos sustituir en las soluciones generales encontradas

$$\begin{array}{lcl} 40 = k_2 + 56 & \Rightarrow & k_2 = -16 \\ 31 = k_1 - 16 & \Rightarrow & k_1 = 47 \end{array}$$

La solución particular que cumple las condiciones iniciales es:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = 47t - 16 + \dfrac{7}{2^{t-3}} \\ y_t = 47 - \dfrac{1}{2^{t-4}} \end{array}}$$

- **Un método alternativo** para resolver el ejercicio es el siguiente.

  Dando los valores $t = 1, 2, 3, \cdots$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 31 + 8\tfrac{1}{2^0} \\
y_2 &= \left(31 + 8\tfrac{1}{2^0}\right) + 8\tfrac{1}{2^1} = 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1}\right) \\
y_3 &= 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1}\right) + 8\tfrac{1}{2^2} = 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1} + \tfrac{1}{2^2}\right) \\
&\vdots \\
y_t &= 31 + 8\left(\tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{t-1}}\right) .
\end{aligned}
$$

  Ahora, utilizando la fórmula que nos da la suma de t términos de una progresión geométrica de razón $1/2$,

$$y_t = 31 + 8\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t}{1 - \frac{1}{2}} ,$$

  y simplificando

$$\boxed{y_t = 47 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^t}$$

  Para encontrar x_t, sustituimos el valor de y_t en la primera de las ecuaciones

$$x_{t+1} = x_t + 47 - 16\left(\frac{1}{2}\right)^t = x_t + 47 - 28\left(\frac{1}{2}\right)^t ,$$

  y resulta ser del mismo tipo a la anterior,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 40 + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \\
x_2 &= \left(40 + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\right) + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 = 40 + 2 \times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1\right] \\
x_3 &= 40 + 2 \times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1\right] + 47 - 28\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\
&= 40 + 3 \times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right] \\
&\vdots \\
x_t &= 40 + t \times 47 - 28\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}\right] .
\end{aligned}
$$

  Sumando los t términos de esta progresión geométrica

$$x_t = 40 + 47t - 28\frac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^t}{1 - \dfrac{1}{2}} ,$$

que una vez simplificada

$$\boxed{x_t = -16 + 47t + 56\left(\frac{1}{2}\right)^t}$$

- Para saber la situación de las poblaciones al cabo de los 4 años, sustituimos en las soluciones encontradas $t = 4$,

$$x_4 \approx 176, \qquad y_4 = 46\,.$$

EJERCICIO 2.7 Dos especies que conviven en un mismo territorio siguen un crecimiento descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{t+1} = 5x_t - 2y_t + t \\ y_{t+1} = 4x_t - y_t + 3 \end{array}\right.$$

donde el tiempo t está medido en años. Si inicialmente el número de individuos de cada especie es $x_0 = 130$ e $y_0 = 250$, resolver el sistema y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.

- Comenzamos el ejercicio convirtiendo el sistema en una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Para ello, de la segunda de las ecuaciones deducimos

$$y_{t+2} = 4x_{t+1} - y_{t+1} + 3\,.$$

Ahora, sustituimos x_{t+1} de la primera de las ecuaciones en la expresión anterior

$$y_{t+2} = 4\,(5x_t - 2y_t + t) - y_{t+1} + 3 = 20x_t - 8y_t + 4t - y_{t+1} + 3\,.$$

Por último, sustituimos el valor x_t de la segunda de las ecuaciones del sistema, y simplificamos

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 4t - 12\,.$$

Para resolverla, empezamos encontrando la solución general de su ecuación homogénea asociada

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3\,;$$

la solución buscada es:

$$y_t^h = k_1 + k_2\,3^t\,.$$

A continuación necesitamos una solución particular de la ecuación completa. Al ser el término independiente un polinomio de primer grado y $\lambda = 1$ raíz del polinomio característico, ensayamos la solución $y_t^p = at^2 + bt + c$. Si sustituimos en la ecuación y simplificamos

$$(-4a)t - 2b = 4t - 12 \quad \Rightarrow \quad a = -1, \quad b = 6 \quad \Rightarrow \quad y_t^p = -t^2 + 6t\,.$$

La solución general de la ecuación completa es:

$$\boxed{y_t = k_1 + k_2\, 3^t - t^2 + 6t\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

Para encontrar x_t, despejamos de la segunda de las ecuaciones y sustituimos el valor de y_t

$$\begin{aligned} x_t &= \tfrac{1}{4}\,(y_{t+1} + y_t - 3) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(k_1 + k_2\, 3^{t+1} - (t+1)^2 + 6(t+1) + k_1 + k_2\, 3^t - t^2 + 6t - 3\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(2k_1 + 4k_2 3^t - t^2 - 10t + 2\right)\,. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{x_t = \frac{1}{2}k_1 + k_2 3^t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

- Finalizamos el ejercicio encontrando la solución particular del sistema correspondiente a las condiciones iniciales, $x_0 = 130$ e $y_0 = 250$. Sustituyendo en las expresiones de x_t e y_t obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 130 = \frac{1}{2}k_1 + k_2 + \frac{1}{2} \\ \\ 250 = k_1 + k_2\,; \end{array} \right.$$

cuya solución nos proporciona los valores $k_1 = 241$ y $k_2 = 9$. En consecuencia,

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = \dfrac{241}{2} + 9 \times 3^t - \dfrac{1}{4}t^2 - \dfrac{5}{2}t \\ \\ y_t = 241 + 9 \times 3^t - t^2 + 6t \end{array}}$$

- Como podemos apreciar, si en las expresiones anteriores tomamos límites cuando t tiende a infinito, nos encontramos con $x_t \to \infty$ e $y_t \to \infty$.

EJERCICIO 2.8 Dos especies admiten el siguiente modelo de coexistencia:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{t+1} & = & 4x_t + 6y_t - 3^t \\ y_{t+1} & = & -2x_t - 4y_t + 3^t\,. \end{array}\right.$$

Obtener las expresiones de las funciones de efectivos de las dos especies que satisfacen las condiciones iniciales: $x_0 = 21$, $y_0 = 150$, expresando por separado el caso t par del caso impar.

- Utilizando el método de reducción en el sistema anterior, obtenemos.

$$2x_{t+1} + 3y_{t+1} = 2x_t + 3^t\,. \tag{2.1}$$

Ahora, aumentamos un paso en la primera de las ecuaciones y despejamos y_{t+1},

$$y_{t+1} = \frac{1}{6}\left(x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3\,3^t\right)\,.$$

Sustituyendo en (**??**) y simplificando se obtiene,

$$x_{t+2} - 4x_t = -3^t\,. \tag{2.2}$$

Es fácil comprobar que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$ son las raíces de la ecuación característica. Por lo tanto, la solución general de la homogénea es

$$x_t^h = k_1\,2^t + k_2(-2)^t.$$

El término independiente sugiere una solución particular del tipo $x_t^p = c\,3^t$. Sustituimos en (**??**)

$$c\,3^{t+2} - 4c\,3^t = -3^t \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad x_t^p = -\frac{1}{5}\,3^t\,.$$

La solución general de la ecuación completa es:

$$\boxed{x_t = k_1\,2^t + k_2(-2)^t - \frac{1}{5}\,3^t\,, \quad k_1\,, k_2 \in \mathbb{R}}$$

Para encontrar el valor correspondiente de y_t despejamos su valor en la primera de las ecuaciones

$$y_t = \frac{1}{6}\left(x_{t+1} - 4x_t + 3^t\right)\,.$$

Al conocer el valor de x_t podemos sustituir

$$y_t = \frac{1}{6}\left((k_1\,2^{t+1} + k_2(-2)^{t+1} - \frac{1}{5}\,3^{t+1}) - 4(k_1\,2^t + k_2(-2)^t - \frac{1}{5}\,3^t) + 3^t\right)\,.$$

Finalmente, simplificando se llega a

$$\boxed{y_t = -\frac{1}{3}k_1\,2^t - k_2\,(-2)^t + \frac{1}{5}3^t\,, \quad k_1\,,k_2\,\in \mathbb{R}}$$

- Para determinar la solución particular, es necesario tener en cuenta las condiciones iniciales $x_0 = 21$, $y_0 = 150$. De aquí determinaríamos las constantes $k_1 = 256.5$ y $k_2 = -235.3$. Para finalizar, observemos que si t es par $(-2)^t = 2^t$, y en el caso impar $(-2)^t = -2^t$.

EJERCICIO 2.9 Resolver el sistema en diferencias

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = -3x_t + 6y_t + e^{-t} \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t - e^{-t}\,, \end{array} \right.$$

donde x_t e y_t representan los efectivos de dos especies animales y el tiempo t, considerado como variable discreta, se mide en años. Comprobar que en este método, los efectivos iniciales de una de las especies han de necesariamente condicionar los de la otra. Tomar, por ejemplo, $x_0 = 35$ y calcular y_0. Analizar las posibilidades de extinción.

- El método que utilizamos está basado en convertir el sistema anterior en una única ecuación en diferencias que dependa de una sola variable. Para ello, sumamos a la primera ecuación del sistema la segunda multiplicada por (-3)

$$x_{t+1} - 3y_{t+1} = 4e^{-t}\,. \tag{2.3}$$

Necesitamos hacer desaparecer y_{t+1} de está ecuación, y esto lo conseguimos sustituyendo t por $t+1$ en la primera de las ecuaciones del sistema

$$x_{t+2} = -3x_{t+1} + 6y_{t+1} + e^{-t-1} \quad \Rightarrow \quad y_{t+1} = \frac{1}{6}\left(x_{t+2} + 3x_{t+1} - e^{-1}e^{-t}\right)\,,$$

sustituyendo en (**??**)

$$x_{t+2} + x_{t+1} = e^{-t}(e^{-1} - 8)\,.$$

Esta ecuación tiene como solución general de la ecuación homogénea asociada

$$x_t^h = k_1(-1)^t\,,$$

y como consecuencia de la forma del término independiente, probamos con la solución particular $x_t^p = Ae^{-t}$. Es fácil obtener el valor $A = 16.72$. Por tanto,

$$\boxed{x_t = k_1(-1)^t + 16.72e^{-t}\,, \quad k_1\,\in \mathbb{R}}$$

En la primera de las ecuaciones del sistema, despejamos y_t y sustituimos el valor encontrado de x_t

$$y_t = \frac{1}{6}\left(x_{t+1} + 3x_t - e^{-t}\right) \quad \Rightarrow \quad y_t = \frac{1}{3}k_1(-1)^t + 9.22e^{-t}$$

Observemos que en las soluciones del sistema sólo aparece una constante (k_1), esto obliga a que los valores iniciales de cada una de las especies tengan que estar relacionados. Como sabemos que $x_0 = 37$, sustituimos y determinamos el valor $k_1 = 20.28$, lo que nos permite saber el valor inicial de la segunda de las especies

$$y_0 = \frac{1}{3}20.28(-1)^0 + 9.22e^0 = \frac{20.28}{3} + 9.22 = 16\,.$$

La solución particular pedida es:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = 20.28(-1)^t + 16.72e^{-t} \\ \\ y_t = 6.76(-1)^t + 9.22e^{-t} \end{array}}$$

- **Analicemos el problema de la extinción**. Para la primera de la especie x_t, observamos que si t es par al ser e^{-t} y $(-1)^t$ positivos, es imposible que x_t se anule. Si consideramos un año impar

$$e^{-t} = \frac{16.72}{28.28} < 1\,,$$

pero si despejamos t tenemos que tomar logaritmos y aparecerá una cantidad negativa, la cual no tiene sentido biológico. En consecuencia, la primera de la especie nunca desaparecerá.

Si repetimos el mismo razonamiento para la segunda de las especies, deducimos que si el tiempo es positivo $y_t \neq 0$. Supongamos que t es impar

$$e^{-t} = \frac{9.22}{6.76} > 1 \quad \Rightarrow \quad t \approx 0.3\,.$$

Si somos estrictos, esta solución al no ser entera no deberíamos considerarla, pero podemos interpretarla diciendo que la extinción de la segunda especie se producirá a los 0.3 años, o bien a los 109 días.

EJERCICIO 2.10 Dos especies, una depredadora x y otra presa y, se reproducen de manera que, en solitario, sus poblaciones se duplicarían y cuadruplicarían cada año, respectivamente. La presencia de depredadores produce el efecto de disminuir cada año la población de presas en cuatro veces el efectivo de los depredadores existentes al comienzo del año, y la de presas hace aumentar la especie depredadora en k veces el efectivo de las presas existentes al comienzo del año. Movimientos migratorios suman cada año 20 individuos a la especie depredadora procedente de otra región del ecosistema.

1.- **Describir la evolución cuantitativa de estas especies mediante un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden.**

2.- **Determinar el valor de k, sabiendo que la ecuación característica de la ecuación en diferencias de segundo orden que satisface la población presa tiene una raíz doble igual a 3**

3.- **Si inicialmente las poblaciones depredadora y presa constan de 7 y 80 individuos, respectivamente, se desea saber el número de individuos que componen cada una de ellas al cabo de 6 años y si alguna se extingue a tiempo finito.**

- El sistema de ecuaciones en diferencias cuando las poblaciones están en solitario es:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{t+1} = 2x_t \\ y_{t+1} = 4y_t \,, \end{array}\right.$$

donde el tiempo se encuentra expresado en años.

Al poner en contacto ambas especies, el sistema anterior se transforma en

$$\left\{\begin{array}{l} x_{t+1} = 2x_t + ky_t + 20 \\ y_{t+1} = 4y_t - 4x_t \,. \end{array}\right.$$

- Para el segundo de los apartados, resolveremos el sistema anterior. Comenzamos aumentando un paso en la segunda de las ecuaciones, y sustituyendo el valor de x_{t+1} dado en la primera,

$$y_{t+2} = 4y_{t+1} - 4x_{t+1} = 4y_{t+1} - 4(2x_t + ky_t + 20) = 4y_{t+1} - 8x_t - 4ky_t - 80\,.$$

Despejamos en la segunda ecuación del sistema x_t y sustituimos

$$y_{t+2} = 4y_{t+1} - \frac{8}{4}\,(4y_t - y_{t+1}) - 4ky_t - 80\,,$$

que da lugar a la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 4(2+k)y_t = -80\,. \tag{2.4}$$

Su ecuación característica $\lambda^2 - 6\lambda + 4(2+k) = 0$, tiene por raíces

$$3 \pm \sqrt{9 - 4(2+k)}\,,$$

y al ser el 3 una raíz doble, entonces $k = 1/4$. El sistema nos quedará

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = 2x_t + \frac{1}{4}y_t + 20 \\ \\ y_{t+1} = 4y_t - 4x_t\,, \end{array} \right.$$

- El tercer apartado consiste en resolver el sistema con las condiciones iniciales $x_0 = 7$, $y_0 = 80$. Sabemos que la solución general de la ecuación homogénea vale

$$y_t^h = (k_1 + k_2\,t)3^t\,.$$

Para encontrar una solución particular de la solución completa, probamos con $y_t = A$. Sustituimos en (**??**)

$$A - 6A + 9A = -80 \quad \Rightarrow \quad A = -20\,.$$

La solución general buscada es

$$\boxed{y_t = (k_1 + tk_2)3^t - 20\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

que nos permite, sustituyendo en

$$x_t = -\frac{1}{4}y_{t+1} + y_t$$

escribir

$$\boxed{x_t = \frac{1}{4}\left(k_1 + (t-3)k_2\right)3^t - 15\,, \quad k_1\,, k_2\, \in \mathbb{R}}$$

Si hacemos que $t = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 = \frac{1}{4}\left(k_1 - 3k_2\right) - 15 \\ \\ 80 = k_1 - 20 \end{array} \right.$$

cuya solución es: $k_1 = 100$, $k_2 = 4$. Es decir,

$$\boxed{\begin{array}{l} x_t = (22+t)3^t - 15 \\ \\ y_t = (100+4t)3^t - 20 \end{array}}$$

- Ahora podemos encontrar el número de presas y depredadores al cabo de 6 años

$$x(6) = 20397\,, \quad y(6) = 90376\,.$$

Como se puede observar,

$$x_t \to +\infty\,, \quad y_t \to +\infty\,,$$

cuando $t \to \infty$, por lo que ninguna de las dos especies desaparecerá.

EJERCICIO 2.11 Supongamos que la función oferta y la función demanda, de un animal exótico, vienen dadas por:

$$S(p) = 1000p - 400 \qquad D(p) = 5000 - 500p$$

donde p denota el precio del animal. Supongamos que el cambio del precio viene descrito por

$$p_{t+1} = p_t + \alpha(D(p_t) - S(p_t))\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots\,.$$

Demostrar que este modelo es lineal y encontrar el punto de equilibrio.

- Basta sustituir los valores de la oferta y de la demanda en la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_t + \alpha(D(p_t) - S(p_t)) = p_t + \alpha(5000 - 500p_t - 1000p_t + 400) \\ &= (1 - 1500\alpha)p_t + 5400\alpha\,. \end{aligned}$$

Estamos ante un modelo discreto lineal, siendo $f(x) = (1 - 1500\alpha)x + 5400\alpha$.

El punto de equilibrio se encuentra resolviendo la ecuación $f(x^*) = x^*$, cuyo valor es $x^* = 18/5$.

Para saber si es un punto de equilibrio estable o inestable, nos fijamos en la pendiente de la recta,

$$|1 - 1500\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < 1 - 1500\alpha < 1\,,$$

en consecuencia, para que el punto de equilibrio sea estable tiene que ocurrir

$$0 < \alpha < \frac{1}{750}\,.$$

Observemos que en el momento que el precio del animal corresponde al punto de equilibrio,

$$S(18/5) = 1000 \times \frac{18}{5} - 400 = 3200$$

$$D(18/5) = 5000 - 500 \times \frac{18}{5} = 3200\,,$$

la oferta y la demanda coinciden.

EJERCICIO 2.12 Encontrar la raíz de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ utilizando el método del punto fijo.

- Recordemos que para aplicar el método debemos escribir la ecuación en la forma $x = g(x)$ y obtener una sucesión $x_{k+1} = g(x_k)$ partiendo de un valor $x_0 \in (a, b)$.

  Observemos que si aplicamos el Teorema de *Bolzano* a la función $\varphi(x) = x^3 - x - 1$ en el intervalo $[1, 2]$ nos aseguramos que la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(1, 2)$,

  Por otro lado, si escribimos la ecuación como $x^3 - 1 = x$ y consideramos la función $g(x) = x^3 - x$, podemos tomar como valor inicial o semilla un número entre 1 y 2, por ejemplo $x_0 = 1.5$. Al ser $g'(x) = 3x^2$, en cualquier entorno de 1.5 se cumple $|g'(x)| > 1$. En consecuencia, el método no es convergente.

  También es posible escribir la ecuación de esta otra manera $x = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, y ahora considerar otra función $h(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ con derivada $h'(x) \approx 0.165$ en un entorno de $x_0 = 1.85$. Es decir, el método del punto fijo es convergente.

  Para encontrar la raíz utilizamos el software `Mathemathica`®

```
h[x_] := (x + 1)^(1/3)
FixedPointList[h, 1.85, 14]
```

{1.85, 1.417799, 1.342167, 1.328024, 1.325345, 1.3248371, 1.324740, 1.324722, 1.324718, 1.324718, 1.324717, 1.324717, 1.324717, 1.324717}

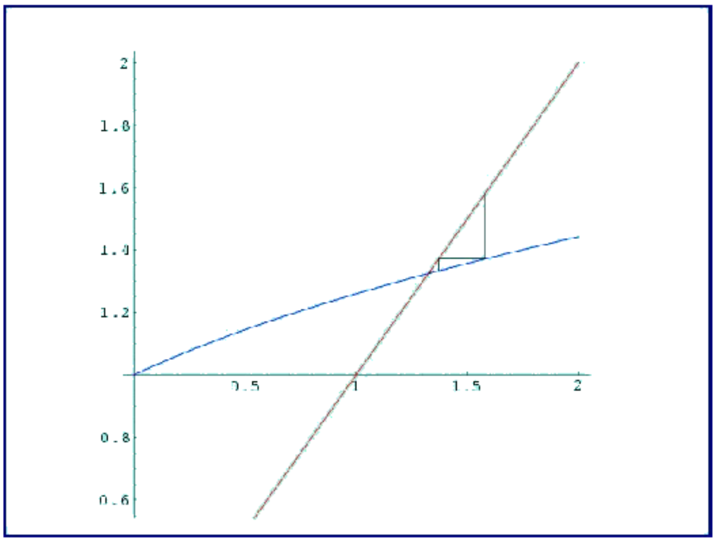

Figura 2.4. Diagrama de Cobweb.

EJERCICIO 2.13 **Para dos poblaciones de un mismo tipo de bacterias, que crecen independientemente una de la otra, obtenemos los siguientes datos:**

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_1(t)$	10	11	10	20	25	60	110	140	165	175	185
$N_2(t)$	30	50	75	110	145	170	180	185	180	180	180

Dibujar $N_1(t)$ y $N_2(t)$ en función del tiempo t. ¿Cuál de estas dos poblaciones se parece más a la ecuación logística?.

- Si utilizamos el software `Mathematica`® obtenemos la siguiente representación gráfica

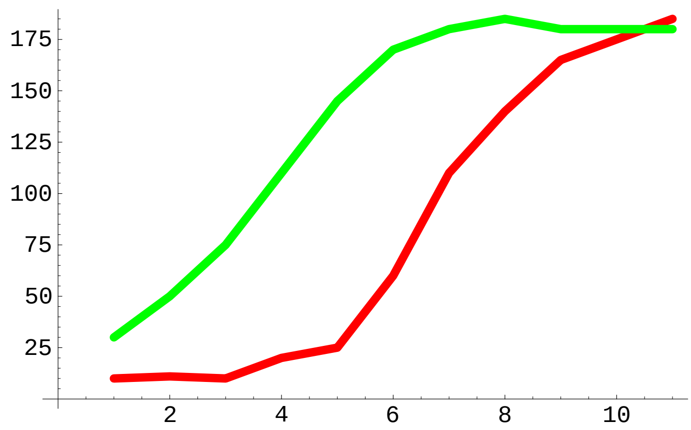

Figura 2.5.

La curva en color verde tiende a 180 cuando aumentamos el valor del tiempo, tiene forma en S, y además su punto de inflexión se encuentra hacia la mitad de la capacidad de carga $180/2 = 90$. En consecuencia $N_2(t)$ es la más parecida a la ecuación logística.

EJERCICIO 2.14 **Sea $r = 0.69$ y $K = 100$. Dibujar en el plano los puntos $(N(t), N(t+1))$ correspondientes a las siguientes ecuaciones:**

$$N(t+1) = N(t)e^r \tag{2.5}$$

$$N(t+1) = \frac{N(t)e^r K}{N(t)(e^r - 1) + K} \tag{2.6}$$

- Empezamos la resolución del ejercicio con la ecuación (**??**) que podemos reescribirla

$$N(t+1) = \frac{200N(t)}{N(t)+100},$$

El resto lo resolveremos con el software `Mathematica`®. Lo iniciamos escribiendo las funciones

```
f[x_] := 200 * x/(x + 100)
g[x_] := x
```

continuamos encontrando 20 términos de la órbita correspondiente al valor $x_0 = 5$,

```
iters = NestList[f, 5., 20]
```

cuyos valores son:
{ 5., 9.5238, 17.3913, 29.6296, 45.7142, 62.7450, 77.1084, 87.07482, 93.0909, 96.4218, 98.1783, 99.0807, 99.5382, 99.7686, 99.8841, 99.9420, 99.9710, 99.9855, 99., 99.9963, 99.9981 }

Se observa que los valores de esta población tienden al punto de equilibrio 100.

- En ciertas ocasiones, es frecuente enfrentar las representaciones gráficas de $N(t+1)$ en función de $N(t)$, con la de $N(t)$.

```
fg = Plot[{x, f[x]}, {x, 0, 150}, PlotStyle- > {RGBColor[1, 0, 0],
RGBColor[0, 0, 1]}, DisplayFunction- > Identity]

gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{iters, iters}]], 2, 1],
PlotJoined- > True, DisplayFunction- > Identity]
Show[fg, gi, AspectRatio- > 1, DisplayFunction- > $DisplayFunction]
ListPlot[iters, PlotJoined- > True]
```

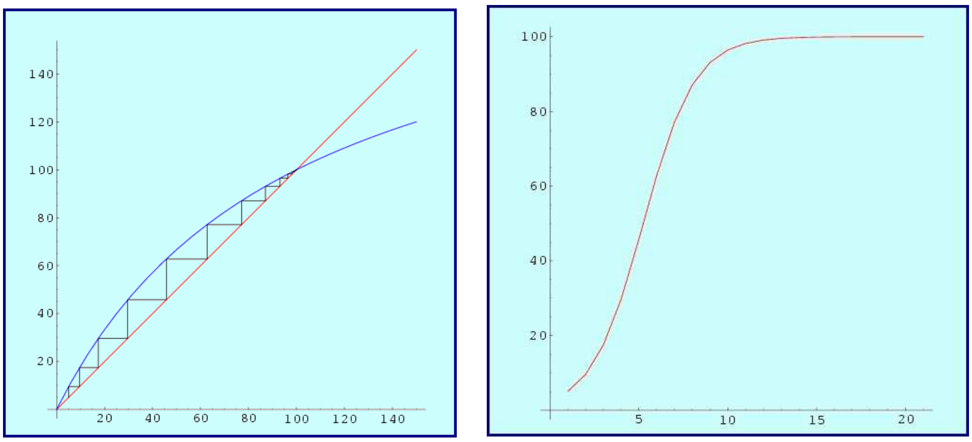

Figura 2.6.

Como puede apreciarse, la población sigue un modelo logístico discreto.

- La ecuación (**??**) observamos que es lineal en el plano $(N(t), N(t+1))$; pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente e^r. Para su estudio, realizamos un análisis similar al caso anterior. En este caso los primeros términos de la órbita son:

  { 5. 9.9685, 19.8745, 39.6241, 78.9992, 157.5019, 314.0141, 626.0548, 1248.1751, 2488.5062, 4961.3735, 9891.5675, 19720.9719, 39318.0080 }

  que experimentan un crecimiento exponencial, como se pone de manifiesto en las siguientes gráficas

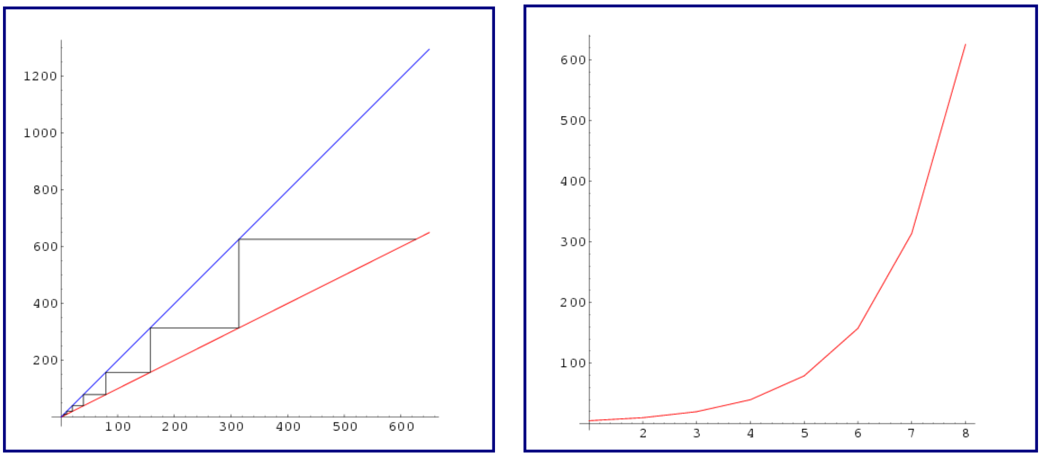

Figura 2.7.

EJERCICIO 2.15 Dada la ecuación logística del crecimiento

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-N(0)}{N(0)}\right) e^{-rt}}$$

Expresar $N(t+1)$ en función de $N(t)$

- Empezamos resolviendo el ejercicio calculando $N(t+1)$ de la expresión $N(t)$,

$$\begin{aligned}
N(t+1) &= \frac{k}{1 + \frac{k-N(0)}{N(0)} e^{-rt} e^{-r}} = \frac{k}{e^{-r}\left(e^r + \frac{k-N(0)}{N(0)} e^{-rt}\right)} \\
&= \frac{k}{e^{-r}\left(e^r - 1 + 1 + \frac{k-N(0)}{N(0)} e^{-rt}\right)} = \frac{k}{ke^{-r}\left(\frac{e^r-1}{k} + \frac{1+\frac{k-N(0)}{N(0)}e^{-rt}}{k}\right)} \\
&= \frac{1}{e^{-r}\left(\frac{e^r-1}{k}\right) + e^{-r}N(t)^{-1}} = \frac{e^r}{\frac{e^r-1}{k} + \frac{1}{N(t)}},
\end{aligned}$$

que una vez simplificada, nos da como solución

$$\boxed{N(t+1) = \frac{e^r k N(t)}{k + N(t)(e^r - 1)}}$$

EJERCICIO 2.16 [**Modelo de Varley, Gradwell y Hassell**]. **Muchas poblaciones de insectos se rigen por el siguiente modelo**

$$f(N_t) = N_{t+1} = \frac{\lambda}{\alpha} N_t^{1-b}\,, \quad \alpha,\, b,\, \lambda > 0\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2\cdots \tag{2.7}$$

donde λ **representa a la tasa reproductiva** $(\lambda > 1)$ **y** N_t^{-b}/α **es la fracción de la población que sobreviven desde la infancia a la edad adulta reproductiva. Podemos expresar** (??) **como**

$$N_{t+1} = \left(\frac{1}{\alpha} N_t^{-b}\right) (\lambda N_t)\ ,$$

es decir, N_{t+1} **será igual a la fracción de insectos que sobreviven en la generación** $t+1$ **por el número de insectos que nacen de la generación** t**. Estudiar los puntos de equilibrio del modelo.**

- Tenemos que estudiar el sistema dinámico discreto $N_{t+1} = f(N_t)$, siendo

$$f(x) = \frac{\lambda}{\alpha} x^{1-b}\,.$$

Sus puntos de equilibrio se obtienen resolviendo la ecuación

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\alpha} x^{1-b} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda x}{\alpha x^b} = x\,,$$

es decir, $x_1^* = 0$, $x_2^* = (\lambda/\alpha)^{1/b}$. Para poderlos clasificar es necesario conocer el valor de la derivada de $f(x)$ en cada uno de estos puntos. Al ser $f'(x) = \frac{\lambda}{\alpha}(1-b)x^{-b}$ tenemos

$$f'(x_2^*) = 1 - b \quad \Rightarrow \quad |1-b| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < b < 2\,.$$

El punto de equilibrio $(\lambda/\alpha)^{1/b}$ es estable siempre que $0 < b < 2$. En caso contrario $b > 2$, el modelo tiene en $(\lambda/\alpha)^{1/b}$ un punto de equilibrio inestable.

En el primero de los puntos no existe $f'(x_1^*)$, y por lo tanto no podemos seguir el procedimiento anterior. No obstante su análisis a nivel biológico no es interesante pues indicaría que inicialmente no existen individuos en la población.

EJERCICIO 2.17 Un modelo discreto frecuentemente utilizado en dinámica de poblaciones, consiste en la ecuación

$$N_{t+1} = f(N_t) = N_t e^{r\left(1-\frac{N_t}{k}\right)} \qquad r\,, k\, \in \mathbb{R}^+\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots .$$

Encontrar y analizar los puntos de equilibrio.

- Procedemos de forma idéntica al ejercicio anterior, pero ahora con la función $f(x) = xe^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)}$, obteniéndose de forma inmediata los puntos de equilibrio $x_1^* = 0$ y $x_2^* = k$. La derivada de la función $f(x)$ es

$$f'(x) = e^{r\left(1-\frac{x}{k}\right)}\left(1 - \frac{xr}{k}\right)\,,$$

que nos permite clasificar el punto de equilibrio que es más interesante. Puesto que $f'(k) = 1 - r$, entonces el $x_2^* = k$ será estable si $0 < r < 2$.

EJERCICIO 2.18 Analizar los puntos de equilibrio del modelo discreto no lineal siguiente:

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{kN_t}{b + N_t} \qquad b,\, k\, > 0\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots ,$$

- Es inmediato comprobar que este modelo presenta en $x_1^* = k - b$ un punto de equilibrio estable, si $k > b$.

EJERCICIO 2.19 Calcular la posición de los puntos fijos y de los puntos 2-periódicos en el modelo logístico $N_{t+1} = 3.3N_t(1 - N_t)$, $t = 0, 1, 2, \cdots$.

- Para resolver gráficamente el ejercicio, necesitaremos representar las funciones $g(x) = x$, $f(x) = 3.3x(1 - x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ y encontrar los puntos de corte. En nuestro caso

$$f^2(x) = 3.3^2 x(1 - x)(1 - 3.3x + 3.3x^2)\,.$$

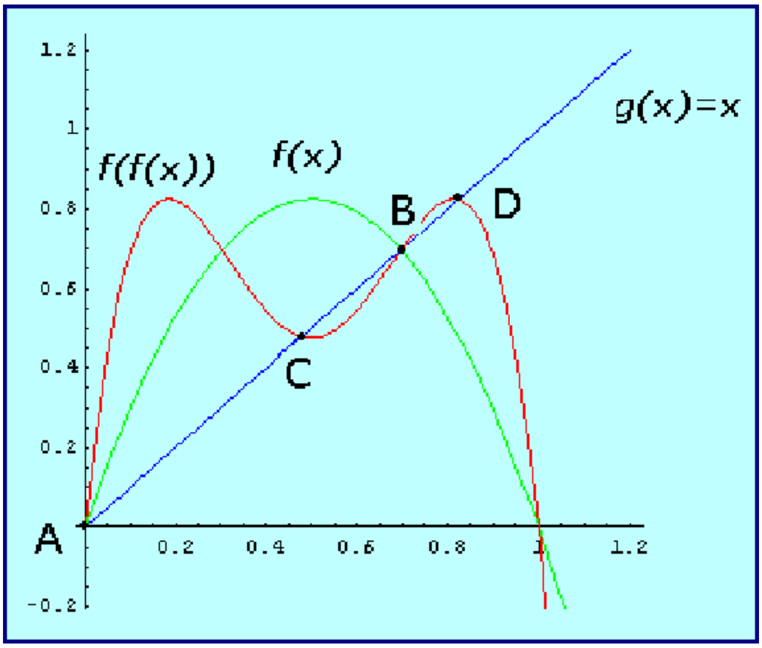

Figura 2.8. Puntos de equilibrio y 2-periódicos de $f(x) = 3.3x(1-x)$.

Los puntos de equilibrio son $x_A = 0$, $x_B = 0.6969..$ y los puntos 2-periódicos $x_c = 0.47492701..$, $x_D = 0.8236032$.

EJERCICIO 2.20 Supongamos que la tasa de crecimiento de una población P satisface

$$g(P) = 0.03P(1 - P/600)\,.$$

El modelo discreto de crecimiento logístico viene dado por

$$P_{t+1} = P_t + g(P_t)\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots .$$

1.- **Encontrar la población cuando $g(P)$ es cero y cuando tiene un máximo (vértice).**

2.- **Calcular P_1, P_2, P_3 para un valor inicial $P_0 = 100$. Encontrar los puntos de equilibrio.**

1.- Es evidente que $g(P)$ se anula para los valores $P = 0$ y $P = 600$. Al ser una parábola que corta al eje de abscisas en los puntos 0 y 600, su vértice estará situado en $P = 300$ siendo $g(300) = 4.5$. Es decir el valor máximo de la parábola será el punto (300, 4.5).

2.- Para encontrar las poblaciones pedidas solamente tendremos que sustituir los valores adecuados en el modelo presentado. De esta manera,

$$P_1 = P_0 + 0.03P_0(1 - P_0/600) = 102.5\,.$$

De forma similar $P_2 = 105.05$, $P_3 = 107.65$.

EJERCICIO 2.21 La población de China en 1980 era de 985 millones, y el censo de 1990 mostró que la población había crecido hasta 1.137 millones. Suponiendo que la población crece según la siguiente ley de crecimiento discreto exponencial

$$P_{t+1} = (1 + r)P_t\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots\,, \tag{2.8}$$

donde t es el número de décadas después de 1980 y P_t la población t décadas después de 1980.

1.- **Encontrar la constante r de crecimiento y predecir la población para el año 2000.**

2.- **Encontrar el tiempo necesario para que se duplique la población.**

1.- Llevando los datos en (**??**),

$$P(1990) = P_1 = (1 + r)P(1980) = (1 + r)P_0 \quad \Rightarrow \quad 1.137 = (1 + r)985\,,$$

y el valor buscado es $r = 0.1543$.

2.- La segunda parte del ejercicio se deduce de la ecuación

$$P_t = 1.1543^t P_0 = 2P_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{\ln 1.1543} = 4.83 \text{ décadas}\,,$$

se necesitan 48.3 años para que la población se duplique.

EJERCICIO 2.22 Un invertebrado vive en un lago que está afectado por el efecto de la contaminación que penetra lentamente en el ecosistema. La dinámica poblacional para este invertebrado viene dada por el siguiente modelo de crecimiento exponencial no autónomo

$$P_{n+1} = (1 + k(t_n))P_n \,, \qquad P_0 = 40.000 \,, \tag{2.9}$$

donde $t_n = n$ es el número de días desde la medida inicial de la población y $k(t) = 0.08 - 0.01t$ es la tasa de crecimiento, que claramente decrece con el tiempo.

1.- **Encontrar la población para este organismo en los próximos 5 días.**

2.- **Cuando la tasa de crecimiento cae a cero, la población alcanza su máximo. Encontrar cuando ocurre y el tamaño de la población en este momento.**

3.- **Encontrar cuando se da el nivel máximo de polución, lo que obliga a la extinción de la especie.**

1.- La población para el primer día es $P_1 = 1.08 \times 40000 = 43200$, ya que $k(t_0) = 1.08$. Para el resto de los días la solución es $P_2 = 46224$, $P_3 = 48997$, $P_4 = 51447$, $P_5 = 53505$.

2.- La tasa de crecimiento es cero al cabo de los $t = 8$ días. La población será de $P_8 = 1.01P_7 = 1.01 \times 1.02 \times 1.03 \times 53505 = 56775$.

3.- Para encontrar la respuesta del tercer apartado, tenemos que determinar cuando el factor $1 + k(t_n)$ se anula. En nuestro caso,

$$1 + 0.08 - 0.01t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 108 \,.$$

Esto ocurre al cabo de los 108 días que es la cota superior teórica para la extinción de la especie.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1.- Calcular k para que la ecuación en diferencias de segundo orden:

$$x_{t+2} - 2kx_{t+1} + (k+1)x_t = t^2 + 3 + 3^t$$

tenga a 1 y a 3 como raíces de la ecuación característica.
Resolver, a continuación, la ecuación completa con las condiciones iniciales: $x_0 = 10 \,, x_1 = 18$.

2.- Dos especies conviven de acuerdo con el siguiente modelo discreto:

$$\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + y_t + 3^t \\ y_{t+1} = 4x_t + 2y_t + 3^t\,, \end{cases}$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años. Hallar sus funciones de efectivos.

3.- Dos especies que conviven en un mismo territorio, evolucionan del modo descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 7x_t - 2y_t - t + 2 \\ y_{t+1} = 6x_t - y_t + 5t\,, \end{cases}$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años.

3.a.- Si, inicialmente, el número de individuos de cada especie es $x_0 = 70$, $y_0 = 251$, resolver el sistema para obtener los efectivos en función de t y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.

3.b.- Comprobar que al cabo de un año se ha extinguido la primera especie y analizar el comportamiento a posteriori de la segunda.

4.- El crecimiento de dos especies que coexisten viene descrito por el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$\begin{cases} x_{t+1} = (9-a)x_t + (4-b)y_t + 5^t & ; \quad x_0 = 10 \\ y_{t+1} = (b-2)x_t + 5y_t + 5^t & ; \quad y_0 = 45 \end{cases}$$

donde el tiempo t se encuentra expresado en años. Si la ecuación homogénea, asociada a la ecuación en diferencias de segundo orden, que resulta de eliminar y_t en el sistema es:

$$x_{t+2} - 8x_{t+1} + 15x_t = 0.$$

Resolver todos los sistemas que cumplan las condiciones anteriores y analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.

5.- Indicar en cada una de las siguientes ecuaciones si es lineal o no lineal. Si es lineal determinar la solución; si es no lineal encontrar y analizar el tipo de puntos de equilibrio.

5.a.- $x_t = (1-\alpha)x_{t-1} + \beta x_t \qquad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}^+$

5.b.- $x_{t+1} = \dfrac{x_t}{1+x_t}$

5.c.- $x_{t+1} = x_t e^{-ax_t} \qquad a \in \mathbb{R}^+$

5.d.- $(x_{t+1} - \alpha)^2 = \alpha^2(x_t^2 - 2x_t + 1) \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+$

5.e.- $x_{t+1} = \dfrac{k}{k_1 + k_2/x_t} \qquad k_1\,, k_2\,, k \in \mathbb{R}^+$