Presentación

La colección de Ejercicios Resueltos y Propuestos que presentamos están relacionados con los Modelos Matemáticos en Biología y se han estructurado en dos grandes bloques. El primero de ellos aborda el caso discreto a través del álgebra matricial y las ecuaciones en diferencias. La segunda parte está dedicada al caso continuo, cuyas herramientas matemáticas básicas son las ecuaciones diferenciales.

Cuando un determinado fenómeno biológico podemos representarlo por medio de un conjunto de ecuaciones (modelo matemático) se plantean varios problemas respecto al modelo utilizado, como son:

- Ver si el problema tiene solución.
- En caso de que ésta exista, demostrar si es única.
- Calcular de forma explícita esta solución.
- Analizar de manera cualitativa la solución del modelo.
- Utilizar técnicas numéricas para encontrar un valor aproximado de la solución.
- Estudiar la posibilidad de simular el modelo.

Gran parte de los ejercicios se han diseñado teniendo en cuenta el comentario anterior. De esta manera, el objetivo básico que se persigue es el de construir y resolver un mismo modelo haciendo uso de técnicas diferentes. En primer lugar, buscaremos la solución explícita del modelo, posteriormente la estudiaremos cualitativamente y a continuación encontraremos una aproximación numérica de dicha solución. Por último, mostraremos que la mayoría de los modelos continuos pueden ser simulados con `Vensim`® en el Laboratorio de Matemáticas.

En el primer tema resolveremos diversos ejercicios relacionados con los modelos discretos matriciales haciendo especial hincapié en el modelo de *Leslie* y las tablas de vida. El segundo tema es una introducción a los modelos discretos no matriciales.

Se inicia con distintos ejercicios que muestran las diversas técnicas de resolución de ecuaciones en diferencias. Posteriormente nos centraremos en el estudio de los puntos de equilibrio y el análisis de la estabilidad del modelo.

Un concepto interesante de los modelos discretos es el estudio de la teoría del caos. En ellos analizamos el comportamiento de sistemas dinámicos discretos mediante aplicaciones iteradas. Se construyen eligiendo un número cualquiera como dato de entrada de una función, utilizando el resultado como nuevo dato de entrada de la misma función y repitiendo el proceso sucesivamente. Como sabemos por teoría, una aplicación iterada particularmente interesante y popular es la aplicación logística. Esta aplicación muestra muchas de las propiedades que veremos también en los sistemas continuos.

Los temas 3,4,5 y 6 están dedicados al estudio de los modelos continuos. Muchos problemas biológicos pueden ser representados a través de ecuaciones diferenciales, por ejemplo: modelos dinámicos, modelos poblacionales, difusión de epidemias, ..., etc. En general, se trata de buscar una función $y(t)$ definida en $[0,\, a]$ tal que

$$y'(t) = f(t)\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad t \in [0,\, a]\,.$$

En ocasiones se puede encontrar la solución de este problema

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(x)dx\,,$$

pero es bastante frecuente que dicha solución no pueda determinarse de forma elemental. Por ejemplo, no es fácil resolver

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx\,,$$

pero éste es un problema elemental para cualquier ordenador. Es importante, antes de aplicar técnicas numéricas, analizar detenidamente nuestro problema para saber si existe solución y en caso de que exista ver si ésta es única.

En el tema 6 estudiamos modelos poblacionales relacionados con dos especies que compiten en un determinado territorio. Su dinámica podemos representarla por medio del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \dfrac{dx}{dt} = f(t,\, x,\, y) \\ \\ y' = \dfrac{dy}{dt} = g(t,\, x,\, y)\,, \end{array} \right.$$

siendo $x(t)$, $y(t)$ las cantidades de animales de cada una de las especies. El plano fase será la representación de los valores $(x(t),\, y(t))$, y su construcción tiene un interés especial para estudiar de forma cualitativa el modelo y analizar su estabilidad.

Es posible ver el comportamiento de las soluciones (órbitas) en el plano fase, calculando previamente las soluciones constantes (puntos de equilibrio), ya que éstas aportan información valiosa del resto de las soluciones del sistema. A continuación se debe hacer un estudio completo de la estabilidad, ya que es muy frecuente en ciencias experimentales que al tomar los datos (condiciones iniciales) se cometan pequeños errores, y esto puede obligar a que la solución buscada se encuentre muy lejos de la solución verdadera o de la solución de equilibrio. En este caso, diremos que existe inestabilidad. En caso contrario, estaríamos hablando de estabilidad.

El último de los temas es una breve colección de ejercicios de métodos numéricos aplicados a la resolución de problemas de valores iniciales. Recordemos que un método de resolución numérica es un algoritmo que nos permite obtener un resultado aproximado de la solución de un determinado problema por medio de un número finito de pasos. Los métodos que utilizaremos serán los más usuales, como son *Euler, Taylor* y *Runge-Kutta*.