Tema 1

MODELOS DISCRETOS MATRICIALES

EJERCICIO 1.1 **Un albergue de la Sierra de Cazorla tiene una muy merecida fama de atender las necesidades especiales de cuidado de la salud de sus huéspedes. El gerente del hotel espera cuatro huéspedes para la próxima semana; los cuatro padecen diabetes y dependen de la insulina. Estos huéspedes tienen planes de permanecer en el hotel** $7, 14, 21$ **y** 28 **días respectivamente.**

Se requieren tres tipos de insulina: lenta, semilenta y ultralenta y los requisitos diarios para cada huésped son:

- **Huésped 1:** 20 **unidades (u.) de insulina semilenta,** 30 **(u.) de lenta y** 10 **(u.) de ultralenta.**
- **Huésped 2:** 40 **unidades (u.) de insulina semilenta,** 0 **(u.) de lenta y** 0 **(u.) de ultralenta.**
- **Huésped 3:** 30 **unidades (u.) de insulina semilenta,** 10 **(u.) de lenta y** 30 **(u.) de ultralenta.**
- **Huésped 4:** 10 **unidades (u.) de insulina semilenta,** 10 **(u.) de lenta y** 50 **(u.) de ultralenta.**

- Esta información la representaremos mediante la matriz A de “requisitos”,

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix} .$$

También podemos utilizar la matriz B para representar el tiempo, en días, que cada huésped permanecerá en el hotel,

$$B = (7,\ 14,\ 21,\ 28)^T \ .$$

Para determinar la cantidad de insulina que los cuatro huéspedes requerirán se calcula el producto de las matrices AB

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{pmatrix} = C\,.$$

La matriz C indica que se requieren para los cuatro un total de 1610 unidades (u.) de insulina semilenta, 700 (u.) de insulina lenta y 2100 (u.) de ultralenta.

- Ahora cambiaremos un poco el problema. **Supongamos que cada huésped decide duplicar la duración original de su estancia**. La matriz resultante que da la cantidad total de insulina semilenta, lenta y ultralenta es

$$A(2B) = 2(AB) = 2C = \begin{pmatrix} 3220 \\ 1400 \\ 4200 \end{pmatrix} ,$$

de hecho, si cada huésped decidiera quedarse en el hotel un múltiplo k , $(k \geq 0)$ del tiempo original (es decir, que el huésped 1 pensara quedarse $7k$ días; el huésped 2, $14k$ días, etcétera), entonces los requisitos de insulina serían

$$A(kB) = k(AB) = kC = \begin{pmatrix} 1610k \\ 700k \\ 2100k \end{pmatrix} .$$

De manera similar, si los huéspedes decidieran añadir $1, 3, 4$ y 6 días a los tiempos originalmente planeados, entonces las cantidades de insulina que se requerirían serían

$$A(B + B_1) = AB + AB_1 \quad , \qquad \text{donde} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

- La ecuación matricial $AX = C$ es una generalización de los casos estudiados.

$$\begin{pmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

que representa al sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{lllll} 20x_1 & +40x_2 & +30x_3 & +10x_4 & = c_1 \\ 30x_1 & & +10x_3 & +10x_4 & = c_2 \\ 10x_1 & + & +30x_3 & +50x_4 & = c_3 \end{array}\right.$$

donde x_i es el número de días que el huésped i permanecerá en el hotel y c_1, c_2, c_3 dan, respectivamente, el número total de unidades de insulina semilenta, lenta y ultralenta que cada uno de los huéspedes necesita para todo su tiempo de estancia.

- Finalmente, supongamos de nuevo que la matriz B representa el número de días que cada huésped planeaba quedarse en el hotel originalmente. Supongamos, además, que la matriz D da el costo (en euros) por unidad de cada uno de los tres tipos de insulina, siendo

$$D = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Es decir, una unidad de semilenta cuesta 9 euros, una unidad de lenta cuesta 8 euros, y una unidad de ultralenta 10 euros. Entonces la cantidad total que el hotel paga por toda la insulina que los cuatro huéspedes requieren es

$$D^t(AB) = D^tC = (9, 8, 10) \begin{pmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{pmatrix} = 41.009 \ \text{euros}$$

EJERCICIO 1.2 Contacto directo y contacto indirecto en una enfermedad contagiosa.

- Se trata de un ejercicio sobre cómo utilizar la multiplicación de matrices para modelar el proceso de dispersión de una enfermedad contagiosa. Supóngase que cuatro personas han contraído una enfermedad de este tipo. Este primer grupo tiene contacto con seis personas de un segundo grupo.

Estos contactos, llamados contactos directos, pueden representarse mediante una matriz $A_{4\times6} = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 1$ si la i-ésima persona del primer grupo ha estado en contacto con la j-ésima persona del segundo grupo, y $a_{ij} = 0$ si no han estado en contacto.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el 1 que aparece en la fila 3 columna 5, significa que la tercera persona del primer grupo (los infectados) ha estado en contacto con la quinta persona del segundo grupo.

Supongamos ahora que un tercer grupo de cinco personas ha tenido diversos contactos directos con individuos del segundo grupo. Esto también podemos representarlo mediante una matriz $B_{6\times 5}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los contactos indirectos o de segundo orden entre las personas del primer y tercer grupo se representan mediante una matriz $C_{4\times 5}$ que es el producto AB

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa, que sólo una persona del tercer grupo no tiene contactos indirectos con la enfermedad. En cambio, la tercera persona tiene cuatro contactos indirectos.

EJERCICIO 1.3 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo, cuya matriz respecto a una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcúlense los autovalores y autovectores de f, estúdiese si f es o no diagonalizable, y en caso afirmativo hállese una base en la cual el endomorfismo tenga una expresión diagonal, así como la matriz de paso que relaciona a la matriz A con su diagonal semejante. Calcúlese A^k.

- Comenzamos resolviendo la ecuación característica, para poder encontrar los autovalores

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -3 \\ 2 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-3)^2 = 0\,,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ como raíz doble. Al no salir los tres autovalores diferentes no podemos asegurar que la matriz A sea diagonalizable; tenemos que ver si es posible encontrar una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de f. Empezamos calculando el subespacio de autovectores asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrcl} -x & -y & -3z & = & 0 \\ 2x & +2y & +3z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene por soluciones $z = 0$, $x = -y$, dando lugar al subespacio

$$S_1 = L(\lambda_1 = 2) = \{(-t,\, t,\, 0) \,:\, t \in \mathbb{R}\} =< (-1,\, 1,\, 0) > \,.$$

Para el segundo de los autovalores $\lambda_2 = 3$,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y + 3z = 0\,,$$

cuyo subespacio asociado es,

$$S_2 = L(\lambda_2 = 3) = \{(\alpha,\, -2\alpha - 3\beta,\, \beta) \,:\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}\} =< (1,\, -2,\, 0),\, (0,\, -3,\, 1) > \,.$$

Como conclusión, la matriz A es diagonalizable ya que es posible encontrar la base buscada,

$$\mathcal{B} := \{(-1,\, 1,\, 0),\, (1,\, -2,\, 0),\, (0,\, -3,\, 1)\}\,,$$

siendo la matriz C de paso, que nos permite diagonalizar la matriz A, la siguiente:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

En este caso, se comprueba que

$$C^{-1}\, A\, C = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

- El valor de A^k se obtiene haciendo $C\, D^k\, C^{-1}$,

$$A^k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 2^k - 3^k & 3 \times 2^k - 3^{k+1} \\ -2^{k+1} + 2 \times 3^k & -2^k + 2 \times 3^k & -3 \times 2^k + 3^{k+1} \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}\,.$$

Observemos que este resultado también puede obtenerse a través del `Mathematica`®,

```
A := {{1, -1, -3}, {2, 4, 3}, {0, 0, 3}}
MatrixPower[A, k]
```

EJERCICIO 1.4 Siendo x_0 e y_0 las poblaciones iniciales de conejos y zorros respectivamente. Se sabe que el número de conejos en cualquier mes es la mitad de la población de conejos del mes anterior y que el número de zorros en dicho mes es la suma de las poblaciones de zorros mas la mitad de la de conejos en el mes anterior. Calcular las poblaciones de zorros y conejos al cabo de "mucho" tiempo. ¿Se extinguirá alguna de las especies mencionadas?. Razonar las respuestas.

- Sean x_k e y_k las poblaciones de conejos y zorros al cabo de k meses. Del enunciado del ejercicio se deduce

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = 0.5 x_k \\ y_{k+1} = 0.5 x_k + y_k \end{array} \right. , \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$$

O bien en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} , \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots .$$

Si llamamos

$$\vec{N}(k) = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} , \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots ,$$

entonces

$$\begin{array}{l} \vec{N}(1) = A\vec{N}(0) \\ \vec{N}(2) = A\vec{N}(1) = A^2\vec{N}(0) \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \vec{N}(k) = A\vec{N}(k-1) = A^k\vec{N}(0) . \end{array}$$

Para completar el resto del ejercicio utilizamos el ordenador.

```
A := {{0.5, 0}, {0.5, 1}}
Eigenvalues[A]
```

$\{0.5, \quad 1\}$

```
P := Transpose[Eigenvectors[[A]]
Q := P.DiagonalMatrix[(0.5)^k, 1].Inverse[P]
MatrixForm[Limit[Q, k → Infinity]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

– Como sabemos, inicialmente x_0 es la cantidad de conejos e y_0 el número de zorros, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 + y_0 \end{pmatrix}.$$

Conclusión: A largo plazo desaparecerán los conejos y la cantidad de zorros será la suma inicial de zorros y conejos.

EJERCICIO 1.5 **Uno de los temas que más ha preocupado a los economistas es el del estudio de la distribución de la riqueza. Supongamos que en un país imaginario la población está dividida en cuatro clases, A, B, C y D, de acuerdo con la riqueza (de mayor a menor y según algún criterio dado), una persona que se encuentra en una determinada posición en un momento dado puede ascender, mantenerse o descender en el siguiente con probabilidades dadas por la matriz**

	A	B	C	D
A	0.7	0.2	0.1	0
B	0.2	0.4	0.1	0.3
C	0.1	0.3	0.4	0.2
D	0	0.1	0.4	0.5

siendo el elemento a_{ij} la probabilidad de que un individuo que en un momento dado pertenece a la clase i en el siguiente periodo pertenezca a la clase j.

De acuerdo a la introducción anterior, se pide:

(a) **Si en el año 1985 el 17 % de la población pertenece a la clase A, el 24 % a la B, el 30 % a la C y el 29 % a la D, ¿cuál será la distribución en 1986?, ¿y en 1987?.**

(b) **¿Cuál fue la distribución en 1984?.**

- Si llamamos A a la matriz de probabilidades y a la situación observada en el año k por $\vec{x}_k$, es fácil ver que

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$$

$$\vec{x}_{1986} = A\vec{x}_{1985} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.24 \\ 0.30 \\ 0.29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.247 \\ 0.267 \\ 0.289 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo,

$$\vec{x}_{1987} = A\vec{x}_{1986} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.247 \\ 0.267 \\ 0.289 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.214 \\ 0.251 \\ 0.258 \\ 0.276 \end{pmatrix}$$

- En relación a la segunda parte del ejercicio, y de acuerdo a lo anterior

$$\vec{x}_{1985} = A\vec{x}_{1984} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_{1984} = A^{-1}\vec{x}_{1985}$$

EJERCICIO 1.6 La población activa de un país se clasifica en 3 categorías profesionales: técnicos superiores x_1, obreros especializados x_2 y obreros no especializados x_3. Así, en cada generación k la fuerza de trabajo del país está caracterizada por el número de personas incluidas en las 3 categorías, es decir $(x_1(k), x_2(k), x_3(k))$. Supongamos que

- **Cada trabajador activo sólo tiene un hijo.**
- **El 50% de los hijos de los técnicos superiores lo son también, el 25% pasa a ser obrero especializado y el 25% restante es obrero no especializado.**
- **Los hijos de los obreros especializados se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes 30%, 40%, 30%**
- **Para los hijos de obreros no especializados las proporciones de reparto entre las categorías son 50%, 25 % y 25%.**

Se pide:

(a) **Plantear en forma matricial un modelo que represente la distribución de la fuerza de trabajo del país de generación en generación.**

(b) **¿Cuál será la distribución de los trabajadores a largo plazo independientemente de la distribución inicial?.**

- Sean $\vec{x}(0) = (x_1(0),\, x_2(0),\, x_3(0))^T$ el vector de distribución inicial y

$$\vec{x}(k) = (x_1(k),\, x_2(k),\, x_3(k))^T$$

el vector de distribución correspondiente a la generación de orden k. Del enunciado del ejercicio se deduce,

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.3 & 0.50 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} , \quad \vec{x}(1) = A\vec{x}(0)\,, \quad \cdots , \quad \vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0)\,.$$

Operando

$$\texttt{A} := \{\{0.5, 0.3, 0.5\}, \{0.25, 0.4, 0.25\}, \{0.25, 0.3, 0.25\}\}$$
$$\texttt{Eigenvalues[A]}$$

$\{1., 0.15, -1.68812\ 10^{-17}\}$

Como hay un valor propio igual a 1 entonces, a largo plazo existirá estabilidad.

$$\texttt{Eigenvectors[A]}$$

$\{\{0.744438, 0.496292, 0.446663\}, \{0.784465, 0.496292, 0.446663\},$
$\{-0.707107, -3.18473\ 10^{-16}, 0.707107\}\}$

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1. Es decir,

$$(0.744438, 0.496292, 0.446663)^T ,$$

que una vez pasado a porcentajes:

- el 44% serán técnicos superiores,
- el 29% serán obreros especializados,
- el 27% serán obreros no especializados.

EJERCICIO 1.7 **En una determinada Comunidad Autónoma española el** 20% **de las rentas familiares anuales son inferiores a** 6000 **de euros, el** 70% **están comprendidas entre** 6000 **y** 12000 **de euros y sólo el** 10% **superan esta última cifra. A estos tres tramos de renta los denominaremos tramos de renta baja, mediana y alta respectivamente.**

Se sabe que, año tras año, un 70% **de las familias con renta baja permanecen en dicho tramo mientras que un** 20% **pasan a renta media y un** 10% **a renta alta. De las familias con renta media, permanecen en dicha renta un** 60% **, pasando un** 30% **a renta baja y un** 10% **a renta alta. Por último, el** 60% **de las rentas altas siguen siéndolo, pasando un** 30% **a rentas medias y un** 10% **a rentas bajas.**

Las autoridades de la mencionada Comunidad Autónoma están muy preocupadas por el tema de la distribución futura de la renta y están pensando aplicar medidas correctoras, ya que creen que la situación actual puede empeorarse en un futuro. Se pide:

(a) **¿Existe una distribución de la renta estable?**

(b) **En caso afirmativo, ¿qué tanto por ciento de familias están en cada tramo de rentas?.**

- Si llamamos x_1, x_2, x_3 al porcentaje de familias que pertenecen al tramo de renta baja, media y alta respectivamente, podemos observar que año tras año se cumple,

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,$$

(a) Si obtenemos los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

podremos comprobar si la distribución es estable o no. Para ello resolvemos la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = 0.2 - 1.1\lambda + 1.9\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.4, \quad \lambda_3 = 0.5\,.$$

Cómo existe un autovalor $\lambda_1 = 1$, entonces existe estabilidad.

(b) La distribución estable nos viene dada por el autovector correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 1$.

A continuación calculamos la forma de dicho autovector,

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -0.3x + 0.3y + 0.1z & = & 0 \\ 0.2x - 0.4y + 0.3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $z = t \Rightarrow y = 1.833t, \quad x = 2.16t$. De donde:

$$2.16t + 1.833t + t = 100 \Rightarrow t = 20$$

  - El 43% de las familias tendrán renta alta
  - El 37% renta media
  - El 20% renta baja.

EJERCICIO 1.8 Entre las personas, muchas de las enfermedades genéticas son regidas por la herencia autosómica. En ellas, un gen normal A domina a un gen anormal a. El genotipo AA es un individuo normal, Aa el de un portador de la enfermedad, aunque no la padezca y el aa padece la enfermedad. Con estas enfermedades sucede bastante a menudo, que los individuos que la padecen mueren antes de alcanzar la madurez, lo que significa que los niños afectados son hijos de padres ambos portadores. Supongamos que se lleva a cabo un programa para identificar a los portadores de una de las enfermedades y que todos los portadores identificados prometen no procrear hijos entre ellos. Así,los futuros niños tendrán padres normales (parejas $AA\times AA$) o un progenitor normal y otro portador (parejas $AA\times Aa$). En consecuencia, en el futuro no habrá niños que sufran la enfermedad, aunque en las generaciones futuras haya todavía portadores. Ahora, se determinará la fracción de portadores que tendrán las futuras generaciones, bajo el programa de los matrimonios controlados. Se establece que $\vec{x}(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$, $k = 1, 2, \cdots$ en donde $x_1(k)$ es % de la población del genotipo AA en la generación de orden k, y $x_2(k)$ es % de la población del genotipo Aa (portadores) en la generación de orden k.

(a) **Encontrar el valor de $\vec{x}(k)$.**

(b) **Encontrar el valor de $\vec{x}(k)$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Analizar el resultado.**

- Como cada nuevo niño tiene por lo menos un progenitor normal se puede considerar que el programa del apareamiento controlado es de apareamiento continuo con el genotipo AA. Entonces, la transición de la distribución de los genotipos entre dos generaciones sucesivas, se rige por la ecuación

$$\vec{x}(k) = A\vec{x}(k-1)\,, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

Supongamos que la población inicial sea $\vec{x}(0) = (x_1(0), x_2(0))$ y que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En primer lugar procedemos a diagonalizar la matriz A,

```
A := {{1, 0.5}, {0, 0.5}}
P := Transpose[Eigenvectors[A]]
Inverse[P].A.P
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el valor de A^k

$$\texttt{Q} := \texttt{P.DiagonalMatrix}[0,(0.5)^{\texttt{k}}].\texttt{Inverse}[\texttt{P}]$$

$$\begin{pmatrix} 0.5^k & 0.5^k \\ 0 & 0.5^k \end{pmatrix}$$

lo que nos permite encontrar $\vec{x}(k)$

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5^k & 0.5^k \\ 0 & 0.5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1(k) & = & 0.5^k x_1(0) + 0.5^k x_2(0) \\ x_3(k) & = & 0\, x_1(0) + 0.5^k x_2(0) \end{array} \right.$$

Conclusión: Si k es "suficientemente grande", entonces $(x_1(k), x_2(k))$ tiende al vector nulo.

EJERCICIO 1.9 En la herencia autosómica, supongamos que cada planta se fecunda con una de su propio genotipo. Construir un modelo matricial y analizar su comportamiento a largo plazo.

- Para $k = 0, 1, 2, \cdots$,
  - $x_1(k)$ representa la fracción de las plantas del genotipo AA que hay en la generación de orden k.
  - $x_2(k)$ representa la fracción de las plantas del genotipo Aa que hay en la generación de orden k.
  - $x_3(k)$ representa la fracción de las plantas del genotipo aa que hay en la generación de orden k.

En consecuencia, $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$ son las fracciones de la distribución inicial de los tres genotipos. También se tiene que,

$$x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) = 1\ ; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Por lo estudiado en teoría, la distribución de los genotipos en cada generación a partir de la distribución en la generación anterior viene dado por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k) = x_1(k-1) + \dfrac{1}{4} x_2(k-1) \\[2ex] x_2(k) = \dfrac{1}{2} x_2(k-1) \\[2ex] x_3(k) = \dfrac{1}{4} x_2(k-1) + x_3(k-1) \end{array} \right. \quad , \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$$

Estas ecuaciones podemos escribirlas de manera matricial,

$$\vec{x}(k) = A\vec{x}(k-1)\ ; \quad k = 1, 2, \cdots$$

donde,

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}; \quad \vec{x}(k-1) = \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

De la ecuación $\vec{x}(k) = A\vec{x}(k-1)$ se deduce:

$$\vec{x}(k) = A\vec{x}(k-1) = A^2\vec{x}(k-2) = \cdots = A^k\vec{x}(0)\,.$$

Entonces, si se puede encontrar una expresión explícita para A^k, aplicamos la ecuación anterior y obtenemos una expresión explícita para $\vec{x}(k)$. Para ello, primero se diagonaliza la matriz A. Es decir, buscamos una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que

$$A = CDC^{-1}\,.$$

Se tiene que

$$A^k = CD^kC^{-1}\,.$$

En nuestro caso,

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\,,$$

y los valores propios asociados son:

$$\vec{v}_1 = (1,\, 0,\, -1)^T\,, \quad \vec{v}_2 = (0,\, 0,\, 1)^T\,, \quad \vec{v}_3 = (1,\, -2,\, 1)^T\ .$$

Por tanto,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{k+1} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{k+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}.$$

Operando,

$$\vec{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(0) + \left(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{k+1}\right) x_2(0) \\ \\ (\frac{1}{2})^k x_2(0) \\ \\ \left(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{k+1}\right) x_2(0) + x_3(0) \end{pmatrix}$$

Como $(\frac{1}{2})^k$ tiende a cero cuando k tiende a infinito, de estas ecuaciones se desprende que

$$x_1(k) \to x_1(0) + \frac{1}{2}x_2(0), \qquad x_2(k) \to 0, \qquad x_3(k) \to \frac{1}{2}x_2(0) + x_3(0)\,.$$

Conclusión: La fecundación de cada planta con una de sus mismos genotipos da origen a una población que, en el límite, contiene sólo genotipos AA y aa.

EJERCICIO 1.10 Supongamos individuos diploides que difieren a lo sumo en una localización de un gen autosomal con los alelos A y a. Se lleva a cabo el experimento que sigue: se cruzan entre sí dos de tales individuos M_0 y V_0. Entre la descendencia se eligen al azar dos individuos M_1 y V_1 que se cruzan entre sí y entre su descendencia se elige de nuevo al azar dos individuos M_2 y V_2 y así sucesivamente. Construir la matriz de transición.

- El objeto S de la cadena de *Markov* lo constituyen ahora los dos individuos M y V. El estado del sistema viene descrito por el genotipo de los dos individuos. Existen seis estados distintos:

$$\begin{array}{cccccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ AA\times AA & AA\times Aa & Aa\times Aa & Aa\times aa & aa\times aa & AA\times aa \end{array}$$

donde se han considerado idénticos los estados $AA \times aa$ y $aa \times AA$.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
Z_1	1	0.25	1/16	0	0	0
Z_2	0	0.5	0.25	0	0	0
Z_3	0	0.25	0.25	0.25	0	1
Z_4	0	0	0.25	0.5	0	0
Z_5	0	0	1/16	0.25	1	0
Z_6	0	0	1/8	0	0	0

Tabla 1.1

- De la descendencia de Z_1 solamente puede originarse Z_1 y por lo tanto la probabilidad del paso de Z_1 a Z_1 es de 1.

  De Z_3 se originan descendientes AA, Aa, aa en la proporción $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$. La probabilidad de elegir un individuo Aa y un individuo aa entre estos descendientes es de $2.\frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto la probabilidad de pasar de Z_3 a Z_4 es de $\frac{1}{4}$.

  De padres $Aa \times Aa$ se obtienen descendientes del tipo AA, Aa, aa con probabilidades respectivas $1/4, 1/2, 1/4$. Las distintas posibilidades de apareamiento son:

$$\begin{array}{ccc} AA \times AA & AA \times Aa & AA \times aa \\ Aa \times AA & Aa \times Aa & Aa \times aa \\ aa \times AA & aa \times Aa & aa \times aa \end{array}$$

  Es decir, los diferentes apareamientos con sus probabilidades podemos resumirlos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rlcl rlcl} AA \times AA & = 1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) & = & \frac{1}{16} & AA \times Aa & = 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{4} \\ AA \times aa & = 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) & = & \frac{1}{8} & Aa \times Aa & = 1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{4} \\ Aa \times aa & = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) & = & \frac{1}{4} & aa \times aa & = 1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) & = & \frac{1}{16} \end{array}$$

  Disponiendo en una matriz las 36 probabilidades de paso, obtenemos una cadena de *Markov* que aparece en la Tabla 1.1.

EJERCICIO 1.11 En el modelo de los pájaros que utilizamos en teoría como modelo matricial intermedio,

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots .$$

Demostrar que si $\alpha = \beta$ y $\alpha > 1/2$, entonces a la larga, la población de pájaros aumentará siempre que cada hembra adulta tenga al menos una hembra entre sus crías.

- Sabemos que la matriz que representa al modelo intermedio viene dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

  Para conocer como evoluciona la población tenemos que encontrar el valor propio positivo estrictamente dominante.

$$|M - \lambda I| = \lambda^2 - \beta\lambda - \alpha\gamma = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2}.$$

La población crecerá si $\lambda > 1$, para lo cual, $\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma} > 2$. Simplificando,

$$\gamma > \frac{1-\beta}{\alpha},$$

pero al ser $\alpha = \beta > 1/2$, de la expresión anterior deducimos que

$$\gamma > \frac{1-1/2}{1/2} = 1\,.$$

Es decir, la población aumentará, cuando el valor de γ (número de crías que por término medio tiene una hembra adulta) sea mayor que uno.

EJERCICIO 1.12 En este ejercicio utilizaremos la natalidad y supervivencia de las mujeres canadienses a partir del año 1965. Como son pocas las mujeres que quedan embarazadas después de los 50 años, el problema se limitará a la parte de la población femenina cuya edad está comprendida entre 0 y 50 años. Los datos presentan clases de 5 años, por lo que se tendría un total de diez clases de edades. En lugar de escribir toda la matriz de *Leslie*, 10×10, presentaremos una lista de los parámetros de nacimientos y supervivencias, como sigue:

edades	a_i	b_i
0-5	0.00000	0.99651
5-10	0.00024	0.99820
10-15	0.05861	0.99802
15-20	0.28608	0.99729
20-25	0.44791	0.99694
25-30	0.36399	0.99621
30-35	0.22259	0.99460
35-40	0.10457	0.99184
40-45	0.02826	0.98700
45-50	0.00240	-

Analizar para estos datos el modelo de *Leslie* así como su comportamiento en el límite.

- Haciendo uso del ordenador podemos encontrar el valor propio positivo estrictamente dominante $\lambda_1 = 1.076222$ y su vector propio correspondiente.

$$\vec{v}_1 = \left(1,\, b_1/\lambda_1,\, b_2 b_1/\lambda_1^2,\, \cdots,\, b_1 b_2 \cdots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1}\right)^T =$$
$$(1,\, 0.9259,\, 0.8588,\, 0.7964,\, 0.7380,\, 0.6836,\, 0.6328,\, 0.5848,\, 0.5389,\, 0.4942)^T$$

Así, las mujeres canadienses continuarán reproduciéndose y muriéndose de la misma forma que en 1965, finalmente, cada cinco años, los números aumentarán un 7.62%.

Por el vector propio $\vec{v}_1$ se ve que, en el límite, por cada 100 hembras cuya edad está comprendida entre 0 y 5 años, habrá 93 cuya edad estará comprendida entre 5 y 10 años, 86 entre los 10 y 15 años y así sucesivamente.

EJERCICIO 1.13 La siguiente tabla corresponde a la distribución en tres intervalos de edad de la población femenina de EEUU de hasta 44 años en 1940 y 1955 (expresada en miles). Calcular la población en los años 1970 y 1985.

EDAD	N. MUJ. 1940	N. HIJAS 1940-55	N. MUJ.1955
0 - 14	14459	4651	16428
15 - 29	15264	10403	14258
30 - 44	11346	1374	14837

- De la tabla anterior, se deducen los coeficientes

$$a_1 = \frac{4651}{14459} = 0.3217 \qquad b_1 = \frac{14258}{14459} = 0.9861$$

$$a_2 = \frac{10403}{15264} = 0.68153 \qquad b_2 = \frac{14837}{15264} = 0.97202$$

$$a_3 = \frac{1374}{11346} = 0.12101$$

con los que construimos la matriz de *Leslie* correspondiente

$$L = \begin{pmatrix} 0.3217 & 0.6815 & 0.1210 \\ 0.9861 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9720 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con ayuda del ordenador encontramos los valores propios de esta matriz,

$$\lambda_1 = 1.05941, \quad \lambda_2 = -0.53186, \quad \lambda_3 = -0.205852\,.$$

Al ser $\lambda_1 = 1.05941 > 1$ el valor propio estrictamente dominante, nos indica que la población crece cada 15 años a un ritmo del 6% (aproximadamente).

Si nos fijamos en el vector propio $\vec{v}_1$ asociado al valor propio λ_1,

$$\vec{v}_1 = (0.620683, 0.577732, 0.530074)\,,$$

podemos conocer cual será la distribución de las hembras por edades:

$$0.620683x + 0.577732x + 0.530074x = 100 \qquad \Rightarrow \qquad x = 57.86$$

Los porcentajes serán

Clase de 0 a 14 años	$57.87 \times 0.620683 = 0.3591$	(35.91%)
Clase de 14 a 29 años	$57.87 \times 0.577732 = 0.3340$	(33.40%)
Clase de 30 a 44 años	$57.87 \times 0.0.530074 = 0.3069$	(30.69%)

Comentarios:

– Según *Lotka*, cualquier población sometida a tasas constantes de supervivencia (o mortalidad) y de fertilidad, alcanza asintóticamente una distribución por edades fija y determinada. Una población que ha alcanzado tal estado de equilibrio, en virtud del cual la distribución de la población total en clases de edad se mantiene indefinidamente igual a ella misma, se denomina *estable* (o malthusiana). Una población de este tipo recupera sus características aunque experimente perturbaciones pasajeras que pueden consistir en la eliminación de un número considerable de individuos de una clase de edad, fracaso de la reproducción durante un cierto periodo de cría, etc. Cualquier perturbación genera una oscilación en las características de la población; la amplitud de la oscilación se atenúa progresivamente.

– Una población *estable y estacionaria* a la vez es la que se conserva con parecido número de individuos y con una semejante distribución de estos individuos en clase de edad. La población humana en la actualidad no es ni estable ni estacionaria, ni tiene constantes sus parámetros de cambio.

– La población estable tiene una característica muy interesante, consistente en que la relación entre los números de individuos en las clases de edad sucesivas, permite calcular directamente la supervivencia (o la mortalidad) en el paso de una a otra edad.

EJERCICIO 1.14 Supongamos que para $x = 0$ tenemos 100 peces en un acuario. Contamos la población una vez al día y obtenemos los siguientes datos:

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Núm	**100**	**85**	**72**	**61**	**52**	**44**	**37**	**31**	**26**	**22**	**19**	**16**

x	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
Núm	**14**	**12**	**10**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**3**	**2**	**2**

Construir y comentar la curva de vida correspondiente a esta población.

- De la tabla anterior obtenemos los diferentes valores de $l(x) = S(x)/100$, los cuales se encuentran reflejados en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l(x)$	1	0.85	0.72	0.61	0.52	0.44	0.37	0.31	0.26	0.22
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$l(x)$	0.19	0.16	0.14	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04
x	20	21	22	23	-	-	-	-	-	-
$l(x)$	0.03	0.03	0.02	0.02	-	-	-	-	-	-

Con ayuda del `Mathematica`®, representamos gráficamente estos datos,

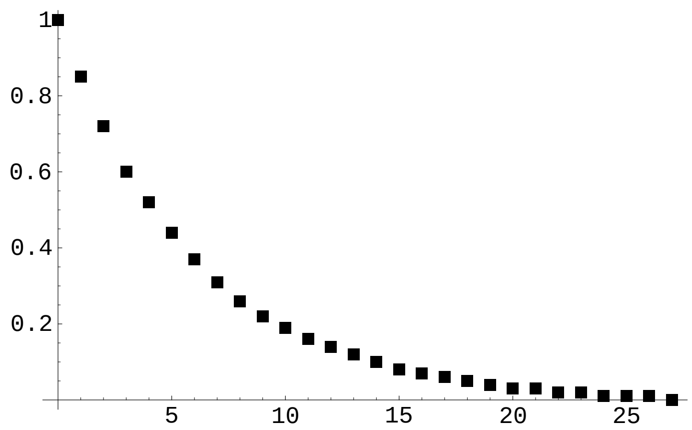

Figura 1.1 Representación gráfica de $(x, l(x))$

La curva corresponde al tercero de los tipos estudiados en teoría. Es decir, estamos ante una población con una elevada tasa de mortalidad infantil.

EJERCICIO 1.15 Supongamos la siguiente tabla de vida para una determinada población:

Edad en años x	$S(x)$	$b(x)$
0	**500**	**0**
1	**400**	**2**
2	**200**	**3**
3	**50**	**1**
4	**0**	**0**

(a) **Completar la tabla para calcular $l(x), g(x), R_0, G$ y estimar el valor de r.**

(b) **Supongamos que inicialmente la población de caracoles es de 200 en la primera clase, 0 en la segunda, 0 en la tercera, y 0 en la cuarta. Construir la matriz de *Leslie* para esta tabla de vida y proyectar la población "a largo plazo".**

- Construimos la tabla:

x	$S(x)$	$b(x)$	$l(x) = S(x)/S(0)$	$g(x) = l(x+1)/l(x)$	$l(x)b(x)$	$l(x)b(x)x$
0	500	0	1	0.8	0	0
1	400	2	0.8	0.5	1.6	1.6
2	200	3	0.4	0.25	1.2	2.4
3	50	1	0.1	0	0.1	0.3
4	0	0	0	-	0	0

Con los valores anteriores calculamos

$$R_0 = \sum_{x=0}^{4} l(x)b(x) = 2.9$$

$$G = \frac{\displaystyle\sum_{x=0}^{4} l(x)b(x)x}{\displaystyle\sum_{x=0}^{4} l(x)b(x)} = \frac{4.3}{2.9} = 1.482\,\text{años}$$

$$r = \frac{\ln R_0}{G} = 0.718\,\text{individuos/(individuos}\times\text{ año)}$$

Para construir el modelo de *Leslie* debemos elaborar la siguiente tabla.

x	i	$l(x)$	$b(x)$	$b_i = l(i)/l(i-1)$	$a_i = b(i)b_i$
0	-	1	0	-	-
1	1	0.8	2	0.8	1.6
2	2	0.4	3	0.5	1.5
3	3	0.1	1	0.25	0.25
4	4	0	0	-	0

El modelo escrito en forma matricial, es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ n_4(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.5 & 0.25 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ n_4(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N}(t+1) = L\vec{N}(t)\,, t = 0, 1, 2\cdots\,.$$

- Sabemos que el vector de valores iniciales es

$$\vec{N}(0) = (200, 0, 0, 0)^T\,,$$

lo que nos permite proyectar la población para cualquier año. Por ejemplo, al cabo de 5 años

$$\vec{N}(5) = L\vec{N}(4) = L^5\vec{N}(0) = (7613, 2804, 642, 75)^T\,,$$

o bien, al cabo de 25 años

$$\vec{N}(25) = L\vec{N}(24) = L^{25}\vec{N}(0) = (4.20 \times 10^{10}, 1.54 \times 10^{10}, 3.56 \times 10^{9}, 4.09 \times 10^{8})^T \,.$$

Esto supone que un 68% de la población se encuentra en la primera clase, un 25 % en la segunda, un 6% en la tercera y un 1 % en la cuarta. Si ahora cambiamos el vector inicial, por ejemplo:

$$\vec{N}(0) = (10, 10, 10, 10)^T \,,$$

y realizamos las mismas proyecciones

$$\vec{N}(5) = L\vec{N}(4) = L^{5}\vec{N}(0) = (67, 27, 4, 2)^T \,,$$

o bien, al cabo de 25 años

$$\vec{N}(25) = L\vec{N}(24) = L^{25}\vec{N}(0) = (3.85 \times 10^{9}, 1.41 \times 10^{9}, 3.26 \times 10^{8}, 3.75 \times 10^{7})^T \,.$$

Es decir, los porcentajes en cada una de las clases son 68 %, 25%, 6% y 1%, idénticos a los encontrados en el caso anterior.

El ejemplo nos muestra el efecto de los valores iniciales en el crecimiento de la población. **Después de algunas fluctuaciones ambas poblaciones se comportan de manera similar**. Si representamos gráficamente las poblaciones para cada una de las clases en diferentes años, utilizando una escala logarítmica en el eje de ordenadas, obtenemos líneas rectas, lo cual nos indica un crecimiento exponencial de la población.

Calculamos los valores y vectores propios de la matriz de *Leslie*.

```
L:={ {1.6, 1.5, 0.25, 0 },{0.8, 0, 0, 0 },
{0,0.5,0, 0}, {0, 0,0.25,0 } }
Eigenvalues[L]
```

$$\{2.17332, -0.47682, -0.096498, 0\} \,,$$

al ser el valor propio estrictamente dominante $\lambda = 2.17332 > 1$, la población crece un 117% cada año. Lo cual supone un crecimiento exponencial con una tasa $r = \ln 2.17332 = 0.77625$. Observemos que el valor de r encontrado es el valor exacto, mientras que el obtenido en la primera parte del ejemplo $r = 0.718$ era un valor aproximado. Si $\vec{N}(0) = (200, 0, 0, 0)^T$ la población total crece de manera exponencial de acuerdo al siguiente modelo

$$P(t) = P(0)e^{rt} = 200e^{0.77625t} \,, \quad .$$

Para finalizar, representaremos gráficamente las poblaciones de hembras para cada una de las clases en las primeras 10 generaciones. Si $\vec{N}(t) = L^t\vec{N}(0)$ entonces, en el eje de abscisas situaremos los diferentes valores de $t = 0, \cdots, 10$, y en el eje de ordenadas los $n_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, correspondientes en la escala logarítmica.

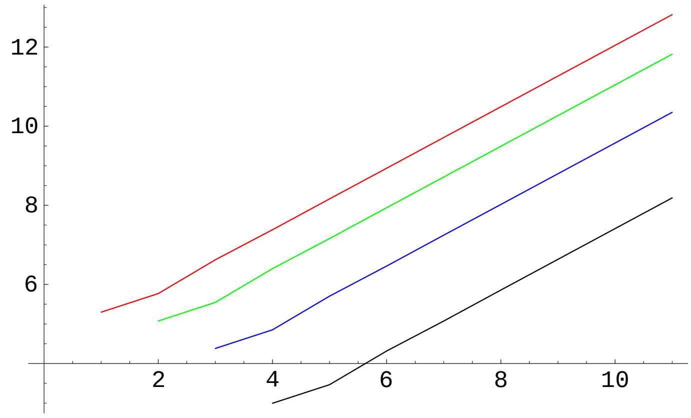

Figura 1.2 Evolución en cada clase de edad

La gráfica en rojo corresponde a la clase de menor edad, la verde a la segunda, la azul a la tercera y la coloreada en negro representa a las hembras de mayor edad. Como podemos apreciar, a "largo plazo" la población crece a un ritmo constante, que coincide con la pendiente de las rectas ($r = \ln 2.17332 = 0.77625$) y además los porcentajes en cada una de las clases permanecen constantes (las cuatro rectas son paralelas).

EJERCICIO 1.16 Para un bosque de pinos escoceses con período de crecimiento de seis años se encontró la siguiente matriz de crecimiento

$$G = \begin{pmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Supongamos que los precios de las cinco clases de árboles de mayor altura, son

$$p_2 = 50\,, \quad p_3 = 100\,, \quad p_4 = 150\,, \quad p_5 = 200\,, \quad p_6 = 250$$

¿Cuál es la clase de árboles que debe cortarse por completo para obtener el rendimiento óptimo duradero y cuál es ese rendimiento?.

- De la matriz G se obtiene

$$g_1 = 0.28, \quad g_2 = 0.31, \quad g_3 = 0.25, \quad g_4 = 0.23, \quad g_5 = 0.37$$

Con el teorema estudiado en teoría, deducimos

$$
\begin{aligned}
&R_2 = 50s/(0.28^{-1}) = 14.0s\\
&R_3 = 100s/(0.28^{-1} + 0.31^{-1}) = 14.7s\\
&R_4 = 150s/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1}) = 13.9s\\
&R_5 = 200s/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1}) = 13.2s\\
&R_6 = 250s/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1} + 0.37^{-1}) = 14.0s
\end{aligned}
$$

Se ve que R_3 es la cantidad mayor y por tanto, son los árboles de la tercera clase los que deben cortarse por completo cada seis años, para maximizar el rendimiento duradero. El rendimiento óptimo duradero es de $14.7s$, siendo s el número total de árboles que hay en el bosque.

EJERCICIO 1.17 En el Ejemplo anterior, ¿cuál debe ser la relación entre los precios p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 para que los rendimientos R_k, con $k = 2, \cdots, 6$ sean iguales?. (En este caso, cualquier política de explotación racional y duradera producirá el mismo rendimiento).

- Para obtener esta relación debemos comparar cualquiera de las clases con la segunda, esto es

$$R_2 = R_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\frac{1}{28}} = \frac{p_3 s}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_3}{p_2} = 1.9$$

$$R_2 = R_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\frac{1}{28}} = \frac{p_4 s}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31} + \frac{1}{25}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_4}{p_2} = 3.02$$

Y así sucesivamente hasta conseguir la relación

$$1 : 1.9 : 3.02 : 4.24 : 5$$

EJERCICIO 1.18 Si los parámetros de crecimiento $g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}$ son todos iguales, ¿cuál debe ser la relación entre los precios $p_2, p_3, \cdots, p_n$, para que cualquier política de explotación racional y duradera sea óptima?.

- Suponiendo que $g_1 = g_2 = \cdots = g_{n-1}$, debemos de ir comparando tal y como hicimos en el ejercicio anterior.

$$
\begin{aligned}
R_2 = R_3 \quad &\Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\frac{1}{g_1}} = \frac{p_3 s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}} = \frac{p_3 s}{\frac{2}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_3}{p_2} = 2\\
R_2 = R_4 \quad &\Rightarrow \quad \frac{p_2 s}{\frac{1}{g_1}} = \frac{p_4 s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3}} = \frac{p_4 s}{\frac{3}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_4}{p_2} = 3
\end{aligned}
$$

Y así sucesivamente con el resto de las clases.

Es fácil obtener la siguiente relación

$$1 : 2 : 3 : \cdots : n - 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1.- En el Ejercicio 1.1, supongamos que el huésped 1 estará en el hotel 4 días; el huésped 2, durante 7 días, y el huésped 3 durante 10 días. El huésped 4 cambia de planes y no se hospedará en el hotel. Los requisitos diarios de los tres huéspedes y la matriz de costos son los mismos que antes. Determinar la cantidad total (en euros) que el hotel debe pagar por toda la insulina que se requiere.

2.- Analizar para los siguientes datos el modelo de *Leslie* así como su comportamiento en el límite. Datos demográficos sobre una población del roedor *Microtus agrestis* en el laboratorio. La tabla se refiere únicamente a hembras y períodos de 8 semanas.

- l_x := Función de supervivencia (la probabilidad de que un individuo nacido siga viviendo en la edad x)
- n_x := Función de natalidad (número de descendientes que, por unidad de tiempo, produce un individuo de edad x).

En nuestro caso:

SEMANAS	l_x	n_x
8	0.83349	0.6504
16	0.73132	203939
24	0.58809	2.9727
32	0.43343	2.4662
40	0.29277	1.7043
48	0.18126	1.0815
56	0.10285	0.6683
64	0.05348	0.4286
72	0.02549	0.3000

$$a_i = n_x$$
$$b_i = 1 - m_x \qquad \text{siendo} \qquad m_x := \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

3.- Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 15 años y que esta población se divide en tres clases de edades iguales con intervalos de 5 años, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de crecimiento de *Leslie* viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra y una mediana dos, además el 50% de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 25% de las medianas se hacen adultas.

El precio de venta de cada una de las clases es 10 euros las hembras jóvenes, 20 las medianas y 30 las adultas. Si disponemos de 100 animales y cada 5 años separamos la misma fracción de cada una de las clases, ¿cuál es el importe de la venta?.

4.- Una cierta población de animales está divida en tres clases de edades de un año de duración y la matriz de *Leslie* correspondiente es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

4.a.- Si cada año se separa la misma fracción de cada una de las clases, obtener dicha fracción y el vector de distribución de las edades después de cada separación.

4.b.- Si cada año se separa sólo la clase de menor edad, encontrar dicha fracción y el vector de distribución de las edades después de cada separación.

5.- Los árboles de cierto bosque están divididos en tres clases según su altura. En cada temporada de corte la mitad de los árboles de la primera clase pasan a la segunda, y la tercera parte de los árboles de la segunda clase pasan a la tercera. Si el precio de los árboles de la segunda clase es de 30 euros y el precio de los árboles de la tercera es de 50 euros. ¿Cuál es la clase de árboles que debe cortarse para lograr el rendimiento óptimo duradero?. ¿Cuál es dicho rendimiento si el bosque tiene 1000 árboles?, y ¿a partir de qué precio es más rentable cortar los árboles de la tercera clase.?