

UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



MODELOS
MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

TEORÍA

Jaén, 8 de enero de 2009

1. Modelos matemáticos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Elaboración de modelos matemáticos	2
1.2.1. Un termómetro biológico	6
1.3. Clasificación de los modelos matemáticos biológicos	7
1.4. El papel de los ordenadores	9
1.5. Breve introducción histórica	9
2. Ecuaciones diferenciales	13
2.1. Introducción	13
2.2. ¿Qué es una ecuación diferencial?	14
2.3. Solución de una ecuación diferencial	19
2.3.1. Existencia y unicidad de soluciones	20
2.4. Análisis geométrico de $y' = f(t, y)$	24
2.4.1. Campo de direcciones	24
2.5. Teoría cualitativa de EDO autónomas	26
2.5.1. Introducción.	26
2.5.2. Ecuaciones diferenciales autónomas	26
2.6. Resolución de E.D.O. de primer orden	30
2.6.1. Ecuaciones diferenciales en variables separables	30
2.6.2. Ecuaciones diferenciales exactas.	33
2.6.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	37
2.7. E.D.O. lineales de segundo orden	38
2.7.1. Método de reducción del orden	41
2.7.2. EDO lineal de segundo orden completa	43
2.7.3. Método de variación de parámetros	43
2.8. E.D.O. lineales de segundo orden con coeficientes constantes	46
2.8.1. La ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes	47
2.8.2. La ecuación diferencial lineal completa de segundo orden con coeficientes constantes	50
2.8.3. Método de los coeficientes indeterminados	51
2.9. Notas históricas	52

3. Modelos basados en E.D.O.	55
3.1. Introducción	55
3.2. Modelo exponencial	55
3.2.1. Dinámica independiente de la densidad	56
3.2.2. Desintegración radiactiva	58
3.2.3. Trazadores radiactivos	58
3.2.4. Fechado con C_{14}	59
3.2.5. Modelo de un riñón artificial I	60
3.2.6. Absorción de Rayos-X	62
3.3. Modelo exponencial modificado	63
3.3.1. Ley de enfriamiento de Newton	63
3.3.2. Contaminación de un lago	64
3.3.3. Genética de poblaciones	65
3.4. Dinámica dependiente de la densidad	67
3.4.1. Modelo epidemiológico I	71
3.5. Modelo logístico modificado	73
3.5.1. Caso I	73
3.5.2. Caso II	75
3.6. Otros modelos basados en E.D.O.	76
3.6.1. Modelo de disolución	76
3.6.2. Modelo para gestionar la pesca en un lago	79
3.6.3. La edad del hielo	80
3.7. Teoría de catástrofes	80
4. Introducción a los sistemas de E.D.O	83
4.1. Preliminares	83
4.2. Diagonalización de matrices cuadradas	85
4.2.1. Introducción	85
4.2.2. Matrices semejantes	86
4.2.3. Diagonalización de matrices cuadradas.	87
4.2.4. Cálculo de la potencia de una matriz diagonalizable	89
4.3. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes	91
4.4. Sistemas lineales completos con coeficientes constantes	93
4.4.1. Método de variación de parámetros	95
4.5. Teoría cualitativa de sistemas	96
4.5.1. Órbitas y plano fase	99
4.5.2. Sistemas autónomos lineales	102
4.5.3. Sistemas autónomos no lineales	109
5. Modelos basados en sistemas de E.D.O	113
5.1. Modelo de un riñón artificial II	113
5.1.1. Búsqueda de las soluciones	113
5.1.2. Estudio cualitativo	114
5.2. Un modelo elemental de dos poblaciones	115

5.2.1.	Resolución y análisis cualitativo	115
5.2.2.	Principio de exclusión competitiva	117
5.3.	El modelo presa-depredador	118
5.3.1.	Análisis cualitativo del sistema	121
5.3.2.	El problema de la pesca.	123
5.3.3.	Modelo presa-depredador modificado	125
5.4.	Especies en competencia	127
5.4.1.	Primer caso	129
5.4.2.	Segundo caso	130
5.5.	Modelo epidemiológico II	133
6.	Métodos numéricos	139
6.1.	Resolución numérica de E.D.O	139
6.1.1.	Introducción	139
6.1.2.	El método de Euler	140
6.1.3.	Métodos de Taylor de orden superior	144
6.1.4.	Método de Euler mejorado	148
6.1.5.	Método de Runge-Kutta de cuarto orden	151
6.2.	Resolución numérica de sistemas de E.D.O	153
6.2.1.	Introducción	153
6.2.2.	Generalización de los métodos	154
6.2.3.	Resolución numérica de las ecuaciones de Lotka-Volterra	158
6.3.	Cálculo aproximado de valores propios	160
6.3.1.	Método de las potencias	160
6.3.2.	El método de las potencias con cambio de escala	162
6.3.3.	Deflación	163
7.	Modelos discretos matriciales	167
7.1.	Introducción	167
7.2.	Cadenas de Markov	167
7.2.1.	Matrices estocásticas	168
7.2.2.	Diagramas de estados	169
7.2.3.	Cadenas de Markov regulares	171
7.2.4.	Propiedades de las matrices estocásticas	172
7.3.	Cadenas de Markov y Genética	178
7.3.1.	Herencia autosómica	178
7.3.2.	Herencia ligada al sexo	182
7.4.	Modelo de Leslie	193
7.4.1.	Modelo discreto exponencial	195
7.4.2.	Modelo discreto matricial	197
7.4.3.	Generalización del modelo matricial	200
7.5.	Tablas de vida y modelo de Leslie	212
7.5.1.	De las tablas de vida al modelo matricial	217
7.6.	Modelo de Lefkovitch	222

7.7. Modelos que dependen de la densidad	226
7.7.1. Caso práctico	226
8. Otros modelos matriciales	235
8.1. Introducción	235
8.2. Dinámica de una población de pájaros	235
8.3. Dinámica de una población de ardillas	239
8.4. Modelo para la producción de células rojas	241
8.5. Explotación de una población de animales	244
8.5.1. Explotación uniforme	246
8.5.2. Separación de la clase de menor edad	247
8.6. Modelo para la explotación de un bosque	252
8.6.1. El rendimiento óptimo duradero	256
9. Ecuaciones y sistemas en diferencias	261
9.1. Introducción	261
9.2. Ecuaciones lineales de primer orden	263
9.3. Ecuaciones lineales de segundo orden	264
9.3.1. Resolución de la ecuación homogénea	266
9.3.2. Resolución de la ecuación completa	267
9.4. Sistemas de ecuaciones en diferencias	272
10. Sistemas dinámicos discretos	279
10.1. Introducción	279
10.1.1. Ejemplos de sistemas dinámicos	280
10.1.2. Conceptos de dinámica discreta	281
10.2. Modelos dinámicos discretos lineales.	285
10.3. Modelos dinámicos discretos no lineales	289
10.4. Puntos de equilibrio y periódicos de un sistema dinámico	293
10.4.1. Estabilidad	293
10.5. Sistemas caóticos	295
10.5.1. Diagramas de bifurcación	297
10.6. Modelos discretos con retardo	299
11. Aplicaciones de los sistemas dinámicos discretos	305
11.1. Introducción	305
11.2. Crecimiento independiente de la densidad de la población	305
11.2.1. Modelo discreto exponencial modificado	311
11.3. Crecimiento dependiente de la densidad de población	311
11.3.1. El modelo de crecimiento discreto logístico	312
11.3.2. Generalización del modelo discreto logístico	314
11.4. Ejemplo de modelo discreto para la pesca	316

12. Fractales y Biología	319
12.1. Introducción	319
12.2. Concepto de fractal	322
12.2.1. Fractales de Julia y Mandelbrot	324
12.3. Concepto de dimensión fractal	326
12.3.1. Dimensión topológica	326
12.3.2. Dimensión fraccionaria	328
12.3.3. Dimensión Hausdorff-Besicovich	328
12.4. Tipos de fractales	329
12.5. Aplicaciones de la geometría fractal	334

Presentación

El temario de Modelos Matemáticos en Biología se divide en dos bloques, el primero dedicado al estudio de los modelos continuos siendo las ecuaciones diferenciales y los sistemas de ecuaciones diferenciales quienes juegan un papel predominante, además realizaremos una aproximación a la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales y a los sistemas de ecuaciones diferenciales. El segundo bloque hace referencia al estudio de los modelos discretos, y ahora serán las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias las herramientas matemáticas básicas para su estudio.

Gran parte de los modelos que desarrollamos están relacionados con la Dinámica de Poblaciones, cuyo objetivo básico es el de estudiar los cambios cuantitativos de las poblaciones. Es decir, calcular los cambios numéricos, describirlos, predecirlos y analizar sus consecuencias ecológicas.

Iniciaremos el texto describiendo el campo de acción de los modelos matemáticos en la investigación científica en Biología, con el objetivo de:

- Comprender el alcance de la modelización matemática.
- Conocer lo que significa simular un modelo.
- Clasificar los distintos modelos matemáticos.

A continuación nos centraremos en el estudio de los modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales. Se pretende que los alumnos conozcan las propiedades matemáticas más elementales de este concepto, su interpretación y aplicación a problemas biológicos que dependen de una sola variable.

- Comprender el concepto de modelo continuo.
- Saber resolver de forma explícita ecuaciones diferenciales sencillas.
- Comprender el concepto de estabilidad de las soluciones.
- Saber analizar cualitativamente ecuaciones diferenciales autónomas.

- Conocer los distintos modelos continuos estudiados, especialmente el exponencial y el logístico.

Posteriormente generalizaremos muchos de los conceptos anteriores para plantear, resolver y comprender algunos modelos biológicos con más de una variable.

- Saber encontrar las soluciones de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.
- Entender el análisis cualitativo de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.
- Conocer el modelo *Lotka - Volterra*.
- Saber hacer el estudio cualitativo de un sistema de especies en competencia.

Y finalizaremos la primera parte con una introducción a los métodos numéricos. Se exponen los métodos usuales de discretización para la resolución aproximada de problemas de valores iniciales de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.

- Entender la necesidad de utilizar técnicas numéricas.
- Encontrar un valor aproximado de la solución de una ecuación diferencial por medio de los métodos más usuales.
- Utilizar un programa de ordenador para poder comparar los diferentes métodos de aproximación.

La segunda parte de la materia se inicia con la aplicación de los conceptos de valor y vector propio, introducidos en el estudio de los sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, para poder encontrar la potencia de una matriz, y conocer los modelos matriciales clásicos: *Markov*, *Leslie* y *Lefkovich*.

- Comprender el concepto de modelo discreto.
- Saber encontrar la potencia de una matriz cuadrada.
- Conocer los modelos de *Leslie* y *Lefkovich*, así como su comportamiento a largo plazo.
- Aplicar los modelos anteriores a situaciones reales.

Por último, se introducirán los conceptos básicos de dinámica discreta y su aplicación al campo de la Biología

- Conocer las ecuaciones en diferencias y sistemas en diferencias.
- Calcular y clasificar los puntos de equilibrio de un modelo discreto.
- Saber interpretar un diagrama de bifurcación.

- Conocer el modelo de crecimiento discreto exponencial.
- Comprender el modelo discreto logístico y sus diversas generalizaciones.





Tema 1

MODELOS MATEMÁTICOS

1.1. Introducción

Una de las herramientas más interesantes que actualmente disponemos para analizar y predecir el comportamiento de un sistema biológico es la construcción y posterior simulación de un modelo matemático. Son muchas las razones que justifican la edad de oro que hoy en día vive la modelización matemática, pero debemos de destacar, en primer lugar, el mejor conocimiento de los procesos biológicos, y en segundo lugar, el espectacular avance de los ordenadores y el software matemático.

Puesto que este material es una introducción al estudio de los Modelos Matemáticos en Biología, es conveniente comenzar esta primera sección precisando lo que entendemos por un modelo matemático.

Con frecuencia la palabra modelo tiene distintas interpretaciones, nosotros la aplicaremos en el sentido dado por el profesor *Sixto Ríos*, ([59]): “*un modelo es un objeto, concepto o conjunto de relaciones, que se utiliza para representar y estudiar de forma simple y comprensible una porción de la realidad empírica*”.

Por tanto, un modelo es la representación de un proceso. Si en un fenómeno biológico se conocen los procesos internos y las relaciones entre ellos, entonces es posible conocer las ecuaciones (que dependerán de si el modelo es discreto o continuo) que lo describan y a las que llamaremos un modelo matemático del fenómeno biológico.

Como es natural, de un mismo fenómeno biológico se puede construir muchos modelos matemáticos diferentes entre sí, cuyo grado de eficacia dependerá del conocimiento de los procesos que se investigan y de las posibilidades de experimentación.

Generalmente los métodos que se utilizan para estudiar un fenómeno biológico son la construcción de un modelo matemático o bien el uso del método científico, el cual

está basado en:

1. La observación y en la descripción.
2. El desarrollo de hipótesis o explicaciones.
3. La comprobación por experimentación de dichas hipótesis.
4. La aplicación de estos conocimientos en la resolución de problemas similares.

Supongamos un problema concreto, como por ejemplo, determinar la cantidad de conejos que existirán dentro de un año conocida la población actual, en un entorno que presenta cierta estabilidad. Ante esta situación, podemos recurrir a observaciones anteriores e intentar dar una estimación del dato pedido. Es decir, podemos hacer uso de una herramienta estadística y proponer un resultado más o menos acertado según la complejidad de la técnica empleada. Pero si el problema que abordamos es tal, que apenas disponemos de datos actuales o pasados, debemos de elaborar un modelo que sea capaz de dar solución al problema planteado y además nos aporte información, de tal manera que nuestra actuación en el futuro sea la más acertada. Esta última situación es la que se presenta con más frecuencia cuando se estudia un fenómeno biológico.

Es evidente, que una de las ventajas del uso de los modelos matemáticos es su bajo costo, si lo comparamos con los modelos físicos. Por ejemplo, es mucho más barato y rápido elaborar un modelo matemático que describa la evolución de la población de conejos que empezar con un determinado número de conejos y esperar cierto tiempo para poder experimentar con ellos.

1.2. Elaboración de modelos matemáticos

Los modelos y la realidad están relacionados a través de dos procesos: la **abstracción** y la **interpretación**. El primero de ellos nos obliga a encontrar cuales son los elementos más importantes del problema y cuales son los accesorios. Para saber si un elemento es o no importante tendremos que ver su efecto relativo en la evolución del sistema. En cuanto a la interpretación, debemos de entenderla como la manera en que las componentes del modelo (parámetros, variables) y su comportamiento pueden estar relacionadas con las componentes, características y comportamiento del sistema real que queremos modelar.

Por tanto, la primera de las fases necesaria para construir un modelo matemático es la abstracción, para ello tenemos que establecer ciertas hipótesis, definir las variables y desarrollar las matemáticas adecuadas para poder resolver el problema. La fase siguiente es tratar de simplificar las herramientas matemáticas utilizadas. Los resultados que se deducen del modelo matemático nos deberían llevar a poder efectuar algunas predicciones sobre el mundo real. El paso siguiente sería recoger datos de la situación de la que se ha extraído el modelo y compararlos con las predicciones.

Si no coinciden, los datos que ya poseemos nos pueden servir para modificar las hipótesis. Si las predicciones coinciden con la realidad, entonces las hipótesis son correctas y también lo son las variables definidas. En caso contrario, si se observan discrepancias será necesario construir otro modelo más aproximado y fiable. Como podemos ver, la creación de un modelo matemático es un proceso progresivo.

A continuación expondremos más detenidamente los pasos que debemos seguir para construir un modelo matemático.

1. Se debe empezar formulando las siguientes preguntas:
 - ¿Cuál es la información que realmente necesitamos?
 - ¿A qué se reduce ahora el problema?
2. Descripción cualitativa del modelo.
 - Se debe iniciar por el más simple que describa el comportamiento biológico del sistema.
 - Ver si los resultados que nos aporta el modelo dan respuesta a las preguntas planteadas.
3. Descripción cuantitativa del modelo.
 - Tenemos que definir las variables y ver la manera en que están relacionadas.
 - Debemos definir los parámetros del modelo, y asegurarnos de que cualquier otro parámetro es redundante.
4. Introducción de las ecuaciones del modelo.
 - Se escriben las ecuaciones, con la ayuda de un diagrama o de una tabla.
5. Análisis de las ecuaciones.
 - Debemos comprobar que su análisis da respuesta a las cuestiones planteadas.
 - Se encuentra la solución general.
6. Volver a examinar las hipótesis.
 - Se intenta simplificar el modelo.
 - Si nuestro modelo no responde a las preguntas iniciales, debemos volver a los pasos (3), (4) y (5).
7. Relacionar los resultados encontrados con hechos conocidos.
 - ¿Se ha contestado al aspecto biológico?
 - ¿Están los resultados de acuerdo con la intuición?

- ¿Confirman los datos o los experimentos dichos resultados?

A continuación utilizaremos un ejemplo elemental, en concreto la evolución de un cultivo de cierto tipo de células, para construir un modelo matemático.

- **Descripción del fenómeno real y objetivos del modelo.** Para conocer como evoluciona el cultivo realizamos diversos experimentos y observamos un rápido crecimiento de la población. El tipo de preguntas que podemos hacer son las siguientes: ¿cómo varía el número de células con el tiempo?, ¿qué tipo de variables influyen en su desarrollo?.
- **Elección de variables.** En la fase de experimentación se ha podido observar que la célula crece, se divide en dos y cada una de ellas inicia de nuevo el proceso de crecimiento. Se detecta además que el tiempo necesario para que crezca una célula y se duplique es aproximadamente 20 minutos. Por tanto, el tiempo de vida de una célula, podemos considerarlo como una variable que interviene en el problema. Es evidente que existen muchas otras variables, las cuales pueden ser clasificadas en variables de entrada, que son las que pueden influir en los resultados, y variables de salida, que corresponden a los resultados. En nuestro problema, seleccionamos como variable de salida el número de células existente en el cultivo en el tiempo t . El tiempo t transcurrido desde el instante inicial será la variable independiente.
- **Relaciones cualitativas entre las variables.** De los experimentos realizados se desprende que bajo las mismas condiciones de partida, el número de células del cultivo crece con el tiempo.
- **Recopilación de datos.** En la Tabla 1.1 aparecen los datos recogidos en la fase de experimentación. Observemos que los datos recopilados permiten ser ajustados por los valores, 100 , 2×100 , $2^2 \times 100$, $2^3 \times 100$, $2^4 \times 100$, \dots , que corresponden a un crecimiento exponencial. Este último paso es el verdaderamente importante en el proceso de modelado.

Instante	Tiempo	Núm. células
0	0	100
1	20	209
2	2×20	415
3	3×20	790
4	4×20	1610
\dots	\dots	\dots

Tabla 1.1

- **Modelo empírico de crecimiento.** Como consecuencia de la etapa anterior, se observa que el proceso de multiplicación de las células se puede describir

como “una duplicación de la población cada 20 minutos”. Tanto en esta fase como en las anteriores, juegan un papel fundamental los métodos de recopilación y análisis de datos.

- **Construcción del modelo matemático.** Empezamos generalizando la situación anterior, en el sentido siguiente: sea N el número de células en el cultivo en el instante inicial, y supongamos que la población se multiplica por α en T minutos. Bajo estas hipótesis tendremos en los instantes $0, 1 \times T, 2 \times T, 3 \times T, \dots$, las poblaciones $N, \alpha N, \alpha^2 N, \alpha^3 N, \dots$. En consecuencia, si $y(t)$ representa al número de células en el cultivo en el instante t , sabemos que:

$$y(0) = N, \quad y(t) = \alpha y(t - 1).$$

- **Consecuencias del modelo.** Del modelo construido podemos deducir algunos resultados:
 - Es inmediato comprobar que de las hipótesis anteriores se obtiene

$$y(t) = N\alpha^t.$$

- También es fácil encontrar el número de períodos T necesarios para pasar de N células a \tilde{N} .

$$t \approx \frac{\ln \tilde{N} - \ln N}{\ln \alpha}.$$

- **Aplicación práctica.** Encontrar el número de períodos de tiempo necesarios para pasar de 400 células a 3210

$$\frac{\ln 3210 - \ln 400}{\ln 2} \approx 3.$$

- **Validación del modelo.** Es el proceso de contrastar las predicciones propuestas por el modelo con los datos experimentales. Es evidente que si existen grandes diferencias entre estos valores debemos de rechazar el modelo propuesto. Una buena herramienta de trabajo en esta fase son los tests de hipótesis.
- **Predicción.** Una vez que por la etapa anterior nos hemos asegurado de la validez del modelo, pasamos a la etapa de predicción. Por ejemplo, en la situación que estamos analizando, si queremos obtener 3.200 células a partir de 400 células, necesitamos que pasen 3 períodos que equivalen a 60 minutos.
- **Nuevo proceso de modelización.** Si llegamos a la conclusión de que nuestro modelo no es válido, entonces debemos retomar los datos experimentales y proponer uno nuevo que sea más adecuado.

A pesar de la gran importancia que hoy en día tienen los modelos matemáticos, tenemos que tener en cuenta la siguiente observación. Por lo general, en los modelos teóricos, se consideran sólo las relaciones cuantitativas entre las variables dependientes e independientes del mismo, y entonces el protagonismo es de las matemáticas. Ahora bien, estos modelos describirán relaciones entre los organismos, pero nunca pueden darnos el sentido biológico del proceso. Por tanto, será imprescindible la experimentación biológica.

Por último, un modelo matemático tiene que tener las siguientes cualidades:

- Debe ser **coherente**, es decir, tiene que dar cuenta de todas las observaciones anteriores y permitir prever el comportamiento futuro del fenómeno biológico.
- Tiene que permitir su **generalización**, dentro de ciertos límites que conviene determinar previamente.
- Debe ser **robusto**, en el sentido de tener capacidad de responder a los cambios de los valores de los parámetros.
- Y por último, debe ser **flexible**, en el sentido de que pueda ser cambiado y adaptado a nuevas situaciones.

1.2.1. Un termómetro biológico

Para ilustrar los comentarios realizados en torno a la construcción de modelos, vamos a exponer un curioso ejemplo de un modelo matemático muy simple aplicado a la Biología.

Desde hace muchos años, la tradición popular sabe que existe una relación entre la temperatura y el ritmo con el que los grillos chirrían. A más calor mayor es su frecuencia; de hecho si la temperatura se mide en grados Fahrenheit¹ se cuenta el número de chirridos en un minuto se divide por 4 y se suma 40. En 1898, *A.E. Dolbear* comprobó que los grillos chirrían en el campo de forma sincrónica y publicó un trabajo en el que proponía una fórmula que relacionaba linealmente la temperatura en función del número de chirridos de los grillos. La fórmula es:

$$T = 50 + \frac{N - 40}{4}.$$

En los años siguientes otros autores publicaron trabajos similares al de *Dolbear*. Los hermanos *C.A. Bessey* y *E.A. Bessey* estudiaron ocho tipos diferentes de grillos en Lincoln, Nebraska, durante los meses de agosto y septiembre del 1897, cuyos datos se encuentran representados en la Figura 1.1. Si se realiza un ajuste de estos datos aplicando el método de los mínimos cuadrados, se obtiene $T = 0.21N + 40.4$, que como puede observarse es muy parecida a la propuesta por *Dolbear*.

¹Para convertir a grados centígrados aplicamos la relación $(F - 32)/9 = C/5$, siendo F los grados Fahrenheit y C los grados centígrados.

La recta $T = 0.21N + 40.4$ que ajusta a los datos es un modelo matemático que representa a la temperatura como una función de la frecuencia de los chirridos de los grillos.

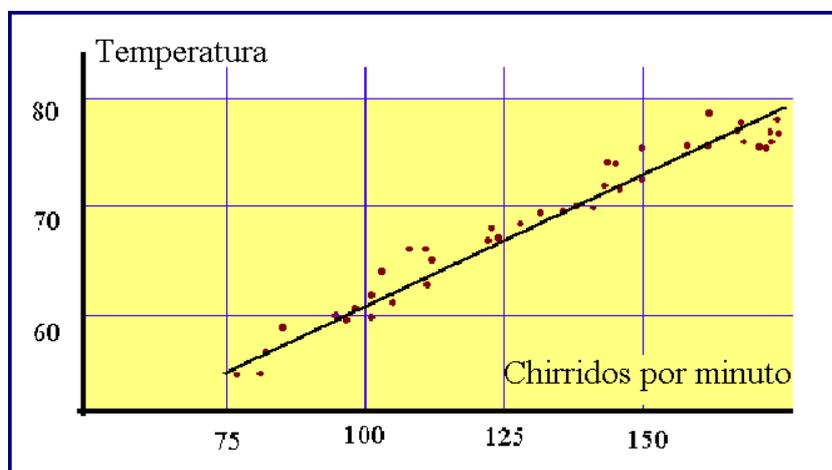


Figura 1.1. Número de chirridos por minutos y temperatura.

Antes de estudiar las propiedades matemáticas del modelo, es conveniente plantearse las siguientes preguntas:

- ¿Cómo de buena es la recta encontrada en relación a la propuesta por *Dolbear*?
- ¿Cuándo puede aplicarse el modelo encontrado?
- ¿Cuál es el rango de temperatura válido del modelo?
- ¿Cómo de exacto es el modelo y cómo puede ser mejorado?

Las respuestas a este tipo de preguntas nos ayudarían a conocer las complejas relaciones entre el problema biológico y el modelo matemático. Las dos primeras preguntas son de naturaleza biológica y las matemáticas juegan un papel muy limitado. Si comparamos el modelo de *Dolbear* con la ecuación encontrada observamos ligeras diferencias entre los coeficientes, pero esto podría deberse al tipo de grillos que estamos analizando. Sin embargo, si comprobamos que las observaciones de dos clases de grillos diferentes son muy parecidas, entonces el modelo puede ser un buen termómetro biológico. A la hora de su aplicación su uso está limitado, ya que los grillos sólo chirrían durante unos pocos meses al año y además cuando la temperatura sea superior a 10 grados centígrados.

1.3. Clasificación de los modelos matemáticos biológicos

Según la filosofía con la que abordemos el mundo que nos rodea, así será el tipo de modelo matemático que podemos construir. En concreto podemos clasificarlos en:

- **Modelos deterministas:** Son aquellos que a cada valor de la variable independiente corresponde otro valor de la variable dependiente. Son especialmente útiles en los sistemas que evolucionan con el tiempo, como son los **sistemas dinámicos**. En ellos podemos conocer el estado del sistema transcurrido cierto tiempo una vez que hemos dado valores a los distintos parámetros que aparecen en el modelo.

Los **modelos continuos** son útiles cuando tratamos de estudiar procesos en los que se observa continuidad en el tiempo y en este caso lo adecuado es hacer uso de las **ecuaciones diferenciales**. Sin embargo, al estudiar algunos modelos biológicos, como son la dinámica de las poblaciones, puede apreciarse que estamos ante un **proceso discreto**. Ahora, las **ecuaciones en diferencias** nos ofrecen muchas posibilidades para deducir como cambian las propiedades del sistema biológico al variar los parámetros del modelo.

En concreto, las matemáticas utilizadas para la evaluación de los modelos deterministas son:

- Ecuaciones en diferencias.
 - Teoría de bifurcaciones.
 - Ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales).
 - Análisis numérico.
- **Modelos probabilísticos:** Si en un modelo determinista, como por ejemplo el logístico $y'(t) = ry(t)(1 - y(t)/k)$, el parámetro r varía aleatoriamente, lo que hacemos es sustituir valores constantes por otros que cambian con cierta probabilidad. En este caso estamos ante un modelo probabilístico. Por ejemplo:
 - Procesos estocásticos.
 - **Modelos mixtos:**
 - Ecuaciones diferenciales estocásticas.
 - **Modelos discretos matriciales:** Son los más frecuentes cuando el sistema que estamos modelando está dividido en una serie de clases. En un momento dado, el estado del sistema puede representarse por un vector. El paso de una etapa a otra se realiza a través de una matriz conocida con el nombre de matriz de transición.
 - Cadenas de Markov.
 - Modelos de Leslie.
 - Modelos de Lefkovich.

De una manera muy general, y desde el punto de vista de la Biología, podemos clasificar los modelos matemáticos en los siguientes grupos:

- Modelos en bioquímica.
- Modelos de la evolución de una población.
- Modelos en fisiología (de animales, de plantas).
- Modelos en la genética.
- Modelos en la creación de patrones.
- Modelos en la epidemiología.
- Modelos en las migraciones.

1.4. El papel de los ordenadores

Como tendremos ocasión de comprobar, gran parte del presente curso está dedicado al estudio de los modelos matemáticos desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. Su estudio se inicia en el siglo XVII cuando *Leibnitz* y *Newton* descubren el cálculo diferencial.

En muchas ocasiones estaremos más interesados en conocer el comportamiento a largo plazo de un modelo que su solución exacta, y para ello es muy conveniente hacer uso del ordenador. Hasta hace unos pocos años, cuando se populariza su uso, lo habitual era simplificar convenientemente el problema para por lo menos disponer de una solución aproximada. Actualmente existe un interés creciente en el estudio de los sistemas dinámicos debido fundamentalmente al aumento en la rapidez de cálculo de los ordenadores que nos permiten realizar múltiples simulaciones de cualquier modelo matemático. Paralelamente a la evolución de los ordenadores se ha producido un incremento notable en la cantidad y calidad de los programas que se utilizan. La existencia de programas de cálculo (Derive, Maple, Mathematica, MatLab) o de simulación (Vensim, Stella) aplicables a todos los campos de las matemáticas actuales, está cambiando nuestra manera de enfrentarnos a nuestra investigación así como a nuestra actividad docente.

1.5. Breve introducción histórica

Para poder encontrar un primer ejemplo de un modelo matemático aplicado a la Biología tenemos que retroceder 250 años. Entre los precursores se encuentra *Rene Descartes*, matemático y filósofo, quien mantenía la hipótesis de que, utilizando las Matemáticas como herramienta, se podía construir una teoría unificada de todas las ciencias. Trabajó en campos muy diversos y en concreto en la Fisiología, presentando una explicación matemática para las funciones fisiológicas. Los modelos que proponía eran muy poco rigurosos y desprovistos de fundamentación experimental y,

por tanto, con un gran número de errores. A este respecto, una frase que frecuentemente se comenta es la siguiente: “*Los modelos son erróneos ... pero muchos de ellos son útiles.*” Entonces, ¿cómo pueden ser útiles si están equivocados?, la respuesta a esta pregunta puede ser que por la misma razón que en el pasado mapas erróneos, donde se suponía que la tierra era plana y con distancias equivocadas, fueron muy útiles para viajar.

A finales del siglo XIX *Federico Engels* se lamentaba de lo poco que estaban introducidas las Matemáticas en la Biología. Por ejemplo, en su obra “*Dialéctica de la Naturaleza*”, aparece el siguiente testimonio “*Biología = 0*”. Es difícil encontrar en esta época algún intento de aplicar las Matemáticas en el estudio de la Biología.

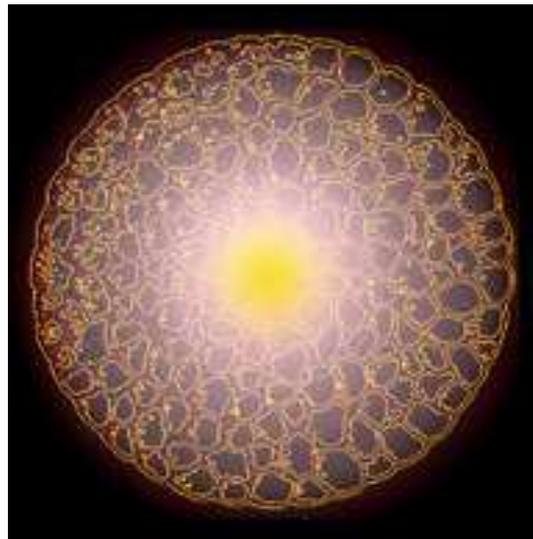
Todo cambia a principios del siglo XX, cuando *Michaelis* y *Menten* proponen un modelo bioquímico (que aún se utiliza hoy en día), para describir la catálisis enzimática. Dos años después, *Lee* presentó un modelo para explicar los paradójicos efectos de las radiaciones sobre las células. Ahora, tenemos que trasladarnos hasta mediados de siglo para encontrar otro ejemplo interesante. Basándose en la propuesta de *Galileo* de establecer relaciones cuantitativas entre magnitudes medibles, se intentaba encontrar un modelo que relacionase la intensidad de un estímulo y la duración del mismo. El esfuerzo fue inútil, poniéndose de manifiesto que para tener éxito en el modelado es importante atender no solamente a la experimentación, sino también acertar en el tipo de relaciones cuantitativas a estudiar. Además, a la hora de construir un modelo es fundamental saber separar la información relevante que conocemos del problema de la que no lo es.

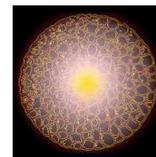
El contraste con esta última situación lo encontramos en el modelo de *Hodgkin* y *Huxley* para la generación y transmisión del impulso nervioso. En este caso, se proponían relaciones entre variables que físicamente tenían sentido. Este modelo construido en 1952 suele ponerse como ejemplo de modelo matemático aplicado a la Biología, de hecho, algunos autores piensan que juega un papel en la Neurología semejante a las ecuaciones de *Maxwell* en el estudio del Electromagnetismo, ya que a través de él es posible explicar todas las propiedades experimentales conocidas respecto a la generación y propagación del impulso nervioso. Al mismo tiempo, el modelo sugería que la dinámica de muchos procesos biológicos debía ser no lineal.

A partir de este momento, empieza la edad de oro para la construcción y posterior interpretación de modelos matemáticos aplicados a la Biología. En los años 60 se publicaron un gran número de trabajos, especialmente los relacionados con el sistema nervioso, muchos de ellos con escaso interés práctico. El siguiente paso importante se da en la década de los 70 cuando se descubre que las soluciones de sistemas dinámicos presentaban un comportamiento caótico. Un ejemplo lo encontramos en el modelo logístico de *R. May*, que supuso toda una revolución comparable al impacto causado por el modelo de *Hodgkin* y *Huxley*. La teoría del caos inmediatamente entusiasmó a biólogos, físicos y matemáticos, dedicados al estudio de los modelos matemáticos.

De toda formas, muchas situaciones muy distintas, como pueden ser la actividad

cerebral, el electrocardiograma, la dinámica de poblaciones, el desarrollo embrionario, la evolución de las enfermedades, son escenarios muy difíciles de modelar a través de modelos elementales. Sin embargo, podemos realizar las simplificaciones convenientes que expliquen parcialmente el comportamiento del sistema o bien aplicar unas nuevas herramientas matemáticas, como es el uso de la geometría fractal, para explicar la variabilidad de la frecuencia del corazón.





Tema 2

ECUACIONES DIFERENCIALES

2.1. Introducción

Gran parte de los sistemas que nos rodean están sometidos al **cambio**, por tanto, es un hecho cotidiano para todos nosotros. Las Matemáticas son muy útiles para investigar, entre otros, fenómenos como el movimiento de los planetas, la desintegración de sustancias radiactivas, la velocidad de las reacciones químicas y los patrones meteorológicos. Por otro lado, los biólogos investigan en campos tales como la contaminación o la dinámica de poblaciones. Incluso en áreas, aparentemente alejadas de la Matemáticas, como las Ciencias Políticas o la Medicina, es frecuente que recurran a los modelos matemáticos, en los cuales la clave está en el cambio.

Muchos de estos modelos se expresan a través de una ecuación diferencial. Si $y = f(t)$ es una función que relaciona las variables t e y , entonces su derivada

$$y' = \frac{dy}{dt},$$

nos indica la **tasa de cambio o velocidad de cambio** de la variable y con respecto de la variable t .

Cuando estudiamos un problema del mundo real necesitamos usualmente desarrollar un marco matemático. Sabemos que el proceso por el que se crea y evoluciona este marco es la construcción de un modelo matemático, siendo algunos de ellos muy precisos, especialmente los de la Física. Sin embargo, otros lo son menos, concretamente los que tratan de problemas de Biología o Ciencias Sociales. No obstante, en los últimos años los enunciados de estas materias se han vuelto lo suficientemente precisos como para poder expresarlos matemáticamente.

Un ejemplo de creación de un modelo continuo lo tenemos en la predicción del tiempo. En teoría, si pudiésemos programar en un ordenador todas las hipótesis correctas, así como los enunciados matemáticos apropiados sobre las formas en que las

condiciones climáticas operan, tendríamos un buen modelo para predecir el tiempo mundial. En el modelo del clima global, un sistema de ecuaciones calcula los cambios que dependen del tiempo, siendo las variables el viento, la temperatura y la humedad, tanto en la atmósfera como en la tierra. El modelo¹ puede predecir también las alteraciones de la temperatura en la superficie de los océanos.

Por todo lo comentado anteriormente, hemos puesto de manifiesto que en los modelos matemáticos del mundo real tienen gran importancia el estudio de las ecuaciones diferenciales. En cualquier lugar donde se lleve a cabo un proceso que cambie continuamente en relación al tiempo (rapidez de variación de una variable con respecto a otra), suele ser apropiado el uso de las ecuaciones diferenciales.

EJERCICIO 1

Escribir una ecuación diferencial que describa la situación dada.

- 1 La cantidad de bacterias en un cultivo crece, en cada momento, a un ritmo que es proporcional al número de bacterias presentes.
- 2 Cuando los factores ambientales imponen un límite superior sobre su tamaño, la población crece a un ritmo que es conjuntamente proporcional a su tamaño actual y a la diferencia entre su límite superior y su tamaño actual.
- 3 La razón a la que las personas oyen hablar sobre un nuevo aumento de precios es proporcional al número de personas en la ciudad que no han oído hablar al respecto.
- 4 El ritmo con el que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional a la cantidad de residentes que han sido infectados y al número de residentes propensos a la enfermedad que no han sido infectados.
- 5 Si es cierto que en una economía estable la velocidad de disminución del número de personas y , con un salario de por lo menos x euros, es directamente proporcional al número de personas e inversamente proporcional a su salario, obténgase la ley de Pareto, es decir la expresión de y en función de x .

2.2. ¿Qué es una ecuación diferencial?

Aunque no sepamos que es una ecuación diferencial, sin embargo estamos familiarizados con el problema de resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas. Además, sabemos lo que se entiende por solución de la ecuación, aunque en

¹En el Centro Nacional de Investigación Atmosférica de EEUU tienen un superordenador con el nombre de CRAY que puede ejecutar un modelo parecido.

ecuaciones polinómicas de grado elevado o en ecuaciones donde aparecen funciones trascendentes no podamos encontrar su valor exacto.

De manera general, $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, siendo F una función vectorial de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , representa a un sistema de m ecuaciones en las variables x_1, x_2, \dots, x_n .

Si utilizamos el lenguaje del cálculo diferencial podemos escribir ecuaciones donde aparezcan una función $y = y(t)$, definida sobre un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$, la variable t , y las derivadas de diferentes órdenes de y . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} y' &= 6t + 5 & y' &= 6y \\ y' + 3y + t &= 0 & (y'')^2 + 2ty + \text{sen } t &= 0. \end{aligned}$$

Llamemos la atención sobre el hecho de que ya hemos tenido ocasión de estudiar este tipo de situaciones, concretamente cuando se realizó el estudio de las integrales indefinidas. En efecto, dada la ecuación $y'(t) = \text{sen } t$ la idea básica era encontrar una función $y(t) = -\cos t + C$ que cumpla la igual anterior.

Los siguientes ejemplos tratan de mostrar como las ecuaciones diferenciales aparecen al modelar situaciones muy simples.

EJEMPLO 2.1

- Un zoológico planea llevar un león marino a otra ciudad. El animal irá cubierto durante el viaje con una manta mojada. En cualquier tiempo t , la manta perderá humedad debido a la evaporación, a una razón proporcional a la cantidad $y(t)$ de agua presente en la manta. Inicialmente, la sábana contendrá 40 litros de agua de mar. Estamos interesados en encontrar una ecuación diferencial que describa este problema.

Al ser $y(t)$ la cantidad de agua en la manta en el tiempo t , del enunciado deducimos que la razón de cambio de $y(t)$ (su derivada $y'(t)$), es proporcional a $y(t)$. Entonces $y'(t) = ky(t)$, donde la constante de proporcionalidad k es negativa, ya que la cantidad de agua disminuye con el tiempo. Por tanto, nuestro modelo será

$$y'(t) = ky(t), \quad k \leq 0, \quad y(0) = 40.$$

EJEMPLO 2.2

- La tabla siguiente:

Horas	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Conc.(mg/l)	12.0	10.0	7.0	5.0	3.5	2.5	2.0	1.5	1.0	0.7	0.5

muestra la concentración de teofilina, una droga común para combatir el asma, en el torrente sanguíneo, como una función del tiempo después de la aplicación de una dosis inicial.

Si representamos la concentración de teofilina en función del tiempo nos aparece una gráfica que disminuye de manera exponencial (Figura 2.1 izquierda)

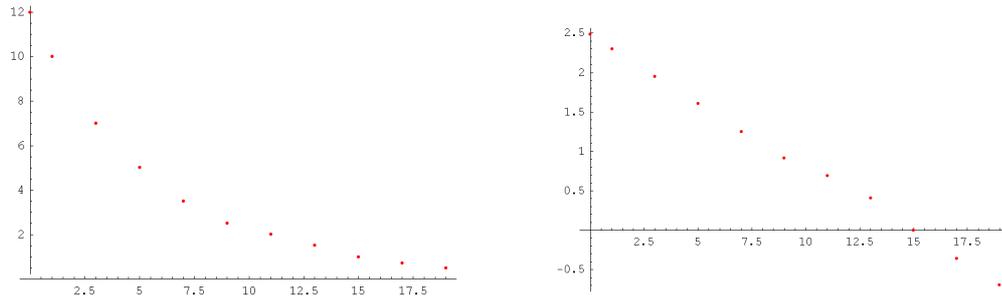


Figura 2.1. Izquierda: escala normal. Derecha: escala logarítmica

Si tomamos logaritmos neperianos (Figura 2.1 derecha) de los valores de la concentración, podemos ajustar esta nueva nube de puntos por una recta. Este proceso lo llevamos a cabo con el programa **Mathematica**[®] y su solución es la recta $2.45337 - 0.164264t$, que corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 2.45337)$ y su pendiente es -0.164264 . Por lo tanto, si la solución del modelo es del tipo exponencial $y(t) = Ce^{kt}$, entonces $\ln y = \ln C + kt$. En consecuencia,

$$\ln C = 2.45338 \quad \Rightarrow \quad C = e^{2.45338} = 11.6275; \quad k = -0.164265$$

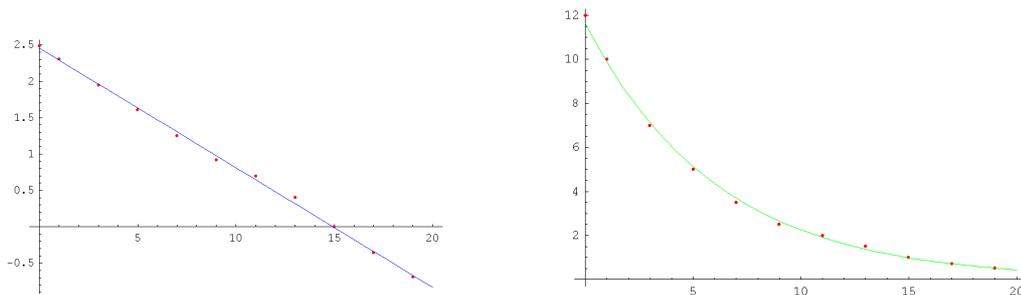


Figura 2.2. Izquierda: ajuste lineal. Derecha: ajuste exponencial

$$y(t) = 11.6275e^{-0.164264t}$$

Pasemos ahora a precisar algunos de los conceptos sugeridos.

Una **ecuación diferencial** es aquella en la que aparece una función desconocida y una o más de sus derivadas. Cuando la función desconocida depende de dos o más variables, entonces las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial serán derivadas parciales, y en este caso diremos que se trata de una **ecuación en derivadas parciales**. Si la función depende sólo de una variable independiente, entonces la ecuación recibe el nombre de **ecuación diferencial ordinaria** (E.D.O.). En este curso estudiaremos algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n que representaremos por

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

donde F es una expresión matemática en la que aparecen la variable t , una función desconocida y , y las derivadas de y hasta el orden n .

EJEMPLO 2.3

- Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$-2y'' + 3y' - y = e^t$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

$$-2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

- Las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = u(x, y, z, t),$$

son ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales.

El **orden** de una ecuación diferencial es el que corresponde a la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. De esta manera, $y' = ay - by^2$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, mientras que

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$

es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

EJEMPLO 2.4

- Clasificar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales como ordinarias o en derivadas parciales. Determinar el orden y la linealidad o no linealidad en cada caso.

(a) $y' + t^2y = te^t$ (b) $y''' + 4y'' - 5y' + 3y = \sin t$

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (d) $t^2 dy + y^2 dt = 0$

(e) $\frac{dy}{dt} + 3\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^5 + 5y = 0$ (f) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$

(g) $y'' + y \sin t = 0$ (h) $\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2}} + 1$

(i) $\frac{d^2y}{dt^2} + t \sin y = 0$ (j) $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0$

(k) $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$

Las soluciones son:

$$1. \quad y' + t^2 y = te^t$$

Ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

$$2. \quad y''' + 4y'' - 5y' + 3y = \text{sen } t$$

Ecuación diferencial ordinaria lineal de tercer orden.

$$3. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

$$4. \quad t^2 dy + y^2 dt = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal.

$$5. \quad \frac{dy}{dt} + 3 \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^5 + 5y = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal.

$$6. \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$$

Ecuación diferencial en derivadas parciales de cuarto orden.

$$7. \quad y'' + y \text{sen } t = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden.

$$8. \quad \left(\frac{dr}{ds} \right)^3 = \sqrt{\frac{d^2 r}{ds^2} + 1}$$

Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.

$$9. \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + t \text{sen } y = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.

$$10. \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0$$

Ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden.

$$11. \quad \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2}$$

Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden

2.3. Solución de una ecuación diferencial

Antes de desarrollar esta sección consideremos la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$. Cuando nos planteamos el problema de encontrar soluciones de esta ecuación estamos suponiendo que existe un conjunto X donde la variable x puede tomar valores. En general, la ecuación no es válida para todo valor $x \in X$ y el problema de resolver la ecuación consiste en encontrar $S \subset X$ tal que $x^2 - 4x + 3 = 0$. Entonces S será el conjunto de soluciones, que en nuestro caso es $\{1, 3\}$, y por tanto decimos que 1 y 3 son soluciones.

DEFINICIÓN 2.3.1 *Una solución de la ecuación diferencial*

$$F(t, y, y', \dots, y^n) = 0,$$

es cualquier función $y = \varphi(t)$, definida en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$, con derivada de orden n en ese intervalo y tal que

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi(t)^n) = 0, \quad \forall t \in I.$$

El proceso de determinar todas las funciones que son soluciones de una ecuación diferencial se llama **resolver** la ecuación diferencial. Por ejemplo, la integración es un tipo muy simple de resolución de ecuaciones diferenciales.

A diferencia de las ecuaciones algebraicas, las ecuaciones diferenciales tienen por solución una función. Además, una ecuación diferencial tiene generalmente un número infinito de soluciones que recibe el nombre de **solución general**. Algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que no pueden obtenerse de la solución general y en este caso reciben el nombre de **soluciones singulares**.

En ocasiones, se desea encontrar una solución particular que satisfaga ciertas condiciones adicionales llamadas condiciones iniciales. Las condiciones iniciales especifican los valores de una solución y de cierto número de sus derivadas en un valor concreto de la variable t (con frecuencia es $t = 0$, pero puede ser cualquier otro). El problema de determinar una solución de una ecuación diferencial que satisfaga ciertas condiciones iniciales se llama un **problema de valores iniciales o de Cauchy**.

EJEMPLO 2.5

- La ecuación diferencial $(y'(t))^2 + 1 = 0$ no tiene solución real, ya que no existe un número real que elevado al cuadrado y sumado con uno valga cero.
- La ecuación $t^2 + y^2 - 4 = 0$ define en forma implícita una solución de la ecuación diferencial $t + yy' = 0$ en el intervalo $-2 < t < 2$. En efecto, si derivamos en forma implícita la expresión $t^2 + y^2 - 4 = 0$ obtenemos,

$$2t + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad t + yy' = 0.$$

Si despejamos en la solución el valor de y observamos que $y = \pm\sqrt{4 - t^2}$ sólo está definida en $-2 < t < 2$.

- Si derivamos la función

$$y = \begin{cases} -t^4 & \text{si } t < 0 \\ t^4 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

podemos comprobar que es solución de la ecuación diferencial $ty' - 4y = 0$ en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

EJEMPLO 2.6

- Estudiar si la función $y = 1/t$ es una solución de la ecuación $y' = -y^2$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

La función $y = 1/t$ es derivable en el intervalo $(0, +\infty)$ y su derivada viene dada por $y' = -1/t^2$. Por lo que resulta inmediato que la función $y = 1/t$ satisface la ecuación diferencial $y' = -y^2$.

2.3.1. Existencia y unicidad de soluciones

Una vez que sabemos lo que se entiende por ecuación diferencial y solución de la misma, podemos preguntarnos:

- ¿Toda ecuación diferencial tiene solución?
- En el caso de que ésta exista, ¿cuántas tiene?, ¿quiénes son?

Antes de responder a estas preguntas, veamos el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 2.7

- La ecuación diferencial $(y'(t))^2 + (y(t))^2 + 1 = 0$ no tiene solución ya que $(y'(t))^2 + (y(t))^2 \geq 0$ para cualquier pareja de valores reales que tomen las funciones $y'(t)$ e $y(t)$.
- Es inmediato comprobar que

$$y(t) = t^3 + C, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

es solución de la ecuación diferencial $y'(t) = 3t^2$, para cualquier valor de la constante C . Por tanto, existe un número infinito de soluciones.

- En cuanto a la ecuación $y''(t) = 0$, cualquier función cuya gráfica sea una recta será solución. También en este caso existe un número infinito de soluciones.
-

Es bastante corriente que si una ecuación diferencial tiene solución, tenga infinitas soluciones. En efecto, en el proceso de resolver la ecuación diferencial tenemos que hacer al menos una integral y en consecuencia nos aparecerá una constante que, al tomar diferentes valores, nos definirá una gama infinita de soluciones.

A partir de este momento, y salvo que no lo indiquemos, nos centraremos en las ecuaciones diferenciales de primer orden $F(t, y, y') = 0$, donde supondremos que podemos expresarlas como $y' = f(t, y)$.

Consideremos el problema de valores iniciales (P.V.I.):

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (2.1)$$

estamos interesados en saber si dicho problema tiene solución y en caso afirmativo si ésta es única.

EJEMPLO 2.8

- Es fácil ver que la ecuación diferencial $ty' + y = 1$ admite como solución general $y = c/t + 1, c \in \mathbb{R}$, en cualquier intervalo que no contenga al cero. En efecto, derivando la función $y(t)$ se tiene

$$y' = -\frac{c}{t^2} \Rightarrow ty' + y = -\frac{c}{t} + \frac{c}{t} = 1.$$

Si queremos determinar la solución que pasa por el punto $(1, 2)$ tenemos que imponer la condición $y(1) = 2$. El valor de c que cumple con el requisito anterior es $c = 1$, con lo cual la solución particular pedida es

$$y = \frac{1}{t} + 1. \quad (2.2)$$

En consecuencia, la función (2.2) es una solución del problema de valores iniciales

$$ty' + y = 1, \quad y(1) = 2, \quad (2.3)$$

en el intervalo $(0, +\infty)$. Puesto que en

$$y = \frac{c}{t} + 1, \quad c \in \mathbb{R},$$

están todas las soluciones de la ecuación diferencial $ty' + y = 1$, entonces el problema (2.3) **tiene solución única**.

En cambio, no es posible encontrar una solución que pase por el punto $(0, 2)$. Por tanto, en este caso diremos que el problema de valores iniciales

$$ty' + y = 1, \quad y(0) = 2, \quad (2.4)$$

no tiene solución.

- Es inmediato comprobar que el problema de valores iniciales

$$(y')^2 = 4y, \quad y(0) = 1, \quad (2.5)$$

tiene dos soluciones: (a) $y = (t - 1)^2$, (b) $y = (t + 1)^2$.

TEOREMA 2.3.2 (Teorema de Cauchy-Peano) Sea $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y supongamos que existe un rectángulo cerrado

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

en el que la función f es continua. Entonces el problema de valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

tiene al menos una solución definida en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, donde

$$\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{(t,y) \in \mathbb{R}^2} |f(t, y)|. \quad (2.6)$$

Hemos visto en el teorema de *Cauchy-Peano* que la continuidad de la función $f(t, y)$ en una región R garantiza que por cada punto de R pasa una solución de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$. ¿Será también cierto que la continuidad de la función $f(t, y)$ obliga a que por cada punto de R pase una única solución? El siguiente ejemplo nos dará la respuesta a esta pregunta.

EJEMPLO 2.9

- Supongamos la ecuación diferencial $y' = f(t, y) = y^{\frac{2}{3}}$, que podemos escribirla

$$y' y^{-\frac{2}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(3y^{\frac{1}{3}}) = 1.$$

Integrando

$$3y^{\frac{1}{3}} = t + c \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{t}{3} + k\right)^3, \quad k = \text{cte.}$$

El problema de valores iniciales

$$y' = y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0,$$

no tiene solución única, ya que $y = t^3/27$, e $y = 0$ son dos soluciones del mismo.

Este ejemplo muestra una ecuación diferencial con una función $f(t, y) = y^{2/3}$ continua en un rectángulo R que contiene al punto $(0, 0)$, y sin embargo no tiene una única solución. Si queremos conseguir este último objetivo será necesario exigir a la función f nuevas condiciones.

TEOREMA 2.3.3 (Teorema de Picard) *Sea $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y supongamos que existe un rectángulo cerrado*

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

en el que las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas. Entonces el problema de valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

tiene solución única definida en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, donde δ está dado por (2.6).

OBSERVACIÓN 2.3.4

- Los Teoremas 2.3.2 y 2.3.3 nos dan condiciones suficientes pero no necesarias para garantizar la existencia y unicidad de soluciones para un problema de valores iniciales.
- La solución de un problema de valores iniciales puede existir en un intervalo mayor que el mencionado en los Teoremas 2.3.2 y 2.3.3.
- En los Teoremas 2.3.2 y 2.3.3 hemos considerado rectángulos R cerrados y acotados. Pueden enunciarse teoremas análogos utilizando rectángulos abiertos

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| < a, |y - y_0| < b\},$$

o bien rectángulos del tipo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leq t < t_0 + a, |y - y_0| < b\}.$$

En estos casos tenemos que añadir la hipótesis de que las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ estén acotadas.

EJEMPLO 2.10

- En el problema de valores iniciales

$$ty' = 2y, \quad y(0) = 0, \tag{2.7}$$

las funciones

$$f(t, y) = \frac{2y}{t}, \quad \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = \frac{2}{t},$$

no están definidas en los puntos de la recta $t = 0$. Por tanto, no es posible encontrar un rectángulo R que contenga al punto $(0, 0)$ en el cual la función f sea continua. No podemos aplicar el Teorema 2.3.2 y, en consecuencia, no podemos asegurar nada sobre la existencia de solución del problema de valores iniciales (2.7). Sin embargo, es fácil ver que las funciones $y = ct^2$ con $c \in \mathbb{R}$ son soluciones del problema (2.7) en el intervalo $-\infty < t < \infty$. El problema de valores iniciales tiene infinitas soluciones.

2.4. Análisis geométrico de $y' = f(t, y)$

Recordemos que estamos considerando ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden $F(t, y, y') = 0$, donde F es una función de tres variables, y que será posible expresarla

$$y'(t) = f(t, y). \quad (2.8)$$

2.4.1. Campo de direcciones

Las soluciones de (2.8) son funciones y y las podemos representar gráficamente como una curva en el plano Oty . Supongamos que D sea el dominio de la función f , y $(t_0, y_0) \in D$ siendo $y(t)$ una solución de (2.8) de tal manera que su gráfica pasa por el punto (t_0, y_0) , por tanto $y(t_0) = y_0$. En consecuencia, la ecuación (2.8) expresa que $f(t_0, y_0)$ es el valor de la pendiente de la tangente a la gráfica de $y(t)$ en (t_0, y_0) .

De esta manera, para cada uno de los puntos del dominio D podemos dibujar un pequeño segmento con la dirección que $f(t, y)$ determina. Un subconjunto del plano Oty en el que para cada punto se ha definido una dirección se conoce con el nombre de **campo de direcciones**.

Resumiendo, lo que hemos hecho al plantear la ecuación (2.8) es definir un campo direccional y el problema de encontrar sus soluciones es el de encontrar aquellas curvas con la propiedad de ser tangentes a cada punto del campo de direcciones.

EJEMPLO 2.11

- Para dibujar el campo de direcciones y poder trazar algunas de las soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^2$, veamos qué información podemos extraer de nuestra ecuación diferencial.
 1. Es evidente que para cualquier valor de y su derivada y' es positiva. Por tanto, las curvas solución son crecientes
 2. Para estudiar la concavidad de las curvas solución necesitamos su segunda derivada $y'' = 2yy' = 2y^3$. En consecuencia, si $y > 0$, las curvas solución son convexas, mientras que si $y < 0$ son cóncavas.

3. Campo de direcciones. Nuestra ecuación diferencial define un campo de direcciones en todo el plano Oty cuyas direcciones son constantes a lo largo de rectas paralelas al eje de abscisas t .

Podemos construirlo (véase Figura 2.3) con ayuda del **Mathematica**[®].

```
<< Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{1, y^2}, {t, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

Como la dirección que define el campo de la ecuación $y' = y^2$, en cada punto del plano depende sólo de la coordenada y , entonces para cualquier y_0 los puntos de la forma (t, y_0) con $t \in \mathbb{R}$, se encuentran rodeados de un campo direccional idéntico. En consecuencia, las soluciones pueden obtenerse una de otra haciendo traslaciones en la dirección del eje t

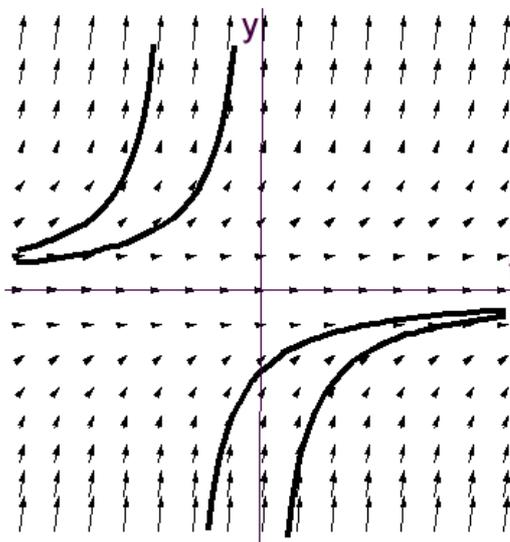


Figura 2.3. Campo de direcciones de $y' = y^2$.

4. Este hecho puede comprobarse si encontramos la solución explícita de la ecuación diferencial. Es inmediato comprobar que $y(t) = -1/(t + c)$. Observemos que esta familia de soluciones no contiene la solución $y = 0$ para cualquier c finita.

Para este ejemplo ha sido muy fácil encontrar la solución de la ecuación diferencial, pero esto no es lo más frecuente. Por tanto, en gran parte de los casos será necesario hacer un estudio geométrico para conocer, al menos, el comportamiento de las soluciones. Tengamos en cuenta que en muchos de los modelos que analizaremos estaremos interesados no en la solución concreta del problema, sino en su comportamiento a “largo plazo”.

2.5. Teoría cualitativa de EDO autónomas

2.5.1. Introducción.

A finales del 1600 *I. Newton* y *G. Leibnitz* descubrieron el Cálculo y pusieron las bases para el estudio de los Sistemas Dinámicos. En un principio y hasta momentos recientes se ha intentado encontrar de forma exacta la solución de la ecuación diferencial que modeliza a una determinada situación. Sin embargo, existen modelos aparentemente sencillos donde esto no es posible, por ejemplo el problema propuesto a finales del siglo XIX por Poincaré² conocido con el nombre de los tres cuerpos. Los matemáticos probaron que para este problema de atracción gravitatoria no era posible dar su solución explícita.

Por tanto, el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales ha seguido dos caminos diferentes. El primero, se caracteriza por una búsqueda de soluciones explícitas, bien sea en fórmulas exactas (lo que rara vez es posible) o bien en términos de series de potencias. En el segundo, se abandona toda intención de resolver las ecuaciones diferenciales en sentido tradicional y se intenta obtener información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones.

En esta sección realizaremos un estudio geométrico para obtener información sobre el comportamiento de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales llamadas autónomas. En las próximas secciones estudiaremos la forma de resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. En general, resolver una ecuación diferencial es un problema difícil, sin embargo, en muchas ocasiones es posible dar información sobre las soluciones sin necesidad de calcularlas.

2.5.2. Ecuaciones diferenciales autónomas

Ahora, nos centraremos en el problema de aprender cuanto sea posible sobre las características esenciales de las soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = g(y)$ por análisis directo de la propia ecuación. Este tipo de ecuaciones diferenciales recibe el nombre de autónomas pues el segundo miembro de la ecuación es “independiente del tiempo”, en el sentido de no aparecer t . Además, si $y(t)$ es solución de una ecuación autónoma también lo es la función $y(t + c)$, para cualquier constante c .

DEFINICIÓN 2.5.1 *Los puntos $c \in \mathbb{R}$ tales que $y(t) = c$ es solución de la ecuación diferencial se llaman puntos de equilibrio.*

Si suponemos que el comportamiento dinámico de un sistema biológico está modelado matemáticamente por las curvas solución de una ecuación diferencial autónoma

²A.H. Poincaré (1854 - 1912) se le consideró como el matemático más grande de su época. Fundó la dinámica topológica y la topología. En sus trabajos sobre la mecánica celeste elaboró la teoría de los desarrollos asintóticos, la cual, en la actualidad es una de las herramientas más poderosas del matemático aplicado

y estamos interesados por el comportamiento a largo plazo de las trayectorias (es decir, de las curvas solución), son de especial interés los estados de equilibrio, que son aquellos estados $y(t)$ que no cambian con el tiempo. Matemáticamente esto significa que $y(t) = c$ es una solución de la ecuación $y' = g(y)$.

EJEMPLO 2.12

- Dada la ecuación diferencial $y' = 7.5 - 24.25y + 22.25y^2 - 8y^3 + y^4$. Para encontrar los puntos de equilibrio resolvemos la ecuación $y' = 0$ y obtenemos $y = 0.5, 2, 2.5, 3$. Por tanto, las funciones $y = 0.5, y(t) = 2, y = 2.5, y(t) = 3$ son soluciones constantes. Por el Teorema 2.3.2 y Teorema 2.3.3 sabemos que la solución es única. En consecuencia, ninguna otra solución puede tomar los valores 0.5, 2, 2.5 o 3. De este modo, el plano Oty quedará dividido en regiones horizontales de tal manera que una solución que comience en una región no podrá salir de ella.

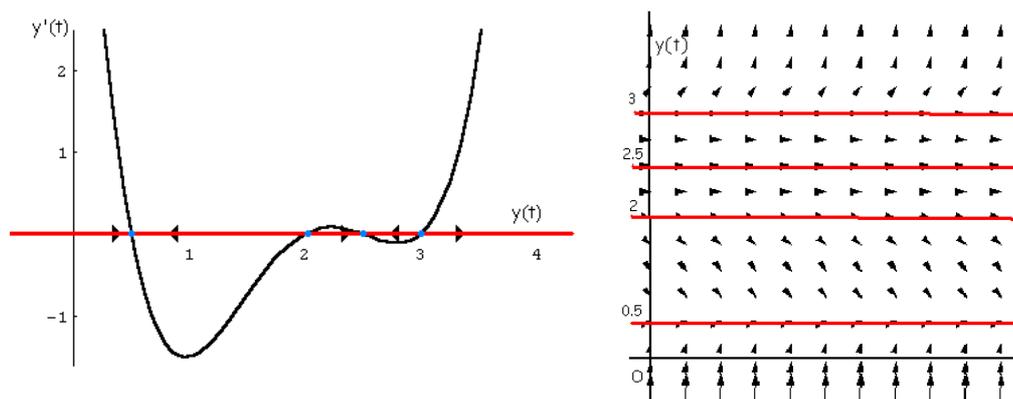


Figura 2.4. Línea fase de $y' = (y - 0.5)(y - 2)(y - 2.5)(y - 3)$.

Si la condición inicial y_0 es menor de 0.5 tendremos que $y'(t_0)$ es positiva y la solución será creciente. Si y está entre 0.5 y 2 o entre 2.5 y 3, entonces la derivada será negativa y la función decrecerá. Finalmente, si una solución comienza entre 2 y 2.5 o se encuentra por encima de 3 será creciente. En general se cumple la siguiente propiedad.

RESULTADO 2.5.2 *Si g es una función con derivada continua en todo \mathbb{R} y consideramos la ecuación diferencial $y' = g(y)$. Entonces:*

- Para cada una de las raíces de $g(y) = 0$, existe una solución constante de la ecuación diferencial. Si $g(c) = 0$ entonces $y = c$ es una solución.*
- Las soluciones constantes dividen al plano Oty en franjas horizontales. Cualquier otra solución no constante estará contenida en una franja y será estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

- *Cada solución no constante es asintótica a una solución constante, o bien, crece o decrece sin límite.*

En nuestro ejemplo, observamos que si la condición inicial está próxima al 0.5 ó 2.5, entonces se tiene que la solución del problema de valores iniciales tiende a 0.5 ó 2.5 cuando t tiende a infinito. Por el contrario, si la condición inicial está próxima al 3 pero sin serlo, entonces la solución del problema de valores iniciales crece sin límite o decrece hacia 2.5. De alguna manera las soluciones constantes 0.5 y 2.5 **atraen** a las soluciones mientras que las soluciones constantes 2 y 3 las **repelen**.

Las ideas anteriores conducen a los conceptos de **estabilidad e inestabilidad**. Así, las soluciones $y(t) = 0.5$ e $y = 2.5$ son estables mientras que $y(t) = 2$ o $y(t) = 3$ tienen un comportamiento inestable.

Intuitivamente, desde un punto de vista físico solo interesan los puntos de equilibrio que son “estables”. Un péndulo en la posición vertical superior está en equilibrio, pero es muy improbable que eso ocurra. Además, la menor perturbación alterará completamente el comportamiento del péndulo. Tal equilibrio es inestable. En cambio, la posición de reposo inferior es estable; si la perturbamos ligeramente, el péndulo oscilará a su alrededor y (a causa del rozamiento) se aproximará gradualmente a ella de nuevo. De aquí nace la idea intuitiva de fuente y sumidero.

DEFINICIÓN 2.5.3 *Decimos que un punto de equilibrio y_0 es:*

- *Un sumidero si cualquier solución con condición inicial “suficientemente cercana” a y_0 es asintótica a y_0 cuando t aumenta.*
- *Una fuente, cuando todas las soluciones que comienzan cerca de y_0 se alejan de y_0 cuando t aumenta.*
- *Un nodo si no es fuente o sumidero.*

En nuestro caso, el eje de ordenadas recibe el nombre de **línea fase**, siendo los puntos 0.5 y 2.5 sumideros y los puntos 2 y 3 fuentes.

Por lo comentado anteriormente, si c es un punto de equilibrio y $g'(c) < 0$ entonces el cambio de signo es de positivo a negativo y las condiciones iniciales justo por debajo de c dan lugar a funciones crecientes hacia c y las por encima de c funciones decrecientes a la solución constante. En el caso en que $g'(c) = 0$ no podemos asegurar nada y es necesario ver si se produce cambio de signo. Si no se produce cambio de signo tendremos que las soluciones por encima y por debajo de la constante son ambas crecientes o decrecientes, es decir, por un lado se alejarán de la solución constante y por otro se acercarán.

RESULTADO 2.5.4 *En general, se cumple:*

- Si $g(a) = 0$ y $g'(a) < 0$, entonces a es un estado de equilibrio estable para la ecuación diferencial autónoma $y' = g(y)$.
- Si $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$, entonces implica que a es un estado de equilibrio inestable para la ecuación diferencial autónoma $y' = g(y)$.
- Si a es un estado de equilibrio para $y' = g(y)$ en el cual $g'(a) = 0$, debemos estudiar la situación con más cuidado. Podemos encontrar ejemplos donde a sea estable o inestable.

EJEMPLO 2.13

- En el estudio de los efectos de la selección natural sobre una población aparece la siguiente ecuación diferencial,

$$y'(t) = 0.01y^2(t)(1 - y(t)) \quad (2.9)$$

donde $y(t)$ representa a la frecuencia con que se presenta cierto gen a , ¿contrá quien va la presión selectiva?

Para conocer el comportamiento a largo plazo del modelo bastará con realizar un estudio cualitativo de la ecuación diferencial autónoma (2.9)) y para ello será necesario encontrar y clasificar sus puntos de equilibrio.

Los puntos de equilibrio son las soluciones $y(t)$ constantes, por tanto aquellas funciones donde $y'(t) = 0$, es decir $y(t) = 1$, $y(t) = 0$.

Las soluciones constantes dividen a la región $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / t \geq 0, y \geq 0\}$ en dos franjas (Figura 2.5 colores verde y amarillo). Para valores iniciales de $y(t)$ pertenecientes a la primera región $0 < y(t) < 1$, la derivada es positiva y en consecuencia las soluciones $y(t)$ son crecientes. Sin embargo, en la segunda región $1 < y(t)$ (aunque sin sentido biológico) la derivada $y'(t)$ es negativa lo que indica que las funciones soluciones $y(t)$ son decrecientes. Estos resultados nos permiten decir que el punto de equilibrio $y(t) = 0$ es inestable, mientras que $y(t) = 1$ es asintóticamente estable (sumidero). A largo plazo, y para cualquier valor inicial $0 < y(0) < 1$ las soluciones $y(t) \rightarrow 1$

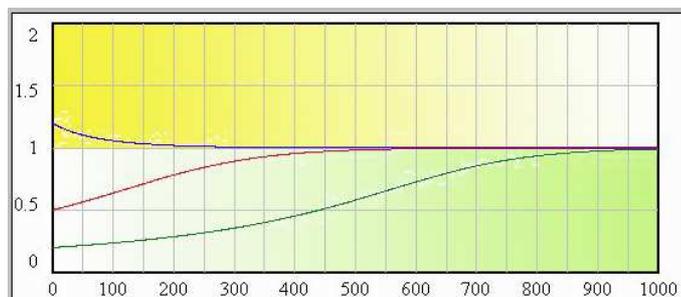


Figura 2.5.

EJERCICIO 2

- 1 En el estudio de los efectos de la selección natural sobre una población aparecen las siguientes ecuaciones diferenciales,

$$y'(t) = y(t)(1 - y(t))(0.15 - 0.5y(t))$$

$$y'(t) = 0.05y(t)(1 - y(t))(2y(t) - 1)$$

donde $y(t)$ representa a la frecuencia con que se presenta cierto gen a . Trazar las soluciones representativas considerando distintas condiciones iniciales entre 0 y 1 y discutir posible interpretaciones genéticas para estas curvas.

- 2 Obtener y clasificar los puntos de equilibrio de las ecuaciones diferenciales autónomas.

$$y'(t) = (1 - y)(y + 1)^2$$

$$y'(t) = y(y - 1)(8y - 2)$$

$$y'(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)$$

- 3 La dinámica de una población viene dada por el siguiente modelo

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.25 \left(\frac{y(t)}{10} - 1 \right) \left(1 - \frac{y(t)}{200} \right)$$

donde $y(t)$ representa al número de individuos en el tiempo t .

- a) Encuentra los valores de $y(t)$ para que la población se encuentre en equilibrio.
- b) Encuentra los valores de $y(t)$ para los que decrece la población.

2.6. Resolución de E.D.O. de primer orden

2.6.1. Ecuaciones diferenciales en variables separables

Una importante clase de ecuaciones diferenciales está formada por aquellas que pueden expresarse de la forma: $y' = p(t)q(y)$, donde $p(t)$ es una función únicamente de la variable t y $q(y)$ es una función únicamente de la variable y .

Si $y' = p(t)q(y)$ entonces (si $q(y) \neq 0$) dividimos por $q(y)$ e integramos respecto de t , obteniendo:

$$\int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(t) dt.$$

EJEMPLO 2.14

- Si deseamos resolver

$$\frac{dy}{dt} = y \cos t, \quad y(\pi/2) = 1.$$

Estamos ante una ecuación diferencial de variables separables. Procediendo tal y como hemos comentado anteriormente llegamos a

$$\frac{dy}{y} = \cos t dt, \quad (y \neq 0).$$

Calculamos cada una de estas dos integrales

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos t dt \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = \sin t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

O bien

$$|y| = e^{\sin t + c} = e^{\sin t} e^c \quad \Rightarrow \quad y = k e^{\sin t}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (k = \pm e^c), \quad (2.10)$$

Observemos que hemos podido separar las variables cuando y era distinto de cero. No obstante, es inmediato comprobar que la función $y = 0$ también es solución de la ecuación diferencial. Dicha solución también podemos obtenerla de (2.10), si admitimos que k pueda tomar el valor 0. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial viene dada por

$$y = k e^{\sin t}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Ahora, si deseamos conocer la solución particular que pasa por el punto $(\pi/2, 1)$, sustituimos los valores en (2.11),

$$y(\pi/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = k e^{\sin \pi/2} \quad \Rightarrow \quad k = 1/e.$$

La solución del problema de valores iniciales vendrá dada por

$$y = e^{\sin y - 1}$$

EJEMPLO 2.15

- En ciertas situaciones se plantea determinar la relación entre algún estímulo físico y la reacción correspondiente que se produce en el sujeto. Supongamos que la fuerza de un estímulo es s y que la intensidad de la reacción es una función de s , $f(s)$. Algunos datos experimentales sugieren que la razón de cambio de la intensidad de la reacción con respecto al estímulo es directamente proporcional a la intensidad de la reacción e inversamente proporcional a la fuerza del estímulo.

De los comentarios anteriores se desprende que $f(s)$ satisface la ecuación diferencial

$$f'(s) = k \frac{f(s)}{s}$$

para alguna constante positiva k . Es inmediato comprobar que la solución general de esta ecuación diferencial de variables separables viene dada por

$$f(s) = c s^k$$

EJEMPLO 2.16

- La tasa de variación de una población de bacterias viene dada por la ecuación diferencial $y'(t) = (1 - t)y(t)$, siendo $y(t)$ el número de bacterias en el minuto t . Si inicialmente el número de bacterias es y_0 , ¿cuántas bacterias habrá después de t minutos?

La ecuación diferencial es de variables separadas

$$\frac{dy}{y} = (1 - t)dt \Rightarrow \ln y = \left(t - \frac{t^2}{2}\right) + C \Rightarrow y = k e^{t - \frac{t^2}{2}}$$

Ahora encontramos la solución particular correspondiente al valor $y(0) = y_0$, es decir $k = y_0$. Por tanto

$$y(t) = y_0 e^{t - \frac{t^2}{2}}$$

EJEMPLO 2.17

- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{2y}; \quad (2) \quad y' = \frac{e^y t}{e^y + t^2 e^y}$$

$$(3) \quad y' + y = y(te^{t^2} + 1), \quad y(0) = 1$$

1. $\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{2y}}$ Se trata de una ecuación de variables separables,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{2y} \Rightarrow 2y dy = e^t dt,$$

que se resuelve integrando en ambos términos de la ecuación

$$\int 2y dy = \int e^t dx \Rightarrow \boxed{y^2 = e^t + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

2. $\boxed{y' = \frac{e^y t}{e^y + x^2 e^y}}$

Simplificando se reduce a una ecuación diferencial inmediata

$$y' = \frac{e^{yt}}{e^y + t^2 e^y} = \frac{e^{yt}}{e^y(1+t^2)} = \frac{t}{1+t^2},$$

que se resuelve por integración,

$$y = \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. $\boxed{y' + y = y(te^{t^2} + 1), \quad y(0) = 1}$

Simplificando la expresión, la ecuación diferencial se reduce a una de variables separables,

$$y' = yte^{t^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = yte^{t^2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = te^{t^2} dt, \quad (y \neq 0).$$

Integrando en ambos términos, se obtiene

$$\int \frac{dy}{y} = \int te^{t^2} dt, \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} e^{t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

que puede expresarse en forma explícita como

$$y = k e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (k = \pm e^c). \quad (2.12)$$

La división por y al separar las variables nos lleva a considerar la función $y = 0$ que también resulta ser solución de la ecuación diferencial. Dicha solución se obtiene de (2.12) si admitimos el valor $k = 0$. La solución general vendrá definitivamente dada por

$$y = k e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Para determinar la solución particular que verifica la condición inicial $y(0) = 1$, sustituimos los valores $t = 0, y = 1$ en (2.13),

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = k e^{1/2} \Rightarrow k = e^{-1/2}.$$

Sustituyendo en (2.13) obtenemos la solución

$$\boxed{y = e^{\frac{1}{2}(e^{t^2}-1)}}.$$

2.6.2. Ecuaciones diferenciales exactas.

Una forma de obtener una ecuación diferencial es suponer $F(t, y) = C$ y calcular su diferencial total. En efecto,

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} dy = 0. \quad (2.14)$$

Es frecuente encontrarnos con ecuaciones diferenciales escritas en la forma

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0,$$

y por comparación con (2.14), podemos preguntarnos si existirá una función $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y), \quad \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y).$$

Es un hecho conocido (Teorema de *Schwartz*) que si la función $F(t, y)$ es “razonablemente buena”, entonces sus derivadas cruzadas coinciden. En consecuencia, tenemos una condición necesaria

$$\frac{\partial^2 F(t, y)}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F(t, y)}{\partial y \partial t} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (2.15)$$

Puede demostrarse, que esta condición también es suficiente.

DEFINICIÓN 2.6.1 Diremos que la ecuación diferencial

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0,$$

es exacta, si cumple

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Si la ecuación diferencial es exacta, entonces

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \Rightarrow F(t, y) = \int M(t, y) dt + \varphi(y).$$

Ahora, podemos derivar respecto de la variable y

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(t, y) dt \right] + \varphi'(y) = N(t, y).$$

En consecuencia,

$$\varphi'(y) = N(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(t, y) dt \right].$$

Integramos respecto de y para encontrar el valor de $\varphi(y)$. Finalmente, la solución de la ecuación diferencial es $F(t, y) = c$.

EJEMPLO 2.18

- Para la ecuación diferencial $(6ty + 2y^2 - 5)dt + (3t^2 + 4ty - 6)dy = 0$ se tiene

$$M(t, y) = 6ty + 2y^2 - 5, \quad N(t, y) = 3t^2 + 4ty - 6,$$

y puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t + 4y = \frac{\partial N}{\partial t},$$

es exacta. Por tanto, existirá una función $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y).$$

Aplicando la técnica de resolución expuesta anteriormente

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y) &\Rightarrow F(t, y) = \int M(t, y) dt = \int (6ty + 2y^2 - 5) dt \\ &= 3t^2y + 2ty^2 - 5t + \varphi(y), \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y) &\Rightarrow 3t^2 + 4ty + \varphi'(y) = 3t^2 + 4ty - 6. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\varphi'(y) = -6 \Rightarrow \varphi(y) = \int -6 dy = -6y.$$

La función $F(t, y)$ será: $F(t, y) = 3t^2 + 2ty^2 - 5t - 6y$, y la solución general vendrá dada en forma implícita por $3t^2 + 2ty^2 - 5t - 6y = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Factor integrante

A veces podemos encontrarnos con ecuaciones diferenciales

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0 \tag{2.16}$$

que no son exactas, pero es posible buscar una función $\mu(t, y)$ tal que la ecuación

$$\mu(t, y)M(t, y)dt + \mu(t, y)N(t, y)dy = 0,$$

si sea exacta. En este caso, la función $\mu(t, y)$ recibe el nombre de factor integrante de la ecuación (2.16). Notemos que un método para encontrar la función $\mu(t, y)$ es resolver la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial y},$$

problema que como podemos comprender es bastante complejo. Por esta razón lo que se hace es simplificarlo. Por ejemplo suponer que la función μ depende solo de t , sólo de y , o bien de ty , de $t + y$, etc.

EJEMPLO 2.19

- La ecuación diferencial

$$(t + t^4 + t^4 y^2)dt + ydy = 0 \quad (2.17)$$

no es exacta, ya que

$$M(t, y) = t + t^4 + t^4 y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2t^4 y, \quad N(t, y) = y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial t} = 0.$$

Si multiplicamos la ecuación (2.17) por $1/(t^2 + y^2)$ se obtiene la ecuación

$$\left(\frac{t}{t^2 + y^2} + t^2 \right) dt + \frac{y}{t^2 + y^2} dy = 0. \quad (2.18)$$

Esta nueva ecuación diferencial es exacta. En efecto,

$$\begin{aligned} M_1(t, y) = \left(\frac{t}{t^2 + y^2} + t^2 \right) &\Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{-2ty}{(t^2 + y^2)^2} \\ N_1(t, y) = \frac{y}{t^2 + y^2} &\Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{-2ty}{(t^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Por tanto, la función

$$\mu(t, y) = \frac{1}{t^2 + y^2}$$

es un factor integrante de la ecuación diferencial (2.17). Ahora podemos resolver la ecuación diferencial exacta (2.18). Es decir, existe una función $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M_1(t, y) = \frac{t}{t^2 + y^2} + t^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N_1(t, y) = \frac{y}{t^2 + y^2}.$$

Operando

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{t^2 + y^2} \Rightarrow F(t, y) = \int \frac{y}{t^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \ln(t^2 + y^2) + \varphi(t).$$

Por otro lado

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{t}{t^2 + y^2} + t^2 \Rightarrow \frac{t}{t^2 + y^2} + \varphi'(t) = \frac{t}{t^2 + y^2} + t^2,$$

es decir

$$\varphi'(t) = t^2 \Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{3}t^3.$$

La solución general de (2.17) vendrá dada en forma explícita por

$$\frac{1}{2} \ln(t^2 + y^2) + \frac{1}{3}t^3 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.6.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

La teoría de ecuaciones diferenciales lineales ha sido objeto de profundos estudios a lo largo de los últimos 200 años y es un campo muy bien conocido y muy completo. Por el contrario, no se sabe casi nada de carácter general acerca de las ecuaciones diferenciales no lineales.

DEFINICIÓN 2.6.2 *Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación del tipo*

$$y' + p(t)y = q(t). \quad (2.19)$$

Su ecuación homogénea asociada es

$$y' + p(t)y = 0. \quad (2.20)$$

TEOREMA 2.6.3 *El problema de valores iniciales con una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene solución y es única si las funciones $p(t)$ y $q(t)$ son continuas.*

La resolución de la ecuación homogénea (2.20) es fácil pues es una ecuación de variables separables y su solución es de la forma

$$y = ce^{-\int p(t)dt}.$$

Para la resolución de la ecuación lineal completa, se utiliza un método llamado **variación de las constantes** que consiste en tomar la solución general de la ecuación homogénea e imponerla como solución de la ecuación completa haciendo depender de t a la constante c de integración.

Existe un **segundo método de resolución** que consiste en encontrar el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$, se obtiene

$$\mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y(t) = \mu(t)q(t),$$

que puede expresarse como

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)q(t) \quad \Rightarrow \quad \mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + c.$$

Tan sólo queda despejar el valor de $y(t)$ para encontrar la solución de la ecuación.

EJEMPLO 2.20

- Para resolver la ecuación diferencial lineal $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = 3t$ utilizamos el primer método, encontrando la solución de la ecuación homogénea

$$\varphi(t) = e^{-\int \frac{1}{t} dt} = e^{-\ln t} = e^{\ln(t^{-1})} = \frac{1}{t}.$$

Calculamos

$$c(t) = \int \frac{q(t)}{\varphi(t)} dt = \int \frac{3t}{1/t} dt = t^3,$$

$$c(t)\varphi(t) = t^3 \cdot \frac{1}{t} = t^2.$$

La solución buscada será

$$y(t) = t^2 + c \frac{1}{t}.$$

- Utilizando el segundo método encontramos el factor integrante,

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = t,$$

multiplicando la ecuación diferencial por esta función, obtenemos

$$y't + y = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad (yt)' = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad yt = t^3 + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = t^2 + c \frac{1}{t}.$$

2.7. E.D.O. lineales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales ordinarias podemos clasificarlas en dos grandes bloques: las lineales y las no lineales. Las más sencillas de estudiar son las del primer tipo ya que debido a las propiedades de sus soluciones pueden caracterizarse de manera general y además disponemos de métodos para resolver muchas de ellas.

DEFINICIÓN 2.7.1 Una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación del tipo

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (2.21)$$

donde $a_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ y $b(t)$ son funciones continuas en algún intervalo I y además $a_n(t) \neq 0, \forall t \in I$.

DEFINICIÓN 2.7.2 La ecuación diferencial

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad (2.22)$$

se llama ecuación diferencial lineal homogénea asociada a la ecuación (2.21).

Si las funciones $a_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ son funciones constantes, entonces la ecuación (2.21) se llama ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes.

Nos centraremos en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden por un doble motivo. En primer lugar, podemos hacer un desarrollo teórico relativamente simple y, en segundo lugar, son muy importantes desde el punto de vista práctico.

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden es una ecuación del tipo

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (2.23)$$

donde $a_2(t)$, $a_1(t)$, $a_0(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en algún intervalo I y además $a_2(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Lo usual es escribir la ecuación (2.23) en su forma canónica

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (2.24)$$

Empezaremos su estudio analizando la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a (2.24), dada por

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2.25)$$

TEOREMA 2.7.3 Sean $p(t)$ y $q(t)$ dos funciones continuas en algún intervalo I . Entonces, para cualquier $t \in I$, el problema de valores iniciales

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

tiene una única solución definida en el intervalo I , cualesquiera que sean los valores $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$.

RESULTADO 2.7.4 Si $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son dos soluciones de (2.25), entonces cualquier combinación lineal de ambas,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es también solución de (2.25).

EJEMPLO 2.21

- La ecuación diferencial lineal de segundo orden $y'' + 4y = 0$ tiene por soluciones $y_1(t) = \cos 2t$, $y_2(t) = \sin 2t$. Por tanto, si hacemos uso del Resultado 2.7.4 la función

$$y(t) = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

será también solución de $y'' + 4y = 0$.

- Si consideramos la ecuación diferencial de segundo orden no lineal

$$ty'' + 2yy' = 0, \quad (2.26)$$

es inmediato comprobar que las funciones

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = \frac{t}{1+t}$$

son soluciones de (2.26). Sin embargo la función

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 + \frac{c_2 t}{1+t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

no es solución de (2.26). En efecto,

$$ty' + 2yy' = \frac{2c_2(c_1 + c_2 - 1) + 2c_1 c_2}{(t+1)^3},$$

no es idénticamente nula para cualquier valor de c_1 y c_2 .

RESULTADO 2.7.5 Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dos soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (2.27)$$

definidas en el intervalo I , tales que

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.28)$$

para algún $t_0 \in I$. Entonces cualquier solución de (2.27) es combinación lineal de $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Es decir,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general de (2.27).

DEFINICIÓN 2.7.6 Dadas dos funciones $y_1, y_2 \in C^1(I)$, se define el *Wronskiano* de y_1 e y_2 como la función

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I. \quad (2.29)$$

Observemos que el resultado anterior lo que hace es reducir el problema de resolver la ecuación diferencial (2.27) a encontrar dos soluciones particulares $y_1(t)$ e $y_2(t)$ que cumplan con la condición

$$W[y_1, y_2](t_0) \neq 0,$$

para algún $t_0 \in I$. Dos funciones $y_1(t)$ e $y_2(t)$ con estas características se dicen que forman un **conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial** (2.27).

EJEMPLO 2.22

- Las funciones $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-4t}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' + 8y = 0 \quad (2.30)$$

en el intervalo $-\infty < t < \infty$. Además

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ -2e^{-2t} & -4e^{-4t} \end{vmatrix} = -2e^{-6t} \neq 0, \forall t \in (-\infty, \infty).$$

Por lo tanto, forman un conjunto fundamental de soluciones de (2.30) en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La solución general de (2.30) será

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.7.1. Método de reducción del orden

Si conocemos una solución particular de la ecuación lineal homogénea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (2.31)$$

podemos encontrar otra solución de (2.31) aplicando el método de reducción del orden.

Sea $y_1(t)$ una solución particular de (2.31) hacemos el cambio de variable $y = z(t)y_1(t)$ y derivamos

$$y' = z'y_1 + zy_1', \quad y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''.$$

Si sustituimos estos valores en (2.31) y tenemos en cuenta que y_1 es una solución particular de (2.31), la ecuación diferencial inicial se transforma en esta otra

$$y_1(t)z'' + (2y_1'(t) + p(t)y_1(t))z' = 0.$$

Ahora el cambio $v = z'$ reduce la ecuación anterior a la ecuación lineal homogénea de primer orden

$$y_1(t)v' + (2y_1'(t) + p(t)y_1(t))v = 0,$$

que podemos resolver por separación de variables

$$v(t) = \frac{c}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int p(t)dt\right), \quad c \in \mathbb{R},$$

y como sólo necesitamos una solución podemos tomar $c = 1$. Entonces

$$z' = v \quad \Rightarrow \quad z = \int v(t)dt,$$

y la nueva solución de (2.31) será

$$y_2(t) = zy_1(t) = y_1(t) \int v(t)dt.$$

Puede probarse que estas dos soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2.31). La solución general de (2.31) podemos escribirla como

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

EJEMPLO 2.23

- La función $y_1(t) = e^{2t}$ es una solución particular de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Podemos encontrar una segunda solución utilizando el método de reducción del grado de la ecuación diferencial.

Sea $y(t) = z(t)y_1(t) = z(t)e^{2t}$, derivando

$$y'(t) = z'(t)e^{2t} + 2z(t)e^{2t}, \quad y''(t) = z''(t)e^{2t} + 4z'(t)e^{2t} + 4z(t)e^{2t},$$

sustituimos estas derivadas en la ecuación diferencial lineal homogénea inicial y simplificamos

$$z''(t) = 0.$$

A continuación procedemos a rebajar el orden, para ello llamamos $v(t) := z'(t)$ y resolvemos la ecuación diferencial que aparece

$$v'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = c = 1 \quad \Rightarrow \quad z(t) = \int v(t)dt = t,$$

y la segunda de las soluciones buscada será $y_2(t) = u(t)y_1(t) = te^{2t}$.

Estas dos soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial inicial. En efecto

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0, \quad \forall t \in (-\infty, \infty).$$

La solución general de la ecuación diferencial inicial es

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.7.2. EDO lineal de segundo orden completa

La solución general de la ecuación diferencial lineal

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (2.32)$$

la obtendremos a partir de las soluciones de su ecuación lineal homogénea asociada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

y una solución particular de (2.32).

RESULTADO 2.7.7 *Sea $y_p(t)$ una solución particular de la ecuación diferencial lineal*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (2.33)$$

e $\{y_1(t), y_2(t)\}$ un conjunto fundamental de soluciones de su ecuación diferencial lineal homogénea asociada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2.34)$$

Entonces

$$y(t) = y_p(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

será la solución general de (2.33)

2.7.3. Método de variación de parámetros

Como hemos visto en el Resultado 2.7.7, para poder encontrar la solución general de (2.33) necesitamos conocer una solución particular. El método de variación de parámetros nos proporciona un procedimiento para calcular dicha solución particular.

Supongamos que $\{y_1(t), y_2(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada (2.33), entonces su solución general $y_h(t)$ viene dada por

$$y_h(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

El objetivo es encontrar una solución particular de (2.33) que sea de la forma

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t), \quad (2.35)$$

donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ son dos funciones a determinar. La duda que surge de forma natural es saber si es posible encontrar dos funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ tales que

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t),$$

sean una solución particular de la ecuación diferencial (2.33). Observemos que lo que hemos realizado ha sido en la solución $y_h(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, reemplazar las

constantes por los parámetros variables $c_1(t)$, $c_2(t)$.

Derivando

$$y'_p = c_1 y'_1 + c'_1 y_1 + c_2 y'_2 + c'_2 y_2.$$

Si además exigimos que $c_1(t)$ y $c_2(t)$ sean funciones tales que

$$c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_p = c_1 y'_1 + c_2 y'_2. \quad (2.36)$$

Volviendo a derivar

$$y''_p = c_1 y''_1 + c'_1 y'_1 + c_2 y''_2 + c'_2 y'_2,$$

y sustituyendo estos valores en (2.33)

$$\begin{aligned} y''_p + p(t)y'_p + q(t)y_p &= c_1(y''_1 + p(t)y'_1 + q(t)y_1) \\ &+ c_2(y''_2 + p(t)y'_2 + q(t)y_2) \\ &+ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = g(t). \end{aligned}$$

Pero al ser $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y''_1 + p(t)y'_1 + q(t)y_1 = 0, \quad y''_2 + p(t)y'_2 + q(t)y_2 = 0.$$

Es decir

$$y'_1 c'_1 + y'_2 c'_2 = g(t). \quad (2.37)$$

De (2.36) y (2.37) obtenemos el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 c'_1 + y_2 c'_2 = 0 \\ y'_1 c'_1 + y'_2 c'_2 = g(t), \end{cases}$$

que resolviéndolo, encontramos las soluciones:

$$c'_1(t) = \frac{W_1}{W}, \quad c'_2(t) = \frac{W_2}{W},$$

donde

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y'_2 \end{vmatrix} = -y_2 g(t), \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & g(t) \end{vmatrix} = y_1 g(t)$$

y W es el Wronskiano de $y_1(t)$, $y_2(t)$, que como sabemos viene dado por

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}.$$

Resumiendo, para resolver la ecuación diferencial (2.33) procedemos de la manera siguiente:

1. Encontramos la función $y_h(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ y posteriormente evaluamos el Wronskiano $W[y_1, y_2](t)$.

2. Obtenemos $c_1(t)$, $c_2(t)$ integrando las expresiones

$$c_1'(t) = \frac{-y_2(t)g(t)}{W[y_1, y_2](t)}, \quad c_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W[y_1, y_2](t)}.$$

3. Construimos la solución particular

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

EJEMPLO 2.24

- Supongamos que queremos resolver la ecuación diferencial lineal completa de segundo orden

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2}y' + \frac{2}{1+t^2}y = 1+t^2. \quad (2.38)$$

1. En primer lugar necesitamos encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2}y' + \frac{2}{1+t^2}y = 0. \quad (2.39)$$

Es inmediato comprobar que una solución particular de (2.39) es $y_1(t) = t$. Para calcular otra solución particular aplicamos el método de reducción del grado. Para ello, si realizamos el cambio de variable

$$y(t) = z(t)y_1(t) = tz(t),$$

se llega a la ecuación diferencial

$$tz'' + \frac{2}{1+t^2}z' = 0.$$

Llamando $v(t) = z'(t)$ la ecuación diferencial anterior se transforma en

$$tv' + \frac{2}{1+t^2}v = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1+t^2}{t^2}.$$

Por tanto,

$$z(t) = \int v(t)dt = \int \frac{1+t^2}{t^2}dt = t - \frac{1}{t}.$$

En consecuencia, la otra solución particular es

$$y_2(t) = t \left(t - \frac{1}{t} \right) = t^2 - 1.$$

La solución general de (2.39) viene dada por

$$y_h(t) = c_1 t + c_2(t^2 - 1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Ahora buscamos una solución particular de la forma

$$y_h(t) = c_1(t)t + c_2(t)(t^2 - 1),$$

siendo

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ g(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^2 - 1 \\ 1 + t^2 & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix}} = 1 - t^2,$$

integramos

$$c_1(t) = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3}.$$

Del mismo modo

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & 1 + t^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix}} = t,$$

y, por tanto,

$$c_2(t) = \int (t) dt = \frac{t^2}{2}.$$

3. Por consiguiente

$$y_p(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)t + \frac{t^2}{2}(t^2 - 1) = \frac{1}{6}(t^4 + 3t^2).$$

4. Finalmente, la solución general de (2.38) vendrá dada por

$$y(t) = \frac{1}{6}(t^4 + 3t^2) + c_1 t + c_2 (t^2 - 1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.8. E.D.O. lineales de segundo orden con coeficientes constantes

En esta sección estudiaremos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden del tipo

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g(t), \quad (2.40)$$

donde a_1 y a_2 son constantes.

Para poder resolver estas ecuaciones procedemos tal y como lo hicimos en la sección anterior.

2.8.1. La ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (2.41)$$

donde a_1 y a_2 son constantes.

Sabemos que la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + ay = 0$, siendo a una constante, tiene por solución

$$y(t) = ce^{-at}, \quad -\infty < t < \infty.$$

En consecuencia, es lógico tratar de determinar si existen soluciones exponenciales en $-\infty < t < \infty$, de la ecuación lineal homogénea (2.41). Comprobaremos que todas sus soluciones son funciones exponenciales o se construyen a partir de funciones exponenciales.

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (2.42)$$

Probamos una solución de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$. Para ello derivamos y sustituimos en (2.42)

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0.$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$, $\forall t \in (-\infty, \infty)$, debe ocurrir que

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de **ecuación característica de la ecuación diferencial** (2.42). Examinemos los diferentes casos que pueden presentarse:

- **Primer caso.** La ecuación característica tiene dos raíces, λ_1 , λ_2 , reales y distintas. Las soluciones

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t},$$

son linealmente independientes en $-\infty < t < \infty$ y por lo tanto forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial (2.42). La solución general es

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- **Segundo caso.** Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces sólo existe una solución exponencial $y(t) = e^{\lambda t}$. Podemos encontrar una segunda solución utilizando el **método de reducción del grado** de la ecuación diferencial.

Sea $y(t) = z(t)e^{\lambda t}$, derivando

$$y'(t) = z'e^{\lambda t} + z\lambda e^{\lambda t}, \quad y''(t) = z''e^{\lambda t} + 2\lambda z'e^{\lambda t} + z\lambda^2 e^{\lambda t},$$

sustituimos estas derivadas en la ecuación diferencial (2.42), y simplificamos

$$z(\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_2 e^{\lambda t}) + (z''e^{\lambda t} + 2\lambda z'e^{\lambda t} + a_1 z'e^{\lambda t}) = 0,$$

pero al ser $e^{\lambda t}$ una solución de la ecuación diferencial, podemos simplificar la expresión anterior y nos queda $z'' + 2\lambda z' + a_1 z' = 0$.

A continuación procedemos a rebajar el orden, para ello llamamos $v(t) := z'(t)$ y resolvemos la ecuación de variables separadas que aparece

$$v' + (2\lambda + a_1)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v'}{v} = -(2\lambda + a_1).$$

Es decir

$$\ln |v| = - \int (2\lambda + a_1) dt \quad \Rightarrow \quad v = k_1 e^{- \int (2\lambda + a_1) dt} = z'.$$

Calculando el valor de $z(t)$

$$z(t) = k_1 \int e^{- \int (2\lambda + a_1) dt} dt + k_2.$$

Si $k_1 = 1$, $k_2 = 0$

$$z(t) = \int e^{- \int (2\lambda + a_1) dt} dt = \int e^{-(2\lambda + a_1)t} dt.$$

Por otro lado, para que la ecuación $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ tenga una raíz doble, tiene que ocurrir que su discriminante se anule. Calculando el valor de la raíz

$$\lambda = -\frac{a_1}{2}.$$

Es decir,

$$z(t) = \int e^{-(2(-\frac{a_1}{2}) + a_1)t} dt = \int dt = t,$$

y la segunda de las soluciones buscada será $y_2(t) = z(t)y_1(t) = te^{\lambda t}$.

La solución general de la ecuación diferencial inicial es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Tercer caso.** Si λ_1 y λ_2 son raíces complejas

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Estamos dentro del primer caso y por tanto

$$y(t) = k_1 e^{\alpha+i\beta)t} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

A continuación, aplicamos la fórmula de *Moiivre* para los números complejos y simplificamos

$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) + k_2 e^{\alpha t} (\cos(-\beta t) + i \operatorname{sen}(-\beta t)) \\ &= e^{\alpha t} ((k_1 + k_2) \cos \beta t + (k_1 i - k_2 i) \operatorname{sen} \beta t) \\ &= \boxed{e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.25

- La ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' + 6y' + 8y = 0 \tag{2.43}$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0.$$

Las raíces son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial (2.43) es de la forma

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

- La ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{2.44}$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

que admite la solución real doble $\lambda = 2$. Por tanto, la solución general de (2.44) es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

- La ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \quad (2.45)$$

tiene por ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

que admite las soluciones complejas conjugadas

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i.$$

En consecuencia, la solución general de (2.45) es

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.8.2. La ecuación diferencial lineal completa de segundo orden con coeficientes constantes

Como sabemos por la sección 9.7.2, una vez resuelta la ecuación lineal homogénea asociada, la resolución de la ecuación diferencial completa

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = g(t) \quad (2.46)$$

se reduce a buscar una solución particular de (2.46), y podemos utilizar el método de variación de parámetros para encontrarla.

EJEMPLO 2.26 *texto*

- Supongamos que queremos encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = (t - 1)e^t. \quad (2.47)$$

- El polinomio característico $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ tiene por raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. Por tanto, $y_c(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$.

Si $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t e^t$, su Wronskiano vale

$$W[e^t, t e^t] = W = e^{2t} \neq 0, \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

- Calculamos

$$c_1' = \frac{-y_2 g(t)}{W} = \frac{-t e^t (t - 1) e^t}{e^{2t}} = -t^2 + t \Rightarrow c_1 = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}$$

y

$$c_2' = \frac{y_1 f(t)}{W} = \frac{e^t (t - 1) e^t}{e^{2t}} = t - 1 \Rightarrow c_2 = -\frac{t^2}{2} - t$$

3. Por consiguiente,

$$y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right) e^t + \left(\frac{t^2}{2} - t\right) t e^t = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right) e^t$$

4. La solución general de (2.47) vendrá dada por

$$y(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right) e^t + c_1 e^t + c_2 t e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.8.3. Método de los coeficientes indeterminados

Ahora presentaremos un nuevo método para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial lineal completa con coeficientes constantes que no requiere el cálculo de integrales.

EJEMPLO 2.27

- Supongamos que queremos encontrar una **solución particular** de

$$y'' + 4y = e^{3t}.$$

El método consiste en conjeturar la solución a la vista de la función $g(t) = e^{3t}$. Como en este caso estamos ante una función exponencial probamos con la solución $y = Ae^{3t}$. Si sustituimos en la ecuación diferencial llegamos a

$$9Ae^{3t} + 4Ae^{3t} = Ae^{3t} \Rightarrow A = 1/13,$$

y la solución particular buscada es $y(t) = 1/13 e^{3t}$.

- Repitamos el método para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = t^2 + e^{-t}.$$

Ahora el segundo miembro $g(t)$ está compuesto por dos tipos de funciones. La primera de ellas t^2 sugiere ensayar con un polinomio de segundo grado $At^2 + Bt + C$. La segunda es la función exponencial e^{-t} la cual nos indica que debemos buscar una función del tipo $Dt^2 e^{-t}$, ya que tanto e^{-t} como te^{-t} son soluciones de la ecuación homogénea. Por tanto, probamos con la función

$$y(t) = At^2 + Bt + C + Dt^2 e^{-t}.$$

Al sustituir en la ecuación diferencial e identificar coeficientes se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que una vez resuelto presenta las soluciones

$$A = 1, \quad B = -4, \quad C = 6, \quad D = \frac{1}{2}.$$

La solución particular buscada es

$$y(t) = t^2 - 4t + 6 + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}.$$

El procedimiento descrito en el ejemplo anterior se denomina método de los coeficientes indeterminados. Se aplica cuando la función $g(t)$ es de algunos tipos particulares. Como regla general, probamos con una solución particular del mismo tipo que la función $g(t)$ y con coeficientes indeterminados, multiplicando por t o t^2 , si fuese necesario, para conseguir que ninguno de los términos de la solución ensayada sea solución de la ecuación lineal homogénea asociada.

2.9. Notas históricas

Si no se tienen ciertos conocimientos de ecuaciones diferenciales y de los métodos usados para resolverlas, es difícil estudiar la historia y el desarrollo de esta importante rama de las matemáticas. Más aún, la evolución de la teoría de las ecuaciones diferenciales está íntimamente ligada al desarrollo general de las matemáticas, y no puede separarse de ella.

La teoría de las ecuaciones diferenciales se origina en los inicios del cálculo, con *Isaac Newton* (1642-1727) y *Gottfried Wilhelm Leibnitz* (1646-1716) en el siglo XVII. Aún cuando Newton realizó, relativamente, poco trabajo en la teoría de las ecuaciones diferenciales, su desarrollo del cálculo y la aclaración de los principios básicos de la mecánica proporcionaron una base para el desarrollo de sus aplicaciones, en el siglo XVIII, con mayor alcance por parte de *Euler*. *Newton* clasificó las ecuaciones de primer orden de acuerdo con las formas

$$dy/dx = f(x) ; \quad dy/dx = f(y) ; \quad dy/dx = f(x, y)$$

Para la última desarrolló un método de solución, usando series infinitas, cuando $f(x, y)$ es un polinomio en x e y . Era muy sensible a la crítica y, como consecuencia de ello, tardó bastante en publicar muchos de sus descubrimientos.

Leibnitz llegó a los resultados fundamentales del cálculo independientemente, aunque un poco más tarde que *Newton*. Nuestra notación moderna para la derivada dy/dx y el signo de la integral se deben a *Leibnitz*. Descubrió el método de separación de las variables, así como procedimientos para resolver las ecuaciones homogéneas de primer orden y las ecuaciones lineales de primer orden. Mantuvo una abundante correspondencia con otros matemáticos, especialmente con los hermanos *Bernoulli*. En el curso de esta correspondencia se resolvieron muchos problemas de ecuaciones diferenciales, durante las últimas décadas del siglo XVII.

A *Newton* y *Leibnitz* le siguieron los hermanos *Jakob Bernoulli* (1654-1705) y *Johann Bernoulli* (1667-1748) y, el hijo de Johann, *Daniel Bernoulli* (1700-1782). Justamente, éstos son tres de los ocho miembros de la familia *Bernoulli*, quienes en su tiempo, fueron prominentes matemáticos y hombres de ciencia. Con ayuda del cálculo, formularon y resolvieron las ecuaciones diferenciales de muchos problemas de mecánica. Un problema (1696-1697) al cual contribuyeron ambos hermanos, y el cual provocó problemas entre ellos, fue el de la *braquistócrona*³ que conduce a la

³Determinación de la curva de descenso más rápido

ecuación no lineal de primer orden

$$y(1 + (y')^2) = c$$

donde c es una constante. *Newton* también resolvió el problema antes, en 1697. Se dice, tal vez no sea cierto, que *Newton* supo del problema al final de la tarde de un fatigoso día en la Casa de la Moneda, y lo resolvió en la noche, después de la cena. Publicó la solución en forma anónima, pero *J. Bernoulli*, al verla, exclamó "... conozco al león por su zarpa ..."

En 1690 *J. Bernoulli* publicó la solución de la ecuación diferencial, que en forma diferencial se escribe

$$(b^2y^2 - a^3)^{1/2}dy = a^{3/2}dx$$

Actualmente esta ecuación se toma como un simple ejercicio, pero, en aquel tiempo, encontrar la solución, constituyó un avance trascendental.

A finales del siglo XVII, muchos de los métodos elementales de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se conocían y, la atención se dirigió hacia las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior y hacia las ecuaciones diferenciales parciales. *Jacob Riccati* (1676-1754), matemático italiano, consideró ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$. También consideró una importante ecuación no lineal, conocida como ecuación de Riccati

$$dy/dx = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$$

aunque no en forma general.

Leonhard Euler uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos, también vivió en el siglo XVII. Sus trabajos reunidos llenan más de sesenta volúmenes. Aunque quedó ciego, durante los últimos diecisiete años de su vida, su trabajo no disminuyó. De particular interés es su trabajo sobre el planteamiento de problemas de la mecánica y su desarrollo de métodos de solución para estos problemas matemáticos. Refiriéndose al trabajo de *Euler* en la mecánica, *Lagrange* dijo que era el primer gran trabajo en el que se aplica el análisis a la ciencia del movimiento. *Euler* también consideró la posibilidad de reducir ecuaciones de segundo orden a ecuaciones de primer orden, mediante un cambio adecuado de variables; creó el concepto de *factor integrante*, en 1739 dio un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes. Contribuyó al método de las soluciones en series de potencias y dio un procedimiento numérico para resolver ecuaciones diferenciales. También hizo contribuciones importantes a la teoría de las series de *Fourier* y creó la primera discusión sistemática del *cálculo de variaciones*.

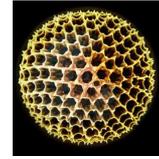
En el siglo XVIII, los grandes matemáticos franceses *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813) y *Pierre-Simon Laplace* (1749-1827) hicieron importantes aportaciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales. Posiblemente sea la ecuación de *Laplace*, la ecuación diferencial en derivadas parciales más conocida en la física matemática, la ecuación del potencial

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

donde los subíndices indican derivadas parciales. El trabajo monumental de *Lagrange*, *Mecanique analytique*, contiene las ecuaciones generales del movimiento de un sistema dinámico, conocidas actualmente como las ecuaciones de *Lagrange*. Para *Laplace* la naturaleza era esencial y las matemáticas, eran su herramienta en el aprendizaje de sus secretos; para *Lagrange* las matemáticas eran un arte que justificaba su propio ser. Sin embargo, ambos hombres realizaron avances de gran alcance, tanto en la teoría como en las aplicaciones de las matemáticas.

En los últimos años, algunos matemáticos dedicados al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales han tratado de elaborar una teoría sistemática (pero general) rigurosa. La finalidad no es tanto crear métodos de solución para ecuaciones diferenciales particulares, sino desarrollar técnicas apropiadas para el tratamiento de diferentes clases de ecuaciones .





Tema 3

MODELOS BASADOS EN E.D.O.

3.1. Introducción

En este tema construiremos algunos modelos biológicos elementales basados en las ecuaciones diferenciales. En la mayor parte de ellos será posible resolver la ecuación diferencial y de esta forma podremos encontrar la solución explícita del problema planteado. No obstante, en algunos de ellos, también realizaremos el estudio cualitativo correspondiente para analizar el comportamiento de las soluciones a “largo plazo”.

3.2. Modelo exponencial

Si $y(t)$ representa a una cantidad desconocida que depende del tiempo, entonces para poder encontrar esta función será necesario establecer algún tipo de hipótesis sobre la forma que dicha función cambia con el tiempo. De entre todas ellas, una de la más elemental, es suponer que la tasa de cambio de $y(t)$, en cada momento, es directamente proporcional a la cantidad presente. Es decir,

$$y'(t) = \alpha y(t),$$

donde α es la constante de proporcionalidad.

Resolviendo esta ecuación diferencial de variables separables,

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)} = \int \alpha dt \quad \Rightarrow \quad \ln |y(t)| = \alpha t + \ln c.$$

O bien,

$$\ln y(t) - \ln c = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{y(t)}{c} \right) = \alpha t.$$

Despejando

$$y(t) = c e^{\alpha t}.$$

Si suponemos que $y(0) = y_0$, entonces

$$y(0) = c e^0 = c = y_0,$$

y la solución viene dada por

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{\alpha t}}. \quad (3.1)$$

Observemos que si $\alpha > 0$, entonces la función $y(t)$ crece sin límite, mientras que si $\alpha < 0$ la función $y(t)$ disminuirá cuando t aumente.

3.2.1. Dinámica independiente de la densidad

El análisis de las relaciones entre las estructuras y el movimiento de una población, se basa en la noción de población estable. *Leonard Euler* (1760) fue el primero en definir este concepto y en darle un contenido analítico, pero en realidad fue *Alfred J. Lotka*, en una serie de publicaciones que se iniciaron en 1907 y terminaron en 1937, quien primero trató lo que podemos considerar como el fundamento de la dinámica de poblaciones.

La tasa de natalidad de una población humana se da usualmente en términos de número de nacimientos por mil, en un año. La referencia a mil es simplemente para evitar cifras decimales; en lugar de una tasa de natalidad de 17 por mil se podría hablar igualmente de una tasa de 0.017 por individuo. Del mismo modo, el período de un año también es únicamente una convención; la tasa de natalidad podría igualmente darse en términos de una semana, un segundo, o cualquier otra unidad de tiempo. Análogas observaciones se aplican a la tasa de mortalidad y a la tasa de crecimiento, o tasa de natalidad menos tasa de mortalidad. La tasa de crecimiento es pues la variación neta de población por unidad de tiempo dividida por la población total al comienzo del período.

Supongamos que la población $y(t)$, en el instante t , cambia a $y + \Delta y$ en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$. Entonces, la tasa media de crecimiento es

$$\frac{\Delta y}{y(t)\Delta t}. \quad (3.2)$$

En la práctica, $y(t)$ se conoce únicamente en aquellos instantes t_0, t_1, \dots en que se hace recuento de la población, y su valor es un entero no negativo. Suponemos que $y(t)$ se extiende (por interpolación, por ejemplo) a una función con valores reales no negativa, de una variable real, con derivada continua. Si tomamos límite en (3.2),

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y(t)}{y(t)\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

Esta función de t es la tasa de crecimiento de la población en el instante t . **La hipótesis más simple es la de una tasa de crecimiento constante r .** Éste es

el caso si el número de nacimientos y de muertes en un pequeño período de tiempo Δt tienen una razón fija respecto a la población total. Esas razones serán funciones lineales de Δt pero independientes del tamaño de la población. Así pues, la variación neta será $r y \Delta t$, siendo r una constante. Por tanto

$$r = \frac{y'(t)}{y(t)}.$$

Esta es una ecuación lineal y como es sabido se conoce con el nombre de Ley de Malthus para el crecimiento de una población. Si la población de una especie dada es y_0 en el tiempo t_0 , entonces $y(t)$ satisface el problema del valor inicial. Integrando se tiene la conocida fórmula para el crecimiento ilimitado,

$$y(t) = y(t_0)e^{r(t-t_0)}.$$

De aquí que toda especie que satisface la ley de crecimiento de *Malthus* crece exponencialmente con el tiempo.

Ahora bien, sólo se ha propuesto un modelo sencillo para el crecimiento de una población, tan sencillo que fue posible resolverlo completamente en pocas líneas. Por lo tanto, es importante ver si este modelo, con su sencillez, tiene alguna relación con la realidad. Sea $y(t)$ la población humana de la Tierra en el tiempo t . Se estima que la población del planeta aumentó con una tasa promedio de 2% anual durante el período 1960–1970. Al empezar la mitad de la década, el 1 de enero de 1965, cuando el Departamento de Comercio del gobierno de Estados Unidos, estimaba la población de la Tierra en 3340 millones de personas, entonces $t_0 = 1965$; $y_0 = 3.34 \times 10^9$ y $r = 0.02$, de modo que $y(t) = (3.34) \cdot 10^9 \cdot e^{0.02(t-1965)}$. Una manera de comprobar la precisión de esta fórmula es calcular el tiempo requerido para que se duplique la población del planeta y compararlo con el valor observado de 35 años. La fórmula predice que la población de la Tierra se duplica cada T años, donde $e^{0.02T} = 2$. Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación se obtiene $0.02T = \ln 2$, de modo que $T = 50 \ln 2 \simeq 34.6$ años.

Esto constituye una excelente coincidencia con el valor observado. Por otro lado, sin embargo, mirando hacia el futuro, la ecuación predice que la población de la Tierra será de 200 billones en el año 2515, de 1800 billones en 2625, y de 3600 billones en 2660. Estas son cifras astronómicas cuyo significado es difícil de imaginar. La superficie total del planeta es de aproximadamente 167.4 billones de metros cuadrados. El 80% de la superficie está cubierta por agua. Suponiendo que se está dispuesto a vivir en botes al igual que en tierra firme, puede verse fácilmente que para el año 2515 habrá solamente 0.837 metros cuadrados por persona; en el año 2625 cada persona dispondrá de solamente 0.09 metros cuadrados en el cual estar de pie y para el año 2660 las personas estarán unas en los hombros de otras. Parece por lo tanto, que el modelo no es razonable y debería ser descartado.

Sin embargo, consideremos el caso del *Microtus Arvallis Pall*, un pequeño roedor

que se reproduce muy rápidamente. Tomemos como unidad de tiempo el mes y que la población crece con una tasa del 40 % mensual.

Si hay dos roedores presentes en el momento inicial $t = 0$, entonces $y(t)$, el número de roedores en el tiempo t , verifica $y(t) = 2e^{0.4t}$.

Meses	0	2	6	10
y(t) observada	2	5	20	109
y(t) calculada	2	4.5	22	109.1

Tabla 3.1

En la Tabla 3.1 se comparan las poblaciones observadas con las poblaciones calculadas utilizando el modelo de crecimiento exponencial. Como podemos apreciar, existe una gran coincidencia.

En el caso del *Microtus Arvallis Pall*, la población observada es muy precisa, ya que el período de gestación es de tres semanas y el tiempo que se requiere para medir la población es mucho menor.

Los modelos lineales para el crecimiento de poblaciones son satisfactorios siempre que la población no sea demasiado grande. Cuando la población es demasiado grande, estos modelos no pueden ser exactos ya que no reflejan el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible.

3.2.2. Desintegración radiactiva

El físico *Rutherford* y sus colaboradores probaron que los átomos de ciertos elementos radiactivos son inestables y que, en un intervalo de tiempo dado, una fracción fija de los átomos se desintegra espontáneamente para formar un nuevo elemento. Ya que la radiactividad es una propiedad del átomo, *Rutherford* demostró que la descomposición de una sustancia es directamente proporcional al número de átomos presentes en la misma.

Si $y(t)$ es la cantidad de material radiactivo existente en el tiempo t , entonces

$$y'(t) = -ry(t), \quad r > 0,$$

donde r es una constante que depende del elemento radiactivo considerado, y se conoce como **constante de decaimiento**. Este modelo es un caso particular de un modelo de crecimiento exponencial.

3.2.3. Trazadores radiactivos

Los elementos radiactivos juegan un papel muy importante en Biología. Por ejemplo, el H_3 se suele usar para marcar ciertos pares de ADN, los cuales se añaden a cadenas

mutantes de *E. coli*, que son incapaces de fabricar una base particular de ADN. Para tratar el cultivo con un antibiótico apropiado, se usa una señal radiactiva para determinar cuanto ADN se ha replicado bajo las condiciones particulares del experimento. El yodo radiactivo se usa con frecuencia para detectar problemas en el tiroides de los humanos.

3.2.4. Fechado con C_{14}

Alrededor del año 1950, el químico *Willard Libby* ideó un método en el cual se usa carbono radiactivo para determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. El cociente de la cantidad de C_{14} y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atmósfera es constante y, en consecuencia, la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C_{14} cesa. Así, comparando la proporción de C_{14} que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método utiliza la vida media¹ del C_{14} radiactivo que es de aproximadamente 5600 años.

EJEMPLO 3.1

- Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene 1/1000 de la cantidad original de C_{14} . Para determinar la edad del fósil utilizamos la fórmula $y(t) = y(0)e^{rt}$.

Cuando $t = 5600$ años, $y(t) = y(0)/2$, de lo cual es posible determinar el valor de r ,

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{5600r} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{\ln 2}{5600} = -0.00012378.$$

Por lo tanto

$$y(t) = y_0 e^{-0.00012378t}.$$

Si $y(t) = y_0/1000$, se tiene que

$$\frac{y_0}{1000} = y_0 e^{-0.00012378t} \quad \Rightarrow \quad t \approx \frac{\ln 1000}{0.00012378} \approx 55800 \text{ años.}$$

La edad encontrada en el ejemplo anterior está, en realidad, al borde del límite dentro del cual este método es exacto. La técnica usual del carbono 14 se limita a aproximadamente 9 semividas del isótopo, es decir alrededor de 50.000 años. Una razón es que el análisis químico necesario para obtener una medida exacta del C_{14} restante se hace un tanto problemático alrededor de $y_0/1000$. Además, este análisis

¹Tiempo que ha de transcurrir para que cierta cantidad de material radiactivo quede reducido a la mitad.

exige la destrucción de una muestra un tanto grande. Si se logra hacer esta medición de modo indirecto, basándose en la radiactividad efectivamente presente en la muestra, entonces es muy difícil distinguir entre la radiación que proviene del fósil y la radiación ambiental normal. Sin embargo, recientemente, el uso de un acelerador de partículas ha hecho posible que los científicos separen directamente el C_{14} del C_{12} estable. Calculando el valor preciso de la razón entre C_{14} y C_{12} , la exactitud de este método puede extenderse a un período de 70.000 a 100.000 años. Otras técnicas isotópicas, tales como el uso de potasio 40 y argón 40, permiten obtener edades de varios millones de años. A veces también es posible emplear métodos no isotópicos, que se basan en el empleo de aminoácidos.

3.2.5. Modelo de un riñón artificial I

El funcionamiento de una máquina de diálisis es el siguiente: la sangre del paciente circula a lo largo de una membrana a una velocidad fija, mientras que al mismo tiempo un líquido purificador se encuentra circulando en la dirección opuesta al otro lado de la membrana a una velocidad diferente. Este líquido purificador atrae las impurezas en la sangre, y la tasa de cambio de las impurezas a través de la membrana sigue la **ley de Fick**, la cual afirma que la cantidad de material de desecho que pasa por una membrana es proporcional a la diferencia de concentración a un lado y otro de la misma.

La sangre, que tiene una concentración de desechos $u(t)$ (creatina, urea, ...), al circular por la membrana que la separa del dializador, elimina una parte de las impurezas que pasan al dializador cuya concentración es $v(t)$. La ecuación diferencial que modeliza a esta situación es

$$\frac{d(u(t) - v(t))}{dt} = -k(u(t) - v(t)), \quad k > 0,$$

cuya integración permite calcular la cantidad de material de desecho removido de la sangre por unidad de tiempo.

EJEMPLO 3.2

- Supongamos dos compartimientos que se encuentran separados por una barrera (membrana) a través de la cual se disuelve una sustancia. La tasa de disolución de un compartimiento a otro viene dada por la ley de Fick: proporcional a la diferencia entre las concentraciones de los dos compartimientos. Sea $C_1(t)$ la concentración (en el minuto t) más baja que se encuentra en el primero de los compartimientos y $C_2(t)$ la concentración del segundo. Supongamos también que V_1 y V_2 son los volúmenes de cada uno de los compartimientos. Sea un intervalo pequeño de tiempo Δt , entonces la cantidad de sustancia que atraviesa la membrana será

$$\Delta Q = \Delta t k(C_1 - C_2)$$

donde la constante de proporcionalidad k dependerá del tipo de membrana y de la sustancia. De la expresión anterior se deduce

$$\left. \begin{aligned} \Delta C_1 &= \frac{\Delta Q}{V_1} = \frac{\Delta t k (C_2 - C_1)}{V_1} \\ \Delta C_2 &= \frac{\Delta Q}{V_2} = \frac{\Delta t k (C_1 - C_2)}{V_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \frac{k}{V_1} (C_2 - C_1) \\ \frac{dC_2}{dt} &= \frac{k}{V_2} (C_1 - C_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Si las concentraciones iniciales en los dos compartimientos son $C_1(0)$ y $C_2(0)$, entonces la cantidad inicial total de sustancia será $Q_T = V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0)$. Después de cierto tiempo se habrá alcanzado la condición de equilibrio y en ambos compartimientos existirá la misma concentración (C_∞). Ahora la sustancia se encontrará distribuida en el volumen $V_1 + V_2$, y por tanto

$$\boxed{C_\infty = \frac{V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0)}{V_1 + V_2}} \quad (3.4)$$

esta expresión nos indica que si son conocidas las concentraciones iniciales y los volúmenes, entonces es posible conocer la concentración en ambos compartimientos “a largo plazo”.

Es evidente que la diferencia más grande entre ambas concentraciones se encuentra en el momento inicial $t = 0$, y que esta diferencia va disminuyendo de forma progresiva hasta alcanzar el punto de equilibrio.

La función $C_1(t)$ será creciente, mientras que $C_2(t)$ será decreciente y podemos establecer la hipótesis (por ejemplo) de que tienden al valor de equilibrio de forma exponencial. Es decir, que responden a expresiones del tipo

$$\left\{ \begin{aligned} \boxed{C_1(t) = C_1(0) + (1 - e^{-\alpha t})(C_\infty - C_1(0))} \\ \boxed{C_2(t) = C_2(0) + (1 - e^{-\beta t})(C_\infty - C_2(0))} \end{aligned} \right.$$

donde las constantes α y β se obtendrán al sustituir en las ecuaciones diferenciales (3.3). Observemos que, ambas funciones, cuando $t = 0$ toman el valor inicial y además tienden a C_∞ si $t \rightarrow \infty$.

Restando estas funciones

$$C_2(t) - C_1(t) = C_\infty(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) + C_2(0)e^{-\beta t} - C_1(0)e^{-\alpha t} \quad (3.5)$$

apreciamos al sustituir en cualquiera de las ecuaciones diferenciales (3.3), que las dos funciones exponenciales tienen que coincidir para que se cumpla la igual, lo cual obliga a que $\alpha = \beta$. De esta forma, la expresión (3.5) se reduce a

$$C_2(t) - C_1(t) = e^{-\alpha t}(C_2(0) - C_1(0)) \quad (3.6)$$

Los valores de las derivadas de estas funciones son,

$$\frac{dC_1}{dt} = \alpha e^{-\alpha t}(C_\infty - C_1(0)); \quad \frac{dC_2}{dt} = \alpha e^{-\alpha t}(C_\infty - C_2(0)) \quad (3.7)$$

sustituyendo (3.7) en (3.3)

$$\frac{V_1}{k} \frac{dC_1}{dt} = -\frac{V_2}{k} \frac{dC_2}{dt} = C_2 - C_1 \Rightarrow \frac{V_1}{k} (\alpha e^{-\alpha t} (C_\infty - C_1(0))) = e^{-\alpha t} (C_2(0) - C_1(0))$$

simplificando y despejando

$$\alpha = \frac{k}{V_1} \frac{C_2(0) - C_1(0)}{C_\infty - C_1(0)} \quad (3.8)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el valor de (3.4)

$$C_\infty - C_1(0) = \frac{V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0)}{V_1 + V_2} - C_1(0) = \frac{V_2 (C_2(0) - C_1(0))}{V_1 + V_2} \quad (3.9)$$

y sustituyendo (3.9) en (3.8) se obtiene finalmente que

$$\alpha = \frac{k(V_1 + V_2)}{V_1 V_2}$$

3.2.6. Absorción de Rayos-X

Una aplicación elemental del modelo exponencial es la absorción de rayos-X que atraviesan un cuerpo parcialmente opaco. La diferencia importante con el resto de los modelos estudiados es que ahora la variable independiente no es el tiempo sino la distancia x de penetración del rayo. Supondremos que $y(x)$ representa a la intensidad de la radiación, y que la lámina es atravesada perpendicularmente por el rayo. La diferencia $y(x+h) - y(x)$ se corresponderá con la absorción, siendo h el espesor de la lámina. La hipótesis que se establece es que esta absorción es directamente proporcional a la intensidad de radiación y al espesor. Esto es,

$$y(x+h) - y(x) = \alpha y(x)h,$$

donde el parámetro de proporcionalidad α tiene que ser negativo. Pasando h al primer miembro y tomando límite cuando $h \rightarrow 0$, nos aparece el siguiente problema de valores iniciales,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \alpha y(x), \quad y(0) = y_0$$

cuya solución, como sabemos, es $y(x) = y_0 e^{\alpha x}$

EJERCICIO 3

- 1 Una población crece exponencialmente durante T meses con una constante de crecimiento de 0.03 por mes. En un momento determinado, la constante aumenta a 0.05 por mes. Después de 20 meses la población se duplica, ¿en qué momento T cambió la constante de crecimiento?
 - 2 Amplias investigaciones han suministrado datos que relacionan el riesgo R (en porcentaje) de tener un accidente automovilístico con el nivel b de alcohol en la sangre (en porcentaje). Se conocen dos puntos representativos $R(0) = 1\%$ y $R(0.14) = 20\%$. Si suponemos que la razón de cambio del riesgo respecto al nivel de alcohol en la sangre viene dada por $R'(b) = kR(b)$. Resuelve la ecuación diferencial que modeliza a la situación planteada. ¿En qué nivel de alcohol en la sangre el riesgo de sufrir un accidente es del 100%?
-

3.3. Modelo exponencial modificado

3.3.1. Ley de enfriamiento de Newton

Después de una muerte violenta, una de las cosas que el forense hace es tomar la temperatura del cuerpo. Un poco tiempo después, se vuelve a tomar la temperatura del cadáver, con objeto de saber el “ritmo” de enfriamiento del cuerpo. Naturalmente, este proceso puede repetirse para obtener una mejor aproximación de la hora en que ha sucedido la muerte. La propiedad en que se basa esta técnica es conocida con el nombre de **Ley de enfriamiento de Newton**, la cual dice que el ritmo con el que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del ambiente que lo rodea. Es decir, si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo para el tiempo t , entonces

$$T'(t) = -k(T(t) - T_e), \quad T(0) = T_0, \quad (3.10)$$

siendo $k > 0$, T_e la temperatura ambiente y T_0 la temperatura inicial del cuerpo.

EJEMPLO 3.3

- Supongamos que se encuentra un cadáver a las 8h30' y que a esa hora su temperatura es de 30° C siendo la temperatura de la habitación constante de 22° C. Una hora más tarde la temperatura había descendido a 28° C. Vamos a utilizar esta información para determinar la hora aproximada en que falleció esta persona.

Es conocido que la temperatura de ser un humano vivo es de aproximadamente 37° C. De la ley de enfriamiento de *Newton* deducimos

$$T'(t) = -k(T(t) - 22), \quad T(0) = 30.$$

Esta ecuación diferencial es lineal, pero podemos simplificarla realizando el cambio de variable $z(t) = T(t) - 22$. En efecto, $z'(t) = T'(t)$, luego,

$$z'(t) = -kz(t), \quad z(0) = T(0) - 22 = 8.$$

Estamos ante el modelo exponencial

$$z(t) = z(0)e^{-kt} = 8e^{-kt} \Rightarrow T(t) = 22 + 8e^{-kt}.$$

Ahora, debemos determinar la constante k de decaimiento,

$$T(1) = 28 = 22 + 8e^{-k} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.2877.$$

Nuestro modelo es: $T(t) = 22 + 8e^{-0.2877t}$. Para determinar la hora en que ocurrió el asesinato, debemos encontrar el tiempo correspondiente a 37° C.

$$37 = 22 + 8e^{-0.2877t} \Rightarrow t = -\ln\left(\frac{15/8}{0.2877}\right) \approx -2.$$

De esta información deducimos que la muerte ocurrió aproximadamente dos horas antes de haber encontrado el cuerpo, aproximadamente a las 6 horas y treinta minutos de la mañana.

3.3.2. Contaminación de un lago

Uno de los problemas más urgentes de la sociedad actual es cómo reducir los niveles de contaminación y toxicidad del agua disponible. Existen modelos muy complejos que requieren del esfuerzo de equipos multidisciplinares, nosotros nos limitaremos a estudiar un modelo muy simple aplicado a la contaminación de un lago. A pesar de su sencillez, observaremos como aparecen elementos básicos que están presentes en los modelos más complicados.

Supongamos un nuevo pesticida que se aplica a los campos y se deposita a través de un río en un lago con un volumen V de agua. Asumamos que el río recibe una cantidad constante de pesticida y que fluye al lago con un ritmo constante f . Estamos, por tanto, suponiendo que el río tiene una concentración constante p del nuevo pesticida. Vamos a suponer también que el agua del lago está bien agitada y que entra tanta agua como sale de él. Si $c(t)$ es la concentración de pesticida en el lago en el tiempo t , entonces el ritmo de cambio en la cantidad de pesticida es igual a la cantidad que entra menos la cantidad que sale. Es decir,

$$c'(t) = \frac{f}{V}p - \frac{f}{V}c(t),$$

y si suponemos que el lago estaba inicialmente libre del pesticida, entonces $c(0) = 0$. Para resolver esta ecuación diferencial la reescribimos

$$c'(t) = -\frac{f}{V}(c(t) - p),$$

y al igual que en la sección anterior, haciendo el cambio de variable $z(t) = c(t) - p$ con $z(0) = c(0) - p = -p$, la ecuación se transforma en,

$$z'(t) = -\frac{f}{V}z(t), \quad z(0) = -p.$$

Ya sabemos que la solución de esta ecuación diferencial es

$$z(t) = -pe^{-\frac{ft}{V}} \Rightarrow c(t) = p - pe^{-\frac{ft}{V}}.$$

El segundo término de esta última expresión muestra que a largo plazo, la solución tiende hacia p , como era lógico suponer.

3.3.3. Genética de poblaciones

En genética de poblaciones los fenómenos hereditarios se estudian a nivel de población en lugar de a nivel individual. Consideremos un carácter hereditario particular de un animal, como la longitud del pelo. Supongamos que básicamente hay dos tipos de pelo para cierto animal: pelo largo y pelo corto, y que el pelo largo es el tipo dominante. Sea **A** el gen responsable del pelo largo y **a** el gen responsable del pelo corto. Cada animal tiene un par de genes: **AA** (individuos dominantes), **aa** (individuos recesivos) o **Aa** (individuos híbridos). Si viven N animales en la población, entonces existen $2N$ genes en la población que controlan la longitud del pelo. El número total de genes **a** en la población dividido por $2N$ da la fracción de genes **a** que llamaremos q . Esta fracción se llama frecuencia genética de **a** en la población. La frecuencia genética de **A** será $1 - q$.

Un problema importante en genética de poblaciones es el estudiar la forma en que la frecuencia genética q cambia conforme los animales de la población se reproducen. Si cada unidad de tiempo representa una generación, se puede considerar q como función del tiempo. En general, se estudian un número elevado de generaciones, por lo que q puede considerarse una función derivable de t . Supondremos que la población se aparea al azar y que la distribución de los genes **a** y **A** es la misma para machos y hembras. En este caso, se puede demostrar por la teoría de la probabilidad, que la frecuencia genética es constante de una generación a la siguiente cuando no hay factores que la alteren como mutaciones o influencias externas sobre la población. Discutiremos a continuación las ecuaciones diferenciales que describen los efectos de esos factores de perturbación sobre $q(t)$.

Si en cada generación una fracción α de los genes **a** muta y se transforma en genes **A**, entonces la razón de cambio de la frecuencia genética q debida a esta mutación es

$$q' = -\alpha q, \quad \alpha > 0.$$

Sucede con frecuencia que en cada generación una fracción μ de genes **A** mutan en **a** y al mismo tiempo una fracción α de genes **a** mutan en **A**. El efecto neto de estas

mutaciones en la frecuencia genética de q está descrito por la ecuación

$$q' = \mu(1 - q) - \alpha q, \quad \alpha, \mu > 0.$$

EJEMPLO 3.4

- A continuación haremos un análisis cualitativo para un $\mu = 0.00003$ y $\alpha = 0.00001$.

$$\frac{dq}{dt} = 0.00003(1 - q) - 0.00001q = 0.00003 - 0.00004q = -0.00004(q - 0.75)$$

La Figura 3.1 muestra la gráfica de $z = -0.00004(q - 0.75)$ y las curvas solución típicas. Puede apreciarse que la frecuencia genética $q = 0.75$ es un valor de equilibrio. Si el valor inicial de q es menor de 0.75, el valor de q crecerá bajo los efectos de la mutación; después de muchas generaciones será aproximadamente 0.75. Si el valor inicial de q está entre 0.75 y 1.00, entonces q decrecerá con el tiempo hasta el valor 0.75.

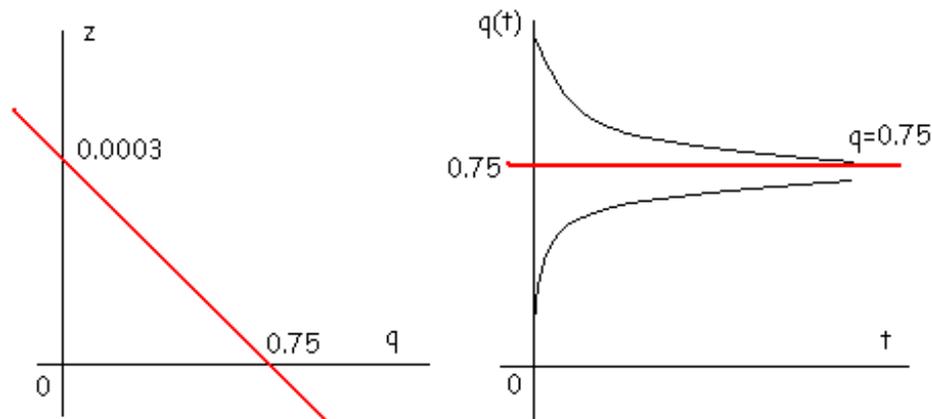


Figura 3.1. Estudio cualitativo del modelo.

En el estudio de cómo una población se adapta al medio ambiente a lo largo de un período grande, los genetistas suponen que algunos tipos hereditarios tienen ventaja sobre otros en cuanto a supervivencia y reproducción se refiere. Supongamos que la habilidad adaptativa de los híbridos Aa es ligeramente mayor que la de los individuos dominantes AA y recesivos aa .

En este caso, resulta que la razón de cambio de la frecuencia genética debida a esta presión selectiva es

$$q' = q(1 - q)(c - dq),$$

donde c y d son constantes positivas con $c < d$. Por otro lado, si la habilidad adaptativa de los individuos híbridos es ligeramente menor que la de los dominantes y la de los recesivos, se puede demostrar que

$$q' = kq(1 - q)(2q - 1),$$

donde k es una constante entre 0 y 1, llamada coeficiente de selección contra los híbridos.

Es posible considerar los efectos mezclados de la mutación y la selección natural. En efecto, supongamos que, además de las mutaciones de A en a y a en A tenemos también que la selección va contra los individuos recesivos. Entonces, la razón de cambio neta en la frecuencia genética podría ser

$$q' = \mu(1 - q) - \alpha q - kq^2(1 - q)$$

EJERCICIO 4

- 1 El crecimiento de una célula depende del flujo de nutrientes a través de su superficie. Si $y(t)$ representa al peso de la célula en el tiempo t , supongamos que (para un tiempo limitado) la tasa de crecimiento de la célula sea proporcional al área de su superficie. Es decir, proporcional a $y^{2/3}$. Plantear y resolver la ecuación diferencial que modeliza a esta situación, e interpretar el resultado obtenido.

3.4. Dinámica dependiente de la densidad

Los individuos de una misma especie tienen necesidades muy similares para sobrevivir, crear y reproducirse; pero la necesidad combinada de todos ellos por un recurso puede superar la oferta del mismo. Los individuos compiten entonces por dicho recurso y por lo menos algunos de ellos no lo consiguen.

DEFINICIÓN 3.4.1 *Competición es una interacción entre individuos, provocada por la necesidad común de un recurso limitado y conducente a la reducción de la supervivencia, el crecimiento y/o la reproducción de los individuos competidores.*

Ahora, podemos pasar a estudiar más a fondo la cuestión. Cuando la población es demasiado grande, el modelo elemental de crecimiento constante, no puede ser exacto, ya que no refleja el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible. Así que hay que agregar un término de competición a la ecuación diferencial lineal. Una

elección adecuada del término competitivo es $-by(t)^2$, donde b es una constante, ya que el promedio estadístico del número de encuentros por unidad de tiempo es proporcional a $y(t)^2$. Consideremos entonces la ecuación modificada

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - by(t)^2 = y(t)(r - by(t)), \quad r, b > 0.$$

Esta ecuación se conoce como **ley logística** del crecimiento de una población y los números r y b se llaman **coeficientes vitales** de la población. La introdujo por primera vez el matemático y biólogo holandés *Verhust*, en 1837 cuando ajustó una curva logística a los datos de seis censos de Estados Unidos de 1790 a 1840 y predijo la población de Estados Unidos para 1940. Su predicción falló por menos de 1 millón de personas (alrededor de un 1%). Ahora bien, en general, la constante b es muy pequeña comparada con r de tal modo que si $y(t)$ no es demasiado grande, entonces el término $-by(t)^2$ es insignificante comparado con $ry(t)$, por lo que la población crece exponencialmente. Sin embargo, si $y(t)$ es grande entonces el término $-by(t)^2$ debe tomarse en cuenta ya que disminuye la tasa de crecimiento de la población. Es lógico pensar que cuanto más industrializado es un país, tanto más espacio disponible tiene, y cuanto más alimento posee, entonces es más pequeño el coeficiente b .

Consideremos la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de una población aislada. Si y_0 es la población en el tiempo t_0 , entonces $y(t)$, la población en el tiempo t , satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - by(t)^2, \quad y(t_0) = y_0$$

Para resolver esta ecuación diferencial la reescribimos como

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right), \quad K = \frac{r}{b},$$

que es una ecuación diferencial en variables separables

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)(1 - y(t)/K)} = \int r dt. \quad (3.11)$$

La primera de las integrales que aparece vale

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)(1 - y(t)/K)} = \int \frac{dy(t)}{y(t)} + \int \frac{1/K dy(t)}{1 - y(t)/K} = \ln |y(t)| - \ln |1 - y(t)/K|.$$

Sustituyendo en (3.11)

$$\ln \left| \frac{y(t)}{1 - y(t)/K} \right| = rt + C \quad \Rightarrow \quad \frac{Ky(t)}{K - y(t)} = e^{rt+C}.$$

Despejando el valor de $y(t)$ en la expresión anterior

$$y(t) = \frac{Ke^{rt+C}}{K + e^{rt+C}} = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}.$$

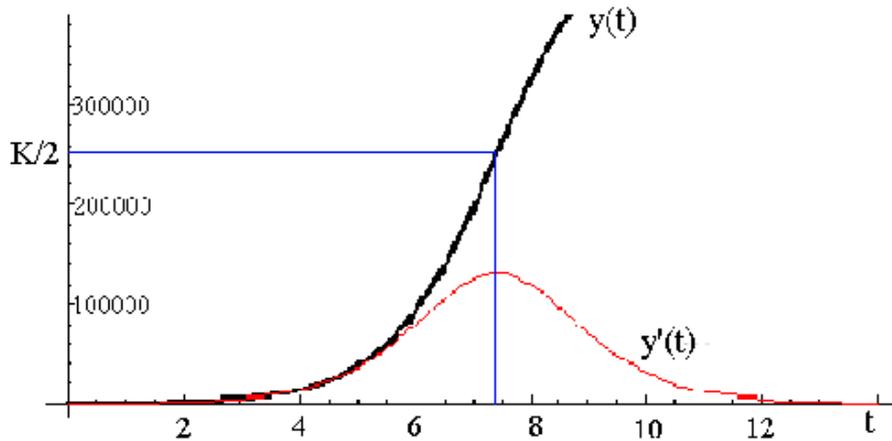


Figura 3.2. Representación gráfica de $y(t)$ y $y'(t)$.

Si examinamos este resultado para ver que tipo de poblaciones predice, podemos observar que si $t \rightarrow \infty$, entonces

$$y(t) \rightarrow K = \frac{r}{b}$$

Es decir, independientemente del valor inicial, la población siempre tiende al valor límite r/b . Además notemos que $y(t)$ es una función monótona creciente respecto del tiempo si $0 < y_0 < r/b$. Más aún, dado que

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = r \frac{dy(t)}{dt} - 2by(t) \frac{dy(t)}{dt} = (r - 2by(t))y(t)(r - by(t))$$

se ve que $dy(t)/dt$ es creciente si $y(t) < r/2b$, y $dy(t)/dt$ es decreciente si $y(t) > r/2b$. Por ello la gráfica de $y(t)$ debe tener la forma que aparece en la Figura 3.2.

Una curva así se llama **curva logística**. A partir de su forma podemos concluir que el tiempo antes de que la población alcance la mitad de su valor límite es un período de crecimiento acelerado. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero. Este es un período de crecimiento reducido.

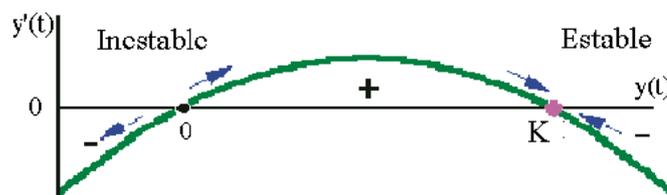


Figura 3.3. Línea fase.

La ecuación diferencial logística es autónoma y también podemos hacer su estudio cualitativo. Para ello estudiemos la función $g(y) = y(r - by)$. Sus ceros están en los puntos $y = 0$ e $y = r/b$. Para valores de $y < 0$ la función es negativa; para

$0 < y < r/b$ es positiva y para $y > r/b$ la función es negativa. Por tanto, las soluciones con condición inicial entre 0 y r/b serán crecientes y tendrán asíntota horizontal en r/b . Una condición inicial por encima del valor r/b correspondería a una función decreciente con asíntota horizontal en r/b .

Resumiendo, el crecimiento de una población se describe generalmente por una ecuación logística donde la constante $K = r/b$ se llama **capacidad de carga** del medio ambiente.

Cuando la población inicial es cercana a cero, se produce un rápido crecimiento que va disminuyendo a medida que nos vamos acercando a K . La curva de la población tiene típica forma de S e $y(t)$ tiende asintóticamente a la capacidad de carga. Si la población inicial es mayor que la capacidad de carga, la población decrece en tamaño, acercándose nuevamente asintóticamente a la capacidad de carga.

EJEMPLO 3.5

- Supongamos que en un lago se introducen 100 peces. Después de tres meses sabemos que hay 250 peces. Un estudio ecológico predice que el lago puede mantener a 1000 peces. Vamos a encontrar una fórmula para el número $y(t)$ de peces en el lago, t meses después de la introducción de los 100 peces.

La capacidad de carga del lago viene dada por $K = 1000$. Por otro lado, para $t = 0$ hay 100 peces, en consecuencia si en la solución de la ecuación logística

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}} = \frac{1000}{1 + Ae^{-rt}},$$

tenemos en cuenta este hecho

$$y(0) = 100 = \frac{1000}{1 + A} \quad \Rightarrow \quad A = 9.$$

Finalmente, como $y(3) = 250$, se tiene que

$$y(3) = 250 = \frac{1000}{1 + 9e^{-3r}} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{75}{225} \right) \approx 0.37.$$

En consecuencia

$$y(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.37t}}.$$

Las predicciones con la ley logística se confirmaron en experimentos con el protozoo *Paramecium caudatum* llevados a cabo por el biólogo y matemático *G. F. Gause*. Se colocaron cinco ejemplares de *Paramecium* en un tubo de ensayo con 0.5 cm^3 de medio nutriente y se contó el número diario de individuos durante seis días. Se encontró que los *Paramecium* se reproducían con una tasa de 230.9% diario cuando la población era pequeña. El número de individuos aumentaba inicialmente

con rapidez y posteriormente con más lentitud hasta alcanzar un nivel máximo de 375 hacia el cuarto día, saturando el tubo de ensayo. A partir de esta información se concluye que si el *Paramecium* crece de acuerdo con la ley logística $dy(t)/dt = r y(t) - b y(t)^2$, entonces $r = 2.309$ y $b = 2.309/375$. Por lo tanto, la ley logística predice que

$$y(t) = \frac{(2.309)5}{\frac{2.309^5}{375} + (2.309 - \frac{2.309^5}{375}) e^{-2.309t}} = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}}.$$

Para lograr modelos más precisos de crecimiento poblacional, deben considerarse las poblaciones como constituidas por grupos no homogéneos de individuos. Mas bien, hay que subdividir la población en diferentes grupos de edades. También se debe subdividir la población en hombres y mujeres, ya que la tasa de reproducción de ésta depende usualmente más del número de mujeres que del número de hombres.

3.4.1. Modelo epidemiológico I

La siguiente sección trata de la difusión de una enfermedad contagiosa. Empezaremos planteando varias hipótesis que simplifican el problema:

- La población es un número fijo P y cada miembro de la población es susceptible a la enfermedad.
- La duración de la enfermedad es larga, de manera que no se cura durante el período de estudio.
- Todos los individuos infectados son contagiosos y circulan libremente entre la población.
- Durante cada unidad de tiempo cada persona infectada tiene c contactos y cada contacto con una persona no infectada redonda en la transmisión de la enfermedad.

Una vez hechas las simplificaciones, consideremos un corto período de tiempo que va desde t hasta $t + h$. Cada persona infectada tiene ch contactos. ¿Cuántos de esos contactos son con personas no infectadas?. Si $f(t)$ es el número de personas infectadas al tiempo t , entonces $P - f(t)$ es el número de personas que no están infectadas, y $(P - f(t))/P$ es la fracción de la población que no está infectada. Entonces, de los ch contactos hechos por una persona infectada,

$$\left(\frac{P - f(t)}{P} \right) ch,$$

habrán sido con personas no infectadas. El número total de nuevas infecciones deberá ser

$$f(t + h) - f(t) = f(t) \left(\frac{P - f(t)}{P} \right) ch$$

dividiendo por h , y haciendo que h tienda a cero obtenemos

$$f'(t) = \frac{c}{P}f(t)(P - f(t)).$$

Luego, la función f verifica la ecuación diferencial que da lugar a la ecuación logística, y por tanto

$$f(t) = \frac{P}{1 + Be^{-ct}}, \quad (3.12)$$

donde c y B se pueden determinar de las características de la epidemia.

EJEMPLO 3.6

- Los servicios de salud pública registran la difusión de una epidemia de gripe de duración particularmente larga en una ciudad de 500.000 personas. Al inicio de la primera semana de registro se habían contabilizado 200 casos; durante la primera semana aparecieron 300 nuevos casos. Nos proponemos estimar el número de individuos infectados después de 6 semanas.

Sabemos que el valor de P que aparece en (3.12) es la capacidad de carga del sistema, en nuestro caso el número de individuos que a largo plazo se infectarán, $P = 500000$. Por otro lado, si $t = 0$, entonces $f(0) = 200$, sustituimos en (3.12) y deducimos que $B = 2449$. Cómo el número de infectados al final de la primera semana es de 500, podemos escribir

$$500 = \frac{500000}{1 + 2449e^{-c}} \Rightarrow c = -\ln\left(\frac{1998}{4998}\right) \approx 0.916891.$$

En consecuencia:

$$f(t) = \frac{500000}{1 + 2449e^{-0.916891t}}.$$

Finalmente, el número de personas infectadas al final de la sexta semana será $f(6) \approx 45475$.

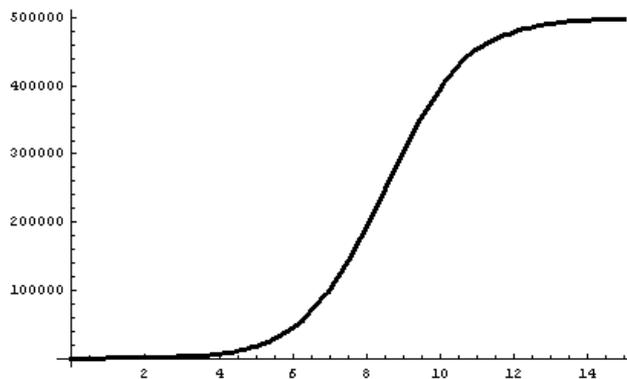


Figura 3.4. Representación gráfica de $f(t) = \frac{500000}{1+2449e^{-0.916891t}}$.

EJEMPLO 3.7

- La propagación de una enfermedad infecciosa en una población de individuos susceptibles de ser contagiados se modeliza por la ecuación diferencial

$$y'(t) = \alpha y(t)(N + 1 - y(t))$$

donde $y(t)$ representa al número de personas enfermas en el tiempo t , N el tamaño de la población y $\alpha > 0$ la tasa específica de infección. Suponiendo que se introduce un individuo enfermo, ¿cómo evoluciona la enfermedad?

Se trata del modelo logístico $y'(t) = \alpha y(t)(K - y(t))$ con una capacidad de carga $K = N + 1$, cuya solución es

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-Kat}} = \frac{N + 1}{1 + Ae^{-(N+1)at}}$$

como $y(0) = 1$, entonces

$$1 = \frac{N + 1}{1 + A} \Rightarrow N = A.$$

El número de personas infectadas en el tiempo t es,

$$y(t) = \frac{N + 1}{1 + Ne^{-(N+1)at}}$$

Este modelo epidémico se utiliza en otros contextos. Por ejemplo, para estudiar la forma en que nuevos avances tecnológicos se aplican en Medicina, o nuevas semillas en la agricultura, o el uso de nuevos insecticidas. Una “persona infectada” representa al individuo que conoce el producto. Sin embargo, la transmisión de la información puede verse alterada si entran en juego los medios de comunicación y publicidad.

3.5. Modelo logístico modificado**3.5.1. Caso I**

Existen poblaciones tales que si el número de individuos es elevado, entonces la tasa de crecimiento decrece, además si la población es demasiado pequeña esta tasa también decrece (por ejemplo, por la dificultad de los adultos en encontrar pareja).

Sean $y(t)$ la población en el tiempo t , M la capacidad de carga del hábitat, y N la constante necesaria para introducir el factor de escasez. Necesitamos un modelo $y'(t) = g(y)$ que tenga en cuenta los comentarios anteriores. La gráfica de $g(y)$ debería ser del tipo representada en la Figura 3.5.

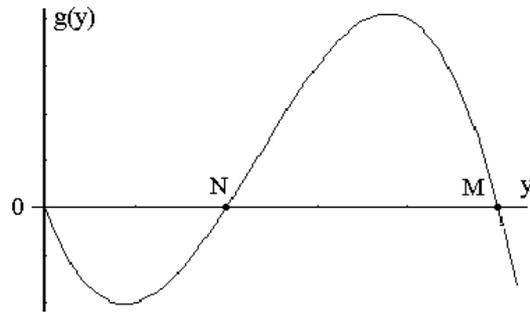


Figura 3.5. Gráfica de $g(y)$.

Observemos que $g(y)$ es negativa si $y > M$, ya que la población decrece cuando aumenta la tasa de crecimiento. También $g(y)$ es negativa cuando $y < N$, porque la población decrece cuando no hay incremento. Por el contrario, $g(y)$ es positiva en $N < y < M$ y $g(0) = 0$.

Debemos modificar el modelo logístico

$$y'(t) = ay(t) \left(1 - \frac{y(t)}{M} \right),$$

multiplicando el segundo término por la expresión $y(t)/N - 1$. En consecuencia, ahora nuestro modelo es

$$y'(t) = ay(t) \left(1 - \frac{y(t)}{M} \right) \left(\frac{y(t)}{N} - 1 \right).$$

Podemos resolver de forma exacta esta ecuación diferencial ya que es de variables separables. No obstante, en lo que realmente estamos interesados es en saber cómo se comportan las soluciones, y para ello el método más conveniente de análisis es el cualitativo.

Es evidente que tenemos tres puntos de equilibrio $y = 0$, N y M , siendo el 0 y el M sumideros y N una fuente.

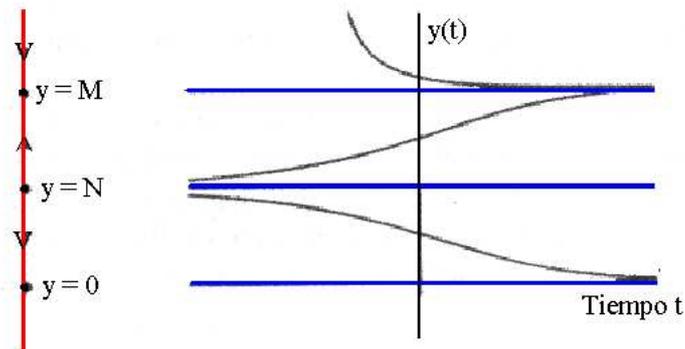


Figura 3.6. Análisis cualitativo del modelo.

La Figura 3.6 muestra la línea fase y las gráficas de soluciones típicas.

3.5.2. Caso II

Hemos comentado al inicio de la sección que el modelo logístico

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right), \quad (3.13)$$

tiene a K como capacidad de carga del hábitat. Es decir, todas las soluciones tienden al valor K cuando t aumenta. Es frecuente que este valor de K se modifique a medida que lo hacen las condiciones ambientales, por ejemplo en función de las precipitaciones. Podemos incluir este efecto oscilatorio, modificando el modelo (3.13)

$$\frac{dy(t)}{dt} = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{b + c \sin wt} \right),$$

donde b y w son constantes positivas con $b > c$.

Observemos que esta nueva ecuación diferencial no es autónoma y es muy difícil de resolver. Sólo podemos abortar la resolución de este problema a través de técnicas numéricas o bien utilizando un programa de simulación. Hemos simulado el modelo (3.14) obteniéndose el resultado que aparece en la Figura 3.7

$$\frac{dy(t)}{dt} = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{7 + \sin wt} \right). \quad (3.14)$$

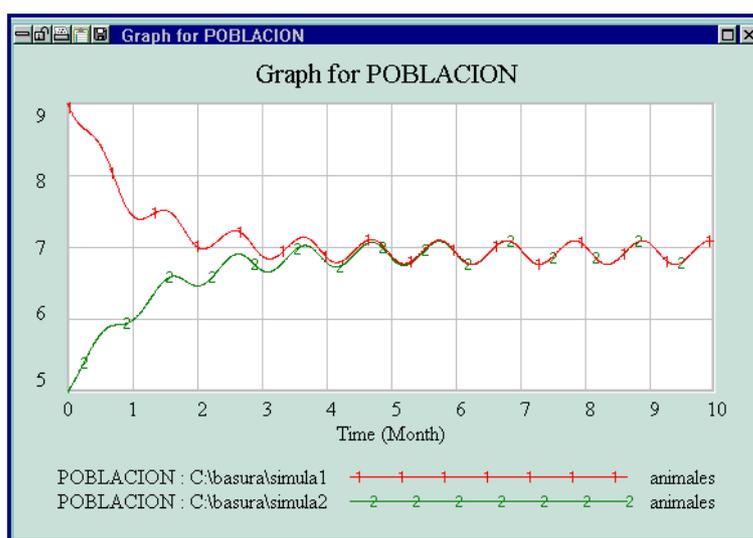


Figura 3.7. Simulación de (3.14) con Vensim®.

Lo que debemos destacar es que una vez que una curva solución entra en la región $6 < y(t) < 8$, entonces queda atrapada ahí y empieza a oscilar.

3.6. Otros modelos basados en E.D.O.

3.6.1. Modelo de disolución

El problema que ahora abordamos es el análisis de la evolución de una mezcla en un compartimiento (un fluido en el interior de un recipiente, un gas en el interior de una habitación,...) Se supone que en un determinado instante hay y_0 gramos de una sustancia disuelta en un recipiente que tiene una capacidad de V litros y que a partir de ese instante se introduce en el recipiente un fluido que contiene una concentración de c_e gramos por litro con una velocidad de entrada de éste de v_e litros por minuto. Se supone que la mezcla se hace uniforme y sale a v_s litros por minuto. El problema que nos planteamos es determinar la cantidad en gramos de la sustancia que hay en el recipiente en cada instante t .

Si $y(t)$ denota a la cantidad de sustancia en el minuto t , entonces el ritmo con el que ésta cambia viene dada por la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$y'(t) = v_e c_e - \frac{v_s}{V + (v_e - v_s)} y(t)$$

EJEMPLO 3.8

- Un depósito de 300 litros de capacidad contiene 50 litros de agua pura. En el instante $t = 0$ comienza a entrar una solución que contiene 100 cm³ de alcohol por cada litro de solución a una velocidad de 5 litros por minuto. Este suministro se detiene al llenarse el depósito. Después de media hora se introduce en el tanque una segunda solución de agua con alcohol, con una concentración de un 20% de alcohol por cada litro de agua, a una velocidad de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo, al introducir la segunda solución se abre una llave del fondo del depósito, y la solución perfectamente mezclada, sale del tanque a una velocidad de 6 litros por minuto. Determinar el porcentaje de alcohol en el depósito cuando se llene completamente.

Dividiremos el ejercicio en dos partes:

- **Durante la primera hora** ($0 \leq t \leq 30$). Consideraremos $y(t)$ como la cantidad de alcohol en el depósito en el minuto t . En esta situación, $y'(t) = 0.5$ litros de alcohol/minuto. Es decir, $y(t) = 0.5t + C$ litros de alcohol. Como inicialmente el tanque sólo contenía agua pura $y(0) = 0$, lo que obliga a que $C = 0$. Por tanto, $y(t) = 0.5t$, y la cantidad de litros de alcohol en el depósito en el minuto 30 es de $y(30) = 0.5 * 30 = 15$.
- **Después de la primera hora** ($t > 30$). Sea $u(t)$ la cantidad de alcohol en el depósito en el minuto t . La cantidad de solución en el tanque es de 200 litros y la nueva situación se modeliza a través del siguiente problema de valores iniciales,

$$u'(t) = (5 * 0.1 + 5 * 0.2) - \frac{6}{200 + 4t} u(t); \quad u(0) = 15$$

siendo la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$u'(t) + \frac{3}{100 + 2t}u(t) = 1.5$$

cuyo factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{100 + 2t} dt} = (100 + 2t)^{\frac{3}{2}}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$u'(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} + 3(100 + 2t)^{\frac{1}{2}}u = 1.5(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}$$

o bien

$$\left(u(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}\right)' = 1.5(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow u(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} = 1.5 \int (100 + 2t)^{\frac{3}{2}} dt$$

es decir

$$u(100 + 2t)^{\frac{3}{2}} = 1.5 \int (100 + 2t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1.5}{2} \frac{2}{5} (100 + 2t)^{\frac{5}{2}} + C = 0.3(100 + 2t)^{\frac{5}{2}} + C$$

despejando,

$$u(t) = 0.3(100 + 2t) + \frac{C}{(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Para calcular el valor de C tendremos en cuenta que $u(0) = 15$,

$$15 = 0.3(100) + \frac{C}{(100)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow C = -15000$$

Por último,

$$u(t) = 0.3(100 + 2t) - \frac{15000}{(100 + 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Como al depósito le faltan 100 litros por llenarse completamente y cada minuto el nivel sube $5 + 5 - 6 = 4$ litros, tardará 25 minutos en hacerlo. La solución al ejercicio será

$$u(25) = 0.3(100 + 2 * 25) - \frac{15000}{(100 + 2 * 25)^{\frac{3}{2}}} = 36.835 \text{ litros de alcohol}$$

EJEMPLO 3.9

- Un contenedor de 300 litros se encuentra lleno en sus dos terceras partes de capacidad y contiene 50 kilos de sal. En el tiempo $t = 0$ minutos, se abren las válvulas de manera que se agrega una solución salina con una concentración de un tercio de kilo por litro al contenedor a una velocidad de 3 litros por minuto. Si la mezcla bien agitada se extrae del contenedor a la velocidad de 2 litros por minuto, ¿cuántos kilos de sal se encuentran en el contenedor cuando

éste se llena?

Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el contenedor en el minuto t . La razón de cambio en cada minuto $y'(t)$, será igual a la cantidad de sal que entra en el contenedor, menos la cantidad de sal que sale en el mismo minuto. La velocidad con la que la sal entra en el minuto t será

$$1/3 \text{ Kg/litro} \times 3\text{litro/minuto} = 1 \text{ Kg/minuto} .$$

Al mismo tiempo la velocidad con que sale la calculamos de la siguiente manera. Sabemos que para el minuto t , $y(t)$ será la sal existente en $200 + t$ litros de agua. Por tanto, en 2 litros tendremos $2y(t)/(t + 200)$ kilos de sal. En consecuencia:

$$y'(t) = 1 - \frac{2}{t + 200}y(t), \quad y(0) = 50 .$$

Estamos ante una ecuación diferencial lineal,

$$y'(t) + \frac{2}{t + 200}y(t) = 1 ,$$

que tiene por factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t + 200} dt} = e^{2\ln(t+200)} = (t + 200)^2 .$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$,

$$y'(t)(t + 200)^2 + 2(t + 200)y(t) = (t + 200)^2 \quad \Rightarrow \quad ((t + 200)^2 y)' = (t + 200)^2 .$$

Integrando

$$(t + 200)^2 y = \frac{(t + 200)^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{t + 200}{3} + \frac{C}{(t + 200)^2} .$$

De todas estas soluciones, en la única que estamos interesados es en aquella que cumple la condición inicial $y(0) = 50$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$50 = \frac{200}{3} + \frac{C}{200^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-50}{3}200^2 .$$

La solución pedida es

$$y(t) = \frac{t + 200}{3} - \frac{50(200)^2}{3(t + 200)^2} .$$

Por último, para conocer la cantidad de sal existente en el contenedor cuando éste se ha llenado es necesario saber el tiempo transcurrido. Como cada minuto aumenta en un litro la cantidad de agua e inicialmente teníamos 200 litros serán necesarios 100 minutos para llenar el contenedor. En este caso

$$y(100) \approx 92 \text{ kilos de sal} .$$

3.6.2. Modelo para gestionar la pesca en un lago

Supongamos un lago donde no existen depredadores y con alimento suficiente para que los peces no luchen por la comida. Los peces se capturan a intervalos periódicos descritos por la función

$$h(t) = a + b \operatorname{sen} 2\pi t,$$

con a y b constantes, $a > b$ y t el tiempo. Si suponemos que los peces crecen con un ritmo proporcional a su población, entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) - (a + b \operatorname{sen} 2\pi t),$$

modela a la situación planteada. Donde $y(t)$ es el número de peces en el tiempo t y r la tasa neta de crecimiento. Estamos ante una ecuación diferencial lineal que tiene como factor integrante

$$\mu(t) = e^{-\int r dt} = e^{-rt}.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(t)$ y simplificando

$$(e^{-rt}y(t))' = -e^{-rt}(a + b \operatorname{sen} 2\pi t).$$

Tenemos que resolver la integral

$$-\int e^{-rt}(a + b \operatorname{sen} 2\pi t) dt = \frac{a}{r} \int -re^{-rt} dt - b \int e^{-rt} \operatorname{sen} 2\pi t dt. \quad (3.15)$$

La segunda de ellas se resuelve aplicando de forma reiterada la integración por partes. Se obtiene

$$\int e^{-rt} \operatorname{sen} 2\pi t dt = -\frac{2\pi e^{-rt}}{4\pi^2 + r^2} \left(\cos 2\pi t + \frac{r}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t \right). \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.16) en (3.15)

$$e^{-rt} \left(\frac{a}{r} + \frac{b2\pi}{4\pi^2 + r^2} \left(\cos 2\pi t + \frac{r}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t \right) \right) =$$

$$e^{-rt} \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{4\pi^2 + r^2} (2\pi \cos 2\pi t + r \operatorname{sen} 2\pi t) \right)$$

Finalmente

$$y(t) = \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{4\pi^2 + r^2} (2\pi \cos 2\pi t + r \operatorname{sen} 2\pi t) \right) + Ce^{rt}.$$

3.6.3. La edad del hielo

Durante los últimos millones de años se producen de forma cíclica etapas de enfriamiento severo del planeta con un período de 100000 años. Estos episodios consisten en un largo intervalo de tiempo de clima muy frío debido a que enormes trozos de hielo que se forman en el hemisferio norte se desplazan hasta el sur. Los modelos matemáticos más elementales basados en E.D.O fueron propuestos por *Budyko* (1969) y *Sellers* (1969), y se modificaron en 1981 por *North, Calahan y Coakley*. Los modelos se basan en la idea de que la reflexión de los rayos del sol aumenta cuando se presentan los trozos de hielo. Este proceso reduce la temperatura de la tierra dando lugar a una retroalimentación que provoca un aumento del número de los trozos de hielo. En 1987 *Ghil y Childress* propusieron el siguiente modelo

$$c \frac{dT}{dt} = Q(1 - \alpha(t)) - \mu g(T)T^4 \quad (3.17)$$

siendo c una constante específica del calor de la atmósfera de la tierra.

El término $R_i = Q(1 - \alpha(t))$ corresponde a la radiación absorbida con Q que representa a la radiación solar y $\alpha(T)$ el efecto de la reflexión cuyo valor es

$$\alpha(T) = \begin{cases} \alpha_l & \text{si } T \leq T_l \\ \alpha_u & \text{si } T \geq T_u \end{cases}$$

con T_l cuando la tierra está totalmente helada, T_u cuando está libre de bloques de hielo, y α decreciente linealmente para valores de T comprendidos entre estos dos valores.

El segundo término $R_e = \mu g(T)T^4$ se corresponde con la cantidad de radiación emitida, siendo μT^4 la radiación del cuerpo negro y

$$g(T) = 1 - m \tanh \left(\frac{T}{T_0} \right)^6 ; \quad m = 0.5 ; \quad T_0 = 284K$$

Los puntos de equilibrio del modelo se encuentran resolviendo la ecuación $T'(t) = 0$, o bien la intersección de las funciones R_i y R_e , dando lugar a uno o varios puntos de equilibrios, algunos de ellos estables y otros inestables. El clima actual se corresponde con el punto de equilibrio más grande y la edad de hielo al punto de equilibrio más pequeño.

3.7. Teoría de catástrofes

Esta teoría nació entre los años 1970 y 1980, fruto de las investigaciones de *Rene Thom*, y está íntimamente relacionada con la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Una catástrofe la entenderemos como la pérdida de estabilidad de un sistema dinámico.

Consideremos un modelo concreto, por ejemplo

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t)) = \gamma Ay(t) - \phi y(t)^2 - \frac{\alpha y(t)^2}{1 + \beta y(t)^2}, \quad (3.18)$$

que representa la dinámica de una población de mariposas. Observamos que los dos primeros términos corresponden a un modelo logístico, mientras el último es un factor correspondiente al modelo² del disco de *Holling*.

Los puntos de equilibrio podemos encontrarlos resolviendo la ecuación $y'(t) = 0$. La Figura 3.8 (izquierda), muestra la representación gráfica de $g(y)$ variando el valor de $A = 30, 40, 45, 50, 55, 85$ con $\gamma = 0.0111$, $\phi = 0.009$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$.

La Figura 3.8 (izq.) representa al dibujo fase de la ecuación diferencial autónoma (3.18), para diferentes valores del parámetro A (que corresponde a la edad), mientras que la Figura 3.8 (der.) muestra sus puntos de equilibrio correspondientes. Observemos cómo existe un único punto de equilibrio para valores de $A < 38$ o $A > 74$. En cambio, si $40 < A < 74$ existen dos puntos de equilibrio estable separados por uno inestable.

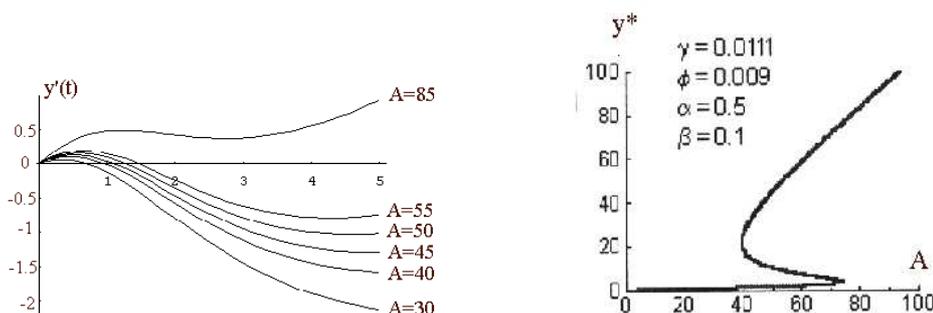


Figura 3.8. Izquierda: Líneas fases. Derecha: Evolución de los puntos de equilibrio.

Por último, comentar que este análisis es un complemento del diagrama de bifurcación que estudiaremos en los modelos discretos.

EJERCICIO 5

- 1 Con frecuencia la secreción de hormonas en la sangre es una actividad periódica. Si una hormona se segrega en un ciclo de 24 horas, entonces la razón de cambio del nivel de hormona en la sangre se puede modelar por el problema de valor inicial:

$$y'(t) = a - b \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kt, \quad y(0) = y_0$$

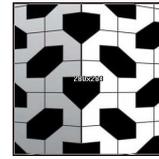
donde $y(t)$ es la cantidad de hormona en la sangre en el instante t , a es la razón promedio de secreción, b es la cantidad de variación diaria en la

²Describe la mortalidad causada por los depredadores.

secreción, k es una constante positiva que representa la razón con la que el cuerpo elimina la hormona de la sangre y y_0 a cantidad de hormona en la sangre en el instante inicial. Hallar la cantidad de hormona en la sangre en cada instante si $a = b = 1$, $k = 2$ e inicialmente no había hormona en la sangre.

- 2 Cierta mañana comenzó a nevar muy fuerte y continuó nevando constantemente durante todo el día. Una máquina quitanieve comenzó a las 9 horas a despejar la carretera. A las 11 horas había limpiado 2 km y a las 13 horas 1 km más. ¿A qué hora comenzó a nevar?
 - 3 La velocidad de combinación de una sustancia con otra se supone que es proporcional a la cantidad remanente de la primera de ellas. Si inicialmente hay 15 Kg de esta última y 5 Kg cuando han pasado 8 min., hallar cuánta sustancia habrá cuando transcurrió 5 min. y el tiempo que transcurre cuando queda 1 Kg. de sustancia.
 - 4 Acabada la cosecha de trigo en cierta localidad, un propietario llena su granero con una cantidad g_0 kg. de trigo. Alrededor del granero vive una especie de roedores que se alimentará del trigo recién almacenado. Un estudio realizado sobre la cantidad de roedores $r(t)$ muestra que crecen con una velocidad $r'(t)$ constante igual a 2, siendo r_0 el número inicial de roedores. Igualmente se ha concluido que, a causa de la presencia de los roedores, el ritmo de decrecimiento de la cantidad de trigo $g(t)$ es proporcional (con constante de proporcionalidad igual a -1) al producto entre la cantidad de roedores y la cantidad de trigo. Se pide:
 - Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de roedores en cada instante t .
 - Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de trigo en cada instante t .
 - Si $r_0 = 2$; ¿cuánto tiempo tardarán los roedores en consumir la cuarta parte de la cantidad de trigo inicial? ¿cuánto tardarán en comerse todo el trigo?
-





Tema 4

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE E.D.O

4.1. Preliminares

Cuando intentamos modelizar la dinámica de dos poblaciones que interactúan en un mismo hábitat, nos encontramos con un sistema de ecuaciones diferenciales. Son muchas las situaciones que pueden ser modelizadas a través de un sistema de E.D.O como el siguiente ejercicio donde se encuentran involucrados dos depósitos conectados entre sí.

EJEMPLO 4.1

- Supongamos los tanques de la Figura 4.1. El tanque A contiene 50 litros de agua en el que se ha disuelto 25 kilos de sal, y el tanque B con 50 litros de agua pura.

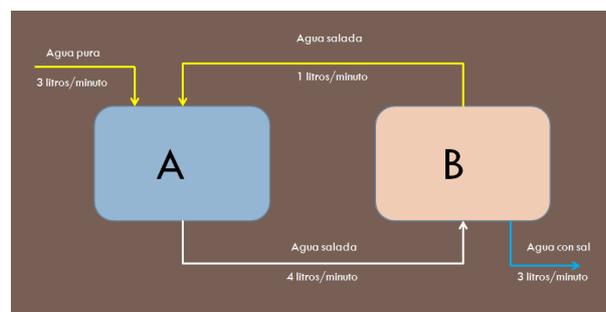


Figura 4.1.

Un líquido se bombea hacia dentro y fuera de los tanques como se indica en la Figura 4.1. Supongamos que el líquido que se intercambia entre los dos tanques y el líquido bombeado hacia fuera del tanque B se encuentra perfectamente mezclado.

Sean $x(t)$, $y(t)$ las cantidades de sal en el tanque A y B, respectivamente, en el minuto t . Realizando un estudio parecido a los modelos de disolución estudiados, sabemos que $x'(t)$ se escribe como la entrada de sal en el tanque A en el minuto t , menos la salida de sal en el tanque A en el minuto t . Es decir,

$$\begin{cases} x'(t) = (3 \text{ l/min}) * (0 \text{ Kg/l}) + (1 \text{ l/min}) * \left(\frac{y(t)}{50} \text{ Kg/l}\right) - (4 \text{ l/min}) * \left(\frac{x(t)}{50} \text{ Kg/l}\right) \\ y'(t) = (4 \text{ l/min}) * \left(\frac{x(t)}{50} \text{ Kg/l}\right) - (3 \text{ l/min}) * \left(\frac{y(t)}{50} \text{ Kg/l}\right) - (1 \text{ l/min}) * \left(\frac{y(t)}{50} \text{ Kg/l}\right) \end{cases}$$

simplificando, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{25}x(t) + \frac{1}{50}y(t) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2}{25}x(t) - \frac{2}{25}y(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

que en unión con las condiciones iniciales $x(0) = 25$, $y(0) = 0$ modeliza a la situación planteada.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es aquel que puede expresarse como

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (4.2)$$

siendo f_1, f_2, \dots, f_n , funciones reales definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Una función $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, cuyas componentes están definidas y son derivables en un intervalo, es una solución de (4.2) en dicho intervalo, cuando lo verifica idénticamente en él.

El primer problema que se nos plantea es saber si existe solución y en caso afirmativo ver si ésta es única. Puesto que gran parte de los modelos que utilizaremos serán de dinámica de poblaciones en los que están implicadas dos especies, los sistemas que nos aparecerán serán de dos ecuaciones. Por esta razón simplificaremos (4.2) convenientemente en los próximos teoremas.

TEOREMA 4.1.1 *Sea el siguiente problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(t, x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Si las funciones f y g son continuas en un abierto que contenga al punto (t_0, x_0, y_0) , entonces existe al menos una solución definida en un intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

TEOREMA 4.1.2 Además, si existen las derivadas parciales

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial g(t, x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial g(t, x, y)}{\partial y},$$

y son continuas, entonces la solución del problema de valores iniciales (4.3) es única.

4.2. Diagonalización de matrices cuadradas

Para la resolución de sistemas del tipo (4.1), es necesario calcular los valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Por tal motivo en esta sección recordaremos los conceptos más importantes relativos a la diagonalización de matrices cuadradas.

4.2.1. Introducción

De todas las aplicaciones lineales tienen un interés especial aquellas que van del espacio vectorial \mathbb{R}^n en si mismo, que reciben el nombre de endomorfismos. En ocasiones, es conveniente poder caracterizar un endomorfismo por una matriz lo más sencilla posible, con lo cual se simplifican todos los cálculos. Es normal que al representar matricialmente el endomorfismo, se elijan las mismas bases en los espacios de salida y entrada. De esta forma, si se realiza algún cambio de base en uno de los espacios, inmediatamente se produce el mismo cambio en el otro. Lo verdaderamente interesante en el estudio de un endomorfismo, es la matriz que lo representa y al utilizar las mismas bases de referencia, lo mismo da tomar la matriz A o bien la $C^{-1}AC$. Esto nos lleva a considerar que las matrices A y $C^{-1}AC$ son **semejantes** y que $C^{-1}AC$ se alcanza a partir de A por transformaciones de A .

Entre las matrices más cómodas para el cálculo y simples para su interpretación, están las matrices **diagonales**. Toda matriz cuadrada A puede considerarse como la matriz que representa a un endomorfismo, referida a la base canónica, tanto en el espacio de salida como en el de entrada. En virtud de las ventajas de utilizar matrices diagonales, podemos preguntarnos:

- ¿Existe alguna matriz diagonal B semejante a la matriz A ?
- En caso afirmativo, ¿qué base es la que tenemos que elegir en el espacio vectorial para que el endomorfismo esté representado por la matriz B ?

Esta cuestión es también conocida como el **problema de la diagonalización**. Una aplicación inmediata será la de desarrollar métodos que nos permitan transformar un sistema de ecuaciones lineales complicado en otro más sencillo de resolver, y esto

se hace eligiendo entre las matrices semejantes que representen el sistema, la que sea más sencilla, que evidentemente, si existe, será la que tenga forma de matriz diagonal. Estas técnicas son empleadas con frecuencia en múltiples campos de la matemática, como son entre otros: el análisis y descomposición de modelos biológicos lineales, análisis de datos multivariantes, análisis estructural, el análisis de la productividad de una matriz *input-output* de *Leontief*, la programación lineal, el análisis de las formas cuadráticas o el análisis de la estabilidad de los sistemas dinámicos.

4.2.2. Matrices semejantes

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo cuyas ecuaciones respecto de una cierta base B vienen dadas por la expresión $Y = AX$, donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Si cambiamos la base B por otra base B' , las ecuaciones de f respecto a B' serán:

$$Y' = C^{-1}ACX' = A'X',$$

donde C es la matriz del cambio de base de B' a B . Por otro lado, puede comprobarse que todas las matrices del tipo $A' = C^{-1}AC$ son matrices asociadas al mismo endomorfismo f (respecto de distintas bases). En este caso, diremos que las matrices A y A' son semejantes.

Nos proponemos averiguar, si entre todas las matrices asociadas a un mismo endomorfismo mediante la correspondencia $C^{-1}AC$, existe alguna que sea diagonal. En este caso, tomando a esta matriz diagonal como la asociada al endomorfismo, sus ecuaciones se simplifican.

DEFINICIÓN 4.2.1 (Polinomio característico) *Llamaremos polinomio característico de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ al siguiente polinomio de grado n en λ*

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Las raíces reales del polinomio característico serán los *autovalores* o *valores propios* de la matriz A . Llamaremos *orden de multiplicidad* de un autovalor λ a la multiplicidad de la raíz λ del polinomio característico. Algunas de sus propiedades más importantes de las matrices semejantes son las siguientes:

1. Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico (y, por tanto, los mismos autovalores).
2. Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante.
3. Si dos matrices A y B son semejantes, entonces también lo son sus potencias A^n y B^n .

4.2.3. Diagonalización de matrices cuadradas.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo cuya matriz asociada es $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ respecto de una cierta base B de \mathbb{R}^n . Supongamos que f sea diagonalizable, es decir, que existe otra base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de \mathbb{R}^n tal que la matriz asociada a f respecto de B' es una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

que será, por tanto semejante a A . Entonces, como sabemos, los elementos de la i -ésima columna de D , $(0, \dots, \lambda_i, \dots, 0)^T$, serán las coordenadas de $f(\vec{v}_i)$ en la base B' , con $i = 1, 2, \dots, n$. Escribiendo en forma vectorial dichas identidades, obtendremos que

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

DEFINICIÓN 4.2.2 *Llamaremos autovalor o valor propio de f a todo escalar λ tal que existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, no nulo, cumpliéndose:*

$$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

A todo vector \vec{v} que verifique la condición anterior le llamaremos autovector o vector propio de f asociado al autovalor λ .

Hemos visto que si f es diagonalizable, entonces existe una base del espacio vectorial formada por los autovectores de f . Por otro lado, si una base $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ está formada por autovectores de f , entonces existen n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que $f(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1, f(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2, \dots, f(\vec{v}_n) = \lambda_n \vec{v}_n$, y, por tanto, la matriz asociada a f respecto a esa base será la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Resumiendo, el problema de diagonalizar un endomorfismo f (también conocido como el problema de diagonalizar su matriz asociada A), es equivalente al problema de encontrar una base del espacio vectorial formada por los autovectores de f .

Veamos a continuación en qué casos existe dicha base y cómo se calcula.

Escribiendo en forma matricial la ecuación

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

o su equivalente

$$A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_i I)\vec{v}_i = 0.$$

Por el teorema de *Rouché - Fröbenius*, el sistema anterior tendrá solución no nula si y solamente si $|A - \lambda_i I| = 0$, es decir, si $P_A(\lambda_i) = 0$. Por tanto, los autovalores de f resultan ser los autovalores de su matriz asociada A . En consecuencia, la matriz diagonal buscada, si existe, será la matriz formada por los autovalores de A .

Una vez obtenidos los autovalores a partir del polinomio característico de A , los sustituiremos en la ecuación matricial $(A - \lambda_i I)X = 0$; desarrollando esta última ecuación obtendremos un sistema lineal homogéneo que nos proporciona las ecuaciones de un subespacio vectorial, al que llamaremos subespacio propio asociado al autovalor λ_i . Obviamente, los vectores de este subespacio son los autovectores de f asociados al autovalor λ_i . Observemos que la dimensión de todo subespacio propio será, como mínimo, igual a uno.

LEMA 4.2.3 *Autovectores asociados a autovalores distintos dos a dos son linealmente independientes*

Demostración. Supongamos dos autovalores diferentes $\lambda_i \neq \lambda_j$ y sean \vec{v}_i y \vec{v}_j sus autovectores asociados. Es decir

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i\vec{v}_i, \quad f(\vec{v}_j) = \lambda_j\vec{v}_j.$$

Si estos dos vectores no son linealmente independientes, entonces $\vec{v}_i = k\vec{v}_j$, lo que implica que

$$f(\vec{v}_i) = f(k\vec{v}_j) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i\vec{v}_i = k\lambda_j\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_i.$$

Pero al ser vectores no nulos, esta última igualdad implicaría que $\lambda_i = \lambda_j$, en contra de lo supuesto. ■

Como consecuencia del lema, vectores no nulos pertenecientes a distintos subespacios propios son linealmente independientes.

LEMA 4.2.4 *La dimensión del subespacio propio asociado a un cierto valor propio es como mucho igual al orden de multiplicidad del autovalor.*

Llamando α_i a la multiplicidad del autovalor λ_i y S_i al subespacio propio asociado con λ_i , tendremos que

$$1 \leq \dim(S_i) \leq \alpha_i.$$

Recordemos que la condición necesaria y suficiente obtenida para la existencia de una matriz diagonal semejante a A era poder encontrar una base del espacio vectorial formada enteramente por autovectores de f . Ahora bien, de los lemas anteriores se deduce que tal condición es equivalente a que la unión de bases de los subespacios propios sea base de todo el espacio vectorial \mathbb{R}^n , para lo cual es necesario y suficiente que la suma de las dimensiones de los subespacios propios sea n . Pero por el segundo lema, y puesto que suponemos que todas las raíces del polinomio característico de A son reales, esto equivale a que la multiplicidad de todo autovalor sea igual a la dimensión de su subespacio propio asociado.

TEOREMA 4.2.5 *El endomorfismo f es diagonalizable si y solo si para todo autovalor λ_i de f se tiene que $\alpha_i = \dim(S_i)$.*

Para llegar a un resultado más práctico, aplicamos la fórmula de las dimensiones al endomorfismo $(f - \lambda_i I)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} n &= \dim(\mathbb{R}^n) \\ &= \dim(\text{Kern}(f - \lambda_i I)) + \dim(\text{Im}(f - \lambda_i I)) \\ &= \dim(S_i) + \text{Rango}(A - \lambda_i I) \end{aligned}$$

luego

$$\text{Rango}(A - \lambda_i I) = n - \dim(S_i)$$

TEOREMA 4.2.6 *El endomorfismo f es diagonalizable si y solo si para cualquier autovalor λ_i de f , se tiene que*

$$\text{Rango}(A - \lambda_i I) = n - \dim(S_i) = n - \alpha_i.$$

Si D es la matriz diagonal formada por los autovalores de f y C es la matriz del cambio de bases, cuyas columnas son los vectores propios asociados a los valores propios de f , entonces:

$$D = C^{-1} A C$$

4.2.4. Cálculo de la potencia de una matriz diagonalizable

Supongamos que deseamos calcular la potencia n -ésima A^n , de una matriz A cuadrada y diagonalizable. Puesto que $D = C^{-1} A C$, se tiene que $A = C D C^{-1}$, y entonces

$$\begin{aligned} A^2 &= (C D C^{-1})(C D C^{-1}) = C D^2 C^{-1} \\ A^3 &= (C D^2 C^{-1})(C D C^{-1}) = C D^3 C^{-1} \\ A^4 &= (C D^3 C^{-1})(C D C^{-1}) = C D^4 C^{-1}. \end{aligned}$$

Por inducción, puede demostrarse que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = C D^n C^{-1}.$$

Al ser D diagonal

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y, por tanto, el cálculo de $C D^n C^{-1}$ resulta ser sumamente sencillo.

EJEMPLO 4.2

- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

para saber si es diagonalizable comenzamos resolviendo la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 3.$$

A continuación, calculamos las dimensiones de los subespacios engendrados por cada autovalor:

$$\begin{aligned} \dim(S_1) &= 3 - \text{Rango}(A - 2I) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(S_2) &= 3 - \text{Rango}(A - 3I) = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

La suma de las dimensiones es 2 y por tanto la matriz A no será diagonalizable.

EJEMPLO 4.3

- Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo, cuya matriz respecto a una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el ordenador para encontrar los valores y vectores propios de f . Empezamos introduciendo la matriz

$A := \{\{1, -1, 0\}, \{2, 4, 0\}, \{0, 0, 3\}\}$

A continuación calculamos los valores propios:

`Eigenvalues[A]`

`{2, 3, 3}`

Como no existen tres valores propios distintos, de entrada no podemos afirmar que la matriz A sea diagonalizable. Para ello es necesario conocer los vectores propios de f

`Eigenvectors[A]`

`{{-1, 1, 0}, {-1, 2, 0}, {0, 0, 1}}`.

Para ver si forman una base de \mathbb{R}^3 calculamos su determinante

`det[{{-1, 1, 0}, {-1, 2, 0}, {0, 0, 1}}]`

`-1`

Como podemos ver los tres vectores son independientes y, por tanto, existe una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de f . En consecuencia, la matriz A será diagonalizable.

4.3. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

Se trata de sistemas del tipo

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (4.4)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Para encontrar la solución general de (4.4) es necesario conocer n soluciones linealmente independientes. Si A es la matriz de los coeficientes, entonces las raíces de su ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$, nos proporcionan las soluciones buscadas.

- Si **todos los valores propios** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, **son distintos dos a dos**, y el vector $(x_{1i}, \dots, x_{ni})^T$ es el vector propio asociado al valor propio λ_i , entonces

$$y_i = (y_{1i}, \dots, y_{ni})^T = (x_{1i}, \dots, x_{ni})^T e^{\lambda_i t}, \quad (4.5)$$

es una solución del sistema (4.4)

- Cuando la ecuación característica tiene **raíces múltiples**, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, **con multiplicidades** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, respectivamente ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = n$), y **la matriz de los coeficientes** A **es diagonalizable**, entonces actuamos igual que en el primer caso
- Cuando la ecuación característica tiene **raíces múltiples**, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, **con multiplicidades** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, respectivamente ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = n$), y **la matriz de los coeficientes** A **no es diagonalizable**, entonces para cada $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, s$, existen soluciones del sistema (4.4) de la forma

$$z_i = \begin{pmatrix} P_{i1}(t)e^{\lambda_i t} \\ P_{i2}(t)e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ P_{in}(t)e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

donde P_{i1}, \dots, P_{in} son polinomios de grado inferior a α_i .

EJEMPLO 4.4

- Vamos a obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 + 3y_2 - y_3 \end{cases}$$

La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$. Es fácil comprobar que

$$(-1, 1, 1), \quad (-11, -1, 14), \quad (1, 1, 1),$$

son tres autovectores asociados a los tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente. La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Es decir

$$\begin{aligned} y_1 &= -c_1 e^t - 11c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \\ y_2 &= c_1 e^t - c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \\ y_3 &= c_1 e^t + 14c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.5

- Para obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ y_2' = 3y_1 - 5y_2 + 3y_3 \\ y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

comprobamos que la ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2$. Puede verse que la matriz A es diagonalizable siendo

$$(1, 1, 2), \quad (1, 1, 0), \quad (0, 1, 1),$$

una base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de A .

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Es decir

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} \\ y_2 &= c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-2t} \\ y_3 &= 2c_1 e^{4t} + c_3 e^{-2t}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.6

- Para obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

Volveremos a resolver la ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

que viene dada por $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. La ecuación tiene la raíz doble $\lambda_1 = 3$ es un autovalor doble y es inmediato comprobar que no existen dos autovectores de A que sean linealmente independientes. Por tanto, la matriz A no es diagonalizable. En este caso, el sistema posee soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1t + c_2)e^{3t} \\ (c_3t + c_4)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Si sustituimos en el sistema inicial

$$\begin{cases} c_1e^{3t} + 3(c_1t + c_2)e^{3t} = 2(c_1t + c_2)e^{3t} + (c_3t + c_4)e^{3t} \\ c_3e^{3t} + 3(c_3t + c_4)e^{3t} = -(c_1t + c_2)e^{3t} + 4(c_3t + c_4)e^{3t} \end{cases}$$

que simplificando e identificando coeficientes obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} 3c_1 = 2c_1 + c_3 \\ 3c_2 + c_1 = 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 = 4c_3 - c_1 \\ c_3 + 3c_4 = -c_2 + 4c_4 \end{array} \right\} \Rightarrow c_3 = c_1, c_4 = c_1 + c_2$$

La expresión general de la solución general viene dada por

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_1t + c_2)e^{3t} \\ y_2 &= (c_1t + (c_1 + c_2))e^{3t} \end{aligned}$$

4.4. Sistemas lineales completos con coeficientes constantes

Son sistemas de la forma:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Un primer procedimiento de resolución de estos sistemas consiste en expresar el sistema anterior como una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden superior. Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4.7

- Para resolver

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + t \\ \frac{dy}{dt} &= x - t \end{aligned} \right\}$$

derivamos la segunda de las ecuaciones y la sumamos con la primera

$$y'' + y = t - 1. \quad (4.7)$$

Para encontrar la solución general de (4.7) debemos comenzar localizando la solución general $y_h(t)$ de la ecuación diferencial homogénea $y'' + y = 0$.

Las raíces de su ecuación característica son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, lo cual nos permite escribir

$$y_h(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} = (c_1 + c_2) \cos t + (ic_1 - ic_2) \sin t = k_1 \cos t + k_2 \sin t.$$

Para obtener la solución particular de (4.7), derivamos dos veces en la ecuación diferencial inicial

$$y^{(4)} + y'' = 0.$$

Al ser $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, las raíces características podemos escribir la solución general

$$y = (k_1 \cos t + k_2 \sin t) + (A + Bt),$$

vemos que la solución particular responde al tipo $y_p = A + Bt$. Para determinar A y B sustituimos $y(t)$ en (4.7)

$$y'' + y = t - 1 \Rightarrow (0) + (A + Bt) = t - 1 \Rightarrow A = -1, B = 1.$$

En conclusión,

$$y(t) = -1 + t + k_1 \cos t + k_2 \sin t. \quad (4.8)$$

Para encontrar el valor de $x(t)$ procedemos de forma similar. En primer lugar eliminamos y en el sistema (4.7)

$$x'' + x = 1 + t.$$

La ecuación diferencial que obtenemos es parecida a la encontrada en el primer apartado y puede comprobarse que

$$x(t) = 1 + t + M_1 \cos t + M_2 \sin t. \quad (4.9)$$

Pero al ser (4.8) y (4.9) las soluciones, deben de verificar (4.7). Es inmediato comprobar que para que esto sea posible las constantes k_1, k_2, M_1, M_2 deben de cumplir la siguiente relación:

$$M_1 = k_2, \quad M_2 = -k_1$$

Es decir

$\begin{aligned} x(t) &= 1 + t - k_1 \sin t + k_2 \cos t \\ y(t) &= -1 + t + k_1 \cos t + k_2 \sin t \end{aligned}$

4.4.1. Método de variación de parámetros

Para resolver (4.6) en primer lugar buscamos la solución de sistema lineal homogéneo. A continuación, localizamos una solución particular del sistema (4.6) utilizando un procedimiento similar al método de variación de las constantes estudiado para las ecuaciones diferenciales. La solución la obtendremos sumando la solución particular con la solución general del correspondiente sistema homogéneo.

Si

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad y_n(t) = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

es un conjunto fundamental del sistema lineal homogéneo asociado a (4.6), entonces la función

$$\alpha_1(t)y_1(t) + \alpha_2(t)y_2(t) + \dots + \alpha_n(t)y_n(t)$$

donde $\alpha_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ son soluciones del siguiente sistema

$$\left. \begin{aligned} b_1(t) &= \alpha'_1(t)y_{11}(t) + \dots + \alpha'_n(t)y_{1n}(t) \\ b_2(t) &= \alpha'_1(t)y_{21}(t) + \dots + \alpha'_n(t)y_{2n}(t) \\ &\dots \\ b_n(t) &= \alpha'_1(t)y_{n1}(t) + \dots + \alpha'_n(t)y_{nn}(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

es una solución particular de (4.6).

EJEMPLO 4.8

- Para resolver el sistema

$$\begin{cases} y'_1 &= 2y_1 + 2 \\ y'_2 &= y_1 + 3y_2 + e^t \end{cases} \quad (4.12)$$

debemos encontrar los autovalores asociados a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Y los subespacios de autovectores asociados

$$\begin{aligned} S_1 &= L(\lambda_1 = 2) = \{(t, -t) : \forall t \in \mathbb{R}^*\} = \langle (1, -1) \rangle \\ S_2 &= L(\lambda_2 = 3) = \{(0, \beta) : \forall \beta \in \mathbb{R}^*\} = \langle (0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de poder escribir la solución general del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

O bien,

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2t} \\ y_2 &= -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{aligned}$$

Un sistema fundamental de (4.12) viene dado por

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

lo cual nos permite escribir una solución particular de (4.12)

$$\alpha_1(t) \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \alpha_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

siendo α_1 y α_2 soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1'(t)e^{2t} + \alpha_2'(t) \times 0 &= 2 \\ -\alpha_1'(t)e^{2t} + \alpha_2'(t)e^{3t} &= e^t \end{aligned} \right\}.$$

Los valores de α_1 , α_2 se obtienen de forma inmediata

$$\alpha_1(t) = -e^{-2t}, \quad \alpha_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}.$$

Una solución particular de (4.12) será

$$\begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix} = -e^{-2t} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

Para finalizar escribamos la solución general del sistema (4.12) propuesto

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{2t} - 1 \\ y_2(t) &= -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^t \end{aligned}}$$

4.5. Teoría cualitativa de sistemas

En el tema de las E.D.O hemos realizado el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales autónomas. Ahora, ampliaremos dicho estudio al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Hasta mediados del siglo XIX, básicamente el estudio de las ecuaciones diferenciales iniciado por *Newton* y *Leibnitz*, tenía como único objetivo el encontrar métodos cuantitativos para poder resolver la ecuación diferencial. Los pilares básicos donde

se sustentaba toda esta teoría eran los teoremas de existencia y unicidad de *Peano* y *Picard*.

A partir del momento comentado, otros matemáticos liderados por *Lyapunov* y *Poincaré* se enfrentaron al estudio de las ecuaciones diferenciales desde otro punto de vista. Ahora, se presupone la existencia de las soluciones y el objetivo no es encontrarlas, sino que lo interesante es saber cuál es su comportamiento asintótico. En 1899 *Poincaré* publicó un célebre tratado relacionado con la mecánica celeste. En él abordó los puntos más importantes de la teoría cualitativa, como son: la estabilidad y la periodicidad.

En este tema, consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases} \quad (4.13)$$

En la mayoría de las aplicaciones no es necesario encontrar explícitamente las soluciones de (4.13). Por ejemplo, supongamos que $x(t), y(t)$ representan a las poblaciones en el tiempo t de dos especies que compiten entre sí por el alimento y el espacio vital limitados en su hábitat. Supongamos también, que las tasas de crecimiento de $x(t)$ e $y(t)$ están gobernadas por el sistema diferencial anterior. En tal caso, no interesan los valores de $x(t)$ e $y(t)$ en todo tiempo t . Mas bien, son de interés las propiedades cualitativas que presentan $x(t)$ e $y(t)$. Concretamente, se desea contestar a las preguntas siguientes:

- ¿Hay valores α_1, α_2 para los cuales ambas especies coexisten en un régimen permanente? Es decir, ¿existen números α_1, α_2 tales que $x(t) = \alpha_1, y(t) = \alpha_2$ son una solución del sistema anterior? Si tales valores existen se les llama **puntos de equilibrio** del sistema (4.13).
- Supongamos que las dos especies coexisten en equilibrio. Repentinamente, se agregan algunos miembros de la primera especie al hábitat ¿Permanecerán $x(t)$ e $y(t)$ cerca de los valores de equilibrio para todo tiempo futuro?
- Supongamos que $x(t)$ e $y(t)$ tienen valores arbitrarios en $t = 0$. ¿Qué ocurre cuando t tiende a infinito? ¿Triunfará una de las dos especies, o terminará la lucha en un empate?

Más generalmente, interesa determinar las siguientes propiedades de las soluciones de (4.13)

- ¿Existen valores de equilibrio x_0 e y_0 , para los cuales el vector (x_0, y_0) es solución del sistema inicial (4.13)?
- Sea $\phi(t)$ una solución de (4.13). Supongamos que $\psi(t)$ es una segunda solución con $\psi(0)$ muy cerca de $\phi(0)$. Es decir, $\psi_j(0)$ está muy cerca de $\phi_j(0)$, siendo $j = 1, 2$ ¿Permanecerá $\psi(t)$ cercano a $\phi(t)$ para todo tiempo futuro, o divergerá $\psi(t)$ de $\phi(t)$ al tender t a infinito? Esta pregunta se conoce como problema de

estabilidad. Es el problema más fundamental en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y ha ocupado la atención de muchos matemáticos en los últimos cien años

- ¿Qué ocurre con las soluciones de (4.13) cuando t tiende a infinito? ¿Tienden todas las soluciones a valores de equilibrio? Si no tienden a valores de equilibrio, ¿se aproximarán al menos a una solución periódica?

La primera de las preguntas se responde de la siguiente manera. Observemos que x_0 e y_0 es un valor de equilibrio sí y solo sí:

$$\begin{aligned} 0 &= f(t, x_0, y_0) \\ 0 &= g(t, x_0, y_0) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.9

- Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1 - y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = x(t)^3 + y(t).$$

Los puntos de equilibrio se calculan resolviendo el sistema

$$1 - y(t) = 0, \quad x(t)^3 + y(t) = 0.$$

Existe un único punto de equilibrio $x(t) = -1, y(t) = 1$.

EJEMPLO 4.10

- Para hallar todas las soluciones de equilibrio del sistema

$$\frac{dx(t)}{dt} = (x(t) - 1)(y(t) - 1); \quad \frac{dy(t)}{dt} = (x(t) + 1)(y(t) + 1)$$

tenemos que resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} (x(t) - 1)(y(t) - 1) &= 0 \\ (x(t) + 1)(y(t) + 1) &= 0. \end{aligned}$$

La primera ecuación se satisface si $x(t)$, o bien $y(t)$, es igual a 1, mientras que la segunda ecuación se verifica si $x(t)$, o bien $y(t)$, es igual a -1 . Por tanto, $x(t) = 1, y(t) = -1$ y $x(t) = -1, y(t) = 1$ son las soluciones de equilibrio del sistema.

DEFINICIÓN 4.5.1 Una solución $x = \phi_1(t); y = \phi_2(t)$ del sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases},$$

se dice que es estable si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\psi_j(t_0) - \phi_j(t_0)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \epsilon, \quad \forall t > t_0, \quad j = 1, 2$$

para toda solución $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^T$ del sistema de ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN 4.5.2 Si una solución es estable y además toda solución que empieza suficientemente cerca de $(\phi_1(t), \phi_2(t))^T$ tiende a $(\phi_1(t), \phi_2(t))^T$ cuando t tiende a infinito, entonces se dice que es asintóticamente estable.

4.5.1. Órbitas y plano fase

El problema de la estabilidad puede resolverse por completo para todas las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Para este tipo de sistemas, en los cuales los coeficientes en las ecuaciones diferenciales son todos constantes, vimos en las secciones 3 y 4 métodos para encontrar sus soluciones explícitas. Además, el estudio local en entornos de puntos de equilibrio de sistemas no lineales puede reducirse al del caso lineal.

El estudio cualitativo de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales se simplifica si consideramos sistemas del tipo,

$$\begin{cases} x' = f(x, y) & ; & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(x, y) & ; & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (4.14)$$

que reciben el nombre de **autónomos**, (la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones). Físicamente, un sistema autónomo es aquel en el que los parámetros del sistema no dependen del tiempo. Los sistemas autónomos son frecuentes en la práctica; el movimiento de un péndulo no amortiguado de longitud l está regido por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Haciendo $x = \theta$ y $y = d\theta/dt$, podemos reescribir la última ecuación como un sistema autónomo no lineal de dos ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\left(\frac{g}{l}\right) \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Observemos que toda solución de (4.14), $x = x(t)$, $y = y(t)$ define una curva en el espacio tridimensional t, x, y . Es decir, el conjunto de todos los puntos $(t, x(t), y(t))$ describe una curva en el espacio tridimensional (t, x, y) .

EJEMPLO 4.11

- Por ejemplo, la solución $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ del sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x,$$

describe una hélice en el espacio (t, x, y) , ya que las soluciones son

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t$$

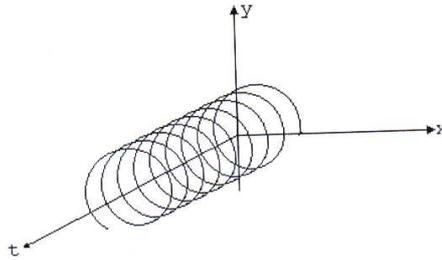


Figura 4.2. Órbita de $x' = -y, y' = x$.

Sin embargo, en muchas ocasiones se tiene en cuenta la curva definida por la solución en el plano Oxy . Es decir, se considera la curva $(x(t), y(t))$. Dicha curva se conoce como **órbita**, **trayectoria**, o **líneas de flujo** de la solución $x = x(t), y = y(t)$. El plano Oxy se denomina **plano fase** de las soluciones del sistema. De manera que podemos considerar la órbita $(x(t), y(t))$ como la trayectoria que describe la solución en el plano Oxy .

EJEMPLO 4.12

- Hemos visto que $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales $x' = -y; y' = x$. Conforme t aumenta de 0 a 2π , el conjunto de puntos $(\cos t, \sin t)$ describe la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ en el plano Oxy . Por tanto, dicha curva $x^2 + y^2 = 1$ es la órbita de la solución $x = \cos t, y = \sin t; 0 \leq t \leq 2\pi$. Cuando t aumenta de 0 a infinito, el conjunto de puntos $(\cos t, \sin t)$ describe la misma circunferencia un número infinito de veces.

EJEMPLO 4.13

- Puede comprobarse que $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t$ con $-\infty < t < \infty$, es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

A medida que la variable t va de $-\infty$ a ∞ , el conjunto de puntos $(e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ describe una espiral en el plano Oxy .

Una de las ventajas de considerar la órbita de la solución y no la solución misma es que, con frecuencia, es posible obtener la órbita de una solución sin conocimiento previo de la solución.

Sea $x = x(t), y = y(t)$ una solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

si $x'(t)$ es diferente de cero en $t = t_1$, entonces se puede resolver con $t = t(x)$ en una vecindad o entorno del punto $x_1 = x(t_1)$. Así pues, para t cerca de t_1 , la órbita de la solución $x(t), y(t)$ es la curva $y = y(t(x))$. Observemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

Las órbitas de las soluciones $x = x(t), y = y(t)$ del sistema anterior, son las curvas soluciones de la ecuación escalar de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

De modo que no es necesario encontrar una solución $x(t), y(t)$ del sistema para calcular su órbita, sólo se necesita resolver la ecuación diferencial escalar de primer orden anterior.

EJEMPLO 4.14

- Las órbitas del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = y^2; \quad \frac{dy}{dt} = x^2$$

son las curvas soluciones de la ecuación escalar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$$

Esta ecuación es de variable separables y puede verse fácilmente que todas las soluciones son de la forma $y(x) = (x^3 - c)^{\frac{1}{3}}$, con c constante. Por tanto, las órbitas del sistema anterior son el conjunto de todas las curvas $y = (x^3 - c)^{\frac{1}{3}}$.

En general, no es posible resolver explícitamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

Por consiguiente, tampoco lo es, en general, encontrar las órbitas del sistema. Sin embargo, si es posible obtener una descripción precisa de las órbitas del sistema. Tal cosa se puede debido a que el sistema de ecuaciones diferenciales determina un **campo de direcciones** en el plano Oxy . Es decir, el sistema de ecuaciones diferenciales indica cómo de rápido se mueve una solución a lo largo de su órbita, y en la dirección que se mueve. Dicho con más precisión, sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución del sistema. Conforme t aumenta, el punto $(x(t), y(t))$ se mueve a lo largo de la órbita de dicha solución. Su velocidad en la dirección x es $x'(t)$ y en la y es $y'(t)$ la magnitud de su velocidad vale

$$\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}$$

Pero $dx(t)/dt = f(x(t), y(t))$ y $dy(t)/dt = g(x(t), y(t))$. Por lo tanto, en cada punto (x, y) del plano fase del sistema se conoce

- La tangente a la órbita en (x, y) (la recta que pasa por (x, y) con números directores $f(x, y)$ y $g(x, y)$, respectivamente).
- La magnitud de la velocidad (o rapidez) $(f^2(x, y) + g^2(x, y))^{1/2}$, con la que la solución recorre su órbita

Con frecuencia, esta información sirve para obtener propiedades importantes de las órbitas sin necesidad de calcularlas.

4.5.2. Sistemas autónomos lineales

Más que la estabilidad interesa a veces el comportamiento de las curvas solución en la proximidad de un punto de equilibrio. De este comportamiento se puede dar una representación gráfica en el caso de sistemas bidimensionales. A continuación estudiaremos el comportamiento de las soluciones haciendo el estudio cualitativo de algunos casos más representativos de sistemas del tipo:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

- **Nodo o sumidero.** Supongamos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = -2x, \quad y' = -y. \tag{4.15}$$

Es inmediato comprobar que el único punto de equilibrio es $(0, 0)$. Por otro lado, la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tiene al $\lambda_1 = -2$ y al $\lambda_2 = -1$ como valores propios. Por tanto, las soluciones explícitas de (4.15) son

$$x(t) = c_1 e^{-2t}, \quad y(t) = c_2 e^{-t}. \quad (4.16)$$

Para este caso (4.15), es posible encontrar las ecuaciones de las órbitas. En efecto, si hacemos y'/x' nos aparece la ecuación diferencial

$$2x dy = y dx,$$

que es de variables separables. Su solución general es $y^2 = cx$. En consecuencia, las órbitas serán parábolas que pasan por el origen de coordenadas y simétricas respecto del eje de abscisas y el propio eje $y = 0$.

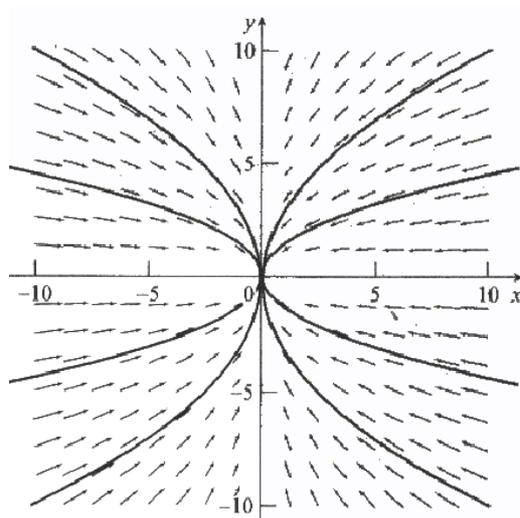


Figura 4.3. Órbitas de $x' = -2x, y' = -y$.

Observemos que si en (4.16) hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden hacia el punto de equilibrio. Por tanto, el $(0,0)$ será un punto de equilibrio estable y se denomina **nodo estable** o **sumidero**.

- **Punto de Silla** Si repetimos el proceso anterior para el sistema

$$x' = -x, \quad y' = y, \quad (4.17)$$

nos encontramos con que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Por tanto

$$x(t) = c_1 e^{-t}, \quad y(t) = c_2 e^t. \quad (4.18)$$

Las órbitas las obtenemos de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

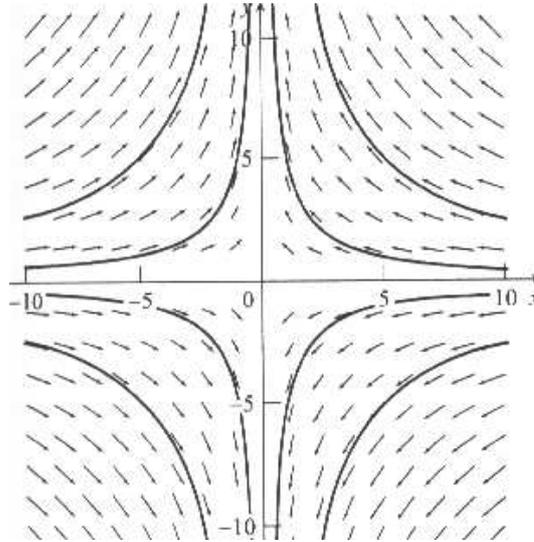


Figura 4.4. Órbitas de $x' = -x, y' = y$.

Si $c \neq 0$ las órbitas son hipérbolas, y en el caso $c = 0$ obtenemos el eje $y = 0$. Supongamos que $c > 0$, si en (4.18) hacemos tender t hacia $+\infty$, observamos que $x(t) \rightarrow 0$, mientras que $y(t) \rightarrow +\infty$. Si ahora hacemos que $t \rightarrow -\infty$, entonces $x(t) \rightarrow +\infty, y(t) \rightarrow 0$. Es decir, existen órbitas que cuando $t \rightarrow \infty$ se acercan al punto de equilibrio, mientras otras se alejan. En este caso el punto de equilibrio $(0, 0)$ se denomina **punto de silla**.

- **Fuente o nodo inestable** Supongamos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = 2x, \quad y' = y. \quad (4.19)$$

Los valores propios correspondientes a la matriz de los coeficientes son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Por tanto

$$x(t) = c_1 e^{2t}, \quad y(t) = c_2 e^t. \quad (4.20)$$

Si resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

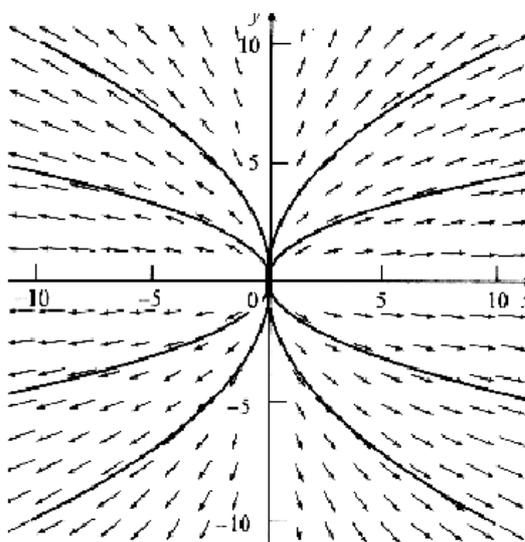


Figura 4.5. Órbitas de $x' = 2x, y' = y$.

Las órbitas coinciden con las estudiadas en el primer ejemplo correspondiente al sumidero. No obstante, si ahora en (4.20) hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces observamos que $x(t) \rightarrow \infty, y(t) \rightarrow \infty$. El punto de equilibrio $(0,0)$ será un **nodo inestable o fuente**.

- **Foco estable o espiral** Veamos que ocurre cuando los valores propios de la matriz de los coeficientes son números complejos. Por ejemplo

$$x' = -x + y, \quad y' = -x - y. \quad (4.21)$$

Los valores propios correspondientes a la matriz de los coeficientes son $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$, siendo sus vectores propios correspondientes $\vec{v}_1 = (1, i), \vec{v}_2 = (1 - i)$. Para encontrar las soluciones del sistema, expresamos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula de *Moirve*

$$\begin{pmatrix} e^{-t} \cos t + ie^{-t} \sen t \\ -e^{-t} \sen t + ie^{-t} \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ -e^{-t} \sen t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t} \sen t \\ e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

Las partes reales e imaginarias nos dan dos soluciones independientes. En consecuencia

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sen t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \sen t \\ e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} (c_1 \cos t + c_2 \sen t) \\ y(t) &= e^{-t} (c_2 \cos t - c_1 \sen t) \end{aligned}$$

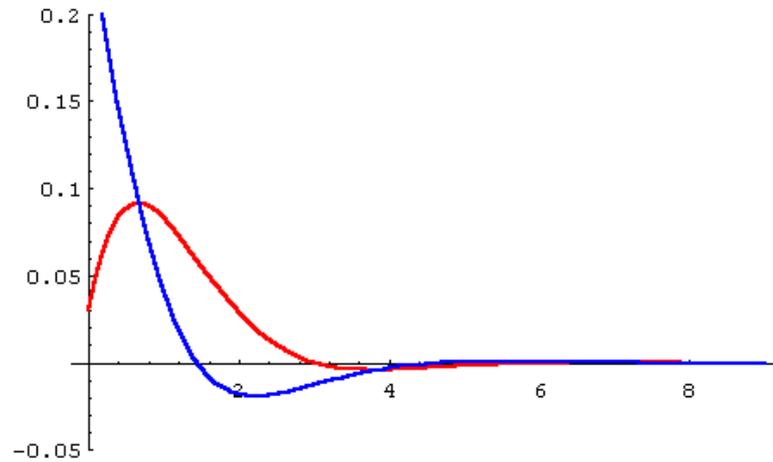


Figura 4.6. Curvas solución $x(t), y(t)$.

Observemos como al tender t hacia infinito $e^{-t} \rightarrow 0$ y las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ tienden hacia cero de forma alternada, debido al efecto causado por las funciones trigonométricas. Este desplazamiento hace que cuando $t \rightarrow \infty$, las órbitas tiendan al punto de equilibrio siguiendo una espiral. Por este motivo el punto de equilibrio es estable y recibe el nombre de **foco estable o espiral**.

Podríamos pensar en obtener las ecuaciones de las órbitas siguiendo un camino similar a los casos anteriores. Para ello planteamos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - y}{-x + y} \quad \Rightarrow \quad (x + y)dx + (y - x)dy = 0,$$

que es homogénea de grado uno. Para resolverla dividimos toda la ecuación por x y hacemos el cambio de variable $y = zx$. Simplificando obtenemos

$$(1 + z^2)dx = (1 - z)dz,$$

ecuación diferencial de variables separables que tiene por solución

$$\ln |x| = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como puede apreciarse, en esta ocasión no podemos despejar el valor de $y = \varphi(x)$, y por este motivo se tiene que hacer el estudio alternativo que hemos comentado anteriormente.

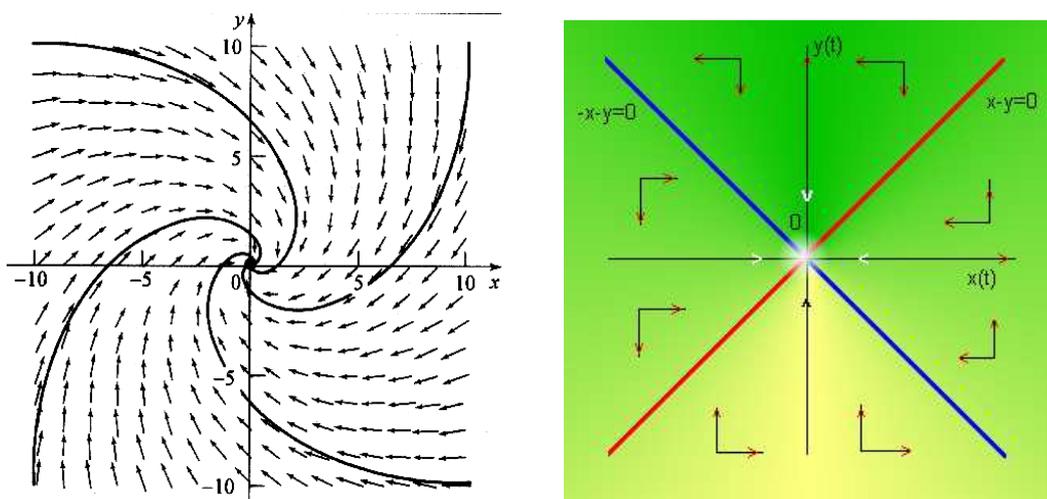


Figura 4.7. Órbitas de $x' = -x + y$, $y' = -x - y$ y su estudio cualitativo.

Todos estos ejemplos son casos particulares del siguiente teorema de clasificación de los puntos de equilibrio.

TEOREMA 4.5.3 *Supongamos el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

que tiene a λ_1, λ_2 como valores propios de la matriz de los coeficientes.

1. *Si λ_1, λ_2 son distintas con $\lambda_1 < \lambda_2$, entonces*

- *Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, el origen es un nodo estable o sumidero*
- *Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, el origen es un nodo inestable o fuente*
- *Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, el origen es un punto de silla.*

2. *Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces*

- *Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, el origen es un nodo estable o sumidero*
- *Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, el origen es un nodo inestable o sumidero.*

3. *Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, entonces*

- *Si $\alpha < 0$, el origen es un foco estable o espiral*
- *Si $\alpha > 0$, el origen es un foco inestable o espiral*
- *Si $\alpha = 0$, el origen es estable y es un centro.*

EJEMPLO 4.15

- Determinar si cada una de las soluciones $\vec{x}(t)$ de la ecuación diferencial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

es estable, asintóticamente estable o inestable.

Resolviendo la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = -(1 + \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$$

Los valores propios de A son $\lambda = -1$; $\lambda = -1 \pm 2i$. Dado que los tres valores propios tienen parte real negativa, se concluye que toda solución de la ecuación diferencial anterior es asintóticamente estable.

EJEMPLO 4.16

- Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

es inestable.

Como los valores propios de la matriz A son $\lambda = 6$ y $\lambda = -4$. Dado que un valor característico de A es positivo, concluimos que toda solución $\vec{x} = \phi(t)$ del sistema anterior es inestable.

EJEMPLO 4.17

- Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

es inestable.

Resolviendo la ecuación característica $|A - \lambda I| = -\lambda^2(\lambda + 7) = 0$ obtenemos como valores propios $\lambda = 0$ y $\lambda = -7$. Cualquier vector propio \vec{v} de A asociado al valor propio $\lambda = 0$ debe satisfacer la ecuación

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior, implica que

$$v_1 = \frac{3}{2}v_2, \quad v_3 = -3v_2,$$

de modo que cualquier vector propio \vec{v} de A con valor propio $\lambda = 0$ debe ser de la forma

$$\vec{v} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, toda solución $\vec{x} = \phi(t)$ de $\vec{x}' = A\vec{x}$ es inestable, ya que $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad 2, y A tiene solamente un vector propio linealmente independiente con valor propio 0.

4.5.3. Sistemas autónomos no lineales

A continuación realizaremos una pequeña aproximación al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. La primera pregunta que podemos hacernos es: ¿por qué interesarnos en este tipo de sistemas? La razón principal es que muchos sistemas dinámicos biológicos y las ecuaciones que los describen son no lineales por la propia naturaleza de los fenómenos en cuestión. Un primer método para estudiar dichos problemas es linealizar estas ecuaciones, pero con esto sólo conseguimos una aproximación de la solución buscada. No obstante, en muchas situaciones físicas las aproximaciones lineales resultan ser adecuadas y válidas para la mayor parte de las ocasiones. Ello no altera para nada el hecho de que en otras muchas otras situaciones la linealización está fuera de lugar.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo

$$\begin{cases} x' = f(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Los puntos de equilibrio sabemos que los calculamos hallando los valores donde se anulan f y g . Sea

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} & \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(a, b)}{\partial x} & \frac{\partial g(a, b)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \\ g_x(a, b) & g_y(a, b) \end{pmatrix}$$

TEOREMA 4.5.4 *La solución $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$:*

- *es asintóticamente estable si la parte real de las soluciones de la ecuación característica de $J(x_0, y_0)$ son negativas,*
- *es inestable si al menos una solución de la ecuación característica de $J(x_0, y_0)$ tienen parte real positiva.*

Si las soluciones de la ecuación característica de $J(x_0, y_0)$ tiene parte real cero no podemos asegurar la estabilidad. En el caso particular en que $J(x_0, y_0)$ sea una matriz de 2×2 , si todos sus valores propios tienen parte real cero, entonces el punto de equilibrio es estable.

EJEMPLO 4.18

- Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = 1 - xy \\ y' = g(x, y) = x - y^3, \end{cases}$$

resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - xy \\ 0 &= x - y^3, \end{aligned}$$

y obtenemos $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (-1, -1)$. Para poderlos clasificar debemos encontrar la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}.$$

A continuación buscamos los valores propios de esta matriz, particularizada en cada uno de los puntos de equilibrio.

En el punto $P_1 = (1, 1)$ la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

tiene a $\lambda = -2$ como valor propio doble. Por el teorema anterior, el punto P_1 será asintóticamente estable.

De forma similar, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

tiene por valores propios $\lambda = -1 \pm \sqrt{5}$. Por tanto, el punto P_2 es asintóticamente inestable.

EJEMPLO 4.19

- Modelo neuronal de Fitzhugh-Nagumo.** El cerebro es un sistema complejo. Para entender esta complejidad no es posible prescindir de los modelos matemáticos en el estudio de las unidades funcionales que lo componen. Un buen ejemplo de este tipo de modelos es el estudio de la sinapsis neuronal a través del modelo de *Fitzhugh-Nagumo*.

Las células nerviosas o neuronas están constituidas fundamentalmente de tres partes: el cuerpo neuronal o **soma** donde se procesa toda la información, una prolongación

con pocas ramificaciones llamada **axon** como hilo conductor, y por último unas zonas muy ramificadas conocidas como **dendritas**, encargadas de ponerse en contacto con otras células nerviosas.

En un principio las neuronas están inactivas hasta el momento en el que alcanzan un nivel crítico debido a las entradas a través de las dendritas y en ese momento reaccionan amplificando este potencial y dirigiéndolo hacia su último terminal.

El modelo de *Fitzhugh-Nagumo* representa a este proceso en condiciones ideales de laboratorio y además admitiendo que todas las dendritas receptoras almacenan el mismo potencial. Además supondremos que la neurona se activa sólo debido a que existe un potencial externo suficientemente elevado, dando lugar a una variación del potencial de membrana de las neuronas. Dicha variación está determinada por el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = V'(t) = -V(V - V_1)(V - V_2) - W + E \\ \frac{dW}{dt} = W'(t) = \epsilon(V - CW) \end{cases} \quad (4.22)$$

Donde V es el potencial de membrana; W es la conductancia de iones dependiendo del voltaje; E es el voltaje externo aplicado; C y ϵ son constantes. Los parámetros V_1 y V_2 representan la influencia del potencial sobre la tasa de cambio de este potencial, siendo los valores considerados $V_1 = 0.2$ y $V_2 = 1.0$

Solución con Mathematica[®] El modelo con el que trabajaremos es un caso particular de (4.22) y viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales,

$$\begin{cases} V'(t) = -V(V - 0.2)(V - 1) - W + 0.23 \\ W'(t) = 0.02(V - 0.5W) \end{cases} \quad (4.23)$$

Para analizar su comportamiento para valores de t “suficientemente grandes”, y puesto que no podemos encontrar la solución exacta, debemos localizar sus puntos de equilibrio y posteriormente clasificarlos.

Si utilizamos Mathematica[®] y resolvemos de forma aproximada el sistema,

$$\begin{cases} -V(V - 0.2)(V - 1) - W + 0.23 = 0 \\ 0.02(V - 0.5W) = 0 \end{cases}$$

obtenemos un único punto de equilibrio con valores no complejos,

$$P = (0.110603, 0.221206)$$

El primer paso para estudiar la estabilidad del punto P , es encontrar la matriz jacobina,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f[V, W]}{\partial V} & \frac{\partial f[V, W]}{\partial W} \\ \frac{\partial g[V, W]}{\partial V} & \frac{\partial g[V, W]}{\partial W} \end{pmatrix}$$

siendo

$$f[V, W] = -V(V - 0.2)(V - 1) - W + 0.23, \quad g[V, W] = 0.02(V - 0.5W).$$

En nuestro caso,

$$J = \begin{pmatrix} -3V^2 + \frac{12V}{5} - \frac{1}{5} & -1 \\ \frac{1}{50} & -0.01 \end{pmatrix}$$

que particularizada en el punto $P = (0.110603, 0.221206)$ la matriz jacobiana vale,

$$J = \begin{pmatrix} 0.0287481 & -1 \\ \frac{1}{50} & -0.01 \end{pmatrix}$$

Si encontramos su autovalores,

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0.00937406 - 0.140088i, \quad \lambda_2 = 0.00937406 + 0.140088i$$

observamos que son dos números complejos conjugados con parte real positiva, y en consecuencia el punto de equilibrio será inestable.

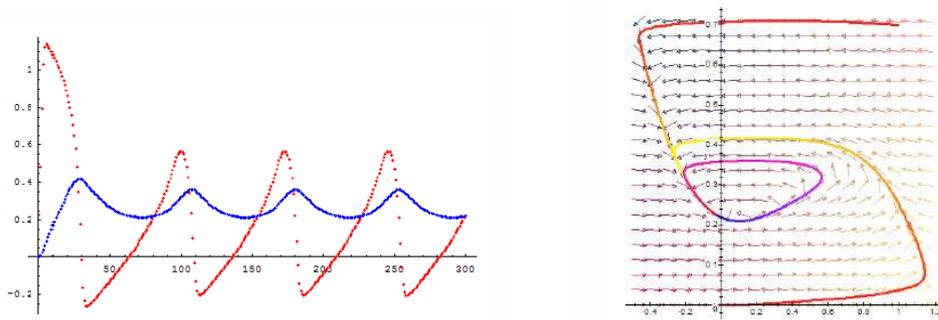


Figura 4.8. Curvas solución y el diagrama de fases.



Tema 5

MODELOS BASADOS EN SISTEMAS DE E.D.O

5.1. Modelo de un riñón artificial II

Iniciaremos los modelos continuos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales, ampliando el estudio realizado en el Tema 3 para modelizar el funcionamiento de un riñón artificial.

Supongamos que $x(t)$ sea la concentración de impurezas en la sangre a lo largo de la membrana en el tiempo t , e $y(t)$ la concentración de impurezas en el líquido de diálisis. Aplicando la ley de *Fick*, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{a}{v}(y(t) - x(t)), & x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{a}{V}(x(t) - y(t)), & y(0) = y_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

siendo $a \in \mathbb{R}^+$ la constante que mide la eficacia del líquido de diálisis, y las constantes v y V las tasas de flujo volumétrico de la sangre y del líquido de diálisis, respectivamente.

5.1.1. Búsqueda de las soluciones

Para poder encontrar las soluciones de (5.1) necesitamos saber los valores propios de la matriz de los coeficientes. Resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -\frac{a}{v} - \lambda & \frac{a}{v} \\ \frac{a}{V} & -\frac{a}{V} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda \left(\frac{a}{v} + \frac{a}{V} + \lambda \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{v} - \frac{a}{V}.$$

Estos valores propios tienen asociados los siguientes vectores propios

$$\vec{v}_1 = (1, 1), \quad \vec{v}_2 = \left(1, -\frac{v}{V}\right).$$

En consecuencia, la solución general adopta la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\left(\frac{a}{v} + \frac{a}{V}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{v}{V} \end{pmatrix}.$$

Es decir

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^{-\left(\frac{a}{v} + \frac{a}{V}\right)t} \\ y(t) = c_1 - \frac{v}{V} c_2 e^{-\left(\frac{a}{v} + \frac{a}{V}\right)t} \end{cases}$$

Las constantes c_1 y c_2 se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales.

$$\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 \\ y_0 = c_1 - \frac{v}{V} c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{V y_0 + v x_0}{V + v}, \quad c_2 = \frac{V}{V + v} (x_0 - y_0).$$

Si deseamos conocer el comportamiento del modelo a largo plazo, hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces

$$x(t) \rightarrow c_1 = \frac{V y_0 + v x_0}{V + v}, \quad y(t) \rightarrow c_1 = \frac{V y_0 + v x_0}{V + v}.$$

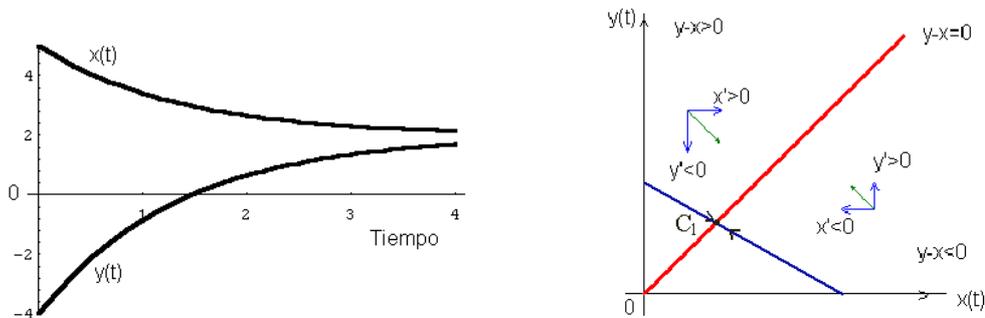


Figura 5.1. Curvas solución y el diagrama de fases.

5.1.2. Estudio cualitativo

En este momento estamos interesados en analizar el comportamiento de las soluciones de (5.1) a través de sus puntos de equilibrio. Para poderlos encontrar, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{a}{v}(y(t) - x(t)) = 0 \\ \frac{a}{V}(x(t) - y(t)) = 0. \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio son (α, α) , $\alpha \geq 0$. Es decir todos aquellos que están situados en la bisectriz del primer cuadrante y el origen. Para clasificarlos necesitamos calcular

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{v} & \frac{a}{v} \\ \frac{a}{V} & -\frac{a}{V} \end{pmatrix},$$

que como podemos apreciar, coincide con la matriz de los coeficientes. Por ello, sus valores propios serán $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -a/v - a/V$, y aplicando el Teorema 4.5.4, concluimos que estos puntos de equilibrio son asintóticamente estables.

Para encontrar las órbitas resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x-y)}{V(y-x)} \Rightarrow dy = -\frac{v}{V} dx \Rightarrow y = -\frac{v}{V}x + C.$$

Observemos como el campo de direcciones en el plano fase no depende de a , pero depende fuertemente de $-v/V$. La Figura 5.1 (derecha) representa a este campo de direcciones, y puede observarse cómo las órbitas se desplazan hacia la derecha si $y > x$, mientras que si $y < x$ lo hacen hacia la izquierda.

5.2. Un modelo elemental de dos poblaciones

En el Tema 3 estudiamos un modelo de crecimiento para una sola especie $x(t)$, que disponía de una fuente de recursos ilimitados. Por tanto, suponíamos que el ritmo de crecimiento de esta especie, en el tiempo t , era proporcional al número de individuos que constituyen la población en ese mismo tiempo t . Es decir, $x'(t) = rx(t)$, dando lugar al modelo de crecimiento exponencial $x(t) = x(0)e^{rt}$. Supongamos ahora que tenemos dos especies, que de encontrarse separadas, seguirían una ley de crecimiento exponencial

$$x'(t) = r_1 x(t), \quad y'(t) = r_2 y(t).$$

Si ambas especies se ponen en contacto, entonces sus ritmos de crecimiento decrecen en proporción al número de encuentros de la especie $x(t)$ con la $y(t)$. Tenemos entonces un modelo muy simple que describe el crecimiento de ambas especies

$$\begin{cases} x'(t) = r_1 x(t) - ax(t)y(t), & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = r_2 y(t) - bx(t)y(t), & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde a y b son constantes positivas.

5.2.1. Resolución y análisis cualitativo

Con el objetivo de simplificar los cálculos, analizaremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineal

$$\begin{cases} x' = x(5 - y) \\ y' = y(5 - x) \end{cases}$$

siendo $x \geq 0$, $y \geq 0$, para que el estudio tenga sentido biológico.

Estamos ante un tipo de sistemas para el que no disponemos de métodos de resolución. En este caso, lo que haremos será analizar de manera cualitativa el problema, para ver el comportamiento de sus soluciones.

Si calculamos las órbitas, debemos resolver la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(5-x)}{x(5-y)} \Rightarrow \int \left(\frac{5}{y} - 1 \right) dy = \int \left(\frac{5}{x} - 1 \right) dx,$$

cuya solución es

$$5 \ln y - y = 5 \ln x - x + c.$$

Notemos que en esta ecuación no podemos obtener una función explícita del tipo $y = \varphi(x)$. Solamente podemos deducir que si $c = 0$, entonces $y = x$ es una solución.

Nos vemos obligados a utilizar un nuevo método, que consiste en buscar los puntos de equilibrio y analizar las curvas de pendiente nula.

Es inmediato ver que los puntos de equilibrio son el $(0, 0)$ y el $(5, 5)$. Podemos clasificarlos utilizando el Teorema 4.5.4.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-y & -x \\ -y & 5-x \end{pmatrix}.$$

En el primero de los puntos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

tiene al 5 como valor propio doble. El punto $(0, 0)$ es asintóticamente inestable. Del mismo modo

$$J(5, 5) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix},$$

posee los valores propios $\lambda = \pm 5$. En consecuencia, el $(5, 5)$ es un punto de equilibrio asintóticamente inestable.

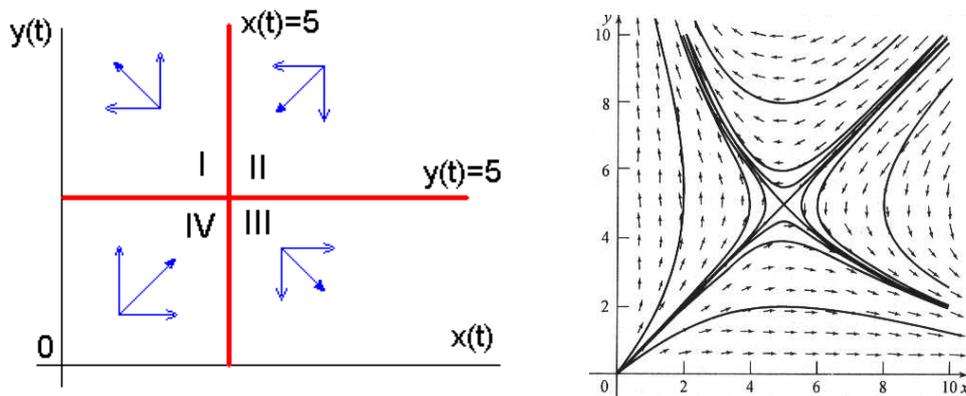


Figura 5.2. Análisis cualitativo y órbitas del modelo.

El análisis del crecimiento y decrecimiento aparece reflejado en la Tabla 5.1

REGIÓN	$x(t), y(t)$	$x'(t)$	$y'(t)$
I	$x < 5, y > 5$	NEGATIVO	POSITIVO
II	$x > 5, y > 5$	NEGATIVO	NEGATIVO
III	$x > 5, y < 5$	POSITIVO	NEGATIVO
IV	$x < 5, y < 5$	POSITIVO	POSITIVO

Tabla 5.1

Si una órbita entra en la región I, no puede escapar de ella y cuando t aumenta $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow \infty$. De manera semejante, las órbitas que están en la región III no pueden escapar y cuando t aumenta, ocurre que $x \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow 0$. En cuanto a las órbitas que se encuentran en la segunda de las regiones, tienen dos posibilidades, tienden al punto de equilibrio $(5, 5)$ o por el contrario entran en la región I o III, y se comportan como hemos comentado anteriormente. Por último, las órbitas de la cuarta región se alejan del punto de equilibrio $(0, 0)$ hasta llegar al punto $(5, 5)$ o por el contrario cruzan a las regiones I o III. En resumen, el punto $(0, 0)$ es un **nodo inestable**, mientras que el $(5, 5)$ es un **punto de silla**.

Ahora, podemos hacer algunos comentarios sobre el comportamiento a largo plazo del modelo. Si en el momento inicial la población x es mayor que la de y , entonces esta segunda población se extinguirá, y viceversa. Este tipo de comportamiento se conoce con el nombre de principio de exclusión competitiva y lo estudiaremos en el próximo apartado. Si inicialmente coincide el número de individuos de ambas poblaciones, entonces tendrán la tendencia a coexistir y tenderán al punto de equilibrio $(5, 5)$ cuando t aumente.

5.2.2. Principio de exclusión competitiva

Es bastante frecuente observar en la naturaleza que la lucha por la existencia entre dos especies similares, que compiten por un mismo alimento y un mismo espacio vital, ambos limitados, termina casi siempre con la completa extinción de una de las especies. Este fenómeno fue descubierto por *Darwin* en 1859 y se conoce como el principio de exclusión competitiva:

Debido a que las especies de un mismo género presentan usualmente, aunque no en forma invariable, mucha mayor similitud en habitat, constitución y siempre en estructura, la lucha entre ellos será por lo general más intensa si llegan a competir entre sí que si lo hacen con especies de géneros distintos.

Hay una explicación biológica muy interesante para este hecho, que está basada en la idea de nicho ecológico.

DEFINICIÓN 5.2.1 *Un nicho indica la ubicación característica de una especie dada en una comunidad, es decir, cuáles son sus hábitos, alimentación y modo de vida*

Se ha observado que como resultado de la competición, dos especies similares rara vez ocupan el mismo nicho. Mas bien, cada una de las especies adopta aquel tipo de alimentación y modo de vida con los cuales tiene ventaja sobre sus competidores. Si las dos especies tienden a ocupar el mismo nicho, entonces la lucha por la supervivencia entre ellas será muy intensa y el resultado será la extinción de la especie más débil.

El Principio de la exclusión competitiva, puede ser definido del siguiente modo:

DEFINICIÓN 5.2.2 *Si dos especies competidoras coexisten en un ambiente estable, lo hacen como resultado de la diferenciación de los nichos. Sin embargo, si no existe dicha diferenciación, o si el hábitat la hace imposible, una de las especies competidoras eliminará o excluirá a la otra. Así, la exclusión se produce cuando el nicho del competidor superior llena por completo aquellas partes del nicho del competidor inferior que se encuentran en el hábitat.*

El principio de exclusión competitiva ha sido ampliamente aceptado,

- porque el peso de la evidencia se halla a su favor,
- porque parece intuitivamente lógico,
- porque existen razones teóricas para creer en él, por ejemplo el modelo de *Lotka-Volterra*.

5.3. El modelo presa-depredador

Uno de los temas más clásicos en Biología es el estudio de un sistema reducido a dos elementos (suelen ser dos especies), que actúan recíprocamente, representado por la relación entre depredador y presa: el modelo zorros y conejos. Este modelo puede extenderse a un parásito y su “huésped”, a herbívoros y pastos, a una población explotada (por ejemplo una población de peces) y al hombre que la explota. Se trata pues, de un modelo de amplia aplicación en Biología.

El estudio matemático de la dinámica de poblaciones data de *Volterra*, *Lotka* y *Gause*. Es razonable tratar el problema del modelo presa-depredador sobre las hipótesis de que el sistema, aunque muestre fluctuaciones, se mantiene en equilibrio durante cierto tiempo. Si no fuera así, el sistema ya hubiera degenerado en tiempos pasados, reduciéndose a una sola especie o a ninguna.

Del modelo matemático que describe fluctuaciones, cuya pertinencia se ha comprobado empíricamente, se pueden formular, siguiendo a *Volterra*, en forma de unas cuantas reglas sencillas:

- Regla de los ciclos periódicos. Si existen fluctuaciones, son periódicas.
- Regla de conservación de las medias.
- Regla de las perturbaciones medias. Si se destruyen de manera uniforme y proporcional individuos de ambas especies, la media del número de individuos de la especie comida aumenta y disminuye la población media del depredador.
- Las fluctuaciones de corto periodo están sincronizadas.
- La destrucción uniforme del depredador acelera las fluctuaciones, y la de las presas las retarda.

Vimos en el Tema 3 que en los modelos estudiados, se obtenía información sobre una única función desconocida. Sin embargo, en algunas aplicaciones intervienen dos funciones desconocidas que están ligadas entre sí por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales. En el presente tema, estudiaremos una situación biológica en el cual analizaremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineal, con el objetivo de obtener información sobre el comportamiento de dos funciones desconocidas.

Sabemos que existe una competición constante por la supervivencia entre las diferentes especies animales que habitan un mismo entorno. Un tipo de animales sobrevive alimentándose de otros; un segundo, desarrollando métodos de evasión para evitar ser comido; etc. Como simple ejemplo de este conflicto universal entre presas y predadores, imaginemos una isla habitada por zorros y conejos. Los zorros se alimentan de conejos y los conejos de alfalfa. Supondremos que la alfalfa es tan abundante que los conejos nunca tienen escasez de alimento. Cuando los conejos son abundantes, los zorros no tienen problemas y su población aumenta. Cuando los zorros son ya demasiado numerosos y necesitan para comer demasiados conejos, comienza un período de hambre y su población disminuye. En consecuencia, los conejos están relativamente a salvo y se multiplican. Esto conlleva un nuevo aumento de la población de zorros, y con el transcurso del tiempo, el ciclo se repite una y otra vez, con crecimientos y decrecimientos alternos de las poblaciones de las dos especies.

Se han desarrollado dos tipos principales de modelos para intentar comprender la dinámica presa-depredador. Uno de ellos, basado originariamente en el trabajo de *Nicholson y Bailey* (1935), utiliza ecuaciones de diferencia para representar las interacciones de huésped-parasito con generaciones discretas. Estos modelos fueron revisados por *Hassell* (1978), *Begon y Mortimer* (1981). El segundo tipo, se basa en ecuaciones diferenciales y utiliza sobre todo modelos gráficos simples.

El modelo con ecuación diferencial más sencillo recibe el nombre de sus creadores: *Lotka-Volterra* (*Lotka*, 1925; *Volterra*, 1926). Es muy elemental, pero es un punto de partida muy útil. El biólogo italiano *Umberto D'Ancona*, recopiló información sobre los porcentajes de capturas de diferentes especies en diversos puertos

del Mediterráneo durante los años de la Primera Guerra Mundial. En particular, la información incluía los porcentajes de capturas de tiburones los cuales no son adecuados como pescado comestible.

D'Ancona observó un gran aumento en el porcentaje de capturas de tiburones durante el período de la guerra. Pensó que el incremento en tal porcentaje se debía a la gran reducción en los niveles de pesca durante el mismo período. La pregunta era ¿cómo afecta la intensidad de la pesca a la población de peces? La respuesta a tal pregunta era de gran importancia para *D'Ancona* en su investigación acerca de la lucha por la existencia entre especies en competición. También era de mucho interés para la industria pesquera.

Lo que distingue a los tiburones de los peces comestibles es que los primeros son depredadores, mientras que los segundos son sus presas; los tiburones dependen de los peces comestibles para su supervivencia. Inicialmente *D'Ancona* pensó que esa era la razón del incremento de los tiburones durante la Primera Guerra Mundial. Como se había reducido fuertemente el nivel de captura en dicho período, había entonces más presas disponibles para los tiburones, los cuales se reprodujeron más rápidamente y con éxito. Sin embargo, la explicación tenía un fallo ya que también había más peces comestibles en ese período. La teoría de *D'Ancona* muestra solamente que hay más tiburones si la pesca se realiza a niveles más bajos; no explica por qué un bajo nivel de pesca es más benéfico para el depredador que para la presa. La pregunta clave es, ¿por qué una disminución de la intensidad de la pesca, provoca un aumento en la población de los peces depredadores, y por tanto, es más beneficioso para éstos que para los peces comestibles

D'Ancona trasladó el problema al matemático italiano *Vito Volterra*, que inició su análisis separando a los animales en dos poblaciones: las presas $x(t)$ y los depredadores $y(t)$. Su razonamiento fue entonces que los peces comestibles no compiten muy intensamente entre sí por su alimento, ya que éste es muy abundante y la población de peces no es muy densa. Por ello, en ausencia de los tiburones, los peces comestibles crecerían de acuerdo con la ley exponencial del crecimiento de las poblaciones $x'(t) = ax(t)$, si suponemos que el número de muertes de presas por unidad de tiempo es proporcional al número de contactos presa-depredador $bx(t)y(t)$ para una constante positiva b . Por lo tanto

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t).$$

De la misma manera, pensó que en el tiempo t , los depredadores estarán muriendo a una razón de $cy(t)$, para alguna constante positiva c . Parece razonable suponer que están prosperando y creciendo (ya que se están alimentando) a una razón $dx(t)y(t)$ que es proporcional a su número en ese momento $y(t)$ y al suministro de alimento $x(t)$. Se tiene

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t).$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = bx(t) \left(\frac{a}{b} - y(t) \right), & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = dy(t) \left(x(t) - \frac{c}{d} \right), & y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (5.2)$$

siendo a, c , las tasas per capita de cambio en ausencia uno de otro y b, d , las tasas de intercambios de interacción, describe la evolución de los tiburones y los peces comestibles en el caso de no haber pesca alguna. El modelo fue descubierto de manera independiente por *Lotka* y *Volterra*, y se ha demostrado que este modelo es bastante exacto cuando predice los cambios en las poblaciones de alces y lobos o de conejos y zorros, siempre que estas especies vivan en ecosistemas aislados.

A continuación estudiaremos este sistema y obtendremos algunas propiedades. Al final, incluiremos en el modelo el efecto de la pesca y se demostrará que un bajo nivel de la captura es más benéfico para los tiburones que para las especies comestibles. De hecho, llegaremos al sorprendente resultado de que un bajo nivel de pesca, en realidad, es dañino para los peces comestibles.

5.3.1. Análisis cualitativo del sistema

Observemos en primer lugar que el sistema tiene dos puntos de equilibrio

$$x(t) = 0, y(t) = 0; \quad \text{y} \quad x(t) = \frac{c}{d}, y(t) = \frac{a}{b}.$$

Para clasificarlos aplicamos el Teorema 4.5.4. De esta manera, la matriz que nos aparece al realizar las derivadas parciales respecto de x y de y es:

$$\begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix},$$

que particularizada en el punto $(0, 0)$ es

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene como valores propios $\lambda_1 = a > 0$ y $\lambda_2 = -c < 0$. Por tanto, el punto crítico $(0, 0)$ es un **punto de silla inestable**.

Para el punto $(c/d, a/b)$ se obtiene $\lambda_1 = +i\sqrt{cd}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{cd}$, y el Teorema 4.5.4 nos dice que estamos ante un **centro estable**.

Por supuesto, la primera de las soluciones no interesa. Es inmediato comprobar que el sistema tiene también la familia de soluciones

$$x(t) = x_0 e^{at}, y(t) = 0; \quad x(t) = 0, y(t) = y_0 e^{-ct}.$$

Las órbitas del sistema para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, son las curvas soluciones de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}.$$

Esta ecuación es de variables separable, ya que puede expresarse de la forma

$$\frac{a - by}{y} dy = \frac{-c + dx}{x} dx.$$

Por consiguiente, $a \ln y - by + c \ln x - dx = k_1$, para una constante k_1 . Tomando exponenciales en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$\frac{y^a x^c}{e^{by} e^{dx}} = K,$$

para una constante K . Así pues, las órbitas del sistema son la familia de curvas definidas por la ecuación anterior. Puede demostrarse que se trata de curvas cerradas en cuyo centro se encuentra el punto que corresponde a la solución de equilibrio, donde las poblaciones pueden mantenerse indefinidamente.

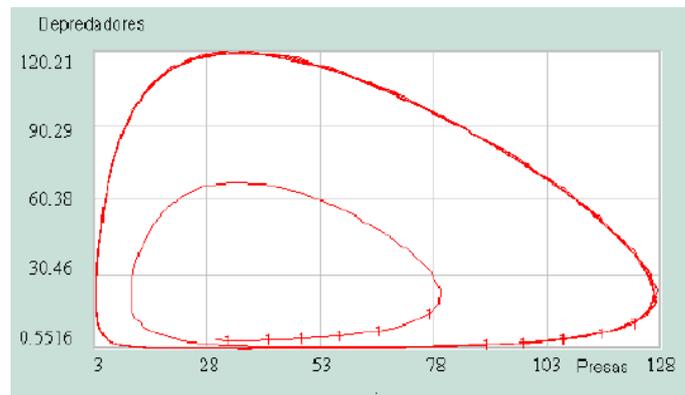


Figura 5.3. Órbitas para un modelo presa - depredador

Las trayectorias son curvas cerradas, correspondientes a soluciones que son periódicas en el tiempo. Así que tanto el eje x como el eje y son órbitas del sistema. Eso implica que toda solución $x(t), y(t)$ del sistema, que empieza en el primer cuadrante $x > 0; y > 0$ en el instante $t = t_0$ permanecerá ahí para todo tiempo futuro $t \geq t_0$.

Aparte de la solución constante $y(t) = a/b; x(t) = c/d$, deseamos saber cuándo $x(t)$ e $y(t)$ crecen y cuándo decrecen. Una forma, intuitiva aunque no rigurosa, es la siguiente.

Dado que $x(t)$ es mayor que cero, la primera de las ecuaciones diferenciales implica que $x'(t) > 0$ cuando $y(t) < a/b$ y que $x'(t) < 0$ cuando $y(t) > a/b$. De la misma manera se obtiene que $y(t)$ es creciente cuando $x(t) > c/d$ y es decreciente cuando $x(t) < c/d$.

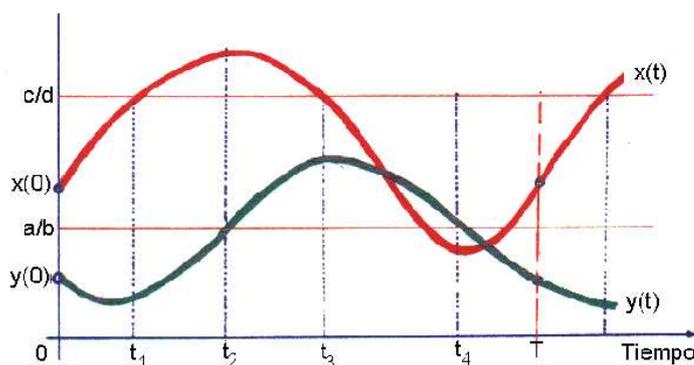


Figura 5.4 Evolución de presas y depredadores en el tiempo.

Supongamos que $c/d > a/b$, trazamos las rectas $y = c/d$ y $y = a/b$ que corresponden a las soluciones constantes. Los valores iniciales de $x(t)$ y de $y(t)$ pueden ser cualquier número positivo. Supongamos, por ejemplo que para $t = 0$ se tiene que $y(0) < a/b$ y $x(0) < c/d$. Entonces $x(t)$ es creciente y $y(t)$ es decreciente. Este comportamiento continúa hasta un tiempo t_1 en que $x(t)$ alcanza la recta $y = c/d$. Como $y(t_1) < a/b$ se tiene que $x(t)$ continúa creciendo. En consecuencia, $x(t) > c/d$ para $t > t_1$, y por lo tanto $y(t)$ es creciente para $t > t_1$. Sigue pasando el tiempo, hasta un instante t_2 en que $y(t_2) = a/b$ y a partir de este momento $y(t)$ es creciente, pero $x(t)$ decrece hasta que $x(t_3) = c/d$. Continuando con el análisis se llega a que existe un tiempo t_5 tal que $x(t_5) = c/d = x(t_1)$. También se puede demostrar que $y(t_5) = y(t_1)$. En realidad, existe un tiempo T entre t_4 y t_5 donde $x(t)$ e $y(t)$ toman sus valores iniciales. Las funciones $y(t)$ y $x(t)$ serán periódicas de período T .

TEOREMA 5.3.1 *El valor promedio de $x(t)$ es a/b y el de $y(t)$ es c/d . Esto es, no importa cómo de grandes sean las poblaciones iniciales de las dos especies ni importa cómo sean las variaciones, el promedio en las poblaciones es siempre el mismo. Esta propiedad se puede considerar como ley de conservación de la naturaleza*

Demostración. Como ocurre que $(\ln x(t))' = x'(t)/x(t) = a - by(t)$ se tiene que

$$y(t) = \frac{1}{b}(a - (\ln x(t))').$$

El valor promedio de $y(t)$ sobre el intervalo $[0, T]$ es

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{b} \int_0^T (a - (\ln x(t))') dt = \frac{a}{b}. \quad \blacksquare$$

5.3.2. El problema de la pesca.

A continuación vamos a incluir los efectos de la pesca en el modelo inicial (5.2). La pesca reduce la población de los peces comestibles en una cantidad $\epsilon x(t)$, y la de los tiburones en $\epsilon y(t)$, donde la constante ϵ representa a la intensidad de la pesca, que

depende del número de barcos pesqueros y el número de redes en el agua. Ahora, el modelo adopta la forma

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) - \epsilon x(t) &= (a - \epsilon)x(t) - bx(t)y(t) \\y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t) - \epsilon y(t) &= -(c + \epsilon)y(t) + dx(t)y(t)\end{aligned}$$

Este sistema es del mismo tipo (para $a - \epsilon > 0$) que el (5.2). Los valores medios serán para este nuevo modelo, $(c + \epsilon)/d$, para los peces comestibles y $(a - \epsilon)/b$, para las presas.

Por consiguiente, **un nivel moderado de pesca** ($\epsilon < a$), **en realidad incrementa en promedio la cantidad de peces comestibles y disminuye la de los tiburones. O dicho de otra forma, un nivel bajo de pesca favorece por tanto a los tiburones.** Este resultado se conoce como **principio de Volterra**. Con él se da una explicación a los datos de capturas de peces recogidos por *D'Ancona* y resuelve el problema planteado.

El principio de *Volterra* tiene aplicaciones interesantes para los tratamientos con insecticidas que destruyen tanto al insecto depredador como a su presa. Implica que la aplicación de insecticidas en realidad incrementará la población de aquellos insectos que son mantenidos bajo control por otros insectos depredadores.

Los insectos considerados usualmente como plagas son herbívoros (por ejemplo pulgones, orugas, gorgojos, escarabajos). Ellos tienen sus depredadores (por ejemplo las avispas). Un insecticida es una substancia que mata a todos los insectos. Después de usar insecticida la plaga aumenta y el número de depredadores disminuye. De esta manera la situación empeora (principio de *Volterra*). Cuando usamos DDT se acumula en altos niveles y causa más daño a los depredadores que a las presas (plagas). El tiempo de cambio de generaciones, es más rápido para las presas que para los depredadores. Las presas se adaptan más rápido a los insecticidas, y las siguientes generaciones son más resistentes que las anteriores. Finalmente tenemos un resultado adverso. Por esto, antes de usar insecticidas debemos saber cuáles son sus depredadores y como reaccionan a los medios químicos.

Una confirmación sorprendente de tal principio se encuentra en el caso del pulgón de los cítricos, el cual al ser introducido en 1868 accidentalmente en Estados Unidos proveniente de Australia, amenazaba con destruir la industria citrícola de aquel país. Posteriormente se introdujo la mariquita, su depredador natural en Australia. La mariquita redujo el número de pulgones a un nivel bajo. Cuando se descubrió que el DDT mataba a los pulgones fue aplicado por los fruticultores con la esperanza de reducir aún más su nivel. Sin embargo, y de acuerdo con el principio de *Volterra*, el resultado fue un incremento en el número de tales insectos.

El modelo de *Lotka-Volterra* no es perfecto. Es un paso en la dirección correcta, pero no representa de forma exacta al comportamiento de la naturaleza. Los puntos débiles del modelo son los siguientes:

- Las oscilaciones son inestables con respecto a las perturbaciones aleatorias. De-

bido a esto la trayectoria puede alejarse del punto $(c/d, a/b)$ y finalmente pasar muy cerca del cero. Prácticamente esto significa la extinción de las especies.

- El modelo no es estructuralmente estable. Cambiando un poco las funciones de la derecha del sistema, podemos obtener imágenes topológicamente distintas. Por ejemplo, que todas las trayectorias se van al punto $(c/d, a/b)$, que existan trayectorias cerradas y las demás se acercan a ellas, etc.
- Finalmente, ningún experimento ha confirmado el modelo. Se han llevado a cabo muchos experimentos con dos especies que tienen la relación presa-depredador en un ambiente cerrado. Siempre la presa se extingue y después el depredador.

De todos modos, el modelo de *Lotka-Volterra* resulta útil por cuanto señala la tendencia en las interacciones presa-depredador a generar fluctuaciones de la población de presas seguidas por fluctuaciones de la población de depredadores (es decir, oscilaciones acopladas); y el mecanismo básico reside en el retraso en el tiempo inherente en la secuencia que va desde muchas presas a muchos depredadores, a pocas presas, a pocos depredadores, a muchas presas, etc.

Muchos ecólogos y biólogos se negaron a aceptar como exacto el modelo de *Volterra*. Hacían notar que en la mayoría de los sistemas depredador presa que se observaban, no ocurría el comportamiento oscilatorio predicho por el modelo de *Volterra*. Mas bien, conforme el tiempo transcurre, la mayoría de estos sistemas tienden a estados de equilibrio. La respuesta a tales argumentos es que el sistema de ecuaciones diferenciales inicial no debe ser interpretado como un modelo general de las interacciones presa-depredador. Esto se debe a que tanto los peces comestibles como los tiburones no compiten intensamente entre sí por los recursos disponibles. En la próxima sección analizaremos un modelo más completo donde tendremos en cuenta que tanto las presas como los depredadores compiten entre sí por los recursos disponibles.

Por último comentaremos que hay algunas interacciones presa-depredador en la naturaleza que no pueden ser modeladas por ningún sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Tales casos ocurren cuando la presa dispone de un refugio que no es accesible a los depredadores. En tales circunstancias es imposible afirmar nada acerca del número futuro de presas y depredadores, ya que no puede predecirse cuantas presas abandonarán el refugio. Dicho de otro modo, tal proceso es **aleatorio**, más que **determinista**, y por lo tanto no puede ser modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

5.3.3. Modelo presa-depredador modificado

En secciones anteriores hemos tenido la oportunidad de estudiar modelos del tipo presa-depredador. Una modificación de los mismos son los llamados modelos del

tipo *Gause*, cuya dinámica viene determinada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales autónomo,

$$\begin{cases} x'(t) = x f(x) - a g(x) y \\ y'(t) = b g(x) y - c y \end{cases}$$

donde $x(t), y(t)$ representan a la cantidad de presas y depredadores, respectivamente, en el tiempo $t > 0$. En el sistema anterior, $x f(x)$ se identifica con el crecimiento natural de las presas, mientras que $g(x)$ es la función de consumo de los depredadores¹.

Otra modificación viene dada por los modelos tipo *Leslie* o logísticos,

$$\begin{cases} x'(t) = x f(x) - a g(x) y \\ y'(t) = \beta y \left(1 - \frac{y}{K_1}\right) \end{cases}$$

donde, como puede observarse, los depredadores evolucionan según un modelo logístico con una capacidad de carga que depende de las presas disponibles ($K_1 = K(x)$). En concreto, en 1926 *Leslie* propuso la siguiente modificación al modelo de *Lotka-Volterra*

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y) = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy \\ y'(t) = G(x, y) = \beta y \left(1 - \frac{y}{nx}\right) \end{cases} \quad (5.3)$$

donde la interacción presa-depredador $g(x) = xy$ es lineal (función de *Holling* del tipo I). Los parámetros son todos positivos y tienen el siguiente significado biológico.

- α : es la tasa de crecimiento “per capita” de las presas
- K : es la capacidad de carga del medio
- a : es la tasa de consumo de los depredadores
- β : es la tasa de crecimiento “per capita” de los depredadores
- n : es la calidad de la cantidad de alimento que favorece el nacimiento de depredadores.

Los puntos de equilibrio del modelo (5.3) se obtienen al resolver el sistema no lineal,

$$\begin{cases} \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy = 0 \\ \beta y \left(1 - \frac{y}{nx}\right) = 0 \end{cases}$$

¹Basado en [49]

donde $(0, 0)$ no es factible puesto que el sistema no está definido en $x = 0$. El resto de los puntos son:

$$P_1(K, 0), \quad P_2\left(\frac{K\alpha}{\alpha + Kna}, n\frac{K\alpha}{\alpha + Kna}\right)$$

Para clasificar estos puntos, tenemos que encontrar el jacobiano de las funciones $F(x, y)$, $G(x, y)$,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{2\alpha x}{K} - ay & -ax \\ -\frac{\beta y^2}{nx^2} & \beta - \frac{2\beta y}{nx} \end{pmatrix}$$

y sustituir en los puntos de equilibrio,

$$J(K, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & -aK \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -\alpha < 0$ y $\lambda_2 = -\beta > 0$. Es decir, el punto P_1 es un punto de silla para cualquier conjunto de parámetros. La clasificación del segundo punto de equilibrio a través de este procedimiento no es posible debido a la dificultad de encontrar los valores propios de la matriz jacobiana. Se hace necesario utilizar otros procedimientos mucho más sofisticados (funciones de *Liapunov*) que quedan fuera del objetivo del curso.

5.4. Especies en competencia

En esta sección continuaremos con el razonamiento geométrico, utilizado en la sección anterior, para estudiar de forma cualitativa el comportamiento de un sistema de dos ecuaciones autónomas.

Consideremos el problema biológico de dos especies competidoras. Supongamos que tenemos dos especies semejantes que compiten por un suministro limitado de alimento. Por ejemplo, dos especies de peces en un estanque que no se devoran entre sí, pero que compiten por el alimento disponible. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las poblaciones de las dos especies en el instante t . El estudio del crecimiento logístico sugiere que, en ausencia de la especie y , el desarrollo de la especie x está gobernado por una ecuación de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = x(t)(a - bx(t)),$$

y que, en ausencia de la especie x , el desarrollo de la especie y está regido por una ecuación de la forma

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t)(c - dy(t)).$$

Sin embargo, cuando las dos especies están presentes, cada una cambiará el abastecimiento de alimento disponible para la otra. De hecho, reducen mutuamente las tasas de crecimiento y las poblaciones de saturación. La expresión más sencilla para la reducción de la rapidez de desarrollo de la especie x , debido a la presencia de la especie y , es reemplazar el factor de la rapidez de desarrollo $a - bx(t)$ de la ecuación anterior por $a - bx(t) - my(t)$ donde m es la medida del grado en que la especie y interfiere con la especie x . De modo semejante, en la segunda ecuación reemplazamos $c - dy(t)$ por $c - dy(t) - nx(t)$. Así, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = x(a - bx - my), & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(c - dy(t) - nx(t)), & y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Los valores reales de las constantes a, c, b, d, m, n dependen del problema biológico que estudiemos.

Para determinar los puntos de equilibrio, resolvemos

$$\begin{aligned} 0 &= x(t)(a - bx(t) - my(t)) \\ 0 &= y(t)(c - dy(t) - nx(t)) \end{aligned} \quad .$$

Se ve fácilmente que las soluciones correspondientes a $x(t) = 0$ o bien, $y(t) = 0$ son $x(t) = 0, y(t) = 0$; $x(t) = 0, y(t) = c/d$; $x(t) = a/b, y(t) = 0$. Además, existe una solución constante correspondiente a la intersección de las rectas $a - bx - my = 0$ y $c - dy - nx = 0$ si estas rectas se cortan. No hay otras soluciones constantes del sistema anterior.

Geométricamente, estas soluciones pueden representarse como puntos en el plano OXY al que le hemos dado el nombre de plano fase. Recordemos que su significado era el siguiente: En el plano, resulta muy útil imaginar una solución del sistema como un punto (x, y) que se mueve como una función del tiempo. En el instante $t = 0$ las poblaciones iniciales de las dos especies proporcionan un punto inicial (x_0, y_0) en el plano; entonces seguimos el movimiento del punto (x, y) que representa las poblaciones de las dos especies en el instante t , a medida que traza una curva en el plano. A estas curvas las hemos llamado órbitas o caminos del sistema. Como sabemos, podemos obtener información considerable acerca del comportamiento de las soluciones del sistema, sin resolver realmente el problema.

En la Figura 5.5, observamos que de la primera de las ecuaciones del sistema (5.4), $x(t)$ crece o decrece a medida que $a - bx - my > 0$ ó $a - bx - my < 0$. De modo semejante, de la segunda de las ecuaciones, $y(t)$ crece o decrece a medida que $c - dy - nx > 0$ ó $c - dy - nx < 0$.

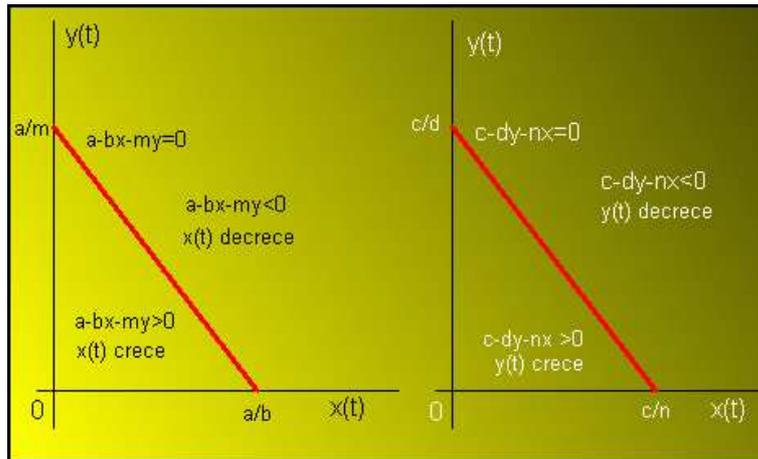


Figura 5.5

Con el fin de ver lo que le está ocurriendo a las dos poblaciones simultáneamente, debemos sobreponer los diagramas. Existen cuatro posibilidades, como se muestra en la Figura 5.6 y Figura 5.7, donde hemos destacado los puntos críticos.

A continuación vamos a estudiar con algo más de detalle los dos casos más interesantes.

Supondremos que cada una de las poblaciones iniciales x_0 e y_0 son diferentes de cero.

5.4.1. Primer caso

Supongamos el caso correspondiente a la Figura 5.6 izquierda. Si las poblaciones iniciales están en la primera región, entonces tanto x como y crecerán, si el punto se mueve hacia la segunda región, entonces la especie y seguirá creciendo, pero la especie x empezará a decrecer.

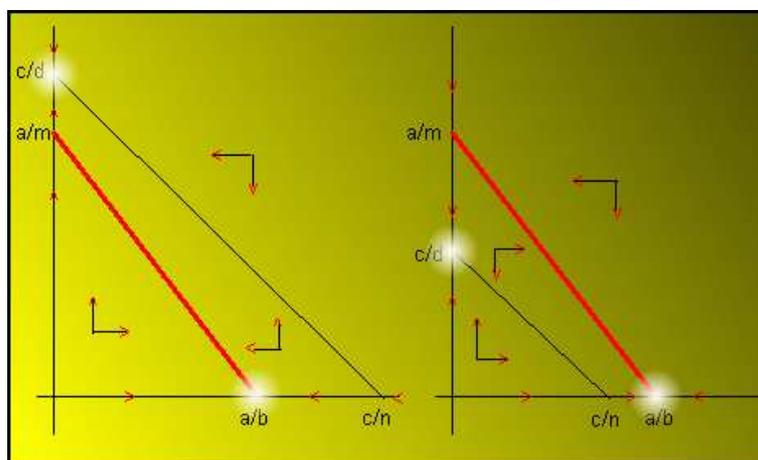


Figura 5.6. Primer y segundo caso.

De modo semejante, si el punto inicial está en la tercera región, entonces tanto x como y decrecerán; si el punto se mueve hacia la región segunda, entonces x seguirá decreciendo mientras que y ahora empieza a crecer. Esto sugiere que, para poblaciones que al principio están razonablemente próximas a $(0, c/d)$ el punto (x, y) que representa a las poblaciones en el instante t se aproxima al punto crítico $(0, c/d)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Esto se muestra en la Figura 5.8 (izquierda), para varios estados iniciales diferentes. Esta situación corresponde a la extinción de la población x , con la población y alcanzando un estado de equilibrio de tamaño c/d .

Podríamos preguntarnos si el punto $(0, a/b)$ es también un estado límite posible, puesto que, superficialmente, las poblaciones que empiezan cerca de este punto, parece que se aproximan a él cuando $t \rightarrow \infty$. La respuesta es negativa. En la primera región, el punto (x, y) se aleja del eje y mientras se mueve hacia arriba y, en la segunda región, aún cuando se mueve hacia el eje y , el punto (x, y) todavía se mueve hacia arriba.

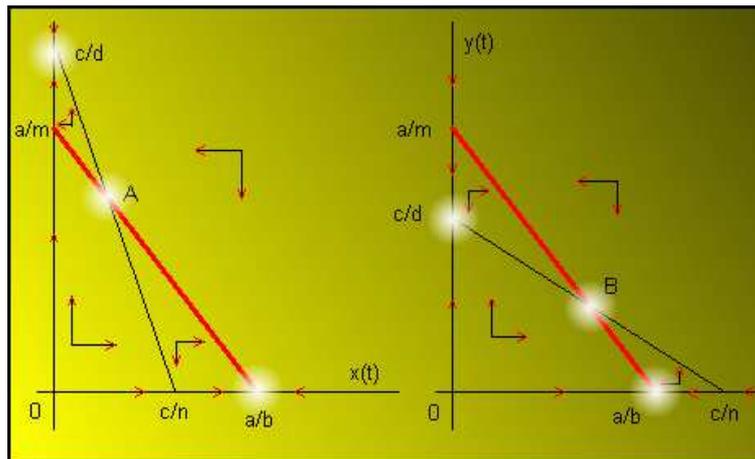


Figura 5.7. Tercer y cuarto caso.

Es más, notemos que $(0, a/b)$ no es un punto crítico; es decir $x = 0, y = a/b$ no es solución de las ecuaciones del sistema inicial. Los otros puntos críticos son el $(0, 0)$ y el $(a/b, 0)$. Sin embargo, una inspección de la Figura 5.6 (izquierda), se observa que una solución (x, y) que parte de valores diferentes de cero (x_0, y_0) no puede tender hacia cualquiera de estos puntos cuando $t \rightarrow \infty$.

5.4.2. Segundo caso

Consideremos el correspondiente a la Figura 5.7 (derecha). Un estudio de esta figura sugiere que el punto de las poblaciones (x, y) se moverá hacia la intersección de las dos rectas divisorias, a medida que t crece. Esto se muestra esquemáticamente en la Figura 5.8 (derecha), para varios estados iniciales diferentes. En este caso, ambas especies pueden coexistir con las poblaciones de equilibrio dadas por las coordenadas

del punto crítico B.

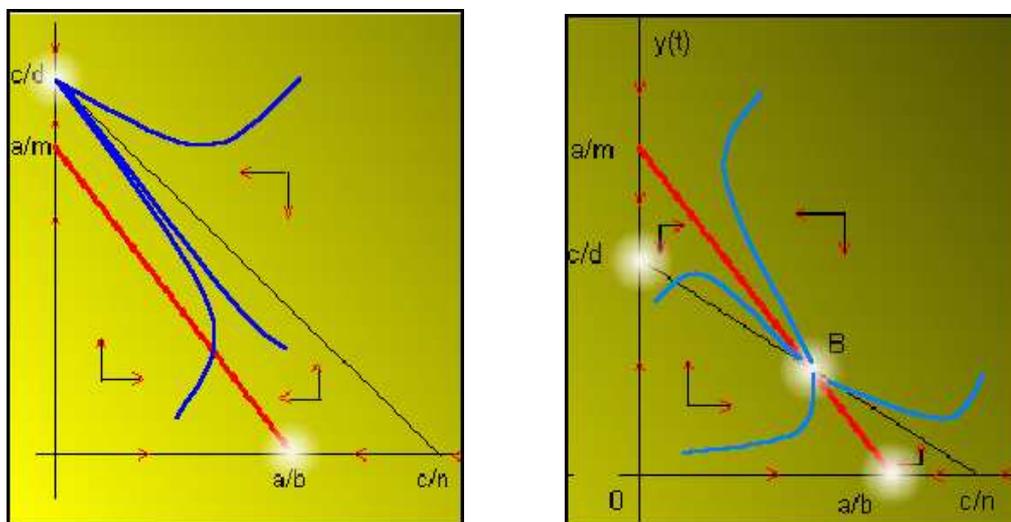


Figura 5.8

Veamos que también podemos llegar al mismo resultado aplicando el Teorema 4.5.4. En efecto, en primer lugar calculamos la matriz correspondiente a las primeras derivadas

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2bx - my & -mx \\ -ny & c - 2dy - nx \end{pmatrix}.$$

Supongamos que queremos clasificar el punto de equilibrio $(0, c/d)$. Calculamos

$$J(0, c/d) = \begin{pmatrix} \frac{ad - mc}{d} & 0 \\ -\frac{nc}{d} & -c \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{ad - mc}{d}, \quad \lambda_2 = -c.$$

Según el Teorema 4.5.4

- Si $ad - mc > 0$, es decir $a/m > c/d$, entonces $(0, c/d)$ es un punto de equilibrio inestable
- Si $ad - mc < 0$, es decir $a/m < c/d$, entonces $(0, c/d)$ es un punto de equilibrio estable.

Para el resto de los puntos se procede de forma similar.

EJEMPLO 5.1

- Al estudiar el modelo de especies en competencia siguiente:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left(5 - \frac{5}{8}x(t) - y(t)\right) \\ y'(t) = y(t)\left(5 - \frac{5}{8}y(t) - x(t)\right) \end{cases},$$

empezamos encontrando los puntos de equilibrio,

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, 8), \quad P_3 = (8, 0), \quad P_4 = (40/13, 40/13).$$

En la Figura 5.9 (izquierda) se ha representado las cuatro rectas de pendiente nula $x = 0$, $y = 5 - 5x/8$, $y = 0$, $y = 8(5 - x)/5$ así como el estudio del crecimiento de cada una de las especies.

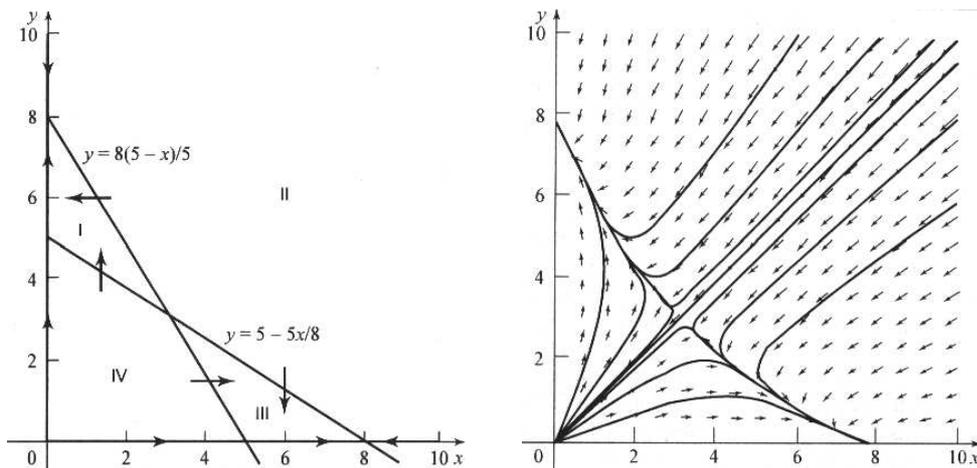


Figura 5.9. Curvas de pendiente nula y órbitas del modelo.

Si una órbita entra en la región I, no puede escapar y parece que es atraída por el punto $(0, 8)$ cuando t aumenta. Lo mismo sucede en la región III con el punto $(8, 0)$. Las órbitas en la región II son desplazadas hacia el punto de equilibrio $(40/13, 40/13)$ o cruzan una curva de pendiente nula en las regiones I o III. Una vez que entran a esas regiones, ya conocemos hacia donde se desplazan. Las órbitas de la IV región se alejan del punto de equilibrio $(0, 0)$ o se dirigen hacia el punto de equilibrio $(40/13, 40/13)$ o bien cruzan una curva de pendiente nula en las regiones I o III. De esta manera, el punto de equilibrio $(0, 0)$ es un **nodo inestable**, los puntos $(0, 8)$ y $(8, 0)$ son **nodos estables** y el $(40/13, 40/13)$ es un **punto de silla**.

En conclusión, si inicialmente la población $x(t)$ es superior a la población $y(t)$, entonces esta población se extinguirá, y la población $x(t)$ se estabiliza en 8. Por otro lado, si en el momento inicial $y(t) > x(t)$, entonces se extinguirá la primera de las

poblaciones, mientras que la segunda $y(t) \rightarrow 8$.

Podemos contrastar este resultado si aplicamos el Teorema 4.5.4

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 5x/4 - y & -x \\ -y & 5 - 5y/4 - x \end{pmatrix}.$$

Para el primero de los puntos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

sus valores propios correspondientes son $\lambda = 5$. En consecuencia, el punto $(0, 0)$ es asintóticamente inestable.

Del mismo modo, para el punto $(0, 8)$ tenemos

$$J(0, 8) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -8 & -5 \end{pmatrix},$$

que tiene por valores propios $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = -3$. Entonces el punto $(0, 8)$ es asintóticamente estable.

Finalmente, para $(40/13, 40/13)$ la matriz que debemos estudiar es

$$\begin{pmatrix} -25/13 & -40/13 \\ -40/13 & -25/13 \end{pmatrix}.$$

Ahora, los valores propios son $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = -15/13$, y el punto de equilibrio $(40/13, 40/13)$ será inestable.

5.5. Modelo epidemiológico II

Supongamos que un pequeño grupo de personas, que tiene una enfermedad infecciosa, se introduce en una población más grande. El problema que planteamos es el de saber si, cuando aumenta el tiempo, desaparecerá la enfermedad o por el contrario se presentará una epidemia.

Supondremos también que la enfermedad otorga inmunidad permanente a cualquier individuo que se haya recuperado de ella, y además que su período de incubación es muy breve. Por lo tanto, un individuo que contrae una enfermedad se convierte rápidamente en agente de contagio.

Dividiremos a la población en tres clases de individuos:

1. **La clase infectiva** I , formada por todos aquellos individuos que están en condiciones de transmitir la enfermedad a otros.

2. **La clase susceptible** S , formada por los individuos que no son agentes de transmitir la infección pero que están en condiciones de padecerla y volverse infecciosos.
3. **La clase retirada** R , que la constituye los individuos que adquirieron la enfermedad y murieron, los que se han recuperado y son inmunes permanentemente, y los que fueron aislados hasta su recuperación y adquisición de inmunidad permanente.



Hieronymus Bosch (El Bosco), 1450-1516

Representaremos por $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ al número de individuos en las clases S , I y R respectivamente, en el tiempo t . Para construir nuestro modelo, tendremos en cuenta las siguientes hipótesis:

- **Regla 1:** En el intervalo de tiempo considerado, la población permanece en un nivel fijo N . Ello significa, que no hacemos caso de los nacimientos, muertes por causas ajenas a la enfermedad considerada, inmigración y emigración.
- **Regla 2:** La rapidez de variación de la población susceptible es proporcional al producto del número de miembros de $S(t)$ y de $I(t)$.
- **Regla 3:** Los individuos que se retiran de la clase infectiva $I(t)$, lo hacen según una tasa proporcional al tamaño de $I(t)$.

De estas hipótesis es inmediato deducir que $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ cumplen el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -aSI & , S(t_0) = S_0 \\ \frac{dI}{dt} = aSI - bI & , I(t_0) = I_0 \\ \frac{dR}{dt} = bI & , R(t_0) = R_0 , \end{cases}$$

donde la constante de proporcionalidad $a > 0$, se conoce como **tasa de infección** y la constante de proporcionalidad $b > 0$ se denomina **tasa de retiro**.

Una vez que se conocen los valores de $S(t)$ e $I(t)$, es posible resolver $R(t)$ ya que $d(S + I + R)/dt = 0$. De modo que $S(t) + I(t) + R(t) = \text{constante} = N$. Así que $R(t) = N - S(t) - I(t)$.

De esta manera consideramos únicamente el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -aSI, & S(t_0) = S_0 \\ \frac{dI}{dt} = aSI - bI, & I(t_0) = I_0, \end{cases} \quad (5.5)$$

para las dos funciones desconocidas $S(t)$ e $I(t)$.

Las órbitas de (5.5) son las curvas soluciones de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dI}{dS} = \frac{aSI - bI}{-aSI} = -1 + \frac{b}{aS}.$$

Integrando esta ecuación diferencial obtenemos

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + c \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|,$$

siendo $c = b/a$.

Para analizar el comportamiento de las curvas anteriores, estudiamos el signo de $I'(S) = -1 + c/S$. Esta cantidad es negativa para $S > c$, y positiva para $S < c$. Por tanto, $I(S)$ es una función de S que es creciente para valores de $S < c$ y decreciente para $S > c$.

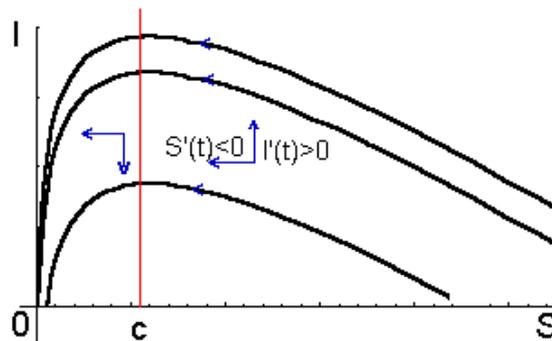


Figura 5.10. Órbitas en el plano fase (S, I) .

Observemos además que $I(0) = -\infty$ e $I(S_0) = I_0 > 0$. Por tanto, existe un único punto S_∞ , con $0 < S_\infty < S_0$, tal que $I(S_\infty) = 0$ e $I(S) > 0$ para $S_\infty < S \leq S_0$.

El punto $(S_\infty, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema (5.5), ya que tanto dS/dt como dI/dt se anulan cuando $I = 0$. Así pues, las órbitas de (5.5) para $t_0 \leq t < \infty$ tienen la forma que se indica en la Figura 5.10. Veamos ahora lo que ocurre con la enfermedad en una determinada población. Conforme t aumenta de t_0 a ∞ , el punto $(S(t), I(t))$ se mueve a lo largo de la curva

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + c \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|, \quad (5.6)$$

y lo hace en la dirección en la que S es creciente, ya que $S(t)$ decrece monótonamente en el tiempo. Por tanto, Si S_0 es menor que c , entonces $I(t)$ decrece monótonamente en el tiempo. Si S_0 es mayor que c , entonces $I(t)$ decrece monótonamente a cero y $S(t)$ decrece monótonamente a S_∞ .

En resumen, si se incluye un pequeño grupo de infecciosos I_0 en un grupo susceptible S_0 , con $S_0 < c$, entonces la enfermedad desaparecerá rápidamente. Por otro lado, si S_0 es mayor que c , entonces $I(t)$ crece mientras $S(t)$ decrece hasta el valor de c , momento en que $I(t)$ alcanza su valor máximo cuando $S = c$. Por otro lado, $I(t)$ empieza a decrecer solamente cuando el número de susceptibles se encuentra por debajo del valor de umbral c . De estos resultados se pueden sacar las siguientes conclusiones.

1. Se presentará una epidemia sólo si el número de susceptibles en la población excede el valor de umbral $c = b/a$.
2. La propagación de la enfermedad no se detiene por falta de una población susceptible; finaliza solamente por falta de infecciosos. En particular, siempre escaparán de contraer la enfermedad algunos individuos.

La primera de las conclusiones corresponde a una observación general de que las epidemias tienden a desarrollarse más rápidamente si la densidad de los susceptibles es alta, debido, por ejemplo, a la sobrepoblación, y si la tasa de retiro es baja, debido por ejemplo a la ignorancia, aislamiento inadecuado o tratamiento médico insuficiente. Por otro lado, si las condiciones sociales permiten una densidad más baja de los susceptibles, entonces los brotes tienden a ser de alcance limitado. Lo mismo ocurre si las tasas de retiro son altas debido a un buen control y buena vigilancia de la salud pública.

Si el número S_0 de susceptibles es inicialmente mayor que el valor de umbral c , aunque cercano a él, entonces es posible estimar el número de individuos que contraerán finalmente la enfermedad. En concreto, si $S_0 - c$ es pequeño comparado con c , entonces el número de individuos que por fin contraerán la enfermedad es aproximadamente $2(S_0 - c)$. Este es el **Teorema del Umbral en Epidemiología**, el cual fue demostrado por primera vez en 1927 por los biólogos matemáticos *Kermack* y *McKendrick*.

EJEMPLO 5.2

- La Tabla 5.2 muestra los datos correspondientes a una plaga en Eyam, un pueblo de Inglaterra de 261 habitantes, desde el comienzo de la epidemia (18-6-1666) hasta llegar a su finalización (20-10-1666), en intervalos de tiempo de 15 días.

Tiempo	$R(t)$	$I(t)$	$S(t)$
0.0	0.0	7.0	254.0
0.5	11.5	14.5	235.0
1.0	38.0	22.0	201.0
1.5	78.5	29.0	153.5
2.0	120.0	20.0	121.0
2.5	145.0	8.0	108.0
3.0	156.0	8.0	108.0
3.5	167.5	4.0	89.5
4.0	178.0	0.0	83.0

En primer lugar ajustaremos la nube de puntos $(S(t), I(t))$ a la solución de nuestro modelo (5.6)

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + c \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|.$$

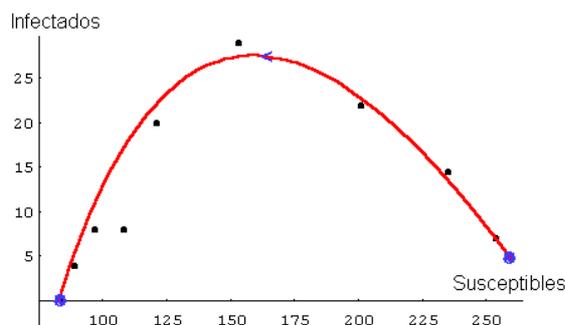
Necesitamos tener una aproximación de c , sabiendo que $N = 261$, $S(0) = 254$, para ello conocemos que cuando $I \rightarrow 0$, entonces $S \rightarrow 83$. Por tanto

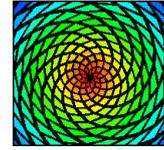
$$0 = 261 - 83 + c \ln \left(\frac{83}{254} \right) \Rightarrow c \approx 159.$$

En la Figura 5.11 hemos representado la nube de puntos y la curva

$$I(S) = 261 - S + 159 \ln \left| \frac{S}{254} \right|,$$

que nos ofrece información sobre el número de personas infectadas en función del número de personas susceptibles de padecer la enfermedad.





Tema 6

MÉTODOS NUMÉRICOS

6.1. Resolución numérica de E.D.O

6.1.1. Introducción

Al ir esta materia dirigida, no a alumnos de Matemáticas, sino a aquellos que están estudiando Ciencias Biológicas, el enfoque con el que presentaremos los conceptos de este tema, será eminentemente práctico. Por ello, mostraremos un conjunto de métodos y al mismo tiempo comentaremos las ventajas e inconvenientes que presentan unos sobre otros.

En los temas anteriores hemos tenido ocasión de comprobar como algunas de las ecuaciones diferenciales que aparecían no podían ser resueltas de forma exacta. En estos casos, el camino que seguíamos era el de realizar su estudio cualitativo. De esta forma, aunque desconocíamos las soluciones, sabíamos en cambio como se comportaban a “largo plazo”.

Existen, por otro lado, situaciones donde es preciso conocer, aunque sólo sea de forma aproximada, el valor de la solución en un determinado punto. Por este motivo, el objetivo que perseguimos en el presente capítulo, es el de ofrecer técnicas de aproximación numérica que den respuestas a este tipo de situaciones.

A lo largo del tema, consideraremos el siguiente problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (6.1)$$

siendo $f(t, y)$ una función que cumple las condiciones de los Teoremas 2.3.2 y 2.3.3, sobre existencia y unicidad de soluciones en el intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Entre los métodos numéricos más frecuentes para resolver (6.1) se encuentran los

llamados **métodos de discretización**, que consisten en encontrar los valores aproximados de (6.1) en puntos t_k del intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

La notación que utilizaremos será la siguiente: $y(t_k)$ representará al valor exacto de la solución en el punto t_k , e y_k será el valor aproximado de la solución que obtenemos cuando aplicamos un método numérico. La diferencia $|y(t_k) - y_k|$ se conoce con el nombre de **error de truncatura**.

El esquema general que siguen los métodos que presentaremos, es el siguiente:

1. Se inicia realizando una partición del intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$ en N partes iguales.

$$t_j = t_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{\alpha}{N}.$$

2. Conocemos los valores y_0, y_1, \dots, y_{k-1}
3. El resto de los valores y_k, y_{k+1}, \dots se calculan de forma progresiva, en función de los k anteriores.

A todo método que sigue el esquema anterior se le conoce con el nombre de **método de k -pasos**.

Por último, es interesante hacer notar el hecho de que en la práctica la implantación de estos métodos se lleva a cabo con el uso del ordenador. Por ello, es imprescindible el complemento de estos aspectos teóricos con las prácticas.

6.1.2. El método de Euler

Comentemos en primer lugar, que el método de *Euler* es muy interesante como punto de partida en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ya que es muy simple y permite comprender el resto de los métodos, pero a efectos prácticos se aplica en contadas ocasiones, pues converge muy lentamente hacia la solución.

El valor de y_k lo encontraremos del valor anterior y_{k-1} . Por tanto, estamos ante un método de un sólo paso. Consiste en dividir el intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$ en N partes iguales,

$$t_1 = t_0 + h, \quad t_2 = t_0 + 2h, \quad \dots, \quad t_N = t_0 + Nh = t_0 + \alpha, \quad h = \frac{\alpha}{N}.$$

Si aplicamos la definición de derivada

$$y'(t_k) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h},$$

deducimos que para h “suficientemente pequeño”

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)) \simeq \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h}.$$

Por tanto,

$$y(t_{k+1}) \simeq y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.2)$$

La igualdad (6.2) nos sugiere el cálculo de los y_k mediante la ley de recurrencia,

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.3)$$

partiendo de $y(0) = y_0$. La ley (6.3) se conoce como el método de *Euler*.

Interpretación geométrica

La condición inicial de (6.1) representa al punto $P_0 = (t_0, y_0)$ por donde pasa la curva solución. Para este punto se cumple,

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{P_0} = f(t_0, y_0),$$

lo cual nos permite trazar una recta que pasa por el punto P_0 y tiene de pendiente $f(t_0, y_0)$. Esta recta, aproxima a la solución en los alrededores de t_0 . Entonces, tomamos la recta y encontramos el valor de y correspondiente a t_1 . Ahora tendremos el punto (t_1, y_1) , y repetimos el proceso. La Figura 6.1 muestra el proceso seguido.

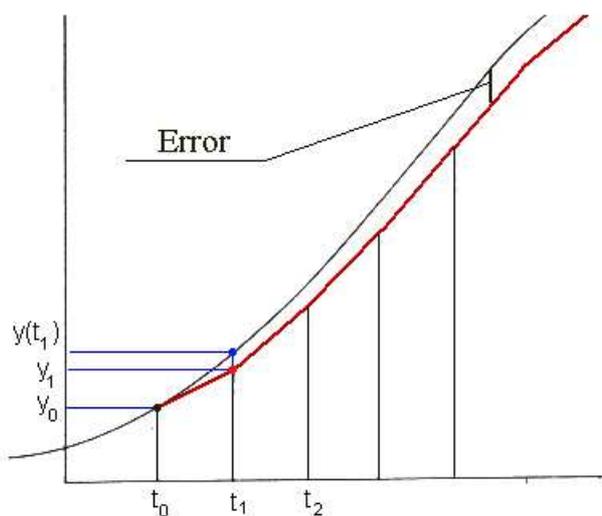


Figura 6.1. Interpretación gráfica del método de *Euler*.

EJEMPLO 6.1

- Apliquemos el método de *Euler* al modelo de crecimiento exponencial:

$$y'(t) = 0.2y(t), \quad y(0) = 50$$

para conocer un valor aproximado de $y(1)$, con un paso $h = 0.1$.

La fórmula (6.3) nos proporciona la expresión

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot 0.2 y_k = y_k + 0.02y_k, \quad k = 0, 1, \dots, 9,$$

que da lugar a los valores que aparecen en la Tabla 13.1.

t	<i>Euler</i>	Exacto	t	<i>Euler</i>	Exacto
0	50.000	50.000	0.6	56.308	56.375
0.1	51.000	51.010	0.7	57.434	57.514
0.2	52.020	52.041	0.8	58.583	58.676
0.3	53.060	53.092	0.9	59.755	59.861
0.4	54.122	54.164	1.0	60.950	61.070
0.5	55.204	55.259	–	–	–

Tabla 6.1

EJEMPLO 6.2

- Supongamos una sociedad que en el tiempo t , en años, tiene $x(t)$ individuos, y que todos los no conformistas que se aparean con otros no conformistas tienen descendientes que también son no conformistas, mientras que una proporción fija r de todos los otros descendientes, son también no conformistas. Si las tasas de natalidad y mortalidad para todos los individuos se suponen constantes y se representan por b y d respectivamente, y si los conformistas y los no conformistas se aparean al azar, el problema se puede expresar mediante las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx(t)}{dt} = (b - d)x(t), \quad \frac{dx_n(t)}{dt} = (b - d)x_n(t) + rb(x(t) - x_n(t)),$$

donde $x_n(t)$ representa el número de no conformistas en la población en el tiempo t .

Si introducimos la variable $y(t) = x_n(t)/x(t)$ para representar la proporción de no conformistas en la sociedad en el tiempo t , entonces tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{x'_n(t)x(t) - x_n(t)x'(t)}{x^2(t)} = rb(1 - y(t)).$$

Para hacer un estudio más completo de la situación anterior, supondremos los valores

$$y(0) = 0.01, \quad b = 0.2, \quad d = 0.015, \quad r = 0.1.$$

Deseamos aplicar el método de *Euler* para aproximar la solución $y(t)$ de $t = 0$ a $t = 50$, cuando el tamaño del paso es $h = 1$ año.

Nuestro problema de valor inicial es

$$y'(t) = f(t, y) = 0.1 \times 0.2(1 - y) = 0.02(1 - y), \quad y(0) = 0.01.$$

El método de *Euler* nos proporciona las aproximaciones,

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, 49, \quad (6.4)$$

partiendo de $y(0) = 0.01$. Como el número de cálculo es muy elevado, implantamos la fórmula (6.4) en el programa *Mathematica*®.

```
f[t_, y_] := 0.02 * (1 - y);
a = 0.;
b = 50.;
dato = {0.01};
n = 50;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
For[i = 2, i <= n + 1, i ++, AppendTo[dato, dato[[i - 1]] + hf[nodo[[i - 1]],
dato[[i - 1]]]];
Print[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}]]
```

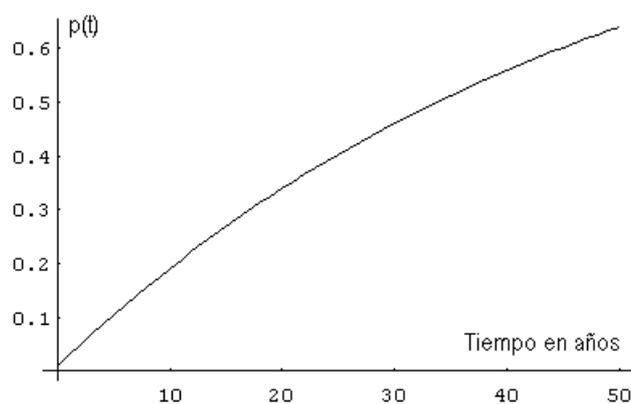


Figura 6.2. Valor aproximado de $y(t)$.

El resultado obtenido es:

```
{{0, 0.01000}, {1, 0.02980}, {2, 0.04920}, {3, 0.06821}, {4, 0.08685}, {5, 0.10518},
{6, 0.12301}, {7, 0.14055}, {8, 0.15774}, {9, 0.17459}, {10, 0.19109}, {11, 0.20727},
.....,
{47, 0.61694}, {48, 0.62460}, {49, 0.63211}, {50, 0.63947}}.
```

El cuál también puede ser representado gráficamente (Figura 6.2.)

```
ListPlot[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}], PlotJoined → True]
```

Ahora podemos resolver la ecuación diferencial $y'(t) = 0.02(1 - y(t))$ y comparar el valor exacto y el valor aproximado.

Se trata de una ecuación de variables separables,

$$\int \frac{dy(t)}{1 - y(t)} = \int 0.02dt \quad \Rightarrow \quad -\ln(1 - y(t)) = 0.02t + k.$$

Simplificamos esta expresión y obtenemos

$$y(t) = 1 - e^{-0.02t+k},$$

cuando $t = 0$, entonces

$$0.01 = 1 - e^k \quad \Rightarrow \quad k = 0.99 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - 0.99e^{-0.02t}.$$

El valor exacto será $y(50) = 0.635799$, y el error cometido es:

$$|y(50) - y_{50}| = |0.635799 - 0.63947| = 0.003671,$$

o en forma de porcentaje:

$$\frac{|0.635799 - 0.63947|}{0.635799} \times 100 = 0.58\%.$$

6.1.3. Métodos de Taylor de orden superior

El método de *Euler* lo hemos deducido de la definición de derivada, pero también puede obtenerse a partir del desarrollo de *Taylor* de orden $n = 1$ de la función $y(t)$ en el punto t_k . Podemos encontrar un método que mejore la solución del problema (6.1), si el desarrollo de *Taylor* se extiende hasta el orden n .

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2}y''(t_k) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_k) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi_k), \quad \xi_k \in (t_k, t_k + h).$$

Si la función $f(t, y)$ es “suficientemente regular”, entonces podemos calcular las derivadas sucesivas de $y(t)$. En efecto,

$$y'(t) = f(t, y(t)) = f^{(0)}(t, y)$$

$$y''(t) = \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} = f^{(1)}(t, y)$$

$$y'''(t) = \frac{dy''}{dt} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + f \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} = f^{(2)}(t, y)$$

.....

$$y^{(n)}(t) = \frac{dy^{(n-1)}}{dt} = \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial t} + \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial t} + f \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial y} = f^{(n-1)}(t, y)$$

El método de *Taylor* de orden n consiste en calcular y_k aplicando la fórmula siguiente:

$$y_{k+1} = y_k + hf^{(0)}(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2!} f^{(1)}(t_k, y_k) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_k, y_k) \quad (6.5)$$

Notemos que el método de *Euler* es un caso particular del método de *Taylor*, para $n = 1$.

EJEMPLO 6.3

- Aplicar el método de *Taylor* de orden 2 para calcular el valor aproximado de $y(1)$ del problema de valores iniciales

$$y' = t + y, \quad y(0) = 1,$$

con un paso $h = 0.1$. En la Tabla 13.2, pueden verse los resultados de aplicar la fórmula (6.5) de orden dos.

t_k	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_k	1.00000	1.11000	1.24205	1.39847	1.58180	1.79489
$y(t_k)$	1.00000	1.11034	1.24281	1.39972	1.58365	1.79744
t_k	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	–
y_k	2.04086	2.32315	2.64558	3.01236	3.42816	–
$y(t_k)$	2.04424	2.32751	2.65108	3.01921	3.43656	–

Tabla 6.2

Es lógico pensar que podemos obtener una mayor precisión si nos quedamos con más términos de la serie de *Taylor*. Ahora bien, esto lleva asociada la dificultad de tener que calcular derivadas más elevadas de $f(t, y)$, dificultad nada despreciable, ya que los cálculos pueden hacerse muy lentos. En ocasiones, no se conoce la expresión explícita de $f(t, y)$, sino que se dispone de una colección de datos experimentales, por lo que los cálculos con derivadas altas tienen grandes posibilidades de ser inexactos. Por esta razón, los métodos multitérminos de *Taylor*, en la práctica, se usan muy raras veces.

EJEMPLO 6.4

- En la Sección 10.4 construimos un modelo elemental para analizar el impacto de un nuevo pesticida en el medioambiente. Ahora, nos proponemos mejorarlo en el sentido siguiente.

Supongamos que inicialmente las aguas del lago ya están contaminadas con el pesticida, siendo su concentración inicial $c(0) = c_0$. Además, el volumen del lago es constante V , lo cual significa que la cantidad de agua que entra y sale del lago es la misma. Su ritmo de entrada, es decir, el número de $\text{m}^3/\text{día}$, es $f(t)$, siendo ésta una función senoidal, con un máximo de $150 \text{ m}^3/\text{día}$ y un valor mínimo de $50 \text{ m}^3/\text{día}$. Por ejemplo,

$$f(t) = 100 + 50 \cos(0.00172t).$$

Llamemos $y(t)$ a la concentración de pesticida en el río. Si en un momento dado, los agricultores dejan de utilizar el producto, es lógico suponer que su concentración disminuirá siguiendo un modelo exponencial. Por ejemplo

$$y(t) = 5e^{-0.002t}.$$

Para poder construir el modelo, necesitamos la siguiente hipótesis adicional:

- El ritmo de cambio de la cantidad de contaminante en el lago es igual a la cantidad de contaminante que entra procedente del río menos la cantidad que abandona el lago.

La cantidad de pesticida que entra por unidad de tiempo será la siguiente función que depende del tiempo: $y(t)f(t)$. Al mismo tiempo, si el agua se mezcla convenientemente, la cantidad de contaminante que sale por unidad de tiempo es: $c(t)f(t)$.

Llamemos $a(t)$ a la cantidad de contaminante en el lago en el tiempo t , entonces

$$\frac{da(t)}{dt} = a'(t) = f(t)y(t) - f(t)c(t).$$

Por otro lado, $c(t) = a(t)/V$. Es decir,

$$c'(t) = \frac{1}{V}a'(t) = \frac{1}{V}(f(t)y(t) - f(t)c(t)), \quad c(0) = c_0. \quad (6.6)$$

A continuación vamos a estudiar numéricamente el modelo anterior, para los valores $V = 10000 \text{ m}^3$ y $c_0 = 5$.

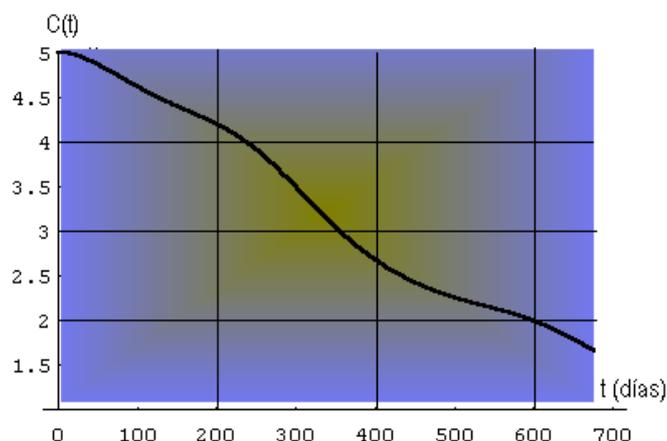


Figura 6.3.

La ecuación diferencial (6.6) es complicada de resolver, aunque se trata de una ecuación lineal de primer orden. No obstante, utilizaremos el método de *Taylor* de segundo orden, a través del programa *Mathematica*®.

```

y'[t] = (0.01 + 0.005 * Cos[0.0172 * t]) * (5 * Exp[-0.002 * t] - y[t])
a = 0.;
b = 700;
n = 700;
dato = {5.};
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
dy1 = y'[t];
dy2 = D[y'[t], t];
s1[u_, v_] := dy1 /. {y[t] -> v, t -> u}
s2[u_, v_] := dy2 /. {y[t] -> v, t -> u}
For[i = 2, i <= n + 1, i ++, aux = dato[[i - 1]] + hs1[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]] +
(h2/2)s2[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]]; AppendTo[dato, aux]];
For[i = 2, i <= n + 1, i ++, aux = dato[[i - 1]] + hs1[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]] +
(h2/2)s2[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]]; AppendTo[dato, aux]];
ListPlot[Table[nodo[[i]], dato[[i]], i, n + 1], PlotJoined -> True];

```

Conclusión: Las Figuras 6.3 y 6.5 nos muestran un comportamiento de la solución más complicado que el obtenido anteriormente, lo cuál era lógico esperar ya que este nuevo modelo es más realista y por lo tanto más elaborado. Los métodos numéricos y los de simulación nos permiten modificar los parámetros del modelo para de esta manera disponer de distintas estrategias a la hora de analizar el impacto de productos tóxicos en el medioambiente.

En la Figura 6.4 podemos ver el diagrama causal correspondiente al modelo simulado con *Vensim*®.

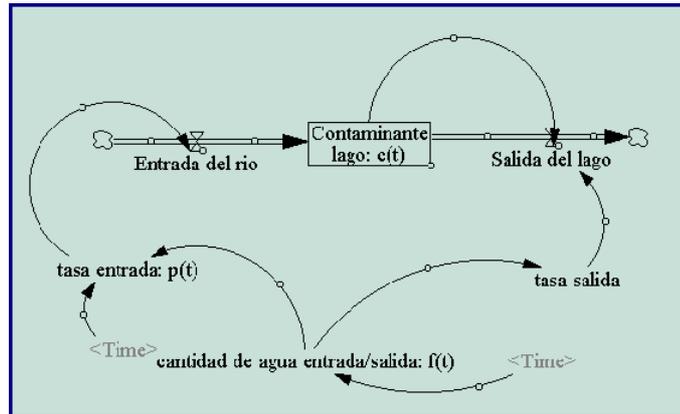


Figura 6.4: Diagrama causal.

Una vez ejecutado el programa se obtiene la gráfica solución de la Figura 6.5, que como no podía ser de otra forma, coincide con la encontrada utilizando el método de *Taylor*.

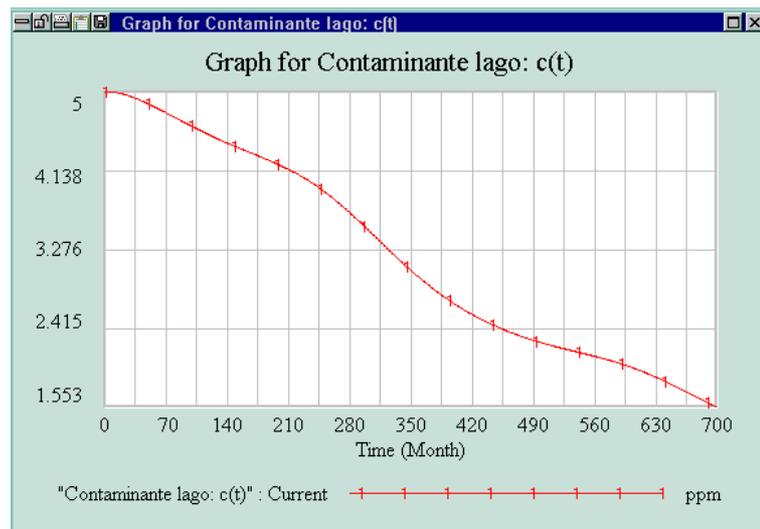


Figura 6.5

6.1.4. Método de Euler mejorado

Con el objetivo de evitar los inconvenientes comentados en el método de *Taylor*, fundamentalmente el tener que calcular las derivadas de $f(t, y)$ de orden superior, presentamos este nuevo método conocido con el nombre de *Euler* mejorado, que está basado en las fórmulas de integración numérica.

Si integramos la ecuación diferencial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

desde t_0 hasta $t_1 = t_0 + h$, obtenemos

$$y(t_1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt \quad \Rightarrow \quad y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt .$$

Podemos pensar que el error cometido disminuirá si la integral anterior por el promedio de sus dos valores en los extremos del intervalo (método del trapecio). En este caso,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y) dt = \frac{h}{2} (f(t_0, y_0) + f(t_1, y(t_1))) .$$

El problema es encontrar el valor de $y(t_1)$. Ahora bien, podemos reemplazar $y(t_1)$ por el valor aproximado aportado por el método de *Euler*, que representaremos por $z_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$. Finalmente tenemos

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (f(t_0, y_0) + f(t_1, z_1)) .$$

En general

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, z_{k+1})) , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.7)$$

donde

$$z_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 .$$

Este método se conoce con el nombre de método de *Euler* mejorado, **predice** primero y **corrige** después una estimación de y_k .

EJEMPLO 6.5

- Utilizando el método de *Euler* mejorado, vamos a resolver el siguiente problema de valor inicial,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = t - y, \quad y(0) = 2,$$

para conocer un valor aproximado de $y(1)$, con un paso $h = 0.2$.

Para encontrar y_1 necesitamos calcular

$$z_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 2 + 0.2f(0, 2) = 2 + 0.2(0 - 2) = 1.6,$$

ahora,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{2} (f(t_0, y_0) + f(t_1, z_1)) \\ &= y_0 + \frac{1}{2} (f(0, 2) + f(0.2, 1.6)) \\ &= 2 + \frac{1}{2} ((0 - 2) + (0.2 - 1.6)) = 1.66 . \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso obtenemos

$$z_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1.66 + 0.2f(0.2, 1.66) = 1.66 + 0.2(0.2 - 1.66) = 1.368,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(f(t_1, y_1) + f(t_2, z_2))$$

$$= y_1 + \frac{1}{2}(f(0.2, 1.66) + f(0.4, 1.368))$$

$$= 1.66 + \frac{1}{2}((0.2 - 1.66) + (0.4 - 1.368)) = 1.4172.$$

Procediendo de forma similar se llega a que $y(1) \approx y_5 = 1.11222$. Si utilizamos el programa Mathematica[®].

```
f[t_, y_] := t - y;
a = 0.;
b = 1.;
dato = {2.};
n = 5;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
For[i = 2, i <= n + 1, i ++, z = dato[[i - 1]] + h * f[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]];
AppendTo[dato, dato[[i - 1]] + (h/2)(f[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]] + f[nodo[[i]], z])];
Print[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}]]
```

Una vez ejecutado el algoritmo, la respuesta es:

{ {0., 2.}, {0.2, 1.66}, {0.4, 1.4172}, {0.6, 1.2541}, {0.8, 1.15637}, {1., 1.11222} }.

La representación gráfica de dichos valores aparece en la Figura 6.6.

```
ListPlot[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}], PlotPoint -> True];
```

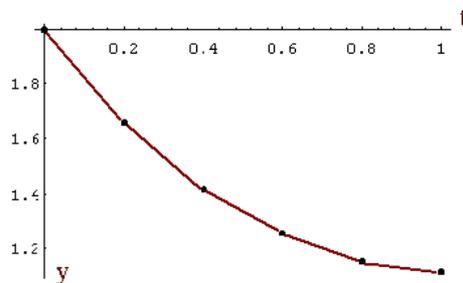


Figura 6.6

6.1.5. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El método anterior de *Euler* mejorado, es un caso particular de otro método más general conocido con el nombre de *Runge-Kutta*. Consiste en obtener una aproximación diferente de la integral definida,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y) dt = \frac{1}{6} \left(f(t_k, y_k) + 4f(t_{k+\frac{1}{2}}, y(t_{k+\frac{1}{2}})) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) \right), \quad (6.8)$$

donde $t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + h/2$, (regla de *Simpson*).

Demostrar de forma rigurosa este método se encuentra fuera de los objetivos del curso, por esta razón haremos un desarrollo intuitivo del mismo. En primer lugar, necesitamos estimar los valores $y_{k+1/2}$ e y_{k+1} . Aplicando el método de *Euler*

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} m_1,$$

con $m_1 = f(t_k, y_k)$. Para corregir esta estimación de $y_{k+1/2}$, lo hacemos de la siguiente manera:

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} m_2,$$

siendo $m_2 = f(t_k + h/2, y_k + m_1 h/2)$.

Para predecir y_{k+1} hacemos uso de la última estimación de $y_{k+1/2}$ y el método de *Euler*

$$y_{k+1} = y_{k+1/2} + \frac{h}{2} m_3,$$

donde $m_3 = f(t_k + h/2, y_k + m_2 h/2)$. Por último hacemos

$$m_4 = f(t_k + h, y_k + h m_3).$$

El método de *Runge-Kutta* se obtiene sustituyendo cada una de estas estimaciones en (6.8),

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4),$$

donde

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_k, y_k) \\ m_2 &= f(t_k + h/2, y_k + m_1 h/2) \\ m_3 &= f(t_k + h/2, y_k + m_2 h/2) \\ m_4 &= f(t_k + h, y_k + m_3 h). \end{aligned}$$

Este método es capaz de conseguir precisiones altas sin tener que tomar el paso h tan pequeño como para hacer excesiva la tarea de cálculo.

EJEMPLO 6.6

- A continuación vamos a utilizar el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden, para resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = t - y, \quad y(0) = 2,$$

para conocer un valor aproximado de $y(1)$, con un paso $h = 0.2$.

Empezamos calculando las siguientes constantes:

$$m_1 = f(t_0, y_0) = f(0, 2) = -2$$

$$m_2 = f(t_0 + h/2, y_0 + m_1 h/2) = f(0.1, 2 + (-2)(0.2)/2) = -1.7$$

$$m_3 = f(t_0 + h/2, y_0 + m_2 h/2) = f(0.1, 2 + (-1.7)(0.2)/2) = -1.73$$

$$m_4 = f(t_0 + h, y_0 + m_3 h) = f(0.2, 2 + 0.2(-1.73)) = -1.454$$

con lo cual

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) = 2 + \frac{0.2}{6}(-2 - 3.4 - 3.46 - 1.454) = 1.6562.$$

Al ser muy numerosas el número de operaciones que debemos hacer, proseguiremos utilizando el programa **Mathematica**®.

```
f[t_, y_] := t - y;
a = 0.;
b = 1.;
dato = {2.};
n = 5;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];
For[i = 2, i <= n + 1, i ++,
m1 = f[nodo[[i - 1]], dato[[i - 1]]];
m2 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, dato[[i - 1]] + (h/2)m1];
m3 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, dato[[i - 1]] + (h/2)m2];
m4 = f[nodo[[i - 1]] + h, dato[[i - 1]] + hm3];
AppendTo[dato, dato[[i - 1]] + (h/6)(m1 + 2m2 + 2m3 + m4)];
Print[Table[{nodo[[i]], dato[[i]]}, {i, n + 1}], PlotJoined -> True]
```

Una vez ejecutado, la respuesta que obtenemos es la siguiente:

```
{{0., 2.}, {0.2, 1.6562}, {0.4, 1.41097}, {0.6, 1.24645}, {0.8, 1.148}, {1., 1.10366}}
```

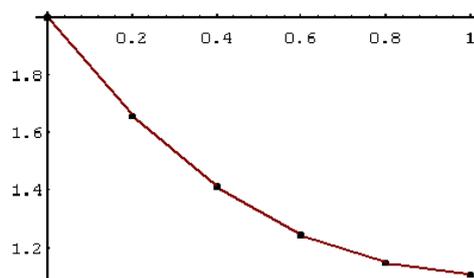


Figura 6.7

6.2. Resolución numérica de sistemas de E.D.O

6.2.1. Introducción

En los temas anteriores hemos tenido ocasión de estudiar las ecuaciones diferenciales desde tres puntos de vista, analítico, cualitativo y numérico. De ellos el método más extendido en las ciencias y en las ingenierías es el numérico, debido fundamentalmente a la existencia de potentes programas informáticos que simplifican las operaciones. Sin embargo, no debemos perder de vista el hecho de que lo importante es la interpretación que se haga de estos resultados, y que en ellos siempre están presentes los errores que se cometen al realizar las aproximaciones de las soluciones.

En el tema anterior hemos estudiado métodos numéricos referidos a problemas de valores iniciales de primer orden. Muchos problemas importantes de la vida cotidiana se modelan utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales, por ejemplo los modelos de competencia, o bien, usando ecuaciones diferenciales de segundo orden o de orden superior. Dichas ecuaciones pueden reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, haciendo $x = y'$, la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right),$$

podemos trasformarla en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = x, \quad x' = f(t, x, y).$$

Generalmente se suelen reducir todas las ecuaciones diferenciales de orden dos a sistemas de dos ecuaciones de primer orden, no obstante, estos resultados pueden generalizarse al caso de más de dos ecuaciones.

Es natural, por tanto, extender los métodos encontrados en la sección anterior a estas

nuevas situaciones. Nuestro objetivo será el de formular métodos para aproximar las soluciones de sistemas de ecuaciones del tipo:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y), \end{cases} \quad (6.9)$$

con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

Para no tener problemas con las soluciones, supondremos que las funciones f y g son “suficientemente regulares” para que exista una única solución al problema de valores iniciales planteado.

Al igual que en el tema anterior, deseamos encontrar las soluciones aproximadas de $x(t)$ e $y(t)$ en los puntos

$$t = t_0, \quad t = t_1 = t_0 + h, \dots, t_N = t_0 + Nh.$$

6.2.2. Generalización de los métodos

Los métodos numéricos estudiados para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales pueden extenderse sin dificultad para resolver el problema (6.9). A continuación introduciremos el método de *Euler* y realizaremos diversos ejemplos para mostrar como se implantan el resto de ellos.

La idea que está detrás del método de *Euler* es el concepto de derivada

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Si tomamos como valor de h una cantidad “suficientemente pequeña”, entonces nos aparece el sistema dinámico discreto

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x(t), y(t)).$$

Ahora, podemos definir $x(t_k + h) = x_{k+1}$, $x(t_k) = x_k$, con lo cual

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k, y_k).$$

Actuando del mismo modo con $g(t, x, y)$, obtenemos

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + hf(t_k, x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + hg(t_k, x_k, y_k). \end{aligned} \quad (6.10)$$

De esta manera, conociendo los valores iniciales x_0, y_0 , el tamaño de paso h , y las funciones f y g , podemos calcular la sucesión de valores x_k e y_k para $k = 0, 1, 2, \dots$. En consecuencia, disponemos de un método para encontrar aproximaciones numéricas de las soluciones del sistema (6.9). Esta técnica se conoce con el nombre de método de *Euler* para sistemas de dos ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 6.7

- Utilizar el método de *Euler* con un paso $h = 0.5$ para aproximar la solución en el $t = 2$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 0.5x - 0.5y \end{cases},$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1, y(0) = 2$.

Sustituyendo las ecuaciones f y g dadas en el ejemplo en (6.10), obtenemos

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + hy_k \\ y_{k+1} = y_k + h(0.5x_k - 0.5y_k), \end{cases}$$

con $x_0 = 1, y_0 = 2$. En la primera iteración encontramos una aproximación de las soluciones en $t = 0.5$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + hy_0 = 1 + 0.5(2) = 2 \\ y_1 = y_0 + h(0.5x_0 - 0.5y_0) = 2 + 0.5(0.5(1) - 0.5(2)) = 1.75. \end{cases}$$

Repetimos el proceso para encontrar los valores correspondientes en $t = 1$.

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + hy_1 = 2 + 0.5(1.75) = 2.875 \\ y_2 = y_1 + h(0.5x_1 - 0.5y_1) = 1.75 + 0.5(0.5(2) - 0.5(1.75)) = 1.8125. \end{cases}$$

Los valores correspondientes a $t = 1,5$ son:

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + hy_2 = 2.875 + 0.5(1.8125) = 3.78125 \\ y_3 = y_2 + h(0.5x_2 - 0.5y_2) = 1.8125 + 0.5(0.5(2.875) - 0.5(1.8125)) = 2.078125. \end{cases}$$

Finalmente, las aproximaciones correspondientes a $t = 2$ serán

$$\begin{cases} x_4 = x_3 + hy_3 = 3.78125 + 0.5(2.078125) = \mathbf{4.8203} \\ y_4 = y_3 + h(0.5x_3 - 0.5y_3) = 2.0781 + 0.5(0.5(3.7813) - 0.5(2.0781)) = \mathbf{2.5039}. \end{cases}$$

En este caso podemos encontrar la solución exacta resolviendo el sistema. Es fácil comprobar que

$$x(t) = 2e^{0.5t} - e^{-t}, \quad y(t) = e^{-t} + e^{0.5t}.$$

EJEMPLO 6.8

- Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = xy + t, & x(0) = 1 \\ y'(t) = ty + x, & y(0) = -1 \end{cases}$$

Estimar la solución para $t = 0.1$, utilizando el método de *Taylor* de orden dos y un valor de $h = 0.1$.

Las ecuaciones que debemos utilizar son:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + x'_k h + x''_k \frac{h^2}{2} \\ y_{k+1} = y_k + y'_k h + y''_k \frac{h^2}{2} \end{cases}$$

Empezamos calculando x'' e y'' .

$$\begin{cases} x''(t) = xy' + x'y + 1 = xty + x^2 + xy^2 + ty + 1 & , \quad x'_0 = -1, y'_0 = 1 \\ y''(t) = y + ty' + x' = y + t^2y + tx + xy + t & , \quad x''_0 = 3, y''_0 = -2. \end{cases}$$

y aplicamos el método para los valores $x_0 = 1, y_0 = -1, t_0 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x'_0 h + x''_0 \frac{h^2}{2} = 1 + (-1)0.1 + 3\frac{0.1^2}{2} = 0.915 \\ y_1 = y_0 + y'_0 h + y''_0 \frac{h^2}{2} = -1 + 1(0.1) + (-2)\frac{0.1^2}{2} = -0.91 \end{cases}$$

La solución pedida es

$$\mathbf{x(0.1) = 0.915, \quad y(0.1) = -0.91.}$$

EJEMPLO 6.9

- Resolver por el método de *Euler* modificado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x, y) = xy + t, & x(0) = 0 \\ y'(t) = g(t, x, y) = x - t, & y(0) = 1 \end{cases}$$

a fin de encontrar una solución aproximada para $t = 0.4$, y $h = 0.2$.

Empezando el proceso calculando

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_0 + hf(t_0, x_0, y_0) = x_0 + h(x_0 y_0 + t_0) = 0 + 0.2(0) = 0 \\ y_1^* &= y_0 + hg(t_0, x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - t_0) = 1 + 0.2(0) = 1 \end{aligned}$$

lo cual nos permite encontrar

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{2}(x_0 y_0 + t_0 + x_1^* + t_1) = 0 + \frac{0.2}{2}(0 + (0)(0)(1) + 0.2) = 0.02$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(x_0 - t_0 + x_1^* - t_1) = 1 + \frac{0.2}{2}(0 - 0 + 0 - 0.2) = 0.98$$

Para el primer paso:

$$x_1 = 0.02, \quad y_1 = 0.98, \quad t_1 = 0.2.$$

Repitiendo el proceso

$$x_2^* = x_1 + h(x_1 y_1 + t_1) = 0.02 + 0.2((0.02)(0.98) + 0.2) = 0.06$$

$$y_2^* = y_1 + h(x_1 - t_1) = 0.98 + 0.2(0.02 - 0.2) = 0.94$$

$$x_2 = x_1 + \frac{h}{2}(x_1 y_1 + t_1 + x_2^* y_2^* + t_2) =$$

$$0.02 + \frac{0.2}{2}((0.02)(0.98) + 0.2 + (0.06)(0.94) + 0.4) = 0.09$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(x_1 - t_1 + x_2^* - t_2) = 0.02 + \frac{0.2}{2}(0.02 - 0.2 + 0.06 - 0.4) = 0.93$$

En consecuencia, la aproximación pedida es

$$\mathbf{x}(0.4) \approx \mathbf{x}_2 = \mathbf{0.09}, \quad \mathbf{y}(0.4) \approx \mathbf{y}_2 = \mathbf{0.93}.$$

EJEMPLO 6.10

- Utilizar el método de *Euler* para encontrar un valor aproximado de $y(1)$ con $h = 0.5$ siendo $y(t)$ la solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + yy' - y^2 = t + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Si hacemos el cambio $y' = x$, convertimos la ecuación diferencial anterior en el sistema

$$\begin{aligned} y'(t) &= x & , & \quad y(0) = 0 \\ x'(t) &= t + 1 + y^2 - yx & , & \quad x(0) = 1 \end{aligned}$$

Las fórmulas que debemos aplicar son:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hy'_k \\ x_{k+1} = x_k + hx'_k \end{cases}$$

Iniciamos la iteración con los valores $t_0 = 0, y_0 = 0, x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy'_0 = y_0 + hx_0 = 0 + (0.5)(1) = 0.5 \\ x_1 &= x_0 + hx'_0 = x_0 + h(t_0 + 1 + y_0^2 - y_0 x_0) = 1 + (0.5)(1) = 1.5 \end{aligned}$$

Tiempo en cuenta los valores anteriores, podemos generar la segunda iteración

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hy'_1 = y_1 + hx_1 = 0.5 + (0.5)(1.5) = 1.25 \\ x_2 &= x_1 + hx'_1 = x_1 + h(t_1 + 1 + y_1^2 - y_1 x_1) = 1.5 + (0.5)(1) = 2 \end{aligned}$$

Las aproximaciones son

$$t_2 = 1, \quad y_2 = 1.25, \quad x_2 = 2,$$

y la solución buscada es: $\mathbf{y}(1) = \mathbf{y}_2 = \mathbf{1.25}$.

6.2.3. Resolución numérica de las ecuaciones de Lotka-Volterra

En el Tema 5 estudiamos las ecuaciones de *Lotka-Volterra* que describen el comportamiento de dos especies, una de ellas depredadora de la otra. El modelo viene dado por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) = ax - bxy, & x(t_0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) = -cy + dxy, & y(t_0) &= y_0\end{aligned}\tag{6.11}$$

donde $x(t)$ representa al número de presas, e $y(t)$ al número de depredadores en el tiempo t . El comportamiento específico del sistema anterior dependerá de la relación entre los coeficientes a , b , c , d .

Utilizaremos el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden para encontrar una aproximación de las soluciones de (6.11), el cual, como sabemos, consiste en encontrar:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}l_1 &= f(t_k, x_k, y_k) & m_1 &= g(t_k, x_k, y_k) \\ l_2 &= f(t_k + h/2, x_k + l_1h/2, y_k + l_1h/2) & m_2 &= g(t_k + h/2, x_k + m_1h/2, y_k + m_1h/2) \\ l_3 &= f(t_k + h/2, y_k + l_2h/2, y_k + l_2h/2) & m_3 &= g(t_k + h/2, y_k + m_2h/2, y_k + m_2h/2) \\ l_4 &= f(t_k + h, x_k + l_3h, y_k + l_3h) & m_4 &= g(t_k + h, x_k + m_3h, y_k + m_3h)\end{aligned}$$

Como puede comprenderse la ejecución del método es muy laboriosa, por este motivo lo implementamos en el programa `Mathematica`_®, para el caso

$$\begin{aligned}x'(t) &= 1.2x - 0.08xy, & x(0) &= 10 \\ y'(t) &= -0.5y + 0.2xy, & y(0) &= 15\end{aligned}$$

con un paso $h = 25/200 = 0.125$. Nuestro objetivo será el de encontrar un valor aproximado de $x(25)$ e $y(25)$.

```

f[t_, x_, y_] := 1.2x - 0.08 * x * y;
g[t_, x_, y_] := -0.5 * y + 0.2 * x * y;
a = 0.;
b = 25;
dato1 = {10}; dato2 = {15};
n = 200;
h = (b - a)/n;
nodo = Table[a + ih, {i, 0, n}];

For[i = 2, i <= n + 1, i ++,
k1 = f[nodo[[i - 1]], dato1[[i - 1]], dato2[[i - 1]]];
L1 = g[nodo[[i - 1]], dato1[[i - 1]], dato2[[i - 1]]];
k2 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, dato1[[i - 1]] + (h/2)k1, dato2[[i - 1]] + (h/2)L1];
L2 = g[nodo[[i - 1]] + h/2, dato1[[i - 1]] + (h/2)k1, dato2[[i - 1]] + (h/2)L1];
k3 = f[nodo[[i - 1]] + h/2, dato1[[i - 1]] + (h/2)k2, dato2[[i - 1]] + (h/2)L2];
L3 = g[nodo[[i - 1]] + h/2, dato1[[i - 1]] + (h/2)k2, dato2[[i - 1]] + (h/2)L2];
k4 = f[nodo[[i - 1]] + h, dato1[[i - 1]] + hk3, dato2[[i - 1]] + hL3];
L4 = g[nodo[[i - 1]] + h, dato1[[i - 1]] + hk3, dato2[[i - 1]] + hL3];
AppendTo[dato1, dato1[[i - 1]] + (h/6)(k1 + 2k2 + 2k3 + k4)];
AppendTo[dato2, dato2[[i - 1]] + (h/6)(L1 + 2L2 + 2L3 + L4)];];

presas = ListPlot[Table[{nodo[[i]], dato1[[i]]}, {i, n + 1}],
PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];

depredadores = ListPlot[Table[{nodo[[i]], dato2[[i]]}, {i, n + 1}],
PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1]];

Show[presas, depredadores]

```

La solución que se obtiene es $x_{25} = 0.404998$, $y_{25} = 6.57511$. La representación gráfica de las soluciones puede verse en la Figura 6.8

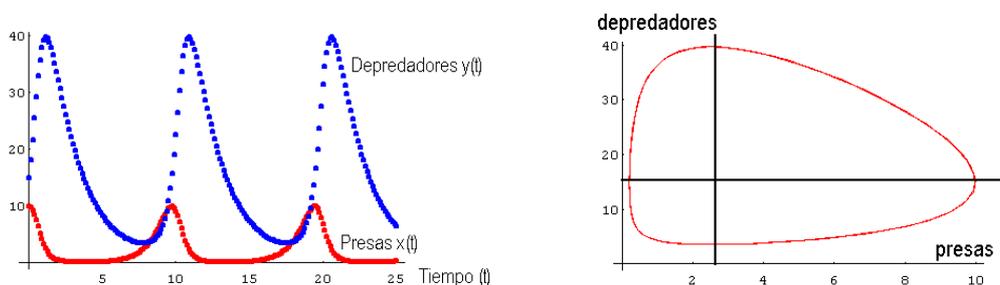


Figura 6.8. Izquierda: Evolución de presas y depredadores. Derecha: Solución en el plano fase.

6.3. Cálculo aproximado de valores propios

Como tenemos ocasión de ver a lo largo del presente texto, el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz cuadrada está presente en un número elevado de diferentes aplicaciones. Parece lógico pensar que, para su cálculo, una buena manera de actuar sería encontrar el polinomio característico $p(\lambda) = |A - \lambda I|$, y posteriormente estimar las raíces de este polinomio. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones sólo se necesita conocer un determinado valor propio, llamado dominante, y existen procedimientos numéricos para hallar este valor. Nosotros utilizaremos el método conocido con el nombre de las potencias, el cual se encuentra íntimamente ligado al estudio de la estabilidad de las clases de edades del modelo matricial de *Leslie*.

DEFINICIÓN 6.3.1 Diremos que λ_1 es el valor propio dominante de una matriz A , si es mayor en valor absoluto que el resto de los valores propios de A . Un vector propio asociado a este valor propio dominante recibe el nombre de vector propio dominante de la matriz A .

Supongamos que los valores propios de la matriz A de orden cinco son:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -5, \quad \lambda_4 = 3.5, \quad \lambda_5 = -2.3,$$

entonces el valor propio dominante es el $\lambda_3 = -5$. Observemos que si, por ejemplo, $\lambda_1 = 5$, entonces no existe un valor propio que sea dominante.

6.3.1. Método de las potencias

A continuación describiremos un procedimiento para estimar el valor propio dominante y su vector propio dominante asociado, conocido con los nombres de método de las potencias o de las iteraciones. Está basado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.11

- Sea la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix},$$

y tomemos como vector inicial uno cualquiera $\vec{x}(0) = (2, 1)^T$. Ahora, calculemos

$$\vec{x}(1) = A\vec{x}(0) = \gamma_1(1, 1.25)^T$$

$$\vec{x}(2) = A\vec{x}(1) = A^2\vec{x}(0) = \gamma_2(1, 1.7)^T$$

$$\vec{x}(3) = A\vec{x}(2) = A^3\vec{x}(0) = \gamma_3(1, 1.89)^T$$

$$\vec{x}(4) = A\vec{x}(3) = A^4\vec{x}(0) = \gamma_4(1, 1.96341)^T$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\vec{x}(10) = A^{10}\vec{x}(0) = \gamma_{10}(1, 1.99995)^T.$$

Como puede observarse, los diferentes valores de $\vec{x}(k)$ tiende a un múltiplo del vector $(1, 2)^T$ cuando k es suficientemente grande. Éste será el vector propio dominante.

Pasemos a formalizar el razonamiento anterior. Supongamos que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

y además, la matriz A es diagonalizable. Entonces debe de existir una base de \mathbb{R}^n formada por vectores propios $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$, donde \vec{u}_i es el vector propio asociado al valor propio λ_i , $i = 1, 2, \cdots, n$. Por definición de base, el vector inicial $\vec{x}(0)$ puede escribirse:

$$\vec{x}(0) = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n,$$

donde algún coeficiente c_i tiene que ser no nulo, supongamos que $c_1 \neq 0$. Si calculamos $\vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{x}(k) &= A^k(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n) \\ &= c_1A^k\vec{u}_1 + c_2A^k\vec{u}_2 + \cdots + c_nA^k\vec{u}_n \\ &= c_1\lambda_1^k\vec{u}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{u}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\vec{u}_n \\ &= \lambda_1^k \left(c_1\vec{u}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \vec{u}_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \vec{u}_n \right). \end{aligned}$$

Al ser λ_1 el valor propio dominante, entonces $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$, $i = 2, 3, \cdots, n$, y en consecuencia $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k$ tiende a cero para valores de k suficientemente grandes. Es decir,

$$\boxed{\vec{x}(k) = A^k\vec{x}(0) \approx \lambda_1^k c_1 \vec{u}_1},$$

el vector resultante es proporcional al vector propio dominante buscado. Una vez conocida una estimación del vector propio dominante \vec{u}_1 , es posible encontrar su valor propio dominante asociado. La fórmula se conoce con el nombre de **cociente de Rayleigh**, y consiste en lo siguiente:

Si $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ representa al producto escalar ordinario de los vectores \vec{a} y \vec{b} , es fácil comprobar que

$$\frac{\langle \vec{u}_1, A\vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{\langle \vec{u}_1, \lambda_1\vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{\lambda_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \lambda_1.$$

Si aplicamos este resultado al Ejemplo 6.11

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \vec{u}_1, A\vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{\langle (1, 2)^T, A(1, 2)^T \rangle}{\langle (1, 2)^T, (1, 2)^T \rangle} = \frac{\langle (1, 2)^T, (12, 15)^T \rangle}{\langle (1, 2)^T, (1, 2)^T \rangle} = \frac{42}{5} = 8.4.$$

Naturalmente, esta aproximación puede ser mejorada tomando en lugar del $\vec{x}(1)$ el $\vec{x}(10)$, pero recordemos que todo lo dicho es válido si λ_1 es dominante.

La expresión $\vec{x}(k) = A^k \vec{x}(0) \approx \lambda_1^k c_1 \vec{u}_1$, también nos permite encontrar un valor aproximado de λ_1 . En efecto,

$$\vec{x}(k) \approx \lambda_1^k c_1 \vec{u}_1 = \lambda_1 \lambda_1^{k-1} c_1 \vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{x}(k-1),$$

lo que obliga a la siguiente relación entre sus componentes:

$$\vec{x}_j(k) \approx \lambda_1 \vec{x}_j(k-1), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \approx \frac{\vec{x}_j(k)}{\vec{x}_j(k-1)}.$$

6.3.2. El método de las potencias con cambio de escala

En el Ejemplo 6.11 vimos que con cada iteración aumentaba el valor de las componentes del vector, y una manera de evitar este problema era aplicar cierta escala γ_i . Básicamente este proceso se conoce con el nombre de método de las potencias con cambio de escala. Aplicando este procedimiento siempre obtenemos un vector cuya componente mayor en valor absoluto es uno.

EJEMPLO 6.12

- Aplicaremos el método de las potencias con cambio de escala, para encontrar el valor propio y el vector propio dominante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Empezamos tomando como vector inicial uno que nos permita simplificar las operaciones, por ejemplo $\vec{x}(0) = (1, 1)^T$.

$$\vec{x}(1) = A\vec{x}(0) = (-9, 3)^T = -9(1, -1/3)^T$$

$$\vec{x}(2) = A(1, -1/3)^T = -7/3(1, -1/7)^T.$$

Una posible estimación del vector propio dominante puede ser $\vec{u}_1 \approx (1, -1/7)^T = (1, -0.14286)^T$. Por otro lado, por definición de vector y valor propio

$$A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.14286 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -0.14286\lambda_1 \end{pmatrix},$$

y podemos estimar el valor de $\lambda_1 \approx -3.28$.

Una de las preguntas que está presente en todo el estudio que estamos desarrollando es la siguiente: ¿cuántos pasos debemos usar en el método de las potencias para obtener una buena estimación? No existe una respuesta rotunda a esta pregunta, pero el análisis del error relativo puede aportar una solución parcial al problema.

DEFINICIÓN 6.3.2 Si \tilde{a} es una estimación de la cantidad a , entonces el error relativo se define como:

$$\left| \frac{a - \tilde{a}}{a} \right|.$$

El error en porcentaje en la estimación se define como

$$\left| \frac{a - \tilde{a}}{a} \right| \times 100 \%.$$

Supongamos que inicialmente el error relativo que estamos dispuestos a tolerar en el valor propio dominante es ϵ . Si $\tilde{\lambda}_1(i)$ es la estimación de λ_1 en la i -ésima iteración, entonces el método se terminaría cuando se cumpla:

$$\left| \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1(i)}{\lambda_1} \right| < \epsilon.$$

No obstante, aplicar la fórmula anterior tiene el gran inconveniente de que el valor exacto λ_1 no es conocido. En este caso, suele sustituirse la expresión anterior por esta otra:

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}_1(i) - \tilde{\lambda}_1(i-1)}{\tilde{\lambda}_1(i)} \right| < \epsilon,$$

donde la cantidad que aparece a la izquierda se la conoce con el nombre de error relativo estimado, y si se multiplica por 100 %, se llama error en porcentaje estimado.

6.3.3. Deflación

A través del método de las potencias podemos estimar el valor propio dominante y un vector propio asociado. Existen diferentes técnicas para conocer el resto de los valores propios. De todas ellas nosotros utilizaremos la conocida con el nombre de deflación. El método está basado en el siguiente teorema cuya demostración puede verse en cualquier texto de métodos numéricos del álgebra lineal.

TEOREMA 6.3.3 Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, los valores propios de la matriz A . Supongamos que λ_1 es el valor propio dominante, \vec{u}_1 su vector propio asociado, y \vec{v} un vector tal que $\langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle = 1$. Sea B la matriz definida como

$$B = A - \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{v}^T.$$

Entonces los valores propios de la matriz B son $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Se conoce con el nombre de deflación al proceso de encontrar el resto de los valores propios a partir del valor propio dominante. Para ello se aplica el método de las potencias con escala a la nueva matriz B .

EJEMPLO 6.13

- Aplicaremos el método de las potencias con cambio de escala y la deflación para encontrar todos los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos como vector inicial $\vec{x}(0) = (1, 1, 1)^T$, entonces $\vec{x}(1) = A\vec{x}(0) = (4, 0, 2)^T$ que dividiendo por 4 nos queda $\vec{x}'(1) = (1, 0, 0.5)^T$. De forma similar $\vec{x}(2) = A\vec{x}'(1) = (4.5, -2, 2.5)^T$, o bien

$$\vec{x}'(2) = (1, -0.44444, 0.555556)^T.$$

Los valores siguientes se encuentran representados en la tabla siguiente. También aparecen los cocientes entre la primera de las componentes de una iteración y la anterior γ_k .

Iteración	$\vec{x}(k)$	$\vec{x}'(k)$	γ_k
0	$(1, 1, 1)^T$	$(1, 1, 1)^T$	-
1	$(4, 0, 2)^T$	$(1, 0, 0.5)^T$	4
2	$(4.5, -2, 2.5)^T$	$(1, -0.44444, 0.555556)^T$	4.5
3	$(5, -3.4444, 3.5556)^T$	$(1, -0.68888, 0.71112)^T$	5
4	$(5.4, -4.4889, 4.5111)^T$	$(1, -0.83128, 0.83539)^T$	5.4
5	$(5.6667, -5.1646, 5.1687)^T$	$(1, -0.91139, 0.91212)^T$	5.6667
6	$(5.8235, -5.5584, 5.5591)^T$	$(1, -0.95448, 0.95460)^T$	5.8
7	$(5.9091, -5.7726, 5.7728)^T$	$(1, -0.97690, 0.97693)^T$	5.9091
8	$(5.9538, -5.8846, 5.8846)^T$	$(1, -0.98838, 0.98838)^T$	5.9538
9	$(5.9768, -5.9419, 5.9419)^T$	$(1, -0.99416, 0.99416)^T$	5.9768
10	$(5.9883, -5.9708, 5.9708)^T$	$(1, -0.99708, 0.99708)^T$	5.9883

Se observa que el valor propio dominante es $\lambda_1 \approx 6$ y su vector propio asociado $\vec{u}_1 \approx (1, -1, 1)^T$.

Para encontrar el resto de los valores y vectores propios aplicamos el método de deflación, y para ello necesitamos un vector \vec{v} tal que $\langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle = 1$. Podemos tomar $\vec{v} = (1/3, -1/3, 1/3)^T$ y calcular

$$B = A - \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{v}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al ser la primera de las columnas la diferencia entre la segunda y la tercera, el determinante de la matriz B es cero y eso obliga a que uno de sus valores propios

sea cero, hecho que conocíamos por el Teorema 6.3.3. Ahora, aplicamos de nuevo el método de las potencias a la matriz B con objeto de encontrar su vector propio dominante, que coincidirá con otro de los valores propios de la matriz A .

Iteración	$\vec{x}(k)$	$\vec{x}'(k)$	γ_k
0	$(1, 1, 1)^T$	$(1, 1, 1)^T$	-
1	$(2, 2, 0)^T$	$(1, 1, 0)^T$	2
2	$(3, 2, -1)^T$	$(1, 0.66667, -0.333333)^T$	3
3	$(3, 1.6667, -1.3333)^T$	$(1, 0.555557, -0.44443)^T$	3
4	$(3, 1.5556, -1.4444)^T$	$(1, 0.51853, -0.48147)^T$	3
5	$(3, 1.5062, -1.4938)^T$	$(1, 0.50207, -0.49793)^T$	3
6	$(3, 1.5062, -1.4938)^T$	$(1, 0.5027, -0.49793)^T$	3

Puede apreciarse que $\vec{u}_2 \approx (1, 1/2, -1/2)^T$ y $\lambda_2 \approx 3$.

Para finalizar aplicamos de nuevo la deflación para calcular el último de los valores y vectores propios de A . Puede tomarse $\vec{v} = (1, 0, 0)^T$, ya que $\langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = 1$, y entonces

$$C = B - \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{v}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos convenientes se llega a que $\lambda_3 \approx 1$ y $\vec{u}_3 \approx (0, -2, 1)^T$.



Tema 7

MODELOS DISCRETOS MATRICIALES

7.1. Introducción

La dinámica de una población viene determinada por el número de nuevos nacimientos y la probabilidad de morir que tienen los individuos que componen la población. Por ello, es muy importante saber la estructura de edades de la población que estamos estudiando. Es decir, cómo se reparten los individuos en las diferentes clases de edad y lo que es más importante, conocer las probabilidades asociadas de supervivencia, mortalidad y fecundidad. Generalmente esta información se refleja en una tabla de vida, en la mayoría de los casos correspondiente a las hembras de la población, ya que son las que contribuyen a la dinámica de la población en términos de fecundidad.

El presente tema es una introducción al estudio de los modelos estructurados basados en el álgebra matricial. Se inicia con un modelo probabilístico clásico como son las cadenas de *Markov* y se centra fundamentalmente en el estudio de uno de los modelos más conocidos como es el modelo de *Leslie*.

7.2. Cadenas de Markov

Los dos resultados que podemos obtener al realizar el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire los designaremos por $E_1 = \text{salir cara}$ y $E_2 = \text{salir cruz}$. Si repetimos t veces este experimento la probabilidad de que en uno de ellos obtengamos E_1 no depende de lo que haya salido en el experimento anterior; ambos sucesos son independientes. Sin embargo, existen muchos otros fenómenos representados por variables aleatorias dependientes. En 1907 *Markov* estudió estas situaciones en las

cuales la probabilidad de que ocurra un suceso depende del suceso inmediatamente anterior, y son estas las que estudiaremos en esta sección.

Supongamos una secuencia de n pruebas o experimentos donde cada uno de ellos tiene un conjunto de resultados posibles (que consideraremos finito) y que designaremos por las letras $E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$, mutuamente exclusivos. Si al realizar una prueba se obtiene el resultado E_i , entonces diremos que el sistema o el fenómeno se encuentra en el estado E_i . Utilizaremos E_i^t para representar al estado E_i al cabo de t pruebas. En consecuencia, $P[E_i^t]$ será la probabilidad de que después de t experiencias el sistema se encuentre en el estado E_i . Por otro lado, llamaremos P_{ij}^t a la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado E_i en la prueba t condicionada a que en la prueba anterior $t - 1$ se encontrara en el estado E_j . Es decir,

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}]$$

DEFINICIÓN 7.2.1 Una sucesión de estados $E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$, mutuamente exclusivos constituyen una cadena de Markov cuando

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}] = P[E_i^t/E_j^{t-1} \cdot E_{j_{t-2}}^{t-2} \cdot E_{j_{t-3}}^{t-3} \cdot \dots \cdot E_{j_1}^1 \cdot E_{j_0}^0], \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Es decir, la probabilidad de que el objeto en el experimento t esté situado en el estado E_i sólo depende del estado E_j del experimento anterior $t - 1$ y es independiente de los otros experimentos anteriores. En cierto modo, es como si el sistema no tuviese "memoria".

Es evidente que la probabilidad P_{ij}^t depende de tres variables: los sucesos E_i, E_j y el "tiempo" t . En general,

$$P_{ij}^t = P[E_i^t/E_j^{t-1}] \neq P_{ij}^{t'}.$$

DEFINICIÓN 7.2.2 En el caso particular en el que la probabilidad P_{ij}^t sea independiente de la prueba t , diremos que la cadena de Markov es **homogénea** o **estacionaria**, en cuyo caso escribiremos $P_{ij}^t = P_{ij}$.

Desde ahora y a lo largo del curso siempre consideraremos cadenas homogéneas.

Al ser P_{ij} una probabilidad se cumplirá:

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m P_{ij} = 1, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (7.1)$$

7.2.1. Matrices estocásticas

Si p_j^t , $j = 1, 2, \dots, m$ es la probabilidad de que el objeto esté situado en el experimento $t = 1, 2, \dots, n$, en el estado E_j , entonces

$$p_j^t = p_1^{t-1}P_{j1} + p_2^{t-1}P_{j2} + \dots + p_m^{t-1}P_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (7.2)$$

Con los números p_j^t formamos un vector columna $\vec{X}(t)$, y con los P_{jk} una matriz cuadrada A . Ahora, las identidades (7.2) podemos expresarlas

$$\vec{X}(t) = A \vec{X}(t-1), \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (7.3)$$

La cadena de *Markov* homogénea está representada por el sistema de ecuaciones lineales en diferencias anteriores. Observemos que por las condiciones (7.1) la matriz A cumplirá:

- La suma de los elementos de cada una de sus columnas vale la unidad. Sin embargo, no ocurre lo mismo con la suma de los elementos de sus filas
- Todos sus elementos P_{jk} son mayores o iguales que cero y menores o iguales que uno.

A una matriz de transición de este tipo se la conoce con el nombre de **matriz estocástica**. Aquellas matrices estocásticas donde la suma de los elementos de cada fila sea la unidad reciben el nombre de doblemente estocásticas.

7.2.2. Diagramas de estados

Podemos representar las diferentes relaciones entre los estados de una cadena por medio de un diagrama formado por nodos y flechas orientadas con las probabilidades de transición. A esta representación se la conoce con el nombre de diagrama de transición o de estados.

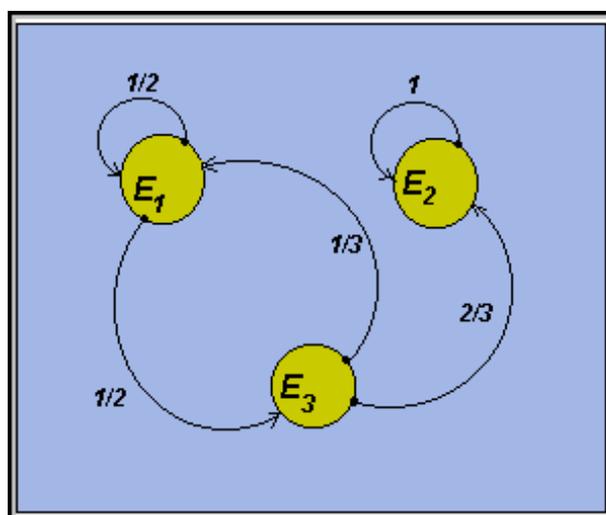


Figura 7.1. Diagrama de estados.

En la Figura 7.1 se ha dibujado el diagrama correspondiente a la matriz estocástica:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 7.1

Para beber agua un animal puede ir a un lago o a un río. Se sabe que no va al lago dos días seguidos y que si toma agua en el río la probabilidad de que el día siguiente beba agua en cada uno de los sitios es la misma.

- Estamos ante una cadena de *Markov* homogénea con dos estados, E_1 que representa al hecho de que el animal beba agua en el lago y E_2 que beba agua en el río.
- La matriz de transición es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- Observemos que se trata de una cadena particular, ya que el paso de un estado al siguiente no depende de los anteriores, sino del primero de ellos.

EJEMPLO 7.2

Una tienda de animales que vende peces incluye una garantía por la que cualquier pez que muera antes de cumplir tres meses se reemplaza de forma gratuita. Una vez que el pez se ha reemplazado ya no queda cubierto por la garantía. Se sabe que:

1. El 3% de los peces mueren durante su primer mes.
 2. El 5% de los peces que han cumplido un mes mueren durante el segundo.
 3. El 7% de los peces que han cumplido dos meses mueren durante el tercer mes.
- Podemos representar la situación anterior por medio de una cadena de *Markov* siendo los estados, $E_i :=$ pez en el mes $i = 1, 2, 3$ de garantía, $E_4 :=$ pez sin garantía por haber sido repuesto, y $E_5 :=$ pez sin garantía por tener más de 3 meses.
 - El diagrama de estados que representa a esta cadena aparece en la Figura 7.2.

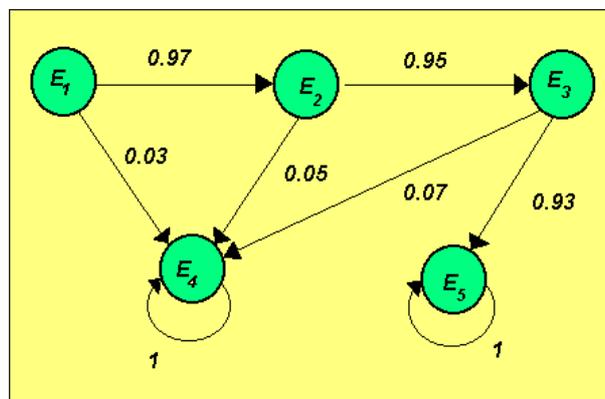


Figura 7.2. Diagrama de estados.

7.2.3. Cadenas de Markov regulares

Recordemos que estamos considerando un número finito de experimentos, no obstante podemos realizar un desarrollo similar considerando

$$\vec{X}(t) = A \vec{X}(t-1), \quad t = 1, 2, 3, \dots,$$

ya que uno de los objetivos que perseguimos al modelar una determinada situación real es el de poder conocer su comportamiento a largo plazo. Puesto que la matriz de transición A nos resuelve el problema de encontrar la ley de probabilidad, el límite de esta ley cuando el tiempo tiende a infinito, nos proporciona un método para estudiar el comportamiento a largo plazo de la cadena de *Markov*.

TEOREMA 7.2.3 *Si A^n representa a la potencia n -ésima de la matriz de transición A , entonces $P[E_i^n/E_j^0] = A^n(i, j)$.*

Demostración. Vamos a utilizar el método de inducción sobre la potencia n de la matriz de transición. Sean i, j dos valores cualesquiera de $\{1, 2, \dots, m\}$, por definición de los elementos de la matriz A tenemos

$$P[E_i^1/E_j^0] = P_{ij} = A(i, j).$$

Supongamos ahora que el teorema sea cierto para el paso $n-1$, es decir

$$P[E_i^{n-1}/E_j^0] = A^{n-1}(i, j). \quad (7.4)$$

Haciendo uso de la ley de la probabilidad total,

$$P[E_i^n/E_j^0] = \sum_{k=1}^m P[E_k^{n-1}/E_j^0] P[E_i^n/E_k^{n-1}.E_j^0],$$

Por la hipótesis (7.4) de inducción $P[E_k^{n-1}/E_j^0] = A^{n-1}(k, j)$, y por la definición de cadena de *Markov* $P[E_i^n/E_k^{n-1}.E_j^0] = P[E_i^n/E_k^{n-1}] = P_{ik} = A(i, k)$. Es decir,

$$P[E_i^n/E_j^0] = \sum_{k=1}^m A(i, k) A^{n-1}(k, j),$$

que corresponde al elemento de la fila i columna j del producto de las matrices $AA^{n-1} = A^n$.

DEFINICIÓN 7.2.4 *Una cadena de Markov es **regular** si existe un número natural n tal que la potencia n -ésima de su matriz de transición A tiene todos sus elementos positivos.*

Observemos que si la cadena es regular, entonces la matrices A^m con $m > n$ también tendrán todos sus elementos positivos.

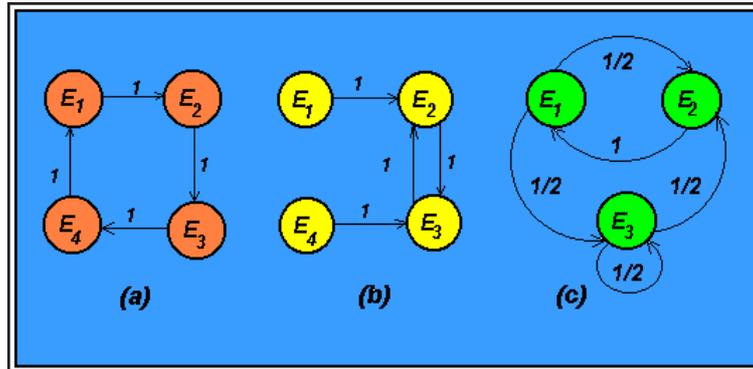


Figura 7.3. Ejemplos de cadenas de Markov.

Una manera alternativa de probar que una cadena es regular es:

- Viendo si todos los estados son accesibles.
- Comprobando que existan dos ciclos al menos uno de ellos impar.

Las cadenas (a) y (b) de la Figura 7.3 no son regulares, ya que en el primer caso sólo contiene un ciclo, y en el segundo el estado E_4 no es accesible. Sin embargo, la cadena (c) sí es regular pues todos los estados son accesibles y además existen los ciclos $E_2E_1E_3E_2$ (impar) y $E_1E_2E_1$ (par). En este último caso (c), la potencia n -ésima de su matriz de transición es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

7.2.4. Propiedades de las matrices estocásticas

Las matrices estocásticas por la forma particular en el que han sido definidas cumplen cierto número de propiedades interesantes, de entre las cuales destacaremos por el uso que haremos de ellas, las siguientes.

TEOREMA 7.2.5 Si A es una matriz de orden n estocástica, entonces tiene al uno como valor propio.

Su demostración está basada en probar que el determinante $|A - I|$ es nulo. Para facilitar la notación consideraremos $n = 4$,

$$|A - I| = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

sumamos a la primera de las filas el resto de ellas

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^4 a_{j1} - 1 & \sum_{j=1}^4 a_{j2} - 1 & \sum_{j=1}^4 a_{j3} - 1 & \sum_{j=1}^4 a_{j4} - 1 \\ a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Pero al ser A una matriz estocástica

$$\sum_{j=1}^4 a_{j1} = \sum_{j=1}^4 a_{j2} = \sum_{j=1}^4 a_{j3} = \sum_{j=1}^4 a_{j4} = 1,$$

y por tanto, todos los elementos de la primera fila del determinante anterior son ceros, lo cual implica que este determinante es nulo, tal y como deseábamos probar.

TEOREMA 7.2.6 *Si A es una matriz estocástica de orden n con todos sus elementos positivos (regular), entonces la sucesión de matrices A^n , $n = 1, 2, \dots$ converge hacia una matriz que tiene todas sus columnas iguales que coinciden con $\vec{\Pi}$ tal que:*

- $\sum_{j=1}^m \Pi(\vec{j}) = 1.$
- *La distribución $\vec{\Pi}$ es el autovector asociado al autovalor 1 de la matriz estocástica A . Esto es, $A\vec{\Pi} = \vec{\Pi}$.*

La demostración de esta propiedad queda fuera del alcance del objetivo del curso pero puede consultarse en la página 264 del libro “*Modelos matemáticos y procesos dinámicos*” de *Santiago Pérez-Cacho y otros*.

Como aplicación inmediata del Teorema 7.2.6 anterior, observemos que en el Ejemplo 7.1 la matriz de transición A de la cadena de *Markov* regular tiene como valor propio $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -0.5$ y autovectores $\vec{U}_1 = (1, 2)$, $\vec{U}_2 = (-1, 1)$. En consecuencia, $\vec{\Pi} = (1/3, 2/3)$ y por tanto

$$A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

EJEMPLO 7.3

Sea la matriz de transición correspondiente a seis estados

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que en el momento inicial el sistema se encuentra en el estado E_4 .

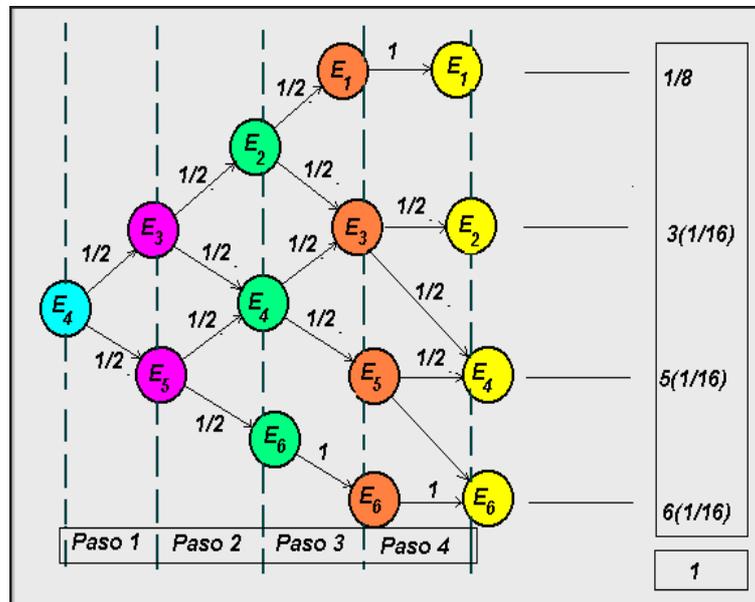


Figura 7.4.

- Veamos como podemos pasar del estado inicial E_4 al resto de los estados. Sabemos que

$$\vec{X}(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T.$$

Como puede apreciarse en la Figura 7.4, al cabo de un paso la probabilidad será,

$$\vec{X}(1) = (0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0)^T,$$

o bien $\vec{X}(1) = A \vec{X}(0)$. Del mismo gráfico deducimos que,

$$\vec{X}(2) = (0, 1/4, 0, 1/2, 0, 1/4)^T$$

$$\vec{X}(3) = (1/8, 0, 3/8, 0, 1/4, 1/4)^T$$

$$\vec{X}(4) = (1/8, 3/16, 0, 5/16, 0, 3/8).$$

O de forma matricial:

$$\vec{X}(2) = A \vec{X}(1), \quad \vec{X}(3) = A \vec{X}(2), \quad \vec{X}(4) = A \vec{X}(3).$$

- Con el programa Mathematica® podemos encontrar A^{200} ,

```
A := {{1., 1/2, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0.5, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0},
{0, 0, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1/2, 1}}
MatrixPower[A, 200]
```

```
{{1., 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.}, {0., 1.07909*10-19, 0., 1.746 *10-19, 0., 0.}, {0., 0.,
2.82509*10-19, 0., 1.746* 10-19, 0.}, {0., 1.746*10-19, 0., 2.82509*10-19, 0., 0.}, {0.,
0., 1.746*10-19, 0., 1.07909*10-19, 0.}, {0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.}}
```

- Del apartado anterior deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Es decir, a largo plazo existe un 40 % de posibilidades de que partiendo del estado E_4 la cadena se encuentre en el estado E_1 y un 60 % de que esté en el E_6 .

EJEMPLO 7.4

Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la Figura 7.5. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Sabiendo que semana tras semana todos los ratones cambian de ubicación y que los ratones cuando salen eligen un compartimento al azar, veamos cuál será su distribución de los ratones al cabo de “infinitas” semanas.

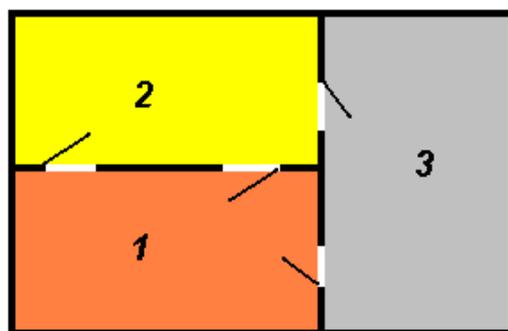
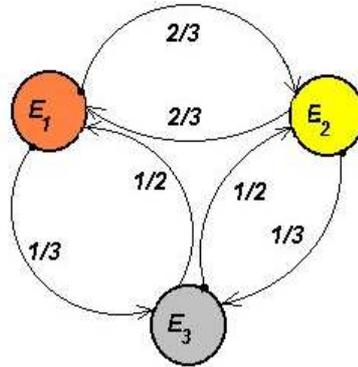


Figura 7.5.

- Observemos que estamos ante una cadena de *Markov* cuyo diagrama de estados es el siguiente:



A partir del diagrama es inmediato obtener la matriz de transición

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $X_i(t)$ representa al número de ratones en el compartimento $i = 1, 2, 3$ en la semana t y $\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$ es la distribución inicial, deducimos del enunciado que

$$\begin{cases} X_1(1) = & \frac{2}{3}X_2(0) + \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_2(1) = \frac{2}{3}X_1(0) + & \frac{1}{2}X_3(0) \\ X_3(1) = \frac{1}{3}X_1(0) + \frac{1}{3}X_2(0) & . \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales que podemos expresarlo matricialmente

$$\begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\vec{X}(1) = A\vec{X}(0).$$

Razonando de la misma manera

$$\vec{X}(2) = A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0).$$

En general

$$\vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0), \quad t = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, para obtener el número de ratones en cada uno de los compartimentos en la semana t , tendremos que encontrar el valor de la matriz potencia A^t . Una aproximación de este valor podemos obtenerla con el **Mathematica**[®]

```
A := {{0, 2/3, 0.5}, {2/3, 0, 0.5}, {1/3, 1/3, 0}}
```

```
MatrixPower[A, 100]
```

```
{{0.375, 0.375, 0.375}, {0.375, 0.375, 0.375}, {0.250, 0.250, 0.250}}.
```

- Ahora, estamos interesados en deducir este valor de una manera diferente. Observemos que si la matriz A fuese diagonal, entonces A^t sería muy fácil de encontrar, bastaría elevar a t los elementos de la diagonal. Por esta razón, en primer lugar procederemos a diagonalizar la matriz simétrica A .

Los valores propios de la matriz A son los siguientes:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

desarrollando obtenemos la ecuación característica

$$9\lambda^3 - 7\lambda - 2 = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2/3$, $\lambda_3 = -1/3$. Por tanto, la matriz A es diagonalizable siendo los subespacios propios asociados a estos valor propio

$$S_1 = \langle (3, 3, 2) \rangle, \quad S_2 = \langle (-1, 1, 0) \rangle, \quad S_3 = \langle (-1, -1, 2) \rangle.$$

En consecuencia, la matriz de paso C es,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar A^t , actuamos de la manera siguiente

$$D = C^{-1}AC \Rightarrow A = CDC^{-1} \Rightarrow A^t = CD^tC^{-1},$$

que en nuestro caso

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Simplificando

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \left(3 + 4 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{1}{8} \left(3 - 4 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{3}{8} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) \\ \frac{1}{8} \left(3 - 4 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{1}{8} \left(3 + 4 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{3}{8} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) \\ \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) & \frac{1}{4} \left(1 + 3 \left(-\frac{1}{3}\right)^t \right) \end{pmatrix}.$$

Finalmente hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces

$$A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia después de infinitas semanas la distribución de los ratones tiende hacia

$$\left. \begin{aligned} \text{Primero} &= \frac{3}{8}X_1(0) + \frac{3}{8}X_2(0) + \frac{3}{8}X_3(0) = \frac{3}{8}(X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) = \frac{3}{8}\text{Total} \\ \text{Segundo} &= \frac{3}{8}X_1(0) + \frac{3}{8}X_2(0) + \frac{3}{8}X_3(0) = \frac{3}{8}(X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) = \frac{3}{8}\text{Total} \\ \text{Tercero} &= \frac{1}{4}X_1(0) + \frac{1}{4}X_2(0) + \frac{1}{4}X_3(0) = \frac{1}{4}(X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) = \frac{1}{4}\text{Total} \end{aligned} \right\}$$

- Un camino alternativo para llegar a la conclusión anterior es utilizar el Teorema 7.2.6.

En efecto, la cadena de *Markov* es regular ya que todos los estados son accesibles y existen dos ciclos $E_1E_2E_3E_1$ y $E_1E_2E_1$ al menos uno de ellos impar (además A^2 tiene todos sus elementos positivos). Sabemos que el vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ es $(3, 3, 2)$.

$$\vec{\Pi} = (3/8, 3/8, 1/8),$$

y en consecuencia si $t \rightarrow \infty$,

$$A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

7.3. Cadenas de Markov y Genética

A continuación utilizaremos las cadenas de *Markov* para estudiar como se propaga un determinado rasgo hereditario en sucesivas generaciones.

7.3.1. Herencia autosómica

Los genes son las unidades más pequeñas de la herencia. Como es sabido, los genes son partes de la molécula de ADN que se encuentran en los cromosomas, los cuales codifican la secuencia de aminoácidos de una proteína. Además, el ADN no sólo lleva esta información, sino que es capaz de hacer nuevas copias de sí mismo. El cuerpo humano tiene un número aproximado de entre diez y cien billones de células. Cada una de las células tiene 46 cromosomas, con un número aproximado de 100.000 genes.

El rasgo que se va a heredar está regido por dos genes, cada uno de los cuales es usual representarlo con las letras A y a. Si el tipo de herencia es autosómica¹ los individuos de la población, independientemente del sexo poseen los dos genes, siendo AA, Aa y aa los diferentes pares que pueden formarse. A estos conjuntos de dos genes se les conoce como **genotipo** del individuo y determinan la forma en que el rasgo controlado por los genes se manifiesta en el individuo. Por ejemplo, en algunos tipos de flores determinan su color; el genotipo AA produce flores rojas, el Aa rosas, y el aa blancas. También el color de los ojos viene configurado por los genotipos, de esta manera AA y Aa dan lugar a personas que tienen los ojos color café y el genotipo aa de color azul. En este caso se dice que el gen A **domina** al a o que a es **recesivo** con respecto al A.

Si la herencia es autosómica un individuo forma su genotipo heredando un gen de

¹Cualquier cromosoma con exclusión del cromosoma sexual; los que son comunes a los dos sexos.

los dos del padre y uno de los dos de la madre, siendo el azar el que determina cuál de los dos genes pasa a su descendiente. Si uno de los padres es del genotipo aa y el otro del Aa , el descendiente recibirá siempre un gen a del aa y un gen A o a , con igual probabilidad, del progenitor del genotipo Aa . Así, el descendiente tiene la misma probabilidad de ser del genotipo aa o Aa .

	$AA \times aa$					
AA	1	0.5	0	0.25	0	0
Aa	0	0.5	1	0.5	0.5	1
aa	0	0	0	0.25	0.5	1

Tabla 7.1.

En la tabla anterior aparecen las probabilidades de los posibles genotipos de los descendientes para todas las combinaciones posibles de los genotipos de los padres.

EJEMPLO 7.5

Supongamos que un agricultor tiene una gran población de plantas con una cierta distribución de tres tipos de genotipos, AA , Aa y aa . Este hombre desea iniciar un programa de cultivos en el que todas las plantas de la población sean fecundadas por una planta del genotipo AA . Queremos obtener la fórmula de la distribución de los tres posibles genotipos de la población, después de un cierto número de generaciones.

- Para $t = 0, 1, 2, \dots$,
 - $X_1(t)$ representa la fracción de las plantas del genotipo AA que hay en la generación de orden t
 - $X_2(t)$ representa la fracción de las plantas del genotipo Aa que hay en la generación de orden t
 - $X_3(t)$ representa la fracción de las plantas del genotipo aa que hay en la generación de orden t

En consecuencia, $X_1(0)$, $X_2(0)$ y $X_3(0)$ son las fracciones de la distribución inicial de los tres genotipos. También se tiene que,

$$X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) = 1; \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Por medio de la Tabla 7.1 se determina la distribución de los genotipos en cada generación a partir de la distribución en la generación anterior,

$$\begin{cases} X_1(t) = X_1(t-1) + \frac{1}{2}X_2(t-1) \\ X_2(t) = \frac{1}{2}X_2(t-1) + X_3(t-1) \\ X_3(t) = 0 \end{cases}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Por ejemplo, la primera de las ecuaciones establece que todos los descendientes de una planta del genotipo AA serán también AA , si se sigue este programa de cultivo y que la mitad de las descendientes de una planta del genotipo Aa serán del genotipo AA . Estas ecuaciones podemos escribirlas de manera matricial,

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1); \quad t = 1, 2, \dots$$

donde,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{X}(t-1) = \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \\ X_3(t-1) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la ecuación $\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1)$, se deduce:

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1) = A^2\vec{X}(t-2) = \dots = A^t\vec{X}(0).$$

Entonces, podemos encontrar una expresión explícita para A^t , aplicamos la ecuación anterior y obtenemos una expresión explícita para $\vec{X}(t)$. Para ello, primero se diagonaliza la matriz A . Es decir, buscamos una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que

$$A = CDC^{-1}.$$

Entonces, se tiene que

$$A^t = CD^tC^{-1}.$$

En nuestro caso,

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 0,$$

y los valores propios asociados son:

$$\vec{U}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \vec{U}_2 = (1, -1, 0)^T, \quad \vec{U}_3 = (1, -2, 1)^T.$$

Por lo tanto,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (\frac{1}{2})^t & 1 - (\frac{1}{2})^{t-1} \\ 0 & (\frac{1}{2})^t & (\frac{1}{2})^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}.$$

Multiplicando,

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) - (\frac{1}{2})^t X_2(0) - (\frac{1}{2})^{t-1} X_3(0) \\ (\frac{1}{2})^t X_2(0) + (\frac{1}{2})^{t-1} X_3(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y como $X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) = 1$, se tiene, para $t = 1, 2, \dots$:

$$\begin{cases} X_1(t) = 1 - (\frac{1}{2})^t X_2(0) - (\frac{1}{2})^{t-1} X_3(0) \\ X_2(t) = (\frac{1}{2})^t X_2(0) + (\frac{1}{2})^{t-1} X_3(0) \\ X_3(t) = 0 \end{cases}$$

Estas fórmulas proporcionan las fracciones de los genotipos de la generación de plantas de orden t , expresadas en función de las fracciones de los genotipos iniciales. Como $(\frac{1}{2})^t$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, de estas ecuaciones deducimos

$$X_1(t) \rightarrow 1, \quad X_2(t) \rightarrow 0, \quad X_3(t) = 0.$$

Conclusión: Cuando t tiende a infinito, es decir, en el límite, todas las plantas de la población serán del tipo AA .

- Podemos considerar el ejemplo como una cadena de *Markov*, siendo los estados E_1, E_2 y E_3 los correspondientes a los genotipos AA, Aa y Aa respectivamente. Observemos que dicha cadena no es regular, ya que los estados E_1 y E_3 no son accesibles, y por tanto para estudiar el comportamiento a largo plazo de la matriz A^t no podemos hacer uso del Teorema 7.2.6.

Supongamos que p y q son las proporciones de los alelos A y a entre los machos y entre las hembras. Entonces, si suponemos que la población es grande, la probabilidad de que la descendencia reciba el alelo A de los dos padres es p^2 . De manera similar, las probabilidades de los genotipos Aa y aa son $2pq$ y q^2 , respectivamente. El término $2pq$ proviene del hecho de que los individuos Aa y aA tienen genotipos idénticos. Este resultado conduce al teorema siguiente, descubierto en forma independiente por *Hardy y Weinberg* en 1908.

RESULTADO 7.3.1 (Ley de Hardy-Weinberg) *Supongamos que en una gran población de padres, los alelos A y a de un gen particular se presentan en las proporciones p y $q = 1 - p$. Si suponemos que estas proporciones son las mismas para los machos y para las hembras y, además, que el apareo es aleatorio, la primera y todas las generaciones sucesivas se compondrán de los tres genotipos, AA, Aa y aa , en las proporciones $p^2, 2pq$ y q^2 .*

EJEMPLO 7.6

- El color de la flor del chícharo está controlado por un par de genes. Los tres genotipos AA , Aa y aa se caracterizan por sus flores rojas, rosas y blancas, respectivamente. Si se cultiva un campo al azar con 60% de flores rojas y 40% de flores blancas, ¿qué proporciones de los tres genotipos estarán presentes en la cuarta generación?

En este ejemplo $p = 0.6$ y $q = 0.4$. Por la ley de *Hardy - Weinberg*, las proporciones de flores rojas, rosas y blancas en la primera generación y en todas las demás son de $p^2 = 0.36$, $2pq = 0.48$ y $q^2 = 0.16$, respectivamente. Tengamos en cuenta que la Ley de *Hardy - Weinberg* sólo es válida cuando el apareo es aleatorio y cuando los tres genotipos son igualmente viables. Situaciones donde el apareo no es aleatorio, se presentan frecuentemente en experimentos biológicos controlados. Por ejemplo, la cría de caballos de carreras.

7.3.2. Herencia ligada al sexo

En la herencia ligada al sexo² por el cromosoma X , el macho posee un gen A o bien a y la hembra dos AA , Aa , o aa . Se emplea la expresión *ligada al sexo por el cromosoma X* , porque tales genes se encuentran en dicho cromosoma, del cual el macho tiene uno y la hembra dos, lo que determina su sexo. La herencia de tales genes funciona de la manera siguiente:

- Un descendiente macho recibe, con igual probabilidad, uno de los genes de su madre y una descendiente hembra recibe con igual probabilidad el gen de su padre y uno de los de su madre.

Del comentario anterior deducimos la Tabla 7.2.

	$A \times AA$					
A	1	0.5	0	1	0.5	0
a	0	0.5	1	0	0.5	1
AA	1	0.5	0	0	0	0
Aa	0	0.5	1	1	1	0
aa	0	0	0	0	0.5	1

Tabla 7.2.

²Dos ejemplos muy conocidos de herencia ligada al sexo son el daltonismo, es decir, la imposibilidad de distinguir el rojo y el verde, y la hemofilia, la no coagulación de la sangre. Las dos enfermedades son producidas por dos genes recesivos que se encuentran en el cromosoma X . Para que un hombre sea daltónico tiene que recibir el gen de su madre a través del cromosoma X , mientras que en el caso de la mujer, tiene que recibir un gen del padre (daltónico) y otro de la madre. Esta es la causa de que existan más daltónicos entre los hombres que entre las mujeres.

Estamos interesados en un programa de fecundación o cruzamiento relacionado con la herencia ligada al sexo. Lo iniciamos con un macho y una hembra, se selecciona al azar dos de sus hijos, uno de cada sexo, y se cruzan repitiéndose sucesivamente el procedimiento. Con los animales es común hacer este tipo de cruzamientos. La pareja original macho-hembra puede ser cualquiera de los seis tipos que corresponden a las seis columnas de la Tabla 7.2.

$$A \times AA, \quad A \times aa$$

Las parejas de hermanos que se aparearán en las siguientes generaciones tienen una cierta probabilidad de ser alguno de estos seis tipos. Para calcularlas, siendo $t = 0, 1, 2, \dots$, estableceremos lo siguiente:

- $x_1(t)$ = la probabilidad de que una pareja de hermano y hermana sea del tipo $A \times AA$ en la generación de orden t .
- $x_2(t)$ = ídem del tipo $A \times Aa$
- $x_3(t)$ = ídem del tipo $A \times aa$
- $x_4(t)$ = ídem del tipo $a \times AA$
- $x_5(t)$ = ídem del tipo $a \times Aa$
- $x_6(t)$ = ídem del tipo $a \times aa$

Con estas probabilidades se puede formar un vector columna

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t))^T, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

y se verificará que $\vec{x}(t) = A^t \vec{x}(0)$, $t = 1, 2, \dots$, donde $A \in \mathcal{M}_{6 \times 6}$ es la matriz de transición.

EJEMPLO 7.7

Para calcular la matriz $A \in \mathcal{M}_{6 \times 6}$ elegimos, por ejemplo, para la generación de los padres la opción $A \times Aa$. Las diferentes posibilidades para los machos son A o a y para las hembras AA o aa , con lo cual, las distintas posibilidades para los hijos son: $A \times AA$, $A \times Aa$, $a \times AA$, $a \times Aa$, con probabilidades respectivas $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$. Con estas cantidades construimos la segunda columna de la matriz A . Razonando de la misma manera deducimos que la matriz A buscada es la indicada en la Tabla 7.3.

	$A \times AA$					
$A \times AA$	1	0.25	0	0	0	0
$A \times Aa$	0	0.25	0	1	0.25	0
$A \times aa$	0	0	0	0	0.25	0
$a \times AA$	0	0.25	0	0	0	0
$a \times Aa$	0	0.25	1	0	0.25	0
$a \times aa$	0	0	0	0	0.25	1

Tabla 7.3.

- Para calcular los valores y vectores propios de A recurrimos al programa **Mathematica**[®] de Wolfram Research Lt.

En primer lugar procedemos a definir la matriz de transición A .

```
A:={ {1,0.25,0,0,0,0}, {0,0.25,0,1,0.25,0}, {0,0,0,0,0.25,0},
      {0,0.25,0,0,0,0}, {0,0.25,1,0,0.25,0}, {0,0,0,0,0.25,1} };
```

y calculamos los valores propios de la matriz A

```
Eigenvectors[A]
```

```
{1., 1., 0.809017, -0.5, 0.5, -0.309017}
```

y sus vectores propios

```
Eigenvalues[A]
```

```
{ { 0, 0, 0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}, { -0.552272, 0.421898, 0.130374, 0.130374,
0.421898, -0.552272}, {0.104257, -0.625543, -0.312772, 0.312772, 0.625543, -0.104257
}, { 0.288675, -0.57735, 0.288675, -0.288675, 0.57735, -0.288675 }, {-0.10385, 0.54377,
-0.439919, -0.439919, 0.54377, -0.103851 } }
```

Finalmente construimos la matriz de paso

```
C := Transpose[Eigenvectors[A]]
```

que nos permite diagonalizar la matriz A

```
diagonal := Inverse[C].A.C
```

El valor de A^t , para un valor de t grande podemos calcularlo haciendo

```
potencia := C.DiagonalMatrix[1., 1., 0.809017t, (-0.5)t, 0.5t, (-0.309017)t].In-
verse[C]
```

```
Limit[potencia, t → Infinity]
```

O bien de manera aproximada

```
MatrixPower[A, 100]
```

En ambos casos:

$$A^t \rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0.66 & 0.33 & 0.66 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0.66 & 0.33 & 0.66 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Conclusión:** Si suponemos, por ejemplo, que la pareja original es del tipo $A \times Aa$, entonces $X(0) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$, multiplicamos $RX(0)$ y obtenemos

$$(0.66, 0, 0, 0, 0, 0.33)^T.$$

A largo plazo, la probabilidad de que la pareja hermano y hermana sean del tipo $A \times AA$ es $2/3$, y la probabilidad de que sean del tipo $a \times aa$ es de $1/3$.

EJEMPLO 7.8

Supongamos que al realizar estudios climáticos en una determinada zona de nuestra provincia obtenemos los siguientes datos. Si un día es caluroso, entonces la probabilidad de que el día siguiente sea también caluroso es 0.65, y 0.35 la probabilidad de que haga frío. Por otro lado, si un día es frío, entonces 0.7 es la probabilidad de que el día siguiente siga siendo frío y 0.3 de que sea un día caluroso.

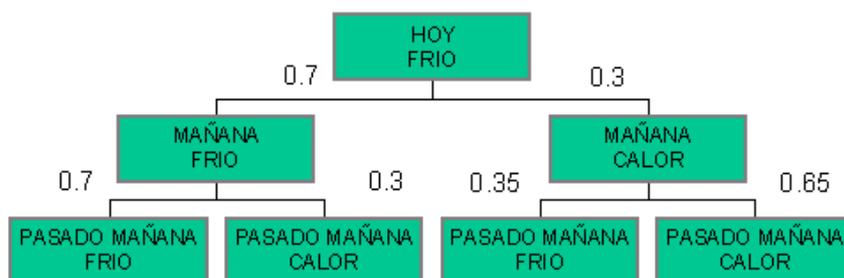


Figura 7.6. Diagrama en árbol.

- Si hoy hace frío, vamos a calcular la probabilidad de que pasado mañana haga frío. Para encontrar la solución podemos utilizar el diagrama de la Figura 7.6. En él observamos que la probabilidad pedida es:

$$0.7 * 0.7 + 0.3 * 0.35 = 0.595 .$$

Es decir, existe casi un 60 % de posibilidades de que si hoy hace frío pasado mañana también lo siga haciendo. De forma similar, la probabilidad de que si hoy hace frío pasado mañana sea un día caluroso es

$$0.7 * 0.3 + 0.3 * 0.65 = 0.445$$

- El ejemplo también puede resolverse utilizando las cadenas de *Markov*. Existen dos estados E_1 que representa al día frío y E_2 al día caluroso, siendo la matriz estocástica

$$A = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.35 \\ 0.30 & 0.65 \end{pmatrix} .$$

Si hoy hace frío podemos representar esta situación por el vector $\vec{X}(0) = (1, 0)^T$. El producto $\vec{X}(1) = A\vec{X}(0)$ nos dará las probabilidades del próximo día, y $\vec{X}(2) = A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0)$ las de pasado mañana

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.35 \\ 0.30 & 0.65 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 * 0.7 + 0.35 * 0.3 \\ 0.3 * 0.7 + 0.65 * 0.3 \end{pmatrix}$$

- Puede probarse fácilmente que La cadena de *Markov* es regular. Por tanto, para realizar un estudio a largo plazo de los diferentes escenarios que pueden presentarse debemos encontrar el valor de la matriz potencia A^n . Si utilizamos el programa **Mathematica®**

```

A := ( 0.7  0.35 )
      ( 0.3  0.65 )

MatrixForm[MatrixPower[A, 100]]
( 0.538462  0.538462 )
( 0.461538  0.461538 )

Eigenvalues[A]
{1., 0.35}

Eigenvectors[A]
{{0.759257, 0.650791}, {-0.707107, 0.707107}}

0.759257 / (0.759257 + 0.650791)
0.538462

0.650791 / (0.759257 + 0.650791)
0.461538

```

Conclusión: independientemente de como sea el día de hoy, a largo plazo existe un 53.84 % de posibilidades de que el día sea frío y un 46.16 % de que sea caluroso.

- Si hoy es un día caluroso, ¿cuál es la probabilidad de que dentro de tres días sea un día frío?.

EJEMPLO 7.9

Representemos por $X_1(0)$ e $X_2(0)$ a las poblaciones iniciales de conejos y zorros respectivamente. Se sabe que el número de conejos en cualquier mes es la mitad de la población de conejos del mes anterior y que el número de zorros en dicho mes es la suma de las poblaciones de zorros mas la mitad de la de conejos en el mes anterior. Vamos a calcular las poblaciones de zorros y conejos al cabo de “mucho” tiempo para estudiar la evolución de las poblaciones a largo plazo.

- Sean $X_1(t)$ e $X_2(t)$ las poblaciones de conejos y zorros al cabo de t meses. Del enunciado del ejercicio se deduce

$$\begin{cases} X_1(t+1) = 0.5X_1(t) \\ X_2(t+1) = 0.5X_1(t) + X_2(t) \end{cases}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

O bien en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} X_1(t+1) \\ X_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Si llamamos

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{X}(1) &= A\vec{X}(0) \\ \vec{X}(2) &= A\vec{X}(1) = A^2\vec{X}(0) \\ &\vdots \\ \vec{X}(t) &= A\vec{X}(t-1) = A^t\vec{X}(0).\end{aligned}$$

Para completar el resto del ejercicio utilizamos el ordenador.

```
A := {{0.5, 0}, {0.5, 1}}
Eigenvalues[A]
```

```
{0.5, 1}
```

```
P := Transpose[Eigenvectors[[A]]
Q := P.DiagonalMatrix[(0.5)^k, 1].Inverse[P]
MatrixForm[Limit[Q, k -> Infinity]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como sabemos, inicialmente $X_1(0)$ es la cantidad de conejos e $X_2(0)$ el número de zorros, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_1(0) + X_2(0) \end{pmatrix}.$$

Conclusión: A largo plazo desaparecerán los conejos y la cantidad de zorros será la suma inicial de zorros y conejos.

EJEMPLO 7.10

Supongamos que en una comunidad autónoma la población está dividida en cuatro clases, E_1, E_2, E_3 y E_4 , ordenadas de mayor a menor de acuerdo con la riqueza. Una persona que pertenece a una clase en un momento dado puede ascender, mantenerse o descender en el siguiente con probabilidades dadas por la tabla:

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	0.7	0.2	0.1	0
E_2	0.2	0.4	0.1	0.3
E_3	0.1	0.3	0.4	0.2
E_4	0	0.1	0.4	0.5

siendo el elemento P_{ij} la probabilidad de que un individuo que en un momento dado pertenece a la clase j en el siguiente período pertenezca a la clase i .

- Si en el año 2000 el 17% de la población pertenece a la clase E_1 , el 24% a la E_2 , el 30% a la E_3 y el 29% a la E_4 , podemos calcular la la distribución en el año 2001.

Sea A a la matriz de transición de esta cadena de *Markov* y el vector \vec{X}_k la situación correspondiente al año k , entonces

$$\vec{X}_{k+1} = A\vec{X}_k$$

$$\vec{X}_{2001} = A\vec{X}_{2000} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.24 \\ 0.30 \\ 0.29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.247 \\ 0.267 \\ 0.289 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo,

$$\vec{X}_{2002} = A\vec{X}_{2001} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.247 \\ 0.267 \\ 0.289 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.214 \\ 0.251 \\ 0.258 \\ 0.276 \end{pmatrix}$$

- Por otro lado, la distribución en 1999 puede calcularse de la siguiente manera,

$$\vec{X}_{2000} = A\vec{X}_{1999} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}_{1999} = A^{-1}\vec{X}_{2000}$$

EJEMPLO 7.11

Los trabajadores de un parque natural se clasifican en 3 categorías profesionales: científicos X_1 , personal auxiliar X_2 y colaboradores X_3 . En cada generación t representaremos a la fuerza de trabajo del parque por el número de personas incluidas en las tres categorías anteriores, es decir $(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$. Supongamos que

1. Cada trabajador activo sólo tiene un hijo que sigue trabajando en el parque.
 2. La mitad de los hijos de los científicos lo son también, la cuarta parte pasa a ser personal auxiliar especializado y el resto es personal colaborador no especializado.
 3. Los hijos del personal auxiliar se reparten entre las 3 categorías según los porcentajes 30 %, 40 %, 30 %
 4. Para los hijos de los colaboradores las proporciones de reparto entre las categorías son 50 %, 25 % y 25 %.
- Empezaremos el ejemplo planteando en forma matricial un modelo que represente la distribución de la fuerza de trabajo del parque de generación en generación. Para ello, sea $\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0))^T$ el vector de distribución inicial y

$$\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))^T$$

el vector de distribución correspondiente a la generación de orden t . Del enunciado se deduce,

$$\begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.3 & 0.50 \\ 0.25 & 0.4 & 0.25 \\ 0.25 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(1) = A\vec{X}(0), \dots, \vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0).$$

Estamos ante una cadena de *Markov* donde el estado E_1 representa a los científicos, E_2 al personal auxiliar, E_3 al personal colaborador y la matriz de transición es A . Es fácil ver que esta cadena es regular siendo el diagrama de estados el que aparece dibujado en la Figura 7.7.

Para estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo podemos calcular la matriz potencia A^t cuando $t \rightarrow \infty$. Un valor aproximado será

$$A := \{\{0.5, 0.3, 0.5\}, \{0.25, 0.4, 0.25\}, \{0.25, 0.3, 0.25\}\};$$

$$\text{MatrixPower}[A, 500]$$

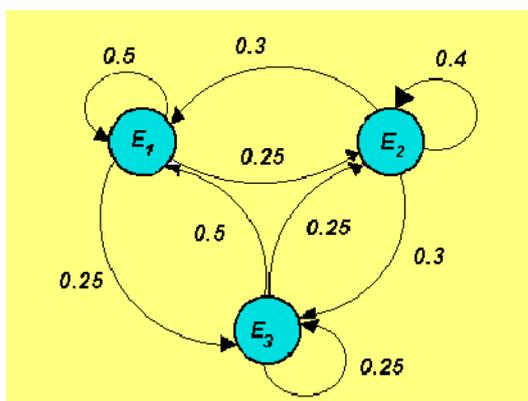
$$\{\{0.44176, 0.44176, 0.44176\}, \{0.294118, 0.294118, 0.294118\}, \\ \{0.264706, 0.264706, 0.264706\}\}$$


Figura 7.7. Diagrama de estados.

- Puesto que la cadena es regular, podemos utilizar el Teorema 7.2.6, para lo cual necesitamos conocer los valores y vectores propios de la matriz A .

$$\text{Eigenvalues}[A]$$

$$\{1., 0.15, -1.68812 \cdot 10^{-17}\}$$

$$\text{Eigenvectors}[A]$$

$$\{\{0.744438, 0.496292, 0.446663\}, \{0.784465, 0.496292, 0.446663\}, \\ \{-0.707107, -3.18473 \cdot 10^{-16}, 0.707107\}\}$$

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1

$$(0.744438, 0.496292, 0.446663)^T,$$

una vez normalizado $(0.44, 0.29, 0.27)^T$.

Conclusión: La distribución de los trabajadores a largo plazo independientemente de la distribución inicial es

- el 44 % serán científicos,
- el 29 % serán personal auxiliar,
- el 27 % serán personal colaborador.

EJEMPLO 7.12

Supongamos que disponemos de una casa, un granero, un gato y un ratón. Los animales pueden estar los dos en la casa, los dos en el granero o uno en el granero y otro en la casa. Realizamos de forma sucesiva la siguiente experiencia:

Lanzamos dos monedas al aire, si salen dos caras cambiamos al ratón del lugar donde se encuentre. Si salen una cara y una cruz, es el gato el que se cambia. Por último, si salen dos cruces, entonces cambiamos al gato y al ratón del sitio donde se encuentran.

- Si tenemos en cuenta las diferentes opciones para la casa, inmediatamente quedará también determinada las opciones para el granero. Los diferentes estados son:
 1. E_1 : la casa está vacía.
 2. E_2 : en la casa sólo se encuentra el gato.
 3. E_3 : en la casa sólo está el ratón.
 4. E_4 : los dos animales están en la casa.

Observemos que podemos modelizar la situación anterior por medio de una cadena de *Markov* ya que la probabilidad P_{ij} de pasar del estado E_j al E_i sólo depende del i y del j . Por otro lado, como $1/4$ es la probabilidad de sacar dos caras o dos cruces y $1/2$ la probabilidad de que salga una cara y una cruz, entonces la matriz de transición para esta cadena es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la probabilidad P_{23} de pasar del estado E_3 al E_2 será pasar de la situación de que el ratón está en la casa y el gato en el granero a la nueva situación de que se permuten los dos animales, y esto obliga a que al lanzar las dos monedas salgan dos caras, cuya probabilidad es $1/4$. De manera similar, P_{43} es la probabilidad de pasar del estado E_3 (ratón en la casa) al estado E_4 (los dos animales están en la casa) y por ello es necesario que en una moneda salga una cara y en la otra una cruz, cuya probabilidad es $1/2$.

- Para estudiar la evolución a largo plazo de esta cadena tenemos que ver en primer lugar si es regular. Para ello al calcular

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 3/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

observamos que todos sus elementos son no nulos y en consecuencia la matriz A es regular. Por tanto, podemos utilizar los Teoremas 7.2.5 y 7.2.6.

Eigenvalues[A]

{-1/2, -1/2, 0, 1}

Eigenvectors[A]

$\{0, 0, -1, 1\}, \{-1, 1, 0, 0\}, \{-1, -1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}$

La distribución estable vendrá dada por el vector propio asociado al valor propio 1

$$(1, 1, 1, 1)^T,$$

que una vez normalizado $(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T$.

- Finalmente

$$A^t \longrightarrow \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Si, por ejemplo, inicialmente la casa se encuentra vacía

$$\vec{X}(0) = (1, 0, 0, 0)^T,$$

entonces

$$\vec{X}(t) = A^t \vec{X}(0) = (0.25, .25, 0.25, 0.25)^T,$$

y es igual de probable que a largo plazo nos encontremos en cualquiera de los cuatro estados posibles.

EJEMPLO 7.13

- Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la Figura 7.1. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Sabiendo que de los ratones que había en cada compartimento, la mitad va a cada uno de los restantes, veamos como estarán distribuidos los ratones al cabo de “infinitas” semanas.

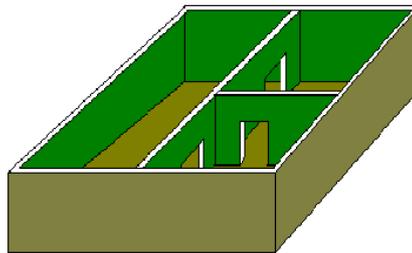


Figura 7.8.

Si $x_i(t)$ representa al número de ratones en el compartimento $i = 1, 2, 3$ en la semana t y $\vec{x}(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T$ es la distribución inicial, deducimos del enunciado que

$$\begin{cases} x_1(1) = & \frac{1}{2}x_2(0) + \frac{1}{2}x_3(0) \\ x_2(1) = \frac{1}{2}x_1(0) + & \frac{1}{2}x_3(0) \\ x_3(1) = \frac{1}{2}x_1(0) + \frac{1}{2}x_2(0) & . \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales que puede ser expresado matricialmente de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\vec{x}(1) = A\vec{x}(0).$$

Razonando de la misma manera

$$\vec{x}(2) = A\vec{x}(1) = A^2\vec{x}(0).$$

En general

$$\vec{x}(t) = A^t\vec{x}(0), \quad t = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, para obtener el número de ratones en cada uno de los compartimentos en la semana t , tendremos que encontrar el valor de la matriz potencia A^t . Una aproximación de este valor podemos obtenerla con el **Mathematica**[®]

```
A := {{0, 0.5, 0.5}, {0.5, 0, 0.5}, {0.5, 0.5, 0}}
MatrixPower[A, 30] = {0.333333, 0.333333, 0.333333}
MatrixPower[A, 50] = {0.333333, 0.333333, 0.333333}
MatrixPower[A, 400] = {0.333333, 0.333333, 0.333333}
```

Ahora, estamos interesados en deducir este valor de una manera diferente. Observemos que si la matriz A fuese diagonal, entonces A^t sería muy fácil de encontrar, bastaría elevar a t los elementos de la diagonal. Por esta razón, en primer lugar procederemos a diagonalizar la matriz simétrica A (recordemos que toda matriz simétrica es diagonalizable).

Los valores propios de la matriz A son los siguientes:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

desarrollando obtenemos la ecuación característica

$$-\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4\lambda^3 + 3\lambda + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$. Los vectores propios asociados a estos autovalores son:

$$S_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$S_2 = \langle (-1, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle.$$

La matriz de paso será:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la matriz A^t , actuamos de la manera siguiente

$$D = C^{-1}AC \Rightarrow A = CDC^{-1} \Rightarrow A^t = CD^tC^{-1},$$

que en nuestro caso será

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^t & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

simplificando

$$A^t = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 - 2(-\frac{1}{2})^t & -1 + (-\frac{1}{2})^t & -1 + (-\frac{1}{2})^t \\ -1 + (-\frac{1}{2})^t & -1 - 2(-\frac{1}{2})^t & -1 + (-\frac{1}{2})^t \\ -1 + (-\frac{1}{2})^t & -1 + (-\frac{1}{2})^t & -1 - 2(-\frac{1}{2})^t \end{pmatrix}.$$

Si hacemos que $t \rightarrow \infty$, entonces

$$A^t \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

y en consecuencia después de infinitas semanas la distribución de los ratones tiende hacia

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix},$$

es decir,

$$x_1(t) = \frac{1}{3}x_1(0) + \frac{1}{3}x_2(0) + \frac{1}{3}x_3(0) = \frac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = \frac{\text{Total}}{3}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{3}x_1(0) + \frac{1}{3}x_2(0) + \frac{1}{3}x_3(0) = \frac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = \frac{\text{Total}}{3}$$

$$x_3(t) = \frac{1}{3}x_1(0) + \frac{1}{3}x_2(0) + \frac{1}{3}x_3(0) = \frac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = \frac{\text{Total}}{3}$$

7.4. Modelo de Leslie

Recordemos que al construir un modelo matemático lo que se intenta es determinar un conjunto de ecuaciones que representen, lo mejor posible, a una situación real. Cuando la variación de una población se realiza en función del tiempo, se obtiene un proceso (continuo o discreto) que recibe el nombre de dinámica de la población, siendo sus objetivos principales el estudiar los cambios numéricos que sufren las poblaciones, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas. En concreto, en ecología de poblaciones interesa encontrar

métodos cuantitativos que permitan conocer la evolución del número de individuos a lo largo del tiempo, con el objetivo de “ajustar” los datos experimentales con los proporcionados por el modelo y además predecir la población futura.

EJEMPLO 7.14

La tabla siguiente recoge la población humana entre los años 1800 y 1995 en miles de millones de personas.

1800	1850	1870	1890	1910	1930	1950	1970	1975	1980	1985	1990	1995
0.91	1.13	1.30	1.49	1.70	2.02	2.51	3.62	3.97	4.41	4.84	5.29	5.75

- A la vista de estos datos, podemos preguntarnos si es posible encontrar una fórmula matemática (un modelo) que los represente “lo mejor posible”, y además, nos proporcione información sobre la evolución de la población del planeta en los próximos años. La respuesta a estas preguntas constituyen el núcleo central del presente curso.

Hay un amplio rango de modelos matemáticos aplicados a la Biología todos ellos con un nivel más elevado de dificultad. En este curso estudiaremos los más elementales, no obstante, a pesar de su sencillez proporcionan un amplio número de aplicaciones.

Si representamos por y_t al tamaño de una población en el tiempo t , existen cuatro procesos que afectan al cambio de su tamaño, como son los nacimientos (N), las inmigraciones (I), las muertes (M) y las emigraciones (E). Si suponemos el intervalo de tiempo $[t, t + 1]$, entonces el cambio de la población puede expresarse por medio de la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} = y_t + N + I - M - E$$

Los modelos que estudian el crecimiento de poblaciones independientemente de la densidad de dichas poblaciones corresponden a los casos más simples, siendo las hipótesis más generales que se suelen establecer las siguientes:

- Todos los individuos son iguales.
- Los recursos disponibles son ilimitados.
- El número de hembras coincide con el de machos.

7.4.1. Modelo discreto exponencial

Este modelo suele ser el adecuado para describir el crecimiento de poblaciones de muchas plantas, insectos, mamíferos y otros organismos que se reproducen en cada estación. Supongamos que una población crece a una tasa constante, es decir, la población de la especie después de un período de tiempo (una hora, una semana, un mes, un año, ..., etc.) es un múltiplo constante de la población en el período anterior. Por ejemplo, podemos suponer que cada generación es distinta, cada organismo produce r hijos y después muere, entonces el crecimiento de la población en el intervalo $[t, t + 1]$ se describe por la ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} = ry_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

siendo r la tasa de crecimiento. Si nos fijamos en una población de bacterias, donde en un tiempo dado un organismo se divide en dos, entonces $r = 2$.

Si y_0 es la población inicial de (7.5) deducimos,

$$y_1 = ry_0, \quad y_2 = ry_1(t) = r^2y_0, \quad \dots \quad y_t = r^t y_0.$$

De este modelo $y_t = y_0 r^t$ se vé que la población aumenta indefinidamente si $r > 1$ y disminuye hasta su extinción si $r < 1$. Cuando $r = 1$ la población permanece en un valor constante y_0 .

Observemos que la ecuación anterior también puede representar a una situación diferente, por ejemplo $y_t = y_0 r^t$ es la fórmula utilizada por los bancos cuando depositamos cierta cantidad de dinero durante un tiempo. En este caso, y_0 es la cantidad depositada, r la tasa de interés anual y t el tiempo que hemos dejado el dinero.

EJEMPLO 7.15

Recuperemos el Ejemplo 7.14 relacionado con la población humana entre los años 1800 y 1995.

- En primer lugar, estamos interesados en calcular la tasa de crecimiento r del modelo discreto exponencial. Para ello realizamos los cocientes y_{t+1}/y_t en cada uno de los intervalos de tiempo $[t, t + 1]$. Los datos obtenidos se encuentran en esta tabla:

1.3/0.91=1.24176	1.15044	1.14615	1.14094	1.29412	1.24257
1.44223	1.09669	1.11083	1.09751	1.09298	5.75/5.29=1.08696

Como podemos apreciar la tasa de crecimiento varía de un período de tiempo a otro, por esta razón consideramos como dato representativo en el período [1800, 1995] la media aritmética, cuyo valor es 1.17861. En consecuencia, el modelo discreto exponencial viene dado por $y_t = 0.91 * 1.17861^t$

En la Figura 7.9 podemos apreciar como el modelo se ajusta muy bien a los datos reales en la primera fase, es decir en el período [1800, 1950], sin embargo existe una gran discrepancia en [1950, 1995]. Es necesario, por tanto, mejorar el modelo teniendo en cuenta la densidad de la población, pues es evidente que a medida que la población aumenta, disminuyen los recursos disponibles.

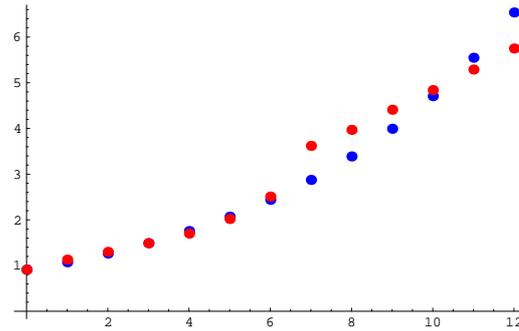


Figura 7.9. Rojo: Datos reales. Azul: $y_t = 0.91 * 1.17861^t$

- Una manera diferente de encontrar el valor de la tasa de crecimiento r es tomar logaritmos neperianos en la expresión $y_t = y_0 r^t$, es decir $\ln y_t = \ln y_0 + t \ln r$ y ajustar el logaritmo neperiano de los datos a una recta a través del método de los mínimos cuadrados. El procedimiento puede facilitarse haciendo uso del ordenador y utilizando un número muy variado de software, de entre los cuales elegiremos, por su sencillez, Statgraphics®

$\ln[y_t]$	-0.0943107	0.122218	0.262364	0.398776	0.530628	0.703098
-	0.920283	1.28647	1.37877	1.48387	1.57691	1.66582

Una vez ejecutado el programa se obtiene

$$\text{Log}[y_t] = \text{log}[y_0] + \text{Log}[r] * t = -0.0771347 + 0.169038 t,$$

o bien,

$$y_0 = e^{-0.0771347} = 0.925765, \quad r = e^{0.169038} = 1.18417,$$

y el modelo exponencial será ahora $y_t = 0.925765 * 1.18417^t$

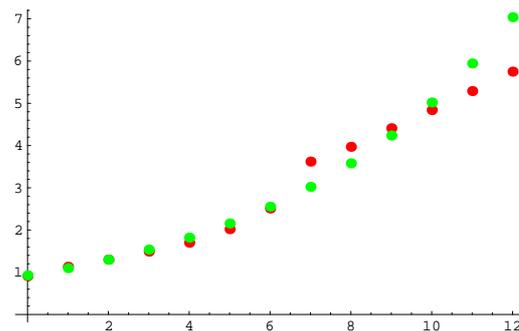


Figura 7.10. Rojo: Datos reales. Verde: $y_t = 0.925765 * 1.18417^t$.

El modelo discreto exponencial es muy simplista, ya que estamos suponiendo que todos los individuos de la población son iguales, pero es evidente que tanto la tasa

de natalidad como la de mortalidad dependen de la edad del individuo. Una manera de poder resolver este inconveniente es dividir la población en clases de edades, y de esta manera asignar tasas de fertilidad y natalidad a los individuos dependiendo de la clase a la que pertenezcan.

7.4.2. Modelo discreto matricial

Estudiamos un modelo de crecimiento de la población para una especie de pájaros, donde el número de machos sea igual al de hembras. Además, sean $X_1(t-1)$ la población de hembras jóvenes en el año $t-1$ y $X_2(t-1)$ el número de hembras adultas en el mismo año. Suponemos que cierta proporción α de los pájaros jóvenes sobrevivirán para llegar a adultos en la primavera del año siguiente t . Cada hembra que sobrevive produce huevos en la primavera, los incuba y producen, en promedio γ pájaros hembras jóvenes en la siguiente primavera. Los adultos también mueren siendo β la proporción de adultos que sobreviven de una primavera a la siguiente.

Por las hipótesis que hemos establecidos podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones que relacionan a la población de hembras jóvenes y adultas en los años t y $t+1$,

$$\begin{cases} X_1(t) = & \gamma X_2(t-1) \\ X_2(t) = \alpha X_1(t-1) + & \beta X_2(t-1) \end{cases},$$

que podemos representar matricialmente,

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \end{pmatrix},$$

o bien de manera simbólica,

$$\vec{X}(t) = A \vec{X}(t-1) \quad \Rightarrow \quad \vec{X}(t) = A^t \vec{X}(0).$$

Observemos el parecido de las dos expresiones encontradas para los dos modelos estudiados $y_t = r^t y_0$, en el modelo discreto exponencial, y $\vec{X}(t) = A^t \vec{X}(0)$, en el modelo discreto matricial. No obstante, tenemos que hacer notar que ahora si podemos distinguir entre la tasa de supervivencia de pájaros jóvenes y adultos.

EJEMPLO 7.16

Supongamos que en el modelo discreto matricial anterior, cada hembra adulta produce por término medio cuatro hembras (lo cual indica al menos ocho huevos), la cuarta parte de las hembras jóvenes sobreviven para llegar a adultas y las tres cuartas partes de las hembras adultas sobreviven.

- A la vista de estos datos, la matriz que representa al modelo es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Puede observarse que $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y además $\alpha < \beta$ ya que no es tan probable que sobrevivan más los pájaros jóvenes que los adultos.

Supongamos que inicialmente tengamos 5 hembras adultas y 1 hembra joven.

$$\vec{X}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix},$$

el total de hembras de la población después de un año es 24 y la razón de hembras jóvenes a adultas es 5 a 1. En el segundo año, (si aproximamos los números decimales)

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0.1875 & 1.5625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

En la Tabla 7.4 hemos escrito las razones $X_1(t)/X_2(t)$ y T_t/T_{t-1} del total de hembras en los años sucesivos.

t	$X_1(t)$	$X_2(t)$	T_t	$X_1(t)/X_2(t)$	T_t/T_{t-1}
0	1	5	6	0.2	-
1	20	4	24	5	4
2	16	8	24	2	1
3	32	10	42	3.2	1.75
4	40	15	55	2.66	1.309
5	62	22	84	2.81	1.527
10	379	137	516	2.76	1.441
11	547	197	744	2.77	1.441
12	790	285	1075	2.77	1.444
19	10286	3711	13997	2.77	1.444
20	14844	5355	20199	2.77	1.443

Tabla 7.4.

Notemos como la razón $X_1(t)/X_2(t)$ se acerca a la constante 2.771 mientras que la población total parece aumentar a una tasa constante del 44% anual. Además, en la Figura 7.11 se han representado las diferentes proporciones de hembras jóvenes (en rojo) y de hembras adultas en función del tiempo, y se puede apreciar como a partir de un determinado momento estas proporciones permanecen constantes.

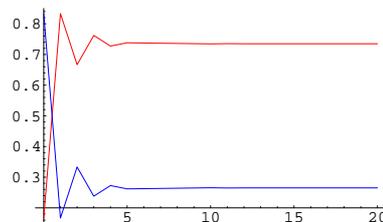


Figura 7.11. Rojo: proporción jóvenes. Azul: Proporción adultas

¿Cuál es la razón teórica para que se cumplan las observaciones del ejemplo anterior? Veamos que la respuesta a esta pregunta puede generalizarse y está muy relacionada con el método de las potencias utilizado para estimar el valor propio dominante de una matriz cuadrada.

Supongamos que \vec{U}_1, \vec{U}_2 sean los vectores propios asociados a los valores propios λ_1, λ_2 de la matriz A que representa al modelo discreto matricial. Entonces al formar estos vectores una base del plano vectorial, podemos escribir $\vec{X}(0) = c_1\vec{U}_1 + c_2\vec{U}_2$ con unos valores determinados de c_1 y c_2 . En consecuencia,

$$\vec{X}(t) = A\vec{X}(t-1) = A^t\vec{X}(0) = A^t(c_1\vec{U}_1 + c_2\vec{U}_2),$$

pero por definición de valor y vector propio, $A\vec{U}_i = \lambda_i\vec{U}_i, \dots, A^t\vec{U}_i = \lambda_i^t\vec{U}_i$ con $i = 1, 2$. Llevando estos valores en la expresión anterior

$$\vec{X}(t) = c_1A^t\vec{U}_1 + c_2A^t\vec{U}_2 = c_1\lambda_1^t\vec{U}_1 + c_2\lambda_2^t\vec{U}_2.$$

Por otro lado, la ecuación característica de A es

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - \beta\lambda - \gamma\alpha = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\gamma\alpha}}{2}.$$

Sabemos, por hipótesis que $\gamma > 0$; $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta < 1$. Entonces, $4\alpha\gamma > 0$ y $\beta^2 + 4\gamma\alpha > 0$. Existirán, por tanto, dos valores propios reales y diferentes y además si un valor propio es positivo, el otro será negativo. Es decir, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, con lo que $|\lambda_2/\lambda_1| < 1$.

Ahora, podemos tener en cuenta este hecho en

$$\vec{X}(t) = c_1\lambda_1^t\vec{U}_1 + c_2\lambda_2^t\vec{U}_2 = \lambda_1^t \left(c_1\vec{U}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \vec{U}_2 \right).$$

Cuando el valor de t aumenta la expresión $(\lambda_2/\lambda_1)^t$ tiende a cero, luego

$$\vec{X}(t) \approx c_1\lambda_1^t\vec{U}_1$$

- **A largo plazo, la distribución de las edades se estabiliza y es proporcional al vector \vec{U}_1 .**

Cada grupo de edad cambiará por un factor λ_1 cada año. Así, a la larga, la ecuación $\vec{X}(t) = A^t\vec{X}(0)$ actúa igual que la ecuación $y_t = r^t y_0$. En un corto plazo (es decir, antes de alcanzar la estabilidad) los números oscilan. La magnitud de esta oscilación depende de la magnitud de λ_2/λ_1 (que es negativa, con lo se explica la oscilación).

- **Los valores y vectores propios de A determinan el comportamiento de las generaciones futuras.**

Para la matriz A con la que trabajamos en el ejemplo, obtenemos como valores propios:

$$\lambda_1 \approx 1.4436; \quad \lambda_2 \approx -0.693.$$

Como $\lambda_1 \approx 1.44$, esto explica el 44 de aumento en la población de la última columna de la tabla.

$$\vec{U}_1 = (0.94066, 0.339344)^T; \quad \vec{U}_2 = (-0.985322, 0.170707)^T.$$

Observemos que \vec{U}_1 cumple $0.94066/0.33934 \approx 2.772$, que es la quinta columna de la tabla.

Sabemos que si $\lambda_1 > 1$, entonces la población aumentará cuando

$$(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma})/2 > 1 \Rightarrow \beta^2 + 4\alpha\gamma < (2 - \beta)^2 = 4 - 4\beta + \beta^2,$$

es decir si

$$\gamma > \frac{1 - \beta}{\alpha}.$$

Como en nuestro caso $\beta = 0.75$, $\alpha = 0.25$, resulta que $\gamma > \frac{0.25}{0.25} = 1$, con lo que la población aumentará, cosa que ya sabíamos (lo hace a un ritmo del 44 %).

Consideraciones finales:

1. Para que podamos aplicar el modelo discreto matricial, es necesario que el medio ambiente sea estable, es decir que los cambios ecológicos que se registren no modifiquen las tasas de natalidad y mortalidad de los individuos de la población.
2. En las hipótesis del modelo no hemos tenido en cuenta un factor muy importante como es la densidad de la población. Es evidente que las las tasas de natalidad y supervivencia varían con el tamaño de la población, ya que en caso contrario la población crecería de forma ilimitada y dominaría al resto de las especies.

7.4.3. Generalización del modelo matricial

(a) Descripción del modelo

Los primeros investigadores que aplicaron el algebra matricial al estudio del crecimiento de poblaciones fueron *Bernardelli* y *Lewis* (1942). Para ello, dividieron a la población en clases de edades y construyeron un modelo basado en un conjunto de ecuaciones en diferencias, una para cada clase de edad. Mas tarde, *Leslie* (1945, 1948) construyó la teoría y desde entonces a las matrices que aparecen en este tipo de modelos se las conoce con el nombre de matrices de *Leslie*. Entre las muchas personas que trabajaron en este campo, podemos citar, por la importancia de sus contribuciones a *Goodman* (1968), *Keyfitz* (1968) y *Pielon* (1969).

Patrick Holt Leslie (1900 - 1974) acabó sus estudios de Fisiología en Oxford en 1921, después de padecer diversos problemas médicos, los cuales condicionaron el resto de su vida. En 1935 empezó a trabajar en el Departamento de Población Animal de la Universidad de Oxford, bajo la dirección del profesor *Charles Elton*, y diez años después aparecieron publicados sus primeros trabajos en dinámica de poblaciones relacionados con la clasificación por edades. Posteriormente, en 1948 investigó el problema de introducir en los modelos matriciales el crecimiento logístico de poblaciones, así como las relaciones del tipo presa - depredador. Por último, en 1959 propuso nuevos modelos matriciales para tener en cuenta el efecto de retardo en el tiempo en la evolución de las poblaciones.

Una clasificación muy general de los modelos matriciales aplicados al estudio de la evolución de las poblaciones en función de la matriz A de proyección, puede verse en la siguiente figura:

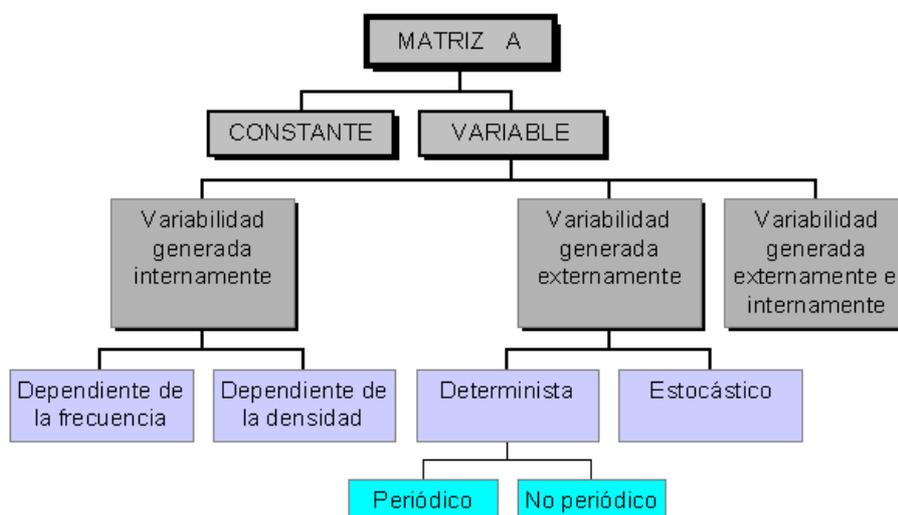


Figura 7.12. Clasificación de los modelos matriciales.

Como ya hemos indicado, el modelo de crecimiento constante es muy elemental, ya que es frecuente que el número de descendientes, así como el número de hembras que sobrevivan, dependan de la edad. Por ejemplo, en una población humana la mujer adulta con un promedio de edad de 47 años tendrá menos hijos que la mujer con un promedio de 27 años. Para evitar estos inconvenientes, es necesario disponer de un modelo que permita el agrupamiento por edades con diferentes tasas de natalidad y de supervivencia. Es por ello, que el objetivo que nos planteamos en esta sección es el de generalizar el modelo discreto matricial que hemos analizado en la sección anterior.

Es interesante comentar que, a pesar de su sencillez, éste es el modelo que con más frecuencia utilizan los demógrafos en sus estudios de predicción del crecimiento de poblaciones.

En primer lugar, tenemos que insistir en el hecho de que sólo se tiene en cuenta la

población de hembras de la población, es por ello que la primera hipótesis del modelo es suponer que el número de hembras sea igual al número de machos. Cuando la población que tenemos que estudiar es tal que esta hipótesis no se cumple, entonces esta circunstancia supone una gran restricción sobre el modelo, pero por lo general, esta circunstancia no suele darse en la mayoría de los casos.

Por tanto, el modelo de Leslie describe el crecimiento de la parte femenina de una población clasificando a las hembras por edades en intervalos de igual número de años.

Supongamos que la edad máxima alcanzada por una hembra de una población, por término medio, sea E años y que esta población la dividimos en n clases de edades, donde para simplificar la notación consideraremos $n = 4$. Cada clase, es evidente que tendrá $E/n = E/4$ años de duración. Por lo tanto, podemos construir la tabla,

CLASE	EDAD
1	$[0, E/4)$
2	$[E/4, E/2)$
3	$[E/2, 3E/4)$
4	$[3E/4, E]$

Supongamos que en el momento inicial ($t = 0$) conocemos el número de hembras que hay en cada uno de los intervalos. Llamemos $X_i(0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, al número de hembras existentes en la clase i en el momento inicial. Con estos números podemos construir el vector

$$\vec{X}(0) = (X_1(0), X_2(0), X_3(0), X_4(0))^T,$$

conocido con el nombre de vector de la distribución inicial de las edades. Es evidente que, por causas biológicas, a medida que transcurra el tiempo se modificará este vector inicial. Nuestra tarea será la de construir un modelo matricial para ver como se produce la evolución del vector $\vec{X}(0)$ con el paso del tiempo. Para ello, realizamos distintas observaciones de la población en tiempos discretos $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$.

La segunda hipótesis que exigiremos al modelo será la de obligar a que todas las hembras que están en la clase $(i + 1)$ en el tiempo t_{k+1} , se encontraban en la clase (i) en el tiempo anterior t_k (suponiendo que no existen muertes ni nacimientos). Como podemos fácilmente entender, esta restricción obliga a que la duración entre dos tiempos consecutivos de observación sea igual a la duración de los intervalos de edad; esto es:

$$t_0 = 0; t_1 = \frac{E}{4}, t_2 = \frac{2E}{4}; \dots; t_k = \frac{kE}{4}; \dots$$

Los procesos de nacimiento y muerte entre dos tiempos consecutivos de observación se pueden describir mediante los siguientes parámetros demográficos:

- Al **promedio del número de hijas** que tiene una hembra durante el tiempo que permanece en la clase de orden i , lo llamaremos a_i con $i = 1, 2, 3, 4$
- La **fracción de las hembras** que están en la clase i y se espera **que sobrevivan** y pasen a la clase de orden $i + 1$ la llamaremos b_i con $i = 1, 2, 3$.

Es evidente, según las definiciones dadas que

1. $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.
2. $0 < b_i \leq 1$ con $i = 1, 2, 3$.

El caso $b_i = 0$, no puede ocurrir ya que esto supondría que ninguna hembra viviría mas allá de la clase i . También supondremos que hay al menos un $a_i > 0$ lo que garantiza que habrá nacimientos. A la clase donde $a_i > 0$ la llamaremos clase fértil.

Si $\vec{X}(k) = (X_1(k), X_2(k), X_3(k), X_4(k))^T$ representa al vector de distribución de las edades en el tiempo t_k , entonces el número de hembras de la primera clase en el tiempo t_k vendrá dado, únicamente por las nacidas entre los tiempos t_{k-1} y t_k . Podemos escribir,

$$X_1(k) = a_1 X_1(k-1) + a_2 X_2(k-1) + a_3 X_3(k-1) + a_4 X_4(k-1). \quad (7.6)$$

Por otro lado, el número de hembras en la clase de orden $i + 1$ con $i = 1, 2, 3$ en el tiempo t_k es igual al número de hembras de la clase de orden i en el tiempo t_{k-1} que todavía están vivas en el tiempo t_k .

$$X_{i+1}(k) = b_i X_i(k-1), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.7)$$

Expresando matricialmente (7.6) y (7.7) tenemos,

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ X_3(k-1) \\ X_4(k-1) \end{pmatrix}$$

O de una forma vectorial,

$$\vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1) \quad (7.8)$$

donde, de manera totalmente general, a la matriz

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

se la conoce con el nombre de **matriz de Leslie**.

De (7.8) es fácil ver que

$$\vec{X}(k) = L^k \vec{X}(0).$$

De este modo, conocida la distribución inicial $\vec{X}(0)$ y la matriz L , se puede determinar la distribución de las hembras en cualquier tiempo.

EJEMPLO 7.17

Supongamos que las hembras de una población animal viven por término medio 25 años y que esta población se divide en cinco clases de edades iguales con intervalos de 5 años. Supongamos que la matriz de crecimiento de *Leslie* viene dada por

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si inicialmente hay 10 hembras en la primera clase, 20 en la segunda, 5 en la tercera, 10 en la cuarta, y 8 en la última clase, podemos estudiar la evolución de la población para los próximos años.

- En efecto, el vector inicial es,

$$\vec{X}(0) = (10, 20, 5, 10, 8)^T.$$

Calculando

$$\vec{X}(1) = L\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 \\ 5 \\ 20/3 \\ 10/3 \\ 15/2 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} \vec{X}(2) &= L\vec{X}(1) = L^2\vec{X}(0) = (205/6, 83/2, 5/3, 40/9, 5/2)^T \\ \vec{X}(3) &= L\vec{X}(2) = L^3\vec{X}(0) = (201/2, 205/12, 83/6, 10/9, 10/3)^T \\ \vec{X}(4) &= L\vec{X}(3) = L^4\vec{X}(0) = (164/3, 201/4, 205/36, 83/9, 5/6)^T \end{aligned}$$

Por tanto, después de 20 años (4 períodos), aproximadamente habrá 55 hembras en la primera clase, 50 de [5, 10); 6 de [10, 15), 9 de [15, 20) y 1 entre 20 y 25 años.

(b) Comportamiento en el límite del modelo

Para conocer la dinámica del crecimiento del modelo

$$\vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1) = L^k\vec{X}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

debemos recurrir al estudio de los valores y vectores propios de la matriz L de *Leslie*. Recordemos que los valores propios son las raíces de la ecuación característica:

$$p(\lambda) = |L - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollamos este determinante aplicando la definición, o por elementos de una fila o columna,

$$p(\lambda) = (a_1 - \lambda)(-\lambda)^3 - a_2b_1(-\lambda)^2 + a_3b_1b_2(-\lambda) - a_4b_1b_2b_3 = 0,$$

simplificando

$$p(\lambda) = \lambda^4 - a_1\lambda^3 - a_2b_1\lambda^2 - a_3b_1b_2\lambda - a_4b_1b_2b_3 = 0. \quad (7.9)$$

A la vista de la expresión anterior, se justifica la introducción de una nueva función,

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \frac{a_4b_1b_2b_3}{\lambda^4}. \quad (7.10)$$

Ahora, resolver la ecuación $p(\lambda) = 0$ es equivalente a resolver la equivalente $q(\lambda) = 1$. Un rápido estudio de la función $q(\lambda)$ nos permite deducir las siguientes propiedades:

- Decrece monótonamente para los valores de $\lambda > 0$, ya que si

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad q(\lambda_2) < q(\lambda_1).$$

- Tiene una asíntota vertical en $\lambda = 0$.
- El valor $q(\lambda)$ tiende a cero, cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

Estas propiedades nos permiten esbozar una gráfica de la función $q(\lambda)$, la cual puede verse en la Figura 7.13.

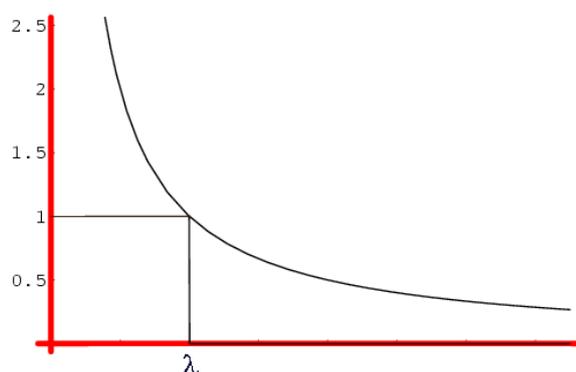


Figura 7.13. Representación gráfica de $q(\lambda)$

Observemos que existe un único valor λ_1 positivo, tal que $q(\lambda_1) = 1$. Esto es, la matriz de *Leslie*, L tiene un único valor propio λ_1 positivo para el cual $q(\lambda) = 1$. Además, al ser $q'(\lambda_1) \neq 0$ la raíz será simple, o bien, su grado de multiplicidad es 1.

El paso siguiente será el de calcular el autovector propio asociado al valor propio λ_1 . Por definición, λ_1 es aquel valor no nulo que cumple, $L\vec{U}_1 = \lambda_1\vec{U}_1$, siendo \vec{U}_1 el vector propio asociado. Si $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$, entonces

$$(L - \lambda_1 I)\vec{X} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el sistema lineal homogéneo anterior es compatible indeterminado, suprimimos la primera de las ecuaciones y llamamos $X_1 = \alpha$. El resto de las incógnitas valen

$$\left. \begin{array}{l} b_1 X_1 - \lambda_1 X_2 = 0 \\ b_2 X_2 - \lambda_1 X_3 = 0 \\ b_3 X_3 - \lambda_1 X_4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = \frac{b_1}{\lambda_1} X_1 = \frac{b_1}{\lambda_1} \alpha \\ X_3 = \frac{b_2}{\lambda_1} X_2 = \frac{b_2 b_1}{\lambda_1^2} \alpha \\ X_4 = \frac{b_3}{\lambda_1} X_3 = \frac{b_3 b_2 b_1}{\lambda_1^3} \alpha \end{cases}$$

La solución general del sistema homogéneo es el subespacio unidimensional de \mathbb{R}^4 ,

$$S = \left\{ \left(\alpha, \frac{b_1}{\lambda_1} \alpha, \frac{b_2 b_1}{\lambda_1^2} \alpha, \frac{b_3 b_2 b_1}{\lambda_1^3} \alpha \right)^T : \alpha \neq 0 \right\},$$

que puede ser generado por el vector

$$\left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_2 b_1}{\lambda_1^2}, \frac{b_3 b_2 b_1}{\lambda_1^3} \right)^T$$

Generalizando el resultado anterior, concluimos diciendo que el vector propio asociado al valor propio dominante λ_1 , para una matriz de *Leslie* de orden n es:

$$\vec{U}_1 = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}, \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3}, \dots, \frac{b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right)^T.$$

Insistimos en el hecho de que al tratarse de un valor propio λ_1 único el subespacio S de vectores propios asociados será de dimensión uno, y en consecuencia, cualquier otro vector propio asociado a λ_1 será un múltiplo de \vec{U}_1 . Estos resultados, podemos resumirlos en la siguiente propiedad,

TEOREMA 7.4.1 *Una matriz de Leslie L , tiene un único valor propio positivo λ_1 . Este valor propio es simple y tiene un vector propio asociado \vec{U}_1 cuyas coordenadas son todas positivas*

A continuación intentaremos justificar que el comportamiento a largo plazo de las edades de la población quedará determinado por este valor propio λ_1 y su vector propio \vec{U}_1 asociado.

TEOREMA 7.4.2 *Si λ_1 es el único valor propio positivo de una matriz de Leslie L y si λ_i es cualquier otro valor propio (real o complejo) de L , entonces:*

$$|\lambda_i| \leq \lambda_1$$

Para el estudio que estamos realizando se requiere que $|\lambda_i| < \lambda_1$ para todos los valores propios de L ; en este caso, ya sabemos por el tema anterior, que λ_1 será un **valor propio dominante** de L .

EJEMPLO 7.18

- Debemos observar que no todas las matrices de *Leslie* cumplen este requisito. En 1941 *Harro Bernadelli* publicó un trabajo en el *Journal of the Burma Research Society* con el título “Population Waves”, donde observó un comportamiento periódico en lugar de un comportamiento estable de la población. En concreto, propuso la siguiente matriz:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, los valores propios son :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

con lo cual $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$ y por tanto, $\lambda_1 = 1$ no es dominante. No obstante, esta matriz cumple que $L^3 = I$. Esto nos indicaría, que cualquiera que sea la distribución inicial de las edades:

$$\vec{X}(0) = \vec{X}(3) = \vec{X}(6) = \dots = \vec{X}(3k) = \dots$$

El vector de la distribución de las edades oscila con período de tres unidades de tiempo. Tales oscilaciones u ondulaciones de la población no podría ocurrir si λ_1 fuese dominante.

La siguiente propiedad caracteriza a los valores propios dominantes:

TEOREMA 7.4.3 *Si dos entradas consecutivas a_i, a_{i+1} de la primera fila de la matriz de Leslie son diferentes de cero, el vector propio positivo de L es dominante.*

Si tomamos los intervalos de clases lo suficientemente pequeños, entonces la propiedad anterior se cumplirá siempre. Por este motivo, de ahora en adelante supondremos que se dan las condiciones para que el valor propio positivo sea dominante.

Sabemos, por el tema dedicado a la diagonalización de matrices cuadradas, que si L es diagonalizable, entonces existirá una matriz regular C tal que,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = C^{-1}LC.$$

La potencia k -ésima de la matriz de *Leslie* viene dada por,

$$L^k = C \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^k \end{pmatrix} C^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, para cualquier vector de distribución inicial de edades, se tiene:

$$\vec{X}(k) = L^k \vec{X}(0) = C \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^k \end{pmatrix} C^{-1} \vec{X}(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Dividiendo los dos miembros por λ_1^k , obtenemos:

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \vec{X}(k) = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{\lambda_4}{\lambda_1})^k \end{pmatrix} C^{-1} \vec{X}(0).$$

Como λ_1 es dominante, $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ para $i = 2, 3, 4$. Se deduce que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0, \quad i = 2, 3, 4.$$

En consecuencia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} \vec{X}(k) = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} \vec{X}(0).$$

Puede probarse, que el lado derecho de la igualdad, correspondiente al producto de las matrices, coincide con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} \vec{X}(k) = d \vec{U}_1, \quad (7.11)$$

donde $d > 0$ es la componente del vector columna $C^{-1} \vec{X}(0)$ y depende únicamente de la distribución inicial $\vec{X}(0)$.

Esta última expresión (7.11) da para valores grandes de k la aproximación $\vec{X}(k) = d\lambda_1^k \vec{U}_1$, o bien $\vec{X}(k-1) = d\lambda_1^{k-1} \vec{U}_1$. Si comparamos estas dos expresiones, observamos que para k suficientemente grande

$$\vec{X}(k) = d\lambda_1^k \vec{U}_1 = \lambda_1 d\lambda_1^{k-1} \vec{U}_1 \simeq \lambda_1 \vec{X}(k-1).$$

Como conclusión, para valores grandes de tiempo:

- Cada vector de la distribución de las edades es un múltiplo escalar de la distribución inmediatamente anterior, siendo esta constante el valor propio positivo dominante de la matriz de Leslie.
- La proporción de hembras en cada una de las clases será constante.

EJEMPLO 7.19

- Supongamos que ahora la matriz de *Leslie* sea

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación característica :

$$|L - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8} = 0.$$

El valor propio positivo es el $\lambda_1 = 3/2$. Su vector propio asociado es

$$\vec{U}_1 = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \right)^T = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{18} \right)^T.$$

En consecuencia, para k suficientemente grande,

$$\vec{X}(k) \simeq \frac{3}{2} \vec{X}(k-1).$$

Por tanto, para cada período de tiempo (5 años) aumentará en aproximadamente un 50% el número de hembras en cada una de las tres clases; como aumentará también el número de hembras en la población,

$$x(\vec{k}) \approx d \left(\frac{3}{2} \right)^k \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{18} \right)^T.$$

Las hembras estarán distribuidas de acuerdo con la relación 1 : 1/3 : 1/18; lo cual corresponde a una distribución del 72% de hembras en la primera clase 24% en la segunda y 4% en la tercera.

Si consideramos de nuevo la ecuación

$$\vec{X}(k) = d\lambda_1^k \vec{U}_1$$

que da el vector de distribución de la población por edades, para valores grandes de tiempo. Se presentan tres casos que dependen del valor propio positivo λ_1 .

- La población finalmente crece si $\lambda_1 > 1$.
- La población finalmente decrece si $\lambda_1 < 1$.
- La población finalmente se estabiliza si $\lambda_1 = 1$.

Este último caso es de especial interés ya que determina una población de crecimiento cero.

Para cualquier distribución inicial de las edades, la población tiende a una distribución en el límite que es algún múltiplo del vector propio \vec{U}_1 . Teniendo en cuenta que $L\vec{U}_1 = \lambda_1\vec{U}_1 = \vec{U}_1$, puede comprobarse que,

$$\lambda_1 = 1 \iff a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + \dots + a_nb_1b_2 \dots b_{n-1} = 1$$

La expresión $R = a_1 + a_2b_1 + \dots + a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}$ se conoce con el nombre de **tasa neta de reproducción** de la población, y su interpretación demográfica es la de ser el promedio de crías que tiene una hembra durante su esperanza de vida.

Por lo tanto, una población es de crecimiento nulo si y solo si su tasa neta de reproducción es igual a uno.

EJEMPLO 7.20

- Supongamos que una población de animales hembras está dividida en dos clases de edades. En cada período el 50 % de la primera pasa a la segunda. El número medio de crías hembras de las de la primera clase es de 1 y de las de la segunda es 1.5.

Para construir el modelo de *Leslie* recordemos que conocemos por supervivencia el porcentaje de hembras que sobreviven en un periodo de tiempo o más y por fertilidad el número de hembras que por término medio tiene en un período de tiempo cada una de las hembras de la población.

La expresión matricial del modelo de *Leslie* $\vec{X}(k) = L\vec{X}(k-1)$ es:

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \end{pmatrix}.$$

Con los datos que tenemos,

$$\vec{X}(1) = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo,

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} 175 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix},$$

y así sucesivamente.

Para estudiar su comportamiento en el límite es necesario en primer lugar resolver la ecuación característica,

$$|L - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1.5; \quad \lambda_2 = -0.5.$$

El vector propio correspondiente al valor propio positivo (que por el teorema estudiado será dominante) es,

$$\vec{U}_1 = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^T = \left(1, \frac{1}{3}\right)^T.$$

Por tanto,

$$\vec{X}(k) \simeq \frac{3}{2} \vec{X}(k-1),$$

lo cual indica, que para valores de k grandes, en cada período de tiempo aumentará el número de hembras en un 50 % en cada una de las clases. Como además,

$$x(\vec{k}) = d\left(\frac{3}{2}\right)^k \left(1, \frac{1}{3}\right)^T.$$

En consecuencia, las hembras estarán distribuidas de acuerdo a la proporción 3 : 1.

EJEMPLO 7.21

La siguiente tabla corresponde a la distribución en tres intervalos de edad de la población femenina de EEUU de hasta 44 años en 1940 y 1955 (expresada en miles). Calcular la población en los años 1970 y 1985.

EDAD	N. MUJ. 1940	N. HIJAS 1940-55	N. MUJ.1955
0 - 14	14459	4651	16428
15 - 29	15264	10403	14258
30 - 44	11346	1374	14837

- De la tabla anterior, se deducen los coeficientes

$$a_1 = \frac{4651}{14459} = 0.3217 \quad b_1 = \frac{14258}{14459} = 0.9861$$

$$a_2 = \frac{10403}{15264} = 0.68153 \quad b_2 = \frac{14837}{15264} = 0.97202$$

$$a_3 = \frac{1374}{11346} = 0.12101$$

con los que construimos la matriz de *Leslie* correspondiente

$$L = \begin{pmatrix} 0.3217 & 0.6815 & 0.1210 \\ 0.9861 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9720 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con ayuda del ordenador encontramos los valores propios de esta matriz,

$$\lambda_1 = 1.05941, \quad \lambda_2 = -0.53186, \quad \lambda_3 = -0.205852.$$

Al ser $\lambda_1 = 1.05941 > 1$ el valor propio estrictamente dominante, nos indica que la población crece cada 15 años a un ritmo del 6% (aproximadamente).

Si nos fijamos en el vector propio \vec{v}_1 asociado al valor propio λ_1 ,

$$\vec{v}_1 = (0.620683, 0.577732, 0.530074),$$

podemos conocer cual será la distribución de las hembras por edades:

$$0.620683x + 0.577732x + 0.530074x = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 57.86$$

Los porcentajes serán

Clase de 0 a 14 años	$57.87 \times 0.620683 = 0.3591$	(35.91 %)
Clase de 14 a 29 años	$57.87 \times 0.577732 = 0.3340$	(33.40 %)
Clase de 30 a 44 años	$57.87 \times 0.530074 = 0.3069$	(30.69 %)

7.5. Tablas de vida y modelo de Leslie

El modelo de crecimiento discreto exponencial,

$$y_t = y_0 r^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

que hemos estudiados en la sección anterior, o en su versión continua

$$y(t) = y(0) e^{rt}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.12)$$

es adecuado, por ejemplo, para describir la evolución de una población de bacterias o de protozoos, en su primera fase de crecimiento. Sin embargo, la mayoría de las plantas y animales no siguen estos modelos tan elementales, ya que, como hemos tenido ocasión de comentar en la sección anterior, los nacimientos y las muertes dependen de la edad del individuo.

El objetivo básico de esta sección, es el de aprender a calcular la tasa de reproducción r para poblaciones donde la natalidad y la mortalidad dependen de la edad del organismo. Además construiremos un modelo matricial de *Leslie* a partir de los datos presentados en una tabla de vida. Para que los resultados que obtendremos

sean fiables, debemos insistir en el hecho de que nos encontramos en un medioambiente aislado que cuenta con recursos ilimitados, y que existe cierta estabilidad en los parámetros que definen al modelo.

Es conocido que una tabla de vida es una tabla estadística, donde se recogen el número de individuos en cada una de las edades, sus probabilidades de supervivencia y sus tasas de fecundidad. Una primera dificultad con la que solemos encontrarnos al interpretar una tabla de vida es la del número tan elevado de notaciones diferentes que se utilizan para representar a un mismo concepto. Por este motivo, comenzaremos concretando la notación que usaremos.

- *Representaremos por x a la edad de un individuo, generalmente en años, aunque como puede entenderse esta unidad puede cambiarse.*

De esta manera, un individuo tiene la edad 0 si se encuentra entre 0 y 12 meses. Usaremos la constante k para referirnos a la edad final de la tabla de vida, que, en la mayor parte de los casos, será aquella en la que han muerto todos los individuos. De forma equivalente, como ya ha quedado dicho, podemos representar también la edad de un individuo por su clase de edad, de este modo, decir que una persona se encuentra en la clase i , es tanto como decir que su edad se encuentra entre $i - 1$ y i . Por lo tanto, si el rango de las edades de la población va de 0 a k , el rango de las clases de edades va de 1 hasta k . Nosotros analizaremos el modelo y la tabla de vida usando la notación de las edades y dejaremos las clases de edades, como ya veremos, para describir y analizar el modelo matricial.

Para que nuestro estudio sea coherente con la sección anterior, seguimos suponiendo que el número de hembras y machos son iguales y que estudiamos la evolución de una población de hembras.

- *Definimos la fertilidad como el número medio de hembras que han nacido al finalizar la primavera de una hembra con una edad x determinada, y la representaremos por $b(x)$.*

Por ejemplo $b(5) = 3$ significa que una hembra de 5 años tiene por término medio, al finalizar la primavera, 3 hembras recién nacidas. La fertilidad será por tanto un número positivo, que al expresar valores medios puede ser cero (el individuo de edad x no es fértil), o bien un número decimal.

La Tabla 7.5 nos da una hipotética tabla de vida para un organismo que vive 4 años.

x	$S(x)$	$b(x)$	$l(x) = S(x)/S(0)$	$g(x) = l(x+1)/l(x)$
0	500	0	1.0	0.80
1	400	2	0.8	0.50
2	200	3	0.4	0.25
3	50	1	0.1	0.00
4	0	0	0.0	-

Tabla 7.5.

A continuación definiremos la tasa de supervivencia,

- Representaremos por $S(x)$ al número de individuos que han sobrevivido al comenzar cada nuevo año.

En la tabla anterior, comenzamos con 500 individuos, los cuales todos han fallecido al iniciarse el quinto año.

- Representaremos por $l(x)$ a la probabilidad de que un individuo sobreviva desde el nacimiento hasta comienzos de la edad x .

Por la definición anterior, es evidente que

$$l(x) = \frac{S(x)}{S(0)}.$$

La representación gráfica de $l(x)$ en función de x nos da una gráfica que se conoce con el nombre de curva de supervivencia. Es bastante corriente utilizar la escala logarítmica, en el eje de abscisas colocamos la edad del individuo x y en el de ordenadas $\ln(l(x))$. Estas curvas corresponden a algunos de los tipos que aparecen a la izquierda de la Figura 7.14.

- La curva azul es típica de poblaciones en las cuales la mayor mortalidad ocurre en las edades mayores. Por ejemplo, en poblaciones humanas pertenecientes a países subdesarrollados.
- La curva en color verde se da cuando la mortalidad no depende de la edad. Por ejemplo, en muchas especies de pájaros grandes y peces.
- Por último, la curva roja es característica de poblaciones con un alto número de mortalidad infantil. Por ejemplo, en las plantas y en algunas especies animales que necesitan de una gran descendencia para que la especie sobreviva.

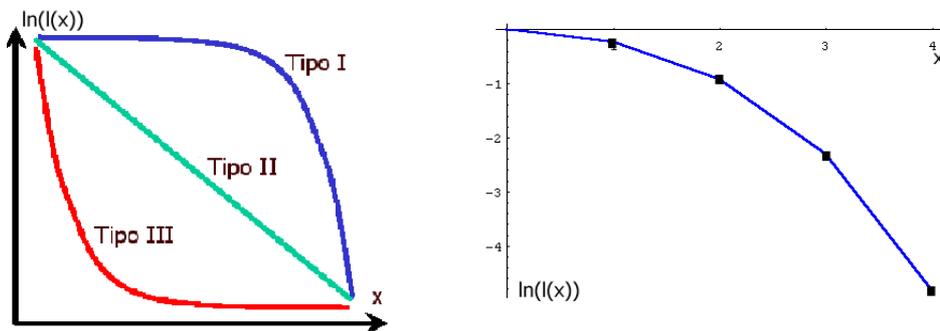


Figura 7.14. Tipos de curvas de supervivencia.

Observemos en la Tabla 7.5 que $l(1) = 0.8$, es decir, el 80 % de la población inicial sobrevive hasta llegar a la edad 1. Nuestra población corresponde al tipo I, como puede observarse en la Figura 7.14 (derecha).

- La probabilidad de supervivencia $g(x)$, se define como la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x + 1$, y viene dada por

$$g(x) = \frac{l(x+1)}{l(x)}.$$

EJEMPLO 7.22

Supongamos que para $x = 0$ tenemos 100 peces en un acuario. Contamos la población una vez al día y obtenemos los siguientes datos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Núm	100	85	72	61	52	44	37	31	26	22	19	16
x	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Núm	14	12	10	8	7	6	5	4	3	3	2	2

Vamos a construir y comentar la curva de vida correspondiente a esta población.

- De la tabla anterior obtenemos los diferentes valores de $l(x) = S(x)/100$, los cuales se encuentran reflejados en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l(x)$	1	0.85	0.72	0.61	0.52	0.44	0.37	0.31	0.26	0.22
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$l(x)$	0.19	0.16	0.14	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04
x	20	21	22	23	-	-	-	-	-	-
$l(x)$	0.03	0.03	0.02	0.02	-	-	-	-	-	-

Con ayuda del Mathematica®, representamos gráficamente estos datos,

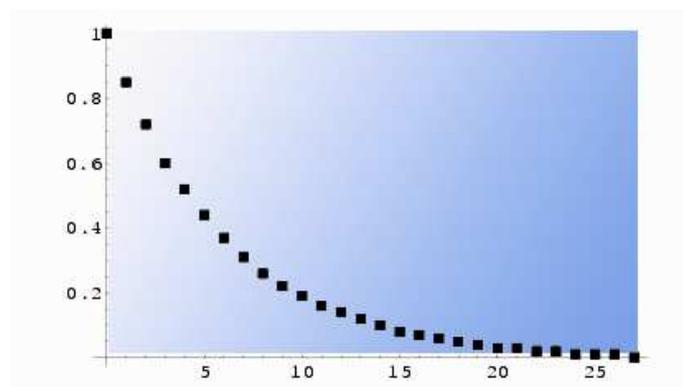


Figura 7.15. Representación gráfica de $(x, l(x))$

La curva corresponde al tercero de los tipos estudiados en teoría. Es decir, estamos ante una población con una elevada tasa de mortalidad infantil.

En nuestro ejemplo podemos ver en la Tabla 7.5 que la probabilidad de que un individuo de edad 1 sobreviva y llegue a la edad 2 es de un 50 %.

Para poder estimar el valor r en (11.1) a partir de $l(x)$ y $b(x)$ es necesario encontrar, en primer lugar, otros dos números como son la tasa neta de reproducción y el tiempo de generación G .

- *Se define la tasa neta de reproducción R , como el número de individuos que por término medio tiene una hembra durante toda su esperanza de vida. Es decir,*

$$R = l(0)b(0) + l(1)b(1) + \cdots + l(k)b(k) = \sum_{x=0}^k l(x)b(x).$$

Si $R > 1$ la población crecerá exponencialmente, por el contrario si la tasa neta de reproducción es menor que uno la población se extinguirá y finalmente si $R = 1$ entonces la población permanecerá constante.

- *Se define el tiempo de generación, G , como la edad media de las hijas de todos los individuos producidos.*

El concepto fue dado en 1977 por *Caughley*, y a efectos prácticos vale:

$$G = \frac{\sum_{x=0}^k l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^k l(x)b(x)}.$$

Si suponemos que la población crece exponencialmente, sustituimos el tiempo G en (11.1). De esta manera, $N_G = N_0 e^{rG}$, o bien, $N_G/N_0 = e^{rG}$. El número N_G/N_0 es aproximadamente la tasa neta de reproducción R .

$$R = e^{rG} \quad \Rightarrow \quad r \approx \frac{\ln R}{G}.$$

El valor de r encontrado es sólo una aproximación que se diferencia como máximo en un 10 % del valor real (*Stearms* 1992). Si deseamos saber el valor exacto de r debemos resolver la ecuación

$$1 = \sum_{x=0}^k e^{-rx} l(x)b(x), \quad (7.13)$$

que es una adaptación de la ecuación de *Euler* (1707-1783). Desgraciadamente resolver (7.13) es bastante difícil. Lo que a efectos prácticos se hace es calcular un

primer valor aproximado $r \approx \ln R/G$ y a continuación sustituir este valor en (7.13). En nuestro caso, de la Tabla anterior obtenemos los valores

$$R = 2.9, \quad G = 1.48276, \quad r = \frac{\ln R}{G} = 0.718061,$$

que al sustituir en (7.13) con $r = 0.718061$ comprobamos que $1.07733 > 1$. Es decir, el valor encontrado para r es demasiado pequeño. Probamos con diferentes valores y finalmente vemos que $r = 0.776$ está cerca del valor exacto de la ecuación de Euler.

7.5.1. De las tablas de vida al modelo matricial

Desde este momento nos referiremos a la clase de edad a la que pertenece el individuo, en lugar de referirnos a su edad. Hemos visto la manera de calcular el valor de r , y en consecuencia, podemos predecir el tamaño total de la población usando las ecuaciones del crecimiento exponencial (11.1). Pero también sería interesante conocer como evoluciona el número de individuos que hay en cada una de las clases. Supongamos que

$$\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t))^T,$$

donde $X_i(t)$ indica el número de individuos en la clase i para el tiempo t .

Para confeccionar el modelo de *Leslie*, necesitamos conocer los parámetros de supervivencia y de natalidad. Si tenemos en cuenta las definiciones anteriores, la probabilidad de que un individuo que se encuentra en la clase i sobreviva y pase a la clase $i + 1$ vendrá dada por

$$b_i = \frac{l(i)}{l(i-1)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

De manera similar, la natalidad de los individuos que se encuentran en la clase i puede calcularse por

$$a_i = b(i)b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

En consecuencia, la evolución de una población dividida en 4 clases de edades, puede modelizarse por la ecuación matricial en diferencias:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = a_1X_1(t) + a_2X_2(t) + a_3X_3(t) + a_4X_4(t) \\ X_2(t+1) = b_1X_1(t) \\ X_3(t+1) = b_2X_2(t) \\ X_4(t+1) = b_3X_3(t) \end{cases}$$

O bien,

$$\begin{pmatrix} X_1(t+1) \\ X_2(t+1) \\ X_3(t+1) \\ X_4(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{X}(t+1) = L\vec{X}(t).$$

La matriz L sabemos que es la matriz de *Leslie* que tiene como primera fila los valores de la natalidad y su subdiagonal principal son las probabilidades de supervivencia, el resto de los elementos de la matriz son ceros. En la sección anterior hemos demostrado que para una población con parámetros de nacimientos y muertes constantes, independientemente de los valores iniciales, cuando ha transcurrido un “número adecuado” de generaciones el porcentaje de individuos en cada una de las clases permanece constante, aunque el tamaño total de la población crece exponencialmente.

EJEMPLO 7.23

Supongamos la siguiente tabla de vida para una población de caracoles:

Edad en años	$S(x)$	$b(x)$
0	500	0
1	400	2.5
2	40	3
3	0	0

- Construimos la siguiente tabla para calcular $l(x)$, $g(x)$, R_0 , G y estimar el valor de r .

x	$S(x)$	$b(x)$	$l(x) = S(x)/S(0)$	$g(x) = l(x+1)/l(x)$	$l(x)b(x)$	$l(x)b(x)x$
0	500	0	1	0.8	0	0
1	400	2.5	0.8	0.1	2	2
2	40	3	0.08	0.0	0.24	0.48
3	0	0	0.00	–	0	0

Con los valores anteriores calculamos

$$R = \sum_{x=0}^3 l(x)b(x) = 2.24$$

$$G = \frac{\sum_{x=0}^3 l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^3 l(x)b(x)} = \frac{2.48}{2.24} = 1.107 \text{ años}$$

$$r = \frac{\ln R}{G} = 0.729 \text{ individuos}/(\text{individuos} \times \text{año})$$

Para encontrar el valor exacto de la tasa de reproducción r utilizamos la ecuación de Euler

$$1 = \sum_{x=0}^3 e^{-rx} l(x)b(x),$$

el valor $r = 0.729$ se encuentra por debajo del valor exacto. Probamos con diferentes valores hasta llegar al $r = 0.749$.

- Para construir el modelo de *Leslie* empezamos completando esta otra tabla, para encontrar las tasas de natalidad a_i , $i = 1, 2, 3$ y de supervivencia b_i , $i = 1, 2$.

x	$l(x)$	$b(x)$	i	$b_i = l(i)/l(i-1)$	$a_i = b(i)b_i$
0	1	0	-	-	-
1	0.8	2.5	1	0.8	2
2	0.08	3	2	0.10	0.30
3	0	0	3	0.00	-

Nuestro modelo matricial vendrá dado por:

$$\begin{pmatrix} X_1(t+1) \\ X_2(t+1) \\ X_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix},$$

Si suponemos que $\vec{X}(0) = (50, 100, 20)^T$, entonces podemos encontrar $\vec{X}(1)$ y $\vec{X}(2)$

$$\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} X_1(1) \\ X_2(1) \\ X_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}(2) = \begin{pmatrix} X_1(2) \\ X_2(2) \\ X_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 272 \\ 104 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Podemos hacer una proyección de la población teniendo en cuenta los valores y vectores propios de la matriz de *Leslie*. Como no existen dos valores consecutivos de a_i , entonces la matriz L posee un valor propio dominante. En efecto, si utilizamos el programa **Mathematica**[®],

Eigenvalues[L]

{2.11355, -0.113553, 0 }

Eigenvectors[L]

{{ -0.93511, -0.35395, -0.01667 }, { 0.10594, -0.74621, 0.65713, }, { 0, 0, 1 } }.

El valor propio dominante es $\lambda_1 = 2.11355$, es decir, a la larga, la población crece a un ritmo del 111 %. La estabilidad en los porcentajes en cada una de las clases viene dada por el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 2.11355$.

$$\begin{aligned} 0.935114 / (0.935114 + 0.35395 + 0.0167467) &= 0.72 &\Rightarrow & 72 \% \\ 0.353950 / (0.935114 + 0.35395 + 0.0167467) &= 0.28 &\Rightarrow & 27 \% \\ 0.016746 / (0.935114 + 0.35395 + 0.0167467) &= 0.01 &\Rightarrow & 1 \% \end{aligned}$$

Para terminar, podemos relacionar la tasa de reproducción r del modelo exponencial con el valor propio dominante. En efecto, sabemos que

$$T_n = T_0 e^{rn} = T_0 e^{r(n-1)} e^r = e^r T_{n-1}.$$

Por otro lado, habíamos demostrado que $T_n \approx \lambda_1 T_{n-1}$. En consecuencia, $e^r \approx \lambda_1$, o bien $r \approx \ln(\lambda_1) = \ln(2.11355) = 0.748368$.

EJEMPLO 7.24

Supongamos la siguiente tabla de vida para una determinada población:

Edad en años x	$S(x)$	$b(x)$
0	500	0
1	400	2
2	200	3
3	50	1
4	0	0

- Empezamos completando la tabla para calcular $l(x), g(x), R_0, G$ y estimar el valor de r .

x	$S(x)$	$b(x)$	$l(x) = S(x)/S(0)$	$g(x) = l(x+1)/l(x)$	$l(x)b(x)$	$l(x)b(x)x$
0	500	0	1	0.8	0	0
1	400	2	0.8	0.5	1.6	1.6
2	200	3	0.4	0.25	1.2	2.4
3	50	1	0.1	0	0.1	0.3
4	0	0	0	-	0	0

Con los valores anteriores calculamos

$$R_0 = \sum_{x=0}^4 l(x)b(x) = 2.9$$

$$G = \frac{\sum_{x=0}^4 l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^4 l(x)b(x)} = \frac{4.3}{2.9} = 1.482 \text{ años}$$

$$r = \frac{\ln R_0}{G} = 0.718 \text{ individuos}/(\text{individuos} \times \text{año})$$

- Supongamos que inicialmente la población de caracoles es de 200 en la primera clase, 0 en la segunda, 0 en la tercera, y 0 en la cuarta. Estamos interesados en construir la matriz de *Leslie* para esta tabla de vida y proyectar la población “a largo plazo”. Para ello elaboramos la tabla.

x	i	$l(x)$	$b(x)$	$b_i = l(i)/l(i-1)$	$a_i = b(i)b_i$
0	-	1	0	-	-
1	1	0.8	2	0.8	1.6
2	2	0.4	3	0.5	1.5
3	3	0.1	1	0.25	0.25
4	4	0	0	-	0

El modelo escrito en forma matricial, es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ n_4(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.5 & 0.25 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ n_4(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N}(t+1) = L\vec{N}(t), t = 0, 1, 2, \dots$$

- Sabemos que el vector de valores iniciales es

$$\vec{N}(0) = (200, 0, 0, 0)^T,$$

lo que nos permite proyectar la población para cualquier año. Por ejemplo, al cabo de 5 años

$$\vec{N}(5) = L\vec{N}(4) = L^5\vec{N}(0) = (7613, 2804, 642, 75)^T,$$

o bien, al cabo de 25 años

$$\vec{N}(25) = L\vec{N}(24) = L^{25}\vec{N}(0) = (4.20 \times 10^{10}, 1.54 \times 10^{10}, 3.56 \times 10^9, 4.09 \times 10^8)^T.$$

Esto supone que un 68 % de la población se encuentra en la primera clase, un 25 % en la segunda, un 6 % en la tercera y un 1 % en la cuarta. Si ahora cambiamos el vector inicial, por ejemplo:

$$\vec{N}(0) = (10, 10, 10, 10)^T,$$

y realizamos las mismas proyecciones

$$\vec{N}(5) = L\vec{N}(4) = L^5\vec{N}(0) = (67, 27, 4, 2)^T,$$

o bien, al cabo de 25 años

$$\vec{N}(25) = L\vec{N}(24) = L^{25}\vec{N}(0) = (3.85 \times 10^9, 1.41 \times 10^9, 3.26 \times 10^8, 3.75 \times 10^7)^T.$$

Es decir, los porcentajes en cada una de las clases son 68 %, 25 %, 6 % y 1 %, idénticos a los encontrados en el caso anterior.

El ejemplo nos muestra el efecto de los valores iniciales en el crecimiento de la población. **Después de algunas fluctuaciones ambas poblaciones se comportan de manera similar.** Si representamos gráficamente las poblaciones para cada una de las clases en diferentes años, utilizando una escala logarítmica en el eje de ordenadas, obtenemos líneas rectas, lo cual nos indica un crecimiento exponencial de la población.

Calculamos los valores y vectores propios de la matriz de *Leslie*.

$$L := \{ \{1.6, 1.5, 0.25, 0\}, \{0.8, 0, 0, 0\}, \{0, 0.5, 0, 0\}, \{0, 0, 0.25, 0\} \}$$

Eigenvalues[L]

$$\{2.17332, -0.47682, -0.096498, 0\},$$

al ser el valor propio estrictamente dominante $\lambda = 2.17332 > 1$, la población crece un 117 % cada año. Lo cual supone un crecimiento exponencial con una tasa $r =$

$\ln 2.17332 = 0.77625$. Observemos que el valor de r encontrado es el valor exacto, mientras que el obtenido en la primera parte del ejemplo $r = 0.718$ era un valor aproximado. Si $\vec{N}(0) = (200, 0, 0, 0)^T$ la población total crece de manera exponencial de acuerdo al siguiente modelo

$$P(t) = P(0)e^{rt} = 200e^{0.77625t}, \quad .$$

Para finalizar, representaremos gráficamente las poblaciones de hembras para cada una de las clases en las primeras 10 generaciones. Si $\vec{N}(t) = L^t \vec{N}(0)$ entonces, en el eje de abscisas situaremos los diferentes valores de $t = 0, \dots, 10$, y en el eje de ordenadas los $n_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, correspondientes en la escala logarítmica.

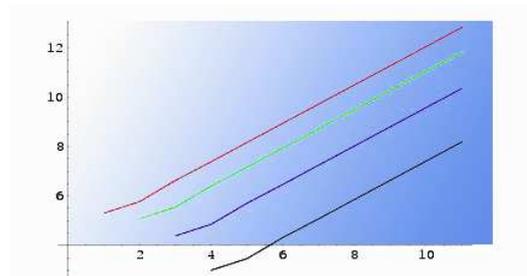


Figura 7.16. Evolución en cada clase de edad

La gráfica en rojo corresponde a la clase de menor edad, la verde a la segunda, la azul a la tercera y la coloreada en negro representa a las hembras de mayor edad. Como podemos apreciar, a “largo plazo” la población crece a un ritmo constante, que coincide con la pendiente de las rectas ($r = \ln 2.17332 = 0.77625$) y además los porcentajes en cada una de las clases permanecen constantes (las cuatro rectas son paralelas).

7.6. Modelo de Lefkovich

A la hora de estudiar la evolución de muchos organismos, la variable edad, que hemos tenido en cuenta en el modelo de *Leslie*, no es la más importante. Por ejemplo, en el caso de los insectos, los individuos pasan por las etapas de ser huevos, larvas, crisálidas y por fin adultos. La tasa de supervivencia (b_i), puede estar más influenciada por la etapas del insecto que por su edad. De hecho, la supervivencia de un escarabajo no depende de que tenga 3 o 6 meses, sino de que sea una larva o que se encuentre en la etapa adulta. El paso de una etapa a otra es a menudo bastante flexible y depende de factores muy diversos como la densidad de población, la cantidad de comida suplementaria, la temperatura, la luminosidad, etc. Afortunadamente, podemos modificar la matriz de *Leslie* para tener en cuenta estos factores.

En 1965 *Lefkovich* propuso un modelo matricial para estudiar la evolución de una

población que generalizaba al modelo propuesto por *Leslie*. La diferencia fundamental entre ambos modelos reside en el hecho de que ahora se clasifica a los individuos de la población en etapas, en lugar de clases de edades.

L. P. Lefkovitch nació en Londres en el año 1929, donde se graduó en zoología, entrando a trabajar en 1954 en el Agricultural Research Council Pest Infestation Laboratory de Londres. Fue el primero en estudiar los modelos matriciales clasificando previamente a los individuos por etapas en lugar de por edades.

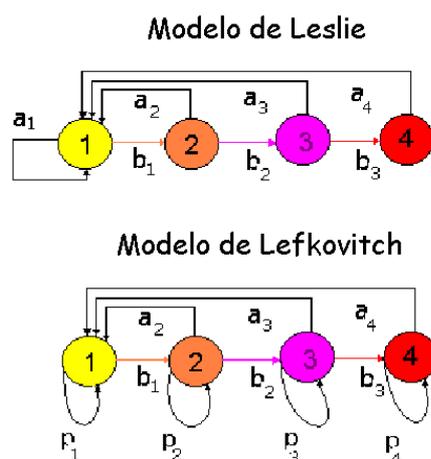


Figura 7.17. Comparación modelos de *Leslie* y *Lefkovitch*.

La Figura 7.17 ilustra de manera esquemática a los dos modelos. Ahora p_i representa la probabilidad de que un individuo que se encuentra en la etapa i en el período n permanezca en la misma etapa para el período siguiente $n + 1$. En consecuencia, utilizando el razonamiento que venimos usando en los modelos discretos matriciales, es fácil comprobar que el modelo viene dado por,

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix}$$

En contraste con la matriz de *Leslie*, ahora tenemos entradas positivas p_i , en la diagonal principal.

A continuación mostramos una tabla que nos permite escribir la matriz de transición para un modelo simplificado que representa el ciclo de vida de un insecto, con tres etapas (huevo, larva, adulto).

	huevo	larva	adulto
huevo	0	0	F_{ah}
larva	P_{hl}	P_{ll}	0
adulto	0	P_{la}	P_{aa}

Como ejemplo más complejo, consideraremos un modelo que analiza el crecimiento de una colonia de corales. Hemos considerado tres clases de tamaños (pequeños, medianos y grandes). La tabla siguiente permite encontrar la matriz de transición

	pequeño	mediano	grande
pequeño	$P_{pp} + F_{pp}$	$P_{mp} + F_{mp}$	$P_{gp} + F_{gp}$
mediano	P_{pm}	P_{mm}	P_{gm}
grande	P_{pg}	P_{mg}	P_{gg}

Como antes, la diagonal principal representa la probabilidad de que una colonia permanezca en la misma clase de tamaño. Los elementos de la subdiagonal principal representan la probabilidad de que una colonia crezca y pase al tamaño siguiente. Sin embargo, ahora existe la posibilidad de que parte de la colonia pueda fragmentarse (P_{gm}) y pasar de ser grande a ser mediana, o bien (P_{mp}) pertenecer a las colonias pequeñas. Las colonias pequeñas pueden agruparse y formar colonias medianas (P_{pm}) o directamente colonias grandes (P_{pg}). Finalmente, observemos que la primera fila es la suma de dos términos, el primero de ellos corresponde a la fecundidad, y el segundo a la transición de un estado a otro. Puede probarse que para este tipo de modelos su comportamiento en el límite es exactamente igual al modelo de *Leslie*, es decir:

- La población tiene un tipo de crecimiento exponencial, y presenta una distribución estable de etapas.

EJEMPLO 7.25

- La siguiente tabla muestra la matriz de transición para un modelo simplificado que representa el ciclo de vida de un insecto, con tres etapas (huevo, larva, adulto).

	huevo	larva	adulto
huevo	0.25	0	2
larva	0.75	0.5	0
adulto	0	0.5	1

A continuación vamos a realizar una proyección a largo plazo de la población sabiendo que inicialmente hay 10 huevos, 5 larvas y 7 adultos.

Podemos calcular la población después de 25 y 26 años, utilizando el programa `Mathematica®`.

Si $\mathbf{x}_0 = (10, 5, 7)^T$ es el vector de los valores iniciales, y A la matriz de transición,

```
MatrixPower[A, 25].x0
```

```
MatrixPower[A, 26].x0
```

{547115.39, 390901.81, 355547.78}
 {847874.41, 605787.45, 550998.68}

Es decir, tenemos un crecimiento con una tasa

$$\frac{847874.41}{547115.39} = \frac{605787.45}{390901.81} = \frac{550998.68}{355547.78} = 1.549718,$$

que coincide con el valor propio dominante de la matriz A .

Eigenvectors[A]

{ 1.5497176, 0.10001411+0.744708 i, 0.10001411+0.744708 i }

A la larga, la población crece a un ritmo del 55 %.

La distribución entre etapas es

$$\frac{547115.39}{547115.39 + 390901.81 + 355547.78} = 0.42295$$

$$\frac{390901.81}{547115.39 + 390901.81 + 355547.78} = 0.30218$$

$$\frac{355547.78}{547115.39 + 390901.81 + 355547.78} = 0.27485$$

La estabilidad en los porcentajes en cada una de las etapas viene dada por el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1.54971$

Eigenvectors[A]

{ {0.7192950, 0.5139203, 0.467440}, {0.7195268 - 5.5511151 10⁻¹⁷ i, -0.302013 - 0.5624783 i, -0.053913 + 0.26791885 i}, {0.7195268 + 5.5511151 10⁻¹⁷ i, -0.302013 + 0.5624783 i, -0.053913 - 0.26791885 i} }

$$0.719295/(0.719295 + 0.5139203 + 0.467440) = 0.422952 \Rightarrow 42.3\%$$

$$0.513903/(0.719295 + 0.5139203 + 0.467440) = 0.302189 \Rightarrow 30\%$$

$$0.467440/(0.719295 + 0.5139203 + 0.467440) = 0.274859 \Rightarrow 27.7\%$$

Podemos comprobar el resultado encontrando los porcentajes, por ejemplo, en la población al cabo de 25 años,

$$\begin{aligned} 547115.39/(547115.39 + 390901.81 + 355547.78) &= 0.422951 \\ 390901.81/(547115.39 + 390901.81 + 355547.78) &= 0.302189 \\ 355547.78/(547115.39 + 390901.81 + 355547.78) &= 0.274859 \end{aligned}$$

Estos modelos matriciales basados en el tamaño y no en la edad, suelen utilizarse para estudiar la evolución de poblaciones de plantas, donde es más fácil medir su tamaño que conocer su edad. Recordemos que en estos modelos, estamos suponiendo que las tasas de supervivencia y reproducción son constantes y esto hace que en la práctica solamente podamos usarlos para períodos cortos de tiempo, para los cuales estas hipótesis son ciertas.

7.7. Modelos que dependen de la densidad

En ciertas ocasiones, es posible que no todos los individuos de la población se reproduzcan y mueran con la misma tasa. Recordemos que la hipótesis que venimos manteniendo en este tema, es que era la edad la que produce la modificación de las tasas de supervivencia y natalidad, lo cual daba lugar al modelo de *Leslie*, que es independiente de la densidad de la población.

Es posible introducir esta nueva hipótesis en el estudio de los modelos matriciales. Por ello, al construir un modelo debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- ¿Dependerá la tasa de natalidad, o la tasa de supervivencia, de la densidad de la población?.
- ¿La densidad depende sólo de la población total o por el contrario el efecto está distribuido sobre varias clases de edades?
- ¿Son los efectos de la densidad instantáneos, o existe un tiempo de retardo?

7.7.1. Caso práctico

Como un ejemplo que ilustra los comentarios anteriores comentaremos el trabajo de *Law* (1975), relacionado con un tipo de hierba llamada *Poa annua*. Para estudiar su crecimiento, *Law* consideró cuatro clases de edad y además la etapa de semillas (Figura 7.18). La duración de cada clase era aproximadamente de ocho semanas.

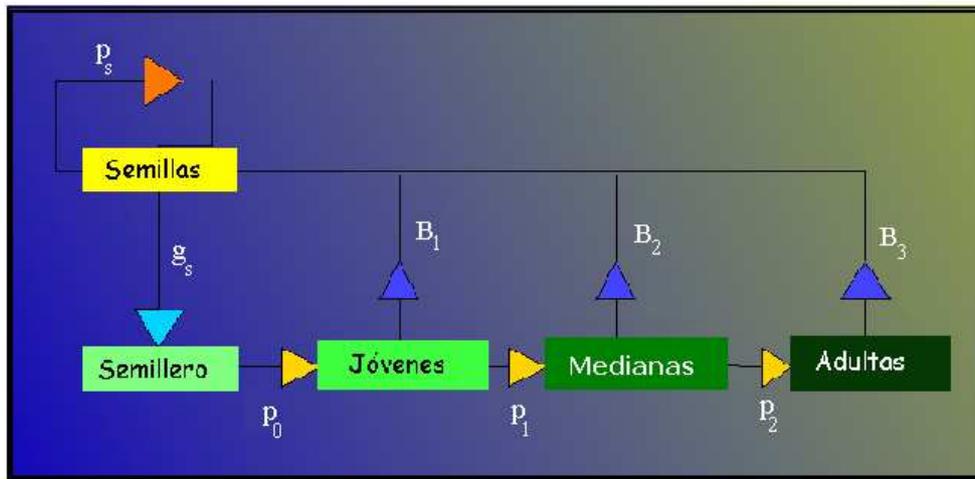


Figura 7.18. Ciclo de vida de *Poa annua*.

La matriz de transición para este ciclo de vida viene dada por

$$\begin{pmatrix} p_s & 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ g_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo su estructura muy parecida a la matriz de *Leslie*. No obstante, la incorporación de un banco de semillas (semillero) en el modelo hace que el primer elemento de la matriz p_s sea la probabilidad de que una semilla sobreviva pero no germine. *Law* encontró de manera experimental los siguientes valores

$$p_0(N) = \begin{cases} 0.75 - 0.25e^{0.00005N} & \text{si } N < 27726 \\ 0 & \text{si } N > 27726 \end{cases}$$

$$p_1(N) = p_2(N) = 0.75$$

$$p_s = 0.2$$

$$g_s(N) = 0.05$$

$$B_1(N) = B_3(N) = 100e^{-0.0001N}$$

$$B_2(N) = 200e^{-0.0001N}$$

siendo N la densidad de la población. La representación gráfica de dichas funciones es la siguiente:

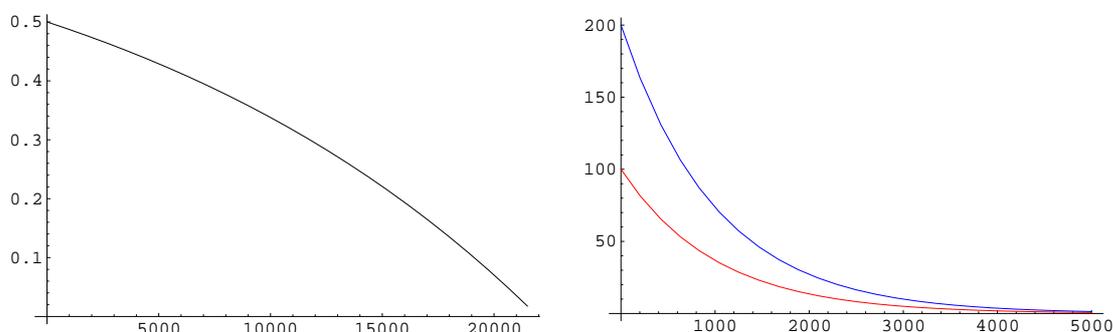


Figura 7.19. Izquierda = $p_0(N)$. Derecha = $B_1(N) = B_3(N)$ (rojo), $B_2(N)$ (azul).

Como puede apreciarse, entre dos intervalos de tiempo, el 20% de las semillas del semillero sobrevivían pero seguían dormidas, mientras que 5% de ellas germinaban. La proporción de individuos que sobreviven p_0 es inicialmente 0.75 cuando la densidad de la población es muy baja, pero a medida que ésta aumenta, dicha proporción va disminuyendo.

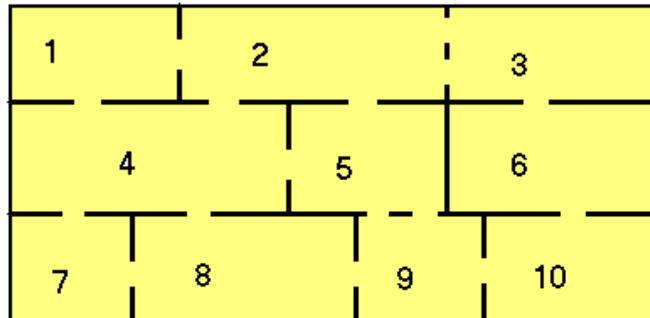
Puede comprobarse que la población crece y además se mantienen constantes las proporciones de cada una de las clases .

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 6

- 1.- Supongamos un sistema con dos estados: un cazador dispara contra unos animales. Existe el estado E_1 de acierto, y el estado E_2 de fallo. Se sabe que si el cazador acierta, entonces en el segundo disparo tiene una probabilidad de $3/4$ de acertar. Si por el contrario en un disparo falla, entonces la probabilidad de acertar en el siguiente es de $1/2$.
 - Escribir la matriz estocástica A que representa a esta cadena de *Markov*.
 - Dibujar el diagrama de estados de la cadena.
 - ¿Es la cadena regular?.
 - Encontrar el valor de A^t y analizar el resultado.

- 2.- Se encierra a una rata en una caja dividida en compartimentos con puertas que los comunican según se muestra en la figura. Cuando la rata sale de un compartimento elige uno al azar.



- Indicar si el proceso puede representarse por una cadena de *Markov*.
 - En caso afirmativo, calcular la matriz de transición A .
 - Estudiar si la cadena es regular.
 - Dibujar el diagrama de estados.
 - Estudiar la evolución a largo plazo del proceso.
- 3.- Las familias de un país se clasifican según residan en áreas rurales, urbanas o suburbanas. Los estudios de movilidad demográfica estiman que,

en promedio, en el curso de un año, el 15 % de las familias urbanas cambian de residencia y se trasladan a un área suburbana, y el 5 % a un área rural; mientras que el 6 % de las familias residentes en áreas suburbanas se trasladan a áreas urbanas, y el 4 % a áreas rurales, y finalmente el 4 % de las familias rurales emigran a las áreas urbanas y el 6 % a las suburbanas.

- Calcular la probabilidad de que una familia que vive ahora en un área urbana siga viviendo en un área urbana dentro de dos años?. ¿Y en una suburbana?
 - Supongamos que actualmente el 40 % de las familias del país viven en áreas urbanas, el 35 % en suburbanas y el 25 % en rurales ¿Qué porcentaje de familias vivirán en áreas urbanas dentro de dos años?,
 - ¿Qué distribución de población es de prever en el futuro?
- 4.- En la herencia autosómica, supongamos que cada planta se fecunda con una de su propio genotipo. Construir un modelo matricial y analizar su comportamiento a largo plazo.
- 5.- El parque natural Sierra de Cazorla decide programar mensualmente sus visitas guiadas siguiendo el siguiente método: Si en un mes se visitó el pueblo, al mes siguiente se visitará, dos de cada tres veces el parador, y una de cada tres veces el interior del parque. Si la visita fue al interior, al mes siguiente será a cualquiera de los tres lugares con igual probabilidad. Finalmente, si la visita fue al parador, al mes siguiente se visitará el parador una de cada tres veces, y el pueblo de Cazorla dos de cada tres veces. Después de seguir este esquema durante cinco años, ¿se habrá cumplido con la programación del parque de visitar al menos un 25 % el parador nacional de turismo?
- 6.- El siguiente modelo discreto matricial $\vec{X}(t+1) = A\vec{X}(t)$, siendo $t = 0, 1, 2, \dots$ las distintas generaciones (períodos), representa a una población de venados hembras con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

- Demostrar que a largo plazo la población crecerá por un factor aproximado de 1.27
- Supongamos que no deseamos que la población crezca. Podemos controlar dicha población eliminando algunas hembras. Si α representa la proporción de hembras que sacrificamos en cada período, explicar por qué ahora la matriz que representa al modelo es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 - \alpha \end{pmatrix}.$$

- Explicar por qué no es deseable un $\alpha = 0.6$
- Experimentar con diferentes valores de α de manera tal que la población de hembras no crezca ni desaparezca.

7.- Supongamos un modelo de *Leslie* para describir la evolución de una población dividida en 7 clases de edades $\vec{X}(t+1) = L\vec{X}(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$, con

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.19 & 0.44 & 0.80 & 0.50 & 0.45 \\ 0.87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.87 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.87 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.87 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 521 \\ 403 \\ 316 \\ 253 \\ 200 \\ 143 \\ 411 \end{pmatrix}$$

- ¿Cuál es la interpretación de los valores $L_{1,j}$, $j \geq 2$?
 - ¿Cuál es la interpretación de los valores $L_{i+1,i}$, $1 \leq i \leq 6$?
 - Calcular el valor propio dominante de L , e interpretar el resultado.
 - Encontrar la tasa r de crecimiento de la población teniendo en cuenta el resultado obtenido en el apartado anterior.
 - Calcular el vector propio asociado al valor propio dominante, e interpretar el resultado.
- 8.- Una sala de cine decide programar las películas según el siguiente método: si una semana se proyectó una norteamericana, a la semana siguiente se programará, dos de cada tres veces, una española, y una de cada tres veces, una francesa. Si la película programada fue francesa, dos de cada tres veces será norteamericana y una de cada tres francesa. Finalmente, si la película programada fue española, la semana siguiente se programará española una de cada tres veces y norteamericana dos de cada tres veces. Si inicialmente las cuotas de pantalla son el 50 % para el cine norteamericano, el 35 % para el cine español, y el 15 % para el francés.
- ¿Estamos ante una cadena de Markov regular? Justifica la respuesta.
 - Comprueba que la matriz que representa al modelo tiene a $\lambda = 1$ como valor propio.
 - Analiza el comportamiento a largo plazo del modelo para contestar a la siguiente cuestión. Después de seguir este esquema durante un “largo plazo”, ¿se habrá cumplido con la cuota de pantalla que exige programar al mes el 25 % de películas de producción nacional?

9.- Supongamos el modelo discreto matricial

$$X(t+1) = AX(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.75 & 1 \end{pmatrix}$$

- ¿Son todos los estados accesibles?
 - Si $X(0) = (10, 20, 0)$, ¿cuál será la distribución después de 30 años?
- 10.- Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedades A y B . Se sabe que cada día un 20 % de aves del A se traslada a B mientras que un 30 % de aves de B lo hace a A .
- Si inicialmente hay el mismo número de aves en cada humedad, ¿qué porcentaje de éstas se encuentran en cada uno de ellos después de dos días?
 - ¿Qué porcentaje de ellas debe haber en cada humedad si se sabe que este porcentaje se mantiene constante a través del tiempo?. Comprueba el resultado
 - ¿Cuál es el porcentaje de aves en cada humedad después de un número elevado de días?
- 11.- Se pretende realizar el estudio de la contaminación de cierta región en la que se están produciendo vertidos industriales. Se han clasificado los terrenos en los siguientes niveles de contaminación: (a) terrenos limpios, (b) terrenos con nivel de contaminación medio, y (c) terrenos con nivel de contaminación alto. Se comprueba que la evolución de la contaminación de un año para otro se ajusta a los siguientes datos. Cada año se contamina un 30 % de los terrenos limpios de la siguiente manera:
- El 20 % con un nivel de contaminación medio
 - El 10 % con un nivel de contaminación alto.
- Anualmente el 30 % de los terrenos con nivel de contaminación media pasan a tener contaminación alta. Ante esta situación, la autoridades emprenden un plan de recuperación de las zonas contaminadas. El plan actúa directamente sobre los terrenos más contaminados consiguiendo, por un lado, limpiar totalmente el 70 % de los terrenos con contaminación alta, y por otro, reducir la contaminación de otro 10 % de zona de alta contaminación que pasa a contaminación media. El territorio estudiado tiene una extensión de 1000 hectáreas e inicialmente todas ellas estaban limpias. Estudiar la tendencia pasado un número suficientemente grande de años, ¿cuántas hectáreas de terreno estarán totalmente limpias?, ¿cuántas hectáreas de terreno estarán con una alta concentración de productos contaminantes?
- 12.- Una población de ardillas está dividida en tres clases de edades de dos años de duración, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de Leslie viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra y una mediana 24, además la cuarta parte de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 50 % de las medianas se hacen adultas.

- Estudiar la evolución de la población a través de la tasa neta de reproducción.
- ¿Tiene la matriz L un valor propio estrictamente dominante? Justifica la respuesta.
- Calcular el % de crecimiento o decrecimiento de la población.
- Si $\vec{X}(0) = (40, 20, 30)^T$. ¿Cuál será la población cuatro años después?.
- Si sabemos que a largo plazo la población de ardillas será de 7900. ¿Cómo estarán distribuidas en cada una de las clases?.

13.- Dado el modelo discreto matricial de Leslie,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

- Si la unidad de tiempo se considera un año, explicar el significado de cada uno de los coeficientes de la matriz
- Calcular los valores de α para los cuales la población a largo plazo desaparece, permanece constante y aumente indefinidamente.
- Hallar el valor de α para que la población crezca un 10 % anual
¿Tienden las clases de edad, en este caso, hacia unas proporciones constantes? En caso afirmativo, encontrarlas.

14.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 14.a.- ¿Es A una matriz de Leslie? Justificar la respuesta e interpretar biológicamente los elementos de la matriz.
- 14.b.- ¿Tiene la matriz A algún valor propio positivo estrictamente dominante? Justificar la respuesta
- 14.c.- Sea el modelo matricial:

$$\vec{x}(t+1) = A\vec{x}(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Si $\vec{x}(0) = (100, 100, 100)^T$, ¿cuál será el valor aproximado de $\vec{x}(30)$?

15.- Sea una población de hembras dividida en tres clases de edades de 5 años de duración. Su evolución está determinada por un modelo de Leslie siendo su matriz,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- ¿Desaparecerá esta población a largo plazo?

- Encontrar el valor de a_2 para que cada 5 años la población aumente en un 50 %
 - Para el valor de a_2 anteriormente encontrado. Si a largo plazo el número de hembras es de 800, ¿cuántas de ellas serán jóvenes?
-



Tema 8

OTROS MODELOS MATRICIALES

8.1. Introducción

En este tema mostramos algunos ejemplos más elaborados de modelos matriciales que los estudiados en el tema anterior. Se inicia con dos casos prácticos en dinámica de poblaciones. En el primero se realiza una proyección para los próximos años de una colonia de pájaros, tomando como punto de partida los datos reales correspondientes al período 1991 - 1994. En el segundo se prueba como la reducción de una población de ardillas modifica la tasa de crecimiento de la población.

A continuación se presenta un modelo elemental que simula la producción de células rojas del cuerpo humano. Finalmente, se ofrece un modelo que puede ser utilizado en la gestión de un coto de caza o una granja para la explotación duradera de una población de animales y otro modelo para explotar de una forma racional la madera de un bosque.

8.2. Dinámica de una población de pájaros

El Helmeted Honeyeater (*Lichenostomus melanops cassidix*) es un tipo de pájaro de Australia que actualmente se encuentra en peligro de extinción. En esta sección construiremos un modelo matricial con el objetivo de estudiar la evolución de la población en los próximos años, basándonos en los datos que aparecen en la siguiente tabla, correspondientes al período 1991-1994.

Edad	1991	1992	1993	1994
0	26	28	27	29
1	16	17	20	20
2	12	11	13	14
3	9	8	9	10
4	7	6	6	8
5	5	4	5	5
6	4	3	3	4
7	3	3	2	3
8	2	2	2	2
9	1	1	1	2
Total	85	83	88	97

Empezamos definiendo las hipótesis básicas sobre las que construiremos nuestro modelo.

- Dividiremos la población en cinco clases de edades. En la primera de ellas se encontrarán los pájaros hembras de edad 0, es decir de 0 a 12 meses, y en la última las hembras de 4 años o más (de 48 meses en adelante).
- Por la información de que disponemos, supondremos que las hembras de la primera clase no son fértiles y las fertilidades del resto de las clases son iguales.
- Los parámetros de natalidad y supervivencia se mantienen constantes.

En la tabla 8.1 hemos dispuesto el número de pájaros hembras para cada una de las cinco clases en el período 1991-1994.

Clase	1991	1992	1993	1994
1	26	28	27	29
2	16	17	20	20
3	12	11	13	14
4	9	8	9	10
5	22	19	19	24
Total	85	83	88	97

Tabla 8.1

Una rápida mirada al número total de individuos, nos permite conjeturar que la población tiende a crecer con el paso del tiempo. Podemos encontrar una primera aproximación de este crecimiento haciendo la media aritmética de los datos que disponemos. Es decir,

$$\frac{\frac{83}{85} + \frac{88}{83} + \frac{97}{88}}{3} = 1.04633,$$

la población crece año tras año a una media aproximada del 4.63 %.

Como sabemos, la primera fila de la matriz de transición del modelo, está formada por las tasas de natalidad,

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = \frac{\frac{28}{85-26} + \frac{27}{83-28} + \frac{29}{88-27}}{3} = 0.480298.$$

Por otro lado, el elemento a_{21} representa al porcentaje de individuos de la primera clase que sobreviven al pasar un año para llegar a la segunda,

$$a_{21} = \frac{\frac{17}{26} + \frac{20}{28} + \frac{20}{27}}{3} = 0.702958.$$

De forma similar, el resto de las tasas de supervivencia serán,

$$a_{32} = \frac{\frac{11}{16} + \frac{13}{17} + \frac{14}{20}}{3} = 0.717402$$

$$a_{43} = \frac{\frac{8}{12} + \frac{9}{11} + \frac{10}{13}}{3} = 0.751338$$

$$a_{54} = \frac{\frac{6}{9} + \frac{6}{8} + \frac{8}{9}}{3} = 0.7682.$$

Por último, encontramos la probabilidad de que una hembra de la última clase siga permaneciendo a la misma clase en el año próximo,

$$a_{55} = \frac{\frac{13}{22} + \frac{13}{19} + \frac{16}{19}}{3} = 0.705433.$$

En consecuencia, el modelo matricial $\vec{X}(t) = A \vec{X}(t-1)$, $t = 1, 2, \dots$ que representa a la dinámica de esta población de Helmeted Honeyeater es:

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \\ X_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 \\ 0.702 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7682 & 0.705 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \\ X_3(t-1) \\ X_4(t-1) \\ X_5(t-1) \end{pmatrix}$$

Si tomamos como vector inicial

$$\vec{X}(0) = (26, 16, 12, 9, 22)^T,$$

podemos saber la “bondad” del modelo, calculando el número de individuos en las siguientes generaciones. De esta manera, para el año 1992 el modelo predice

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \\ X_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 \\ 0.702 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7682 & 0.705 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 16 \\ 12 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 28 \\ 18 \\ 11 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix}$$

En la tabla siguiente pueden verse las proyecciones de la población para distintas generaciones,

Clase	1991	1992	1993	1994	1995	2011	2012
1	26	28	29	31	32	69	73
2	16	18	20	21	22	47	49
3	12	11	13	14	15	32	33
4	9	9	9	10	11	23	24
5	22	22	23	23	23	51	53
Total	85	88	94	99	103	222	232

El modelo prevé un crecimiento de la población con una tasa

$$\frac{\frac{88}{85} + \frac{94}{88} + \frac{99}{94} + \frac{103}{99}}{4} = 1.048,$$

del 4.8%, muy parecida a la obtenida con los datos reales de los primeros años. Además, en el período 2011 - 2012 la población se espera que crezca $232/222 = 1.04505$, un 4.5%.

Si utilizamos el programa **Mathematica**[®] para conocer los valores y vectores propios de la matriz A , obtenemos $\lambda_1 = 1.04897$ como valor propio dominante y

$$\vec{U}_1 = (0.659, 0.441, 0.301, 0.216, 0.482)^T,$$

su vector propio asociado. En consecuencia, a largo plazo, la población crecerá a un ritmo del 4.897% anual, y los porcentajes de hembras en cada una de las clases se mantendrán constantes, tal y como puede observarse en la Figura 8.1.

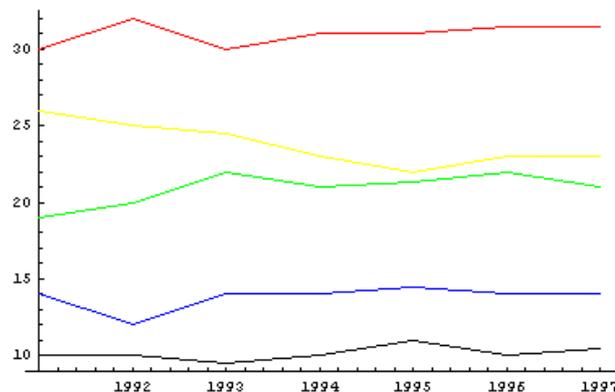


Figura 8.1. Rojo=clase 1, verde=clase 2, azul=clase 3, negro=clase 4, amarillo=clase 5

8.3. Dinámica de una población de ardillas

Recordemos que entendemos por dinámica de la población a la variación del número de individuos de una población en función del tiempo. Como un caso particular de este tipo de dinámica, mostraremos un ejemplo concreto que corresponde a la evolución a largo plazo de una población de ardillas (*Spermophilus armatus*).

Estas ardillas pueden encontrarse en el estado de Utah en USA, y suelen despertarse de la hibernación cada año a finales de Marzo o primeros del mes de Abril, dependiendo de las condiciones climatológicas. Las hembras paren muy rápidamente después de despertar y establecer su territorio. En los primeros días de Mayo nacen las crías y las ardillas jóvenes dejan sus madrigueras aproximadamente tres semanas después. Durante los meses de Junio y Julio todas las clases de edades y sexos son activas. Finalmente, los adultos comienzan la hibernación a finales de Julio, de tal manera que en Septiembre todas las ardillas están de nuevo hibernando en sus madrigueras.

La investigación se realizó en dos fases, la primera de ellas se desarrolló desde 1964 a 1968, y se dejó plena libertad a la población. En este caso, el número de ardillas fluctuó entre 178 y 255, con una media de 205. La primera parte de la tabla 8.2 corresponde a la tabla de vida durante esa primera etapa.

La segunda fase se desarrolló entre los años 1968 - 1971 y los investigadores intervinieron reduciendo la población a 100 ardillas. La segunda parte de la tabla 8.2 muestra su tabla de vida, para esta segunda etapa.

x(año)	l(x)	b(x)	l(x)	b(x)
0.00	1.000	0.00	1.000	0.00
0.25	0.662	0.00	0.783	0.00
0.75	0.332	1.29	0.398	1.71
1.25	0.251	0.00	0.288	0.00
1.75	0.142	2.08	0.211	2.24
2.25	0.104	0.00	0.167	0.00
2.75	0.061	2.08	0.115	2.24
3.75	0.026	2.08	0.060	2.24
4.75	0.011	2.08	0.034	2.24
5.75	0.000	0.00	0.019	2.24
6.75	-	-	0.010	2.24
7.75	-	-	0.000	0.00

Tabla 8.2.

Si analizamos los resultados utilizando como software **Populus**[®], observamos que durante la primera de las fases las tasas de nacimientos y muertes estaban equilibradas, generando una tasa de crecimiento negativo ($r = -0.0207$ ardillas/(ardillas \times año)).

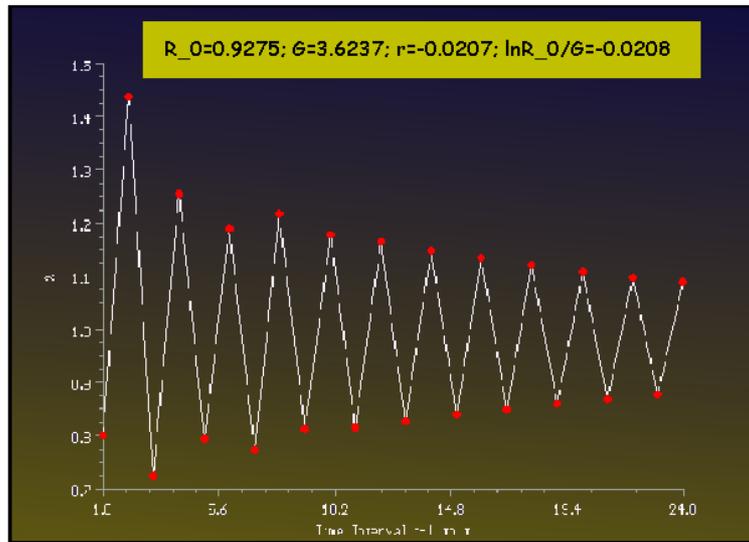


Figura 8.2 Evolución de $\lambda = e^r$ (primer caso)

En la Figura 8.2 se aprecia que a medida que aumentamos el número de años, $\lambda = e^r$ tiende al valor 0.979512.

La Figura 8.3 representa la distribución estable de clases

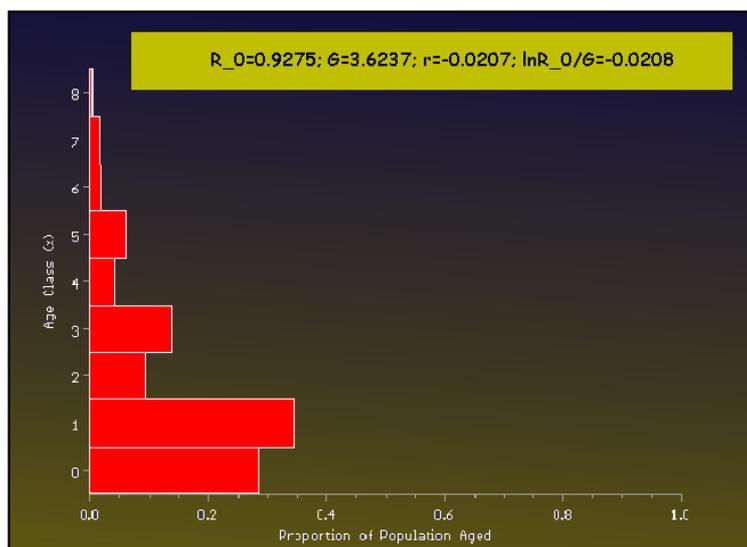


Figura 8.3. Distribución por edades (primer caso)

Cuando se reduce la densidad de población de ardillas, la natalidad supera a la mortalidad y se produce un aumento considerable en la tasa de crecimiento ($r=0.1267$ ardillas/(ardillas \times año))

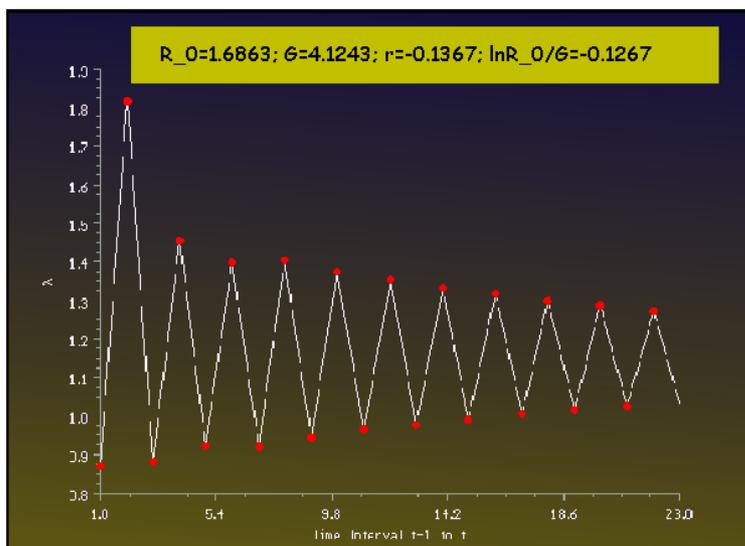


Figura 8.4. Representación gráfica de λ (segundo caso)

La Figura 8.4 muestra como ahora la estabilidad en las clases de edad tiene una tendencia diferente a la primera de las fases estudiadas.

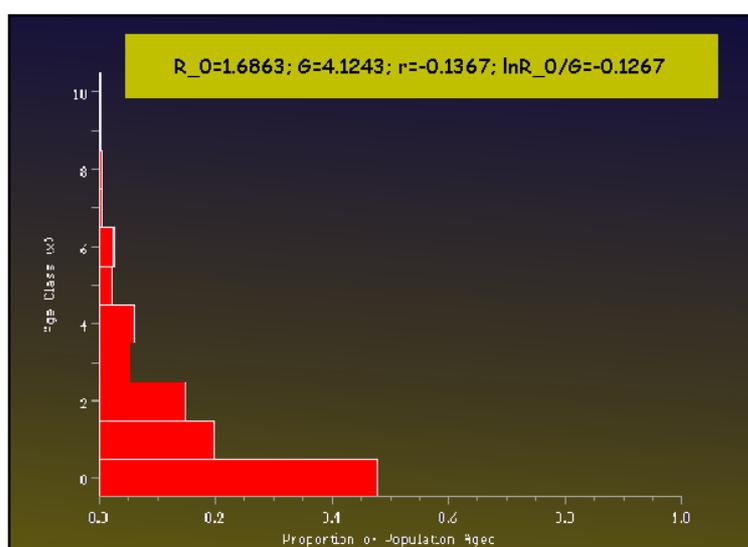


Figura 8.5. Distribución por edades (segundo caso)

En conclusión, la reducción en la densidad de la población pone de manifiesto que el agrupamiento tiene muchos efectos escondidos detrás de una determinada tasa de crecimiento. Por ejemplo, la natalidad, la mortalidad y la estabilidad en la estructura de edad, son muy sensibles a la densidad de la población.

8.4. Modelo para la producción de células rojas

En el sistema circulatorio las células rojas son las encargadas de transportar el oxígeno a través del cuerpo. En este proceso son destruidas y reemplazadas de forma

constante, por lo que su número debe mantenerse en un nivel fijo. Nos proponemos construir un modelo muy simple que simule la producción de estas células rojas en el cuerpo, para lo cual empezamos considerando unas hipótesis básicas de partida.

- 1.- El bazo filtra y destruye una cierta fracción de células al día.
- 2.- La médula ósea produce un número proporcional al número de células perdidas en el día anterior.

Tomando a estas restricciones como punto de partida, nuestro objetivo será determinar el número de células rojas existente para un día cualquiera k . Para ello, representaremos por,

- R_k al número de células rojas en circulación en el día k .
- M_k al número de células rojas producidas por la médula en el día k .
- α a la fracción destruidas por el bazo.
- γ a la producción constante (número producido por número perdido.)

De las hipótesis y definiciones anteriores se deduce que,

$$\begin{cases} R_{k+1} &= (1 - \alpha)R_k + M_k \\ M_{k+1} &= \gamma\alpha R_k \end{cases}$$

o bien, matricialmente

$$\begin{pmatrix} R_{k+1} \\ M_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 1 \\ \gamma\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_k \\ M_k \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(k+1) = A\vec{X}(k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Para estudiar su evolución en el tiempo, es necesario encontrar la potencia de la matriz A , ya que $\vec{X}(k) = A\vec{X}(k-1) = A^k\vec{X}(0)$. Necesitamos conocer, en primer lugar, los valores propios de la matriz A .

$$A := \{\{1 - \alpha\}, \{\gamma\alpha, 0\}\}$$

Eigenvalues[A]

$$\left\{ \frac{1 - \alpha - \text{Sqrt}[(-1 + \alpha)^2 + 4\alpha\gamma]}{2}, \frac{1 - \alpha + \text{Sqrt}[(-1 + \alpha)^2 + 4\alpha\gamma]}{2} \right\} \quad (8.1)$$

Veamos a continuación que el comportamiento del modelo dependerá de los valores propios de la matriz de transición A .

- **Si los dos autovalores son menores que uno** y $D = C^{-1}AC$ es la matriz diagonal, entonces D^k tiende a la matriz nula cuando $k \rightarrow \infty$. En consecuencia, $A^k = CD^kC^{-1}$ tiende a largo plazo a la matriz nula, y **en el cuerpo no quedarán células rojas**.

- **Si al menos uno de los autovalores es más grande que uno**, entonces D^k crecerá cuando $k \rightarrow \infty$, y A^k también lo hará. Esto significa que **el número de células rojas aumentará de forma continua con el tiempo** y llegará un momento en el que el individuo fallecerá.
- Entonces la única forma de **mantener constante el número de células rojas, sería cuando existiese un valor propio dominante que valiese uno**.

Pero teniendo en cuenta (8.1), esto último ocurrirá si y sólo si $\gamma = 1$. Supongamos, por tanto, que $\gamma = 1$ con $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\alpha$, si calculamos los vectores propios asociados

$$\vec{U}_1 = (1, \alpha), \quad \vec{U}_2 = (1, -1).$$

que nos permiten escribir

$$A^k = CD^kC^{-1} = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 1 + \alpha(-\alpha)^k & 1 - (-\alpha)^k \\ \alpha(1 - (-\alpha)^k) & \alpha + (-\alpha)^k \end{pmatrix},$$

y deducir

$$R(k) = \frac{1}{1+\alpha} ((1 + \alpha(-\alpha)^k)R(0) + (1 - (-\alpha)^k)M(0)).$$

Como la fracción de células rojas α es reemplazada por el bazo cada día, si k es suficientemente grande, entonces $R(k)$ tiende al valor de equilibrio R^* , siendo

$$R^* = \frac{R(0) + M(0)}{1 + \alpha}. \quad (8.2)$$

Conclusiones:

- 1.- Al ser $(-\alpha)$ negativo, al calcular $(-\alpha)^k$ con $k \rightarrow \infty$, el número de células rojas oscilará (dependiendo de que k sea par o impar) para aproximarse al punto de equilibrio (8.2). Una posible explicación biológica de este hecho puede deberse al efecto de retardo, ya que el número de células rojas que la médula ósea produce hoy está en función de las que se destruyeron ayer.
- 2.- La convergencia hacia el punto de equilibrio (8.2) será muy rápida si α es pequeño, y esto significaría que el bazo filtra pocas células rojas del día anterior.
- 3.- Cuando se extrae sangre se reducen las cantidades $R(0)$ y $M(0)$ y hay una reducción en el punto de equilibrio que no se recupera con el tiempo. Este comportamiento del modelo entra en contradicción con la realidad, y por ello es necesario modificarlo. Una posible mejora sería

$$\begin{cases} R_{k+1} &= (1 - \alpha)R_k + \varepsilon \\ M_{k+1} &= \gamma\alpha R_k \end{cases},$$

ya que ahora el punto de equilibrio sería constante de valor ε/α .

8.5. Explotación de una población de animales

Entendemos por explotación a la separación de algunos animales para su venta o sacrificio. Nosotros nos limitaremos a lo que se conoce como política de explotación duradera, lo cual significa:

- *Diremos que una explotación es duradera, si el rendimiento que se obtiene al término de cada período es el mismo y la distribución de las edades de la población se conserva al separar el rendimiento de cada período.*

Por tanto, la población animal no se agota, solo se explota el excedente debido al crecimiento. La idea básica del modelo que queremos construir es el siguiente. Se parte de una población con una determinada distribución de las edades. Esta población tiene un período de crecimiento descrito por una matriz de *Leslie*. Al término de este período, se obtiene como rendimiento una fracción de cada una de las clases de edades. La duración del período de separación de los animales que conforman el rendimiento, debe ser breve en comparación con el período de crecimiento (para que el crecimiento o los cambios de la población sean despreciables en dicho período de separación). Finalmente, la población debe quedar con la misma distribución de las edades que la población original. Este ciclo se repite después de cada separación y por tanto, el rendimiento es duradero. Sea:

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T,$$

el vector de distribución de las edades de la población al inicio del período de crecimiento; X_i es el número de hembras de la clase de orden i que sigue formando parte de la población (que no se separan como rendimiento). La duración de cada clase debe ser igual a la duración del período de crecimiento. Por ejemplo, si el rendimiento se separa una vez al año, la población tendrá que dividirse en clases de un año.

Sea L la matriz de *Leslie* que describe el crecimiento de la población; por lo tanto, $L\vec{X}$ será el vector de la distribución de las edades de la población al término del período de crecimiento (esto es, inmediatamente antes de la separación). Sea h_i con $i = 1, 2, 3, 4$, la fracción de hembras que se va a separar de las clases de orden i . Entonces en la primera clase, después de un período de crecimiento se pasa de X_1 hembras a,

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4,$$

siendo el número de hembras que se separan

$$h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4),$$

y en consecuencia

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 - h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4),$$

serán las hembras que quedan en la primera clase después de la separación. Por tanto,

$$X_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 - h_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4).$$

Del mismo modo, en la segunda clase

$$b_1X_1 - h_2b_1X_1 = X_2,$$

y en la tercera y cuarta clase

$$\begin{aligned} b_2X_2 - h_3b_2X_2 &= X_3 \\ b_3X_3 - h_4b_3X_3 &= X_4. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores podemos expresarlas matricialmente,

$$\begin{aligned} (1 - h_1)(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) &= X_1 \\ (1 - h_2)b_1X_1 &= X_2 \\ (1 - h_3)b_2X_2 &= X_3 \\ (1 - h_4)b_3X_3 &= X_4 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Es posible realizar un razonamiento similar de forma más simplificada, haciendo uso del álgebra matricial. Sea

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{pmatrix},$$

la matriz de separación de cada una de las clases. Si tenemos en cuenta lo que entendemos por una política duradera tenemos:

- La distribución de las edades al final del período de crecimiento ($L\vec{X}$) menos el rendimiento ($HL\vec{X}$) será igual a la distribución de las edades al comienzo del período de crecimiento (\vec{X}).

O bien,

$$L\vec{X} - HL\vec{X} = \vec{X} \quad \Rightarrow \quad (I - H)L\vec{X} = \vec{X}. \tag{8.4}$$

Las ecuaciones (8.3) y (8.4) son idénticas e indican que \vec{X} es un vector propio de la matriz $(I - H)L$ asociado al valor propio $\lambda = 1$. Por esta razón, los valores de h_i y \vec{X} que aparecen en el modelo no pueden tomar cualquier valor, sino que por el contrario estarán sometidos a ciertas restricciones que a continuación analizaremos.

Sabemos que la matriz de *Leslie* es,

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $(I - H)L$ vale,

$$\begin{pmatrix} (1 - h_1)a_1 & (1 - h_1)a_2 & (1 - h_1)a_3 & (1 - h_1)a_4 \\ (1 - h_2)b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - h_3)b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - h_4)b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos, que esta matriz es del mismo tipo que una matriz de *Leslie* y sabemos que la condición necesaria y suficiente para que una matriz de este tipo tenga como valor propio la unidad es que su tasa neta de reproducción R sea igual a 1. En nuestro caso:

$$\begin{aligned} & (1 - h_1)(a_1 + a_2b_1(1 - h_2) + a_3b_1b_2(1 - h_2)(1 - h_3) \\ & + a_4b_1b_2b_3(1 - h_2)(1 - h_3)(1 - h_4)) = 1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Esta ecuación, proporciona unas restricciones para las fracciones h_i de separación de los animales. Solo aquellos valores que cumplan esta ecuación y pertenezcan al intervalo $(0, 1)$ dan origen a un rendimiento duradero.

Si h_i con $i = 1, 2, 3, 4$ satisfacen la ecuación (8.5), la matriz $(I - H)L$ tiene como valor propio $\lambda_1 = 1$ y además este valor propio tiene grado de multiplicidad 1 (ya que el valor propio positivo de una matriz de *Leslie* tiene siempre multiplicidad uno). Por tanto, solo existe un vector propio \vec{X} linealmente independiente que cumple la ecuación,

$$(I - H)L\vec{X} = \vec{X},$$

de valor,

$$\vec{X} = \vec{U}_1 = (1, b_1(1 - h_2), b_1b_2(1 - h_2)(1 - h_3), b_1b_2b_3(1 - h_2)(1 - h_3)(1 - h_4))^T.$$

Este vector, determinará la fracción de hembras que quedará en cada una de las 4 clases después de la separación si se sigue una política de explotación duradera. El número de animales suele estar condicionado por restricciones, por ejemplo del tipo ecológico (espacio, tipo de especies) o económico (precio de venta de los animales de cada clase).

8.5.1. Explotación uniforme

Suele ocurrir con frecuencia que en muchas poblaciones es difícil distinguir o capturar animales de una determinada edad. Por este motivo, es razonable pensar que la captura se realiza al azar, lo que equivale suponer que se separa la misma fracción en cada una de las clases. En consecuencia, un primer caso de estudio es

$$h = h_1 = h_2 = h_3 = h_4.$$

Entonces, la ecuación $(I - H)L\vec{X} = \vec{X}$, se convertirá en

$$(1 - h)L\vec{X} = \vec{X} \quad \Rightarrow \quad L\vec{X} = \left(\frac{1}{1 - h}\right)\vec{X}.$$

De este modo, $1/(1-h)$ debe ser el valor propio único positivo λ_1 de la matriz de crecimiento de *Leslie*, L

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-h}.$$

Despejando h se obtiene

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

El vector \vec{X} es, en este caso, igual al vector propio de L correspondiente al valor propio λ_1

$$\vec{X} = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}, \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \right)^T.$$

Del valor de h encontrado, podemos deducir que, cuanto mayor sea λ_1 , mayor será la fracción de los animales que se pueden separar de la población sin agotarla. Se observa también que si $\lambda_1 > 1$, la fracción a separar h se encuentra en el intervalo $(0, 1)$. Esto era de esperar ya que $\lambda_1 > 1$ significa que la población aumenta con el paso del tiempo.

8.5.2. Separación de la clase de menor edad

En algunas poblaciones, las hembras más jóvenes son las únicas que tienen valor económico. Por ello, sólo se separan las hembras de la clase de menor edad y por ello,

$$h_1 = h, \quad h_2 = h_3 = h_4 = 0.$$

Bajo estas consideraciones, la ecuación (8.5) se transformará en

$$(1-h)(a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_4 b_1 b_2 b_3) = 1,$$

o lo que es lo mismo $(1-h)R = 1$, siendo R la tasa neta de reproducción de la población, correspondiente a la matriz L . Luego,

$$h = 1 - \frac{1}{R}.$$

En esta ecuación se observa que una política de explotación duradera se logra cuando $R > 1$, lo que equivale a que crezca la población.

El vector de la distribución de las edades después de la separación es proporcional al vector

$$\vec{X} = (1, b_1, b_1 b_2, b_1 b_2 b_3)^T,$$

ya que $\lambda_1 = 1$. En efecto, $(I - H)L\vec{X} = \vec{X}$,

$$\begin{pmatrix} (1-h)a_1 & (1-h)a_2 & (1-h)a_3 & (1-h)a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \vec{X} = \vec{X}.$$

En este caso la tasa neta de reproducción $R' = 1$ será

$$R' = (1 - h)[a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + a_4b_1b_2b_3] = (1 - h)R = 1.$$

EJEMPLO 8.1

Una cierta población de animales está dividida en tres clases de edades de un año de duración y la matriz de *Leslie* correspondiente es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Separación uniforme.** Como hemos demostrado, en este caso la fracción que debemos separar, viene dada por la expresión

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Necesitamos conocer los valores propios de la matriz L

$$|L - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = -1.31; \lambda_3 = -0.19,$$

y en consecuencia, la fracción buscada es

$$h = 1 - \frac{1}{1.5} = \frac{1}{3}.$$

Es decir, de cada una de las clases de edades, debemos elegir la tercera parte de los animales.

Para encontrar el vector de distribución que quedaría después de cada separación,

$$\vec{X} = (1, b_1/\lambda_1, b_1b_2/\lambda_1^2)^T = (1, 1/3, 1/18)^T.$$

- **Separación de la clase de menor edad.** Actuamos de la misma manera que en el caso anterior, pero teniendo en cuenta que

$$h = 1 - \frac{1}{R},$$

siendo R la tasa neta de reproducción de la matriz L

$$R = a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 = 0 + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{8}.$$

Luego,

$$h = 1 - \frac{8}{19} = \frac{11}{19}.$$

El vector de distribución de las edades será:

$$\vec{X} = (1, b_1, b_1b_2)^T = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)^T.$$

EJEMPLO 8.2

Para una cierta especie de ovejas domésticas de Nueva Zelanda, cuyo período de crecimiento es de un año, se encontró la siguiente matriz de *Leslie*

$$L = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.045 & 0.391 & 0.472 & 0.484 & 0.546 & 0.543 & 0.502 & 0.468 & 0.459 & 0.433 & 0.421 \\ 0.845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.691 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.561 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.370 & 0 \end{pmatrix}$$

En cada uno de los casos estudiados, encontraremos la fracción h a separar, y el vector de la distribución de las edades de las ovejas, después de cada separación.

- **Separación uniforme.** Para conocer la fracción h necesitamos en primer lugar saber el valor propio positivo λ_1 . Para ello, utilizamos el ordenador y puede comprobarse que $\lambda_1 = 1.17557$

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda_1} = 1 - \frac{1}{1.17557} = 0.15.$$

Entonces, la política de explotación uniforme consiste en separar, cada año, el 15 % de las ovejas en cada una de las doce clases.

A continuación encontramos la distribución de las edades de las ovejas, después de cada separación. En este caso, es proporcional al vector

$$\vec{X} = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}, \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3}, \dots, \frac{b_1 \cdots b_{11}}{\lambda_1^{11}} \right)^T = (1, 0.719, 0.59619, \dots)^T.$$

Por cada 1000 ovejas cuya edad está comprendida entre 0 y 1 año después de la separación, hay 719 ovejas cuya edad está comprendida entre 1 y 2 años, 596 entre 2 y 3 y así sucesivamente.

- **Separación de la clase de menor edad.** El segundo caso se resuelve con la misma técnica empleada en el ejemplo anterior. La tasa neta de reproducción es

$$\begin{aligned} R &= a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1} = \\ &= (0 + (0.045)(0.845) + \cdots + (0.421)(0.845) \cdots) = 2.513 \end{aligned}$$

La fracción que se separa de la primera clase es

$$h = 1 - \frac{1}{R} = 1 - \frac{1}{2.513} = 0.602.$$

La distribución de las edades de la población de ovejas, después de la separación, es proporcional al vector

$$\vec{v}_1 = (1, 0.845, 0.824, 0.795, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.060)^T.$$

Si hacemos el producto $L\vec{v}_1$ obtenemos

$$(2.513, 0.845, 0.824, 0.795, 0.755, 0.699, 0.626, 0.532, 0.418, 0.289, 0.162, 0.060)^T,$$

que es el vector de la distribución de las edades inmediatamente antes de la separación. La suma total de todas ellas es 8.518, por lo que la primera, 2.513 supone el 29,5% del total. Esto significa que, inmediatamente antes de la separación, el 29.5% de la población está en la clase de menor edad. Como en esta clase se separa el 60.2%, se concluye que cada año el rendimiento equivale al 17.8% de la población total de ovejas.

EJEMPLO 8.3

Supongamos que disponemos de una granja con una capacidad para 1760 cerdas. Hemos dividido la población en tres clases de edad: jóvenes, medianas y adultas, cuyos precios de venta son 36 euros, 30 euros y 42 euros respectivamente.

La tabla siguiente corresponde a la distribución en las tres clases en los años 1998 y 2000:

Edad	Núm. en 1998	Núm. crías 1998-2000	Núm. 2000
[0, 2)	160	160	1360
[2, 4)	300	1200	80
[4, 6]	100	0	0

Realizaremos un estudio para deducir si es más rentable económicamente sacrificar el mismo número de animales de cada una de las clases o si por el contrario interesa sólo sacrificar una parte de los animales más jóvenes.

- Para saber el crecimiento de la población es necesario conocer la matriz de *Leslie*, y en concreto los parámetros de natalidad y supervivencia de la población.

$$a_1 = \frac{160}{160} = 1, \quad a_2 = \frac{1200}{300} = 4, \quad a_3 = \frac{0}{100} = 0, \quad b_1 = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}.$$

El modelo matricial será,

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \\ X_3(t-1) \end{pmatrix}$$

- Para la **separación uniforme** de las hembras, es necesario encontrar el valor propio estrictamente dominante de matriz de *Leslie* así como su vector propio asociado.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2/3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1.$$

Como el valor propio dominante es $\lambda_1 = 2$, la fracción que debemos separar de cada una de las clases es

$$h = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

el 50%. A continuación necesitamos el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 2/3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}x - 2y = 0 \\ \frac{2}{3}y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\alpha \\ y = \alpha \\ z = \frac{1}{3}\alpha \end{cases}$$

Por tanto, el subespacio unidimensional de vectores propios asociados al $\lambda_1 = 2$ viene expresado por

$$S = \{(4\alpha, \alpha, 1/3\alpha) : \alpha \neq 0\},$$

el cual es generado por el vector $(4, 1, 1/3)$, o bien uno proporcional $(12, 3, 1)$.

Recordemos que una manera alternativa de encontrar este vector propio es,

$$\vec{U}_1 = \left(1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}\right)^T = \left(1, \frac{1/2}{2}, \frac{1/2 * 2/3}{2^2}\right)^T = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right)^T.$$

A la vista del vector propio, debemos repartir los 1760 animales entre las tres clases en la proporción $12 : 3 : 1$,

$$\frac{1760}{16} * 12 = 1320 \quad \text{animales en la primera clase}$$

$$\frac{1760}{16} * 3 = 330 \quad \text{animales en la segunda clase}$$

$$\frac{1760}{16} * 1 = 110 \quad \text{animales en la tercera clase.}$$

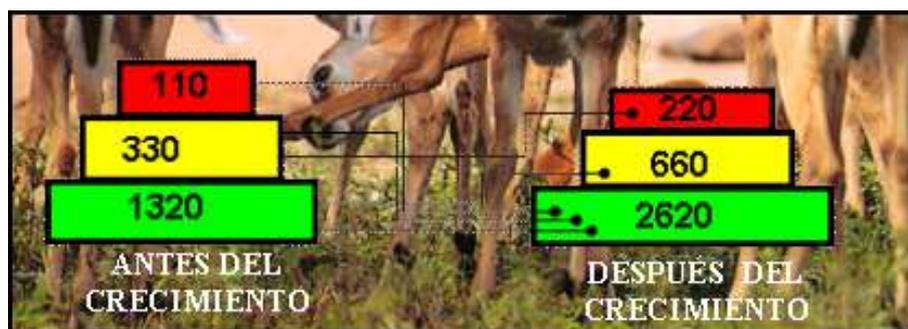


Figura 8.6. Distribución de las hembras antes y después de un período de crecimiento.

Ahora, debemos esperar un período de crecimiento (dos años),

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1320 \\ 330 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2620 \\ 660 \\ 220 \end{pmatrix}.$$

Finalmente el número de animales que separamos de la primera clase será de,

$$2620 - 1320 = 2620 * \frac{1}{2} = 1320,$$

de la segunda,

$$660 - 330 = 660 * \frac{1}{2} = 330,$$

y de la tercera

$$220 - 110 = 220 * \frac{1}{2} = 110.$$

De esta manera, el beneficio obtenido es de

$$1320 * 36 + 330 * 30 + 110 * 42 = 62040 \quad \text{euros.}$$

- Para conocer la fracción a separar en el segundo tipo correspondiente a la separación de la **clase de la menor edad**, calculamos la tasa neta de reproducción,

$$R = a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 = 1 + \frac{4}{2} = 3,$$

entonces $h = 1 - 1/R = 1 - 1/3 = 2/3$, es decir un 66 % de las cerdas más pequeñas.

Al igual que en el caso anterior es necesario repartir los 1760 animales en las tres clases, por ello

$$\vec{X} = (1, b_1, b_1b_2)^T = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T,$$

lo cual indica que la proporción buscada es 6 : 3 : 2. Estos porcentajes obligan a que 960 de los 1760 cerdas deben corresponder a las jóvenes, 480 a las medianas y 320 a las adultas. Por tanto, después de dos años el número de animales en cada una de las clases será de

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 960 \\ 480 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2880 \\ 480 \\ 320 \end{pmatrix}.$$

El número de animales jóvenes que debemos separar será de $2880 - 960 = 2880 * 2/3 = 1920$, cuya venta supone un beneficio de $1920 * 36 = 69120$ euros.

- **Conclusión:** Interesa vender el 66 % de las hembras más jóvenes.

Para terminar, insistimos en el hecho de que es posible establecer muchas políticas diferentes de explotación duradera, todas aquellas que cumplan la restricción dada por la ecuación (8.5). Es evidente, que cada una de estas políticas dará lugar a un beneficio distinto y una cuestión básica es conocer cuál de ellas proporciona un beneficio máximo. Este problema es muy interesante de responder pero su resolución escapa de los objetivos del curso ya que para poderlo abordar es necesario tener nociones de programación lineal.

8.6. Modelo para la explotación de un bosque

Supongamos que disponemos de un bosque de pinos que deseamos explotarlo como árboles para madera. Para ello, cada período de tiempo (dependiendo de la matriz de crecimiento) cortamos y vendemos algunos de estos árboles. Por cada pino cortado, se planta en el mismo lugar otro. De esta manera, el número de árboles del bosque se conserva constante¹. Como es natural, los árboles de diferentes alturas tendrán diferentes precios. Para concretar, dividimos los árboles en cuatro clases de alturas,

¹En este modelo simplificado no se tendrá en cuenta los árboles que mueren entre dos temporadas de corte. Supondremos que cada árbol del almácigo que se planta, sobrevive y crece hasta que se corta para su venta

siendo p_i con $i = 1, 2, 3, 4$ el precio de un árbol que se encuentra en la clase i .

La primera clase está formada por los árboles cuya altura está comprendida en el intervalo $[0, h_1)$ y es normal suponer que no tienen valor económico ($p_1 = 0$). La clase de orden 4 está formada por los árboles de altura igual o mayor que h_3 . Representaremos por X_i con $i = 1, 2, 3, 4$ al número de árboles comprendido en la clase de orden i , que quedan sembrados después de cada temporada de corte. Con estos números puede formarse un vector

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T,$$

que se conoce con el nombre de vector de árboles no cortados.

Para que la explotación del bosque sea duradera, éste tiene que recuperar después de cada temporada de corte, la configuración fija dada por el vector de árboles no cortados, \vec{X} .

Uno de los objetivos fundamentales de esta sección será encontrar los vectores de árboles no cortados \vec{X} , que hagan posible la explotación duradera. Como el número total de árboles del bosque es fijo, se cumple

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N,$$

donde la cantidad N dependerá, por ejemplo, del terreno disponible y del espacio requerido por cada árbol. Entre dos temporadas de corte, los árboles crecen dando una configuración al bosque igual a la de antes de cada temporada de corte. En esta temporada, se cortan un cierto número de árboles de cada clase. Finalmente, se planta un árbol en el lugar de cada uno de los árboles cortados de forma que el bosque recupere la configuración inicial.

Si nos encontramos entre dos temporadas de corte, un árbol de la clase i puede crecer de forma que pase a ser de una clase de mayor altura o bien, tener por alguna razón un crecimiento retardado y permanecer dentro de la misma clase. En consecuencia, es necesario definir los siguientes parámetros de crecimiento, g_i , para $i = 1, 2, 3, 4$:

- 1.- g_i = la fracción de árboles de la clase de orden i que crecen y pasan a la clase de orden $i + 1$ durante un período de crecimiento.
 - 2.- $1 - g_i$ = la fracción de árboles de la clase de orden i que permanecen dentro de la clase de orden i durante su crecimiento.
- Después de un período de crecimiento, el número de árboles en cada una de las clases será,

$$\begin{aligned} \text{Primera} &= (1 - g_1)X_1 \\ \text{Segunda} &= g_1X_1 + (1 - g_2)X_2 \\ \text{Tercera} &= g_2X_2 + (1 - g_3)X_3 \\ \text{Cuarta} &= g_3X_3 + X_4 \end{aligned}$$

- Supongamos que en una temporada se cortan Y_i , $i = 1, 2, 3, 4$ árboles de la clase de orden i . Al vector $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)^T$ se conoce con el nombre de vector de árboles cortados,

$$\begin{aligned} \text{Primera} &= (1 - g_1)X_1 - Y_1 \\ \text{Segunda} &= g_1X_1 + (1 - g_2)X_2 - Y_2 \\ \text{Tercera} &= g_2X_2 + (1 - g_3)X_3 - Y_3 \\ \text{Cuarta} &= g_3X_3 + X_4 - Y_4 \end{aligned}$$

- Y plantamos el mismo número de árboles cortados

$$\begin{aligned} \text{Primera} &= (1 - g_1)X_1 - Y_1 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \\ \text{Segunda} &= g_1X_1 + (1 - g_2)X_2 - Y_2 \\ \text{Tercera} &= g_2X_2 + (1 - g_3)X_3 - Y_3 \\ \text{Cuarta} &= g_3X_3 + X_4 - Y_4 \end{aligned}$$

- Finalmente la configuración del bosque debe coincidir con la que tenía antes del período de crecimiento,

$$\begin{aligned} \text{Primera} &= (1 - g_1)X_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = X_1 \\ \text{Segunda} &= g_1X_1 + (1 - g_2)X_2 - Y_2 = X_2 \\ \text{Tercera} &= g_2X_2 + (1 - g_3)X_3 - Y_3 = X_3 \\ \text{Cuarta} &= g_3X_3 + X_4 - Y_4 = X_4 \end{aligned}$$

Simplificando las ecuaciones anteriores,

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1X_1 = Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ g_1X_1 - g_2X_2 = Y_2 \\ g_2X_2 - g_3X_3 = Y_3 \\ g_3X_3 = Y_4 \end{array} \right. \quad (8.6)$$

A este mismo resultado se llega de una manera más simplificada si hacemos uso del álgebra matricial. Para ello, si G es la matriz de crecimiento,

$$G = \begin{pmatrix} 1 - g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 1 - g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 - g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$G\vec{X} = \begin{pmatrix} (1 - g_1)X_1 \\ g_1X_1 + (1 - g_2)X_2 \\ g_2X_2 + (1 - g_3)X_3 \\ g_3X_3 + X_4 \end{pmatrix}$$

nos da el número de árboles que hay en cada una de las 4 clases después del período de crecimiento.

Como sabemos, en cada temporada de corte, se cortará un total de $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ árboles. Este es también el número total de árboles agregados a la primera clase (los nuevos árboles) después de cada temporada de corte. Si se define la siguiente matriz de reforestación,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el vector columna

$$R\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

podemos escribir la ecuación que caracteriza a una política de explotación duradera.

- *Configuración al terminar el período de crecimiento, menos los árboles cortados, más la reforestación con nuevos árboles de almácigo será igual a la configuración al inicio de un período de crecimiento.*

O bien, en forma matemática

$$G\vec{X} - \vec{Y} + R\vec{Y} = \vec{X},$$

ecuación que también puede escribirse

$$(I - R)\vec{Y} = (G - I)\vec{X},$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos la ecuación matricial anterior, obtenemos el mismo sistema de ecuaciones (8.6),

$$\begin{cases} g_1 X_1 = Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ g_1 X_1 - g_2 X_2 = Y_2 \\ g_2 X_2 - g_3 X_3 = Y_3 \\ g_3 X_3 = Y_4 \end{cases}$$

Podemos ver que la primera de las ecuaciones es la suma de las tres ecuaciones restantes. Como $Y_i \geq 0$ para $i = 2, 3, 4$, las ecuaciones anteriores requieren que

$$g_1 X_1 \geq g_2 X_2 \geq g_3 X_3 \geq 0$$

8.6.1. El rendimiento óptimo duradero

Como se cortan Y_i árboles de la clase de orden i con $i = 2, 3, 4$ y como el precio de estos árboles es p_i , el rendimiento total en una temporada estará dado por

$$B = p_2 Y_2 + p_3 Y_3 + p_4 Y_4. \quad (8.7)$$

Ahora, combinando las distintas ecuaciones se puede enunciar el problema de la maximización del rendimiento del bosque para todas las posibles política de explotación que sean duraderas:

- **Obtener los valores no negativos X_1, X_2, X_3, X_4 que hagan máxima la expresión:**

$$\begin{aligned} B &= p_2 (g_1 X_1 - g_2 X_2) + p_3 (g_2 X_2 - g_3 X_3) + p_4 g_3 X_3 \\ &= p_2 g_1 X_1 + (p_3 - p_2) g_2 X_2 + (p_4 - p_3) g_3 X_3 \end{aligned}$$

sujetos a $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N$ **y** $g_1 X_1 \geq g_2 X_2 \geq g_3 X_3 \geq 0$

Este problema pertenece al campo de la programación lineal, sin embargo, en nuestro caso sólo necesitaremos el siguiente resultado,

- **El rendimiento óptimo duradero se logra cortando todos los árboles de la misma clase y ninguno de las demás clases**

A continuación lo “comprobaremos” sin recurrir a la teoría de la programación lineal. Para ello, vamos a suponer que R_3 es el rendimiento que se obtiene al cortar todos los árboles de la tercera clase y ninguno de las demás.

Como los únicos árboles que se cortan son los de la tercera clase, se tendrá que

$$Y_1 = Y_2 = Y_4 = 0. \quad (8.8)$$

Además, como se cortan todos los árboles de la clase de orden 3, a largo plazo, nunca se tendrán árboles de mayor altura que los de esa clase. En consecuencia,

$$X_3 = X_4 = 0.$$

Así, con la sustitución en las ecuaciones (8.6) de la explotación duradera, se obtiene

$$\begin{cases} Y_3 = g_1 X_1 \\ 0 = g_1 X_1 - g_2 X_2 \\ Y_3 = g_2 X_2 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

que también podemos escribirlas

$$Y_3 = g_1 X_1 = g_2 X_2 \quad \Rightarrow \quad X_2 = \frac{g_1 X_1}{g_2}. \quad (8.9)$$

Si sustituimos en

$$X_1 = X_2 + X_3 + X_4 = N,$$

puede despejarse X_1 y se obtiene

$$X_1 + \frac{g_1 X_1}{g_2} = N \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{g_2}{g_1 + g_2} N = \frac{1}{1 + \frac{g_1}{g_2}} N. \quad (8.10)$$

El beneficio de la venta es $R_3 = p_3 Y_3$, pero por (8.9), $R_3 = p_3 g_1 X_1$, y teniendo en cuenta (8.10),

$$R_3 = p_3 g_1 \frac{1}{1 + \frac{g_1}{g_2}} N = \frac{p_3 N}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}}$$

O bien, haciendo un estudio similar para n clases y cortando todos los árboles de la clase k , el beneficio viene dado por la expresión,

$$R_k = \frac{p_k N}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_{k-1}}}$$

Esta ecuación determina a R_k en función de los parámetros ya conocidos del crecimiento y el valor económico, para cualquiera que sea el valor de k ($k = 2, 3, \dots, n$). Resumiendo, el rendimiento óptimo, duradero se obtiene como sigue

TEOREMA 8.6.1 *El rendimiento óptimo duradero es el valor más grande de*

$$\frac{p_k N}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_{k-1}}}$$

para $k = 2, 3, \dots, n$. El valor correspondiente de k es el número que determina la clase de árboles que deben cortarse por completo.

EJEMPLO 8.4

Los árboles de cierto bosque están divididos en tres clases de alturas y tienen una matriz de crecimiento, entre dos temporadas de corte como sigue,

$$G = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si el precio de los árboles de la segunda clase es de 30 euros, el de los de la tercera de 50 euros, deseamos saber la clase de árboles que debe cortarse por completo para lograr el rendimiento óptimo duradero.

- De la matriz de crecimiento obtenemos $g_1 = 1/2$ y $g_2 = 2/3$. Sustituyendo en

$$R_k = \frac{p_k N}{\frac{1}{g_1} + \frac{2}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_{k-1}}},$$

obtenemos su valor, para el caso en que se cortasen los árboles de la segunda y tercera clase

$$R_2 = \frac{30N}{2} = 15N, \quad R_3 = \frac{50N}{2 + 1.5} = 14N.$$

Conseguiremos un mayor beneficio si cortamos todos los árboles de la segunda clase.

- Si la plantación tuviese $N=1000$ árboles, entonces el beneficio de la venta es

$$R_2 = 15N = 15 \times 1000 = 15000 \text{ euros}$$

EJEMPLO 8.5

Para un bosque de pinos escoceses con período de crecimiento de seis años se encontró la siguiente matriz de crecimiento

$$G = \begin{pmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Supongamos que los precios de las cinco clases de árboles de mayor altura, son

$$p_2 = 50, \quad p_3 = 100, \quad p_4 = 150, \quad p_5 = 200, \quad p_6 = 250$$

- Interesa conocer la clase de árboles que debe cortarse por completo con el objetivo de obtener el rendimiento óptimo duradero. De la matriz G se obtiene

$$g_1 = 0.28, \quad g_2 = 0.31, \quad g_3 = 0.25, \quad g_4 = 0.23, \quad g_5 = 0.37.$$

Por el Teorema (8.6.1) deducimos

$$\begin{aligned} R_2 &= 50N/(0.28^{-1}) = 14.0N \\ R_3 &= 100N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1}) = 14.7N \\ R_4 &= 150N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1}) = 13.9N \\ R_5 &= 200N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1}) = 13.2N \\ R_6 &= 250N/(0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1} + 0.37^{-1}) = 14.0N \end{aligned}$$

Se ve que R_3 es la cantidad mayor y por tanto, son los árboles de la tercera clase los que deben cortarse por completo cada seis años, para maximizar el rendimiento duradero.

- El rendimiento óptimo duradero es de $14.7N$, siendo N el número total de árboles que hay en el bosque.

EJEMPLO 8.6

En el Ejemplo anterior, deseamos conocer la relación entre los precios p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 para que los rendimientos R_k , con $k = 2, \dots, 6$ sean iguales.

- En este caso, cualquier política de explotación racional y duradera producirá el mismo rendimiento). Para obtener esta relación debemos comparar cualquiera de las clases con la segunda, esto es

$$R_2 = R_3 \Rightarrow \frac{p_2 S}{\frac{1}{28}} = \frac{p_3 S}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31}} \Rightarrow \frac{p_3}{p_2} = 1.9$$

$$R_2 = R_4 \Rightarrow \frac{p_2 N}{\frac{1}{28}} = \frac{p_4 N}{\frac{1}{28} + \frac{1}{31} + \frac{1}{25}} \Rightarrow \frac{p_4}{p_2} = 3.02$$

Y así sucesivamente hasta conseguir la relación

$$1 : 1.9 : 3.02 : 4.24 : 5$$

EJEMPLO 8.7

Si los parámetros de crecimiento g_1, g_2, \dots, g_{n-1} son todos iguales, vamos a encontrar la relación entre los precios p_2, p_3, \dots, p_n , para que cualquier política de explotación racional y duradera sea óptima.

- Suponiendo que $g_1 = g_2 = \dots = g_{n-1}$, debemos de ir comparando tal y como hicimos en el ejercicio anterior.

$$R_2 = R_3 \Rightarrow \frac{p_2 N}{\frac{1}{g_1}} = \frac{p_3 N}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}} = \frac{p_3 N}{\frac{2}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_3}{p_2} = 2$$

$$R_2 = R_4 \Rightarrow \frac{p_2 S}{\frac{1}{g_1}} = \frac{p_4 N}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3}} = \frac{p_4 N}{\frac{3}{g_1}} \Rightarrow \frac{p_4}{p_2} = 3$$

Y así sucesivamente con el resto de las clases.

Es fácil obtener la siguiente relación

$$1 : 2 : 3 : \dots : n - 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 7

- 1.- Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 18 años y que esta población se divide en tres clases de edades iguales con intervalos de 6 años, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de crecimiento de *Leslie* viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra y una mediana dos, además el 50 % de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 25 % de las medianas se hacen adultas.

El precio de venta de cada una de las clases es 15 euros las hembras jóvenes, 25 las medianas y 32 las adultas. Si disponemos de 1000 animales y cada 6 años separamos la misma fracción de cada una de las clases, ¿cuál es el importe de la venta?

- 2.- Sea el modelo matricial de Leslie,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

siendo la unidad de tiempo del sistema igual a un año

- Probar que para cualquier valor positivo de α la población siempre crece.
 - Hallar el valor de α para que la población crezca cada año un 27 %.
 - Para el valor de α encontrado, cuál será el total de la venta, en el caso particular de la separación uniforme, si disponemos inicialmente de 530 hembras y el precio de venta de las hembras de la primera clase es de 10 euros, 15 euros para los de la segunda clase y 5 euros para las hembras de la tercera clase?.
- 3.- Disponemos de una población de animales dividida en clases de edad de 6 meses de duración. De las siguientes matrices de Leslie,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

selecciona aquella que sea adecuada para realizar la siguiente explotación racional y duradera. La población inicial es de 500 animales, siendo el precio de venta de los animales más jóvenes de 10 euros. Calcular el importe de las ventas realizadas después de cinco años sabiendo que separación la realizamos sólo en la clase de menor edad.



Tema 9

ECUACIONES Y SISTEMAS EN DIFERENCIAS

9.1. Introducción

En ocasiones, al construir un modelo matemático interesa elegir una variable que tome valores discretos. Así ocurre, por ejemplo, con el tiempo, ya que es común realizar mediciones regulares a la hora de controlar un experimento. Estos datos constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente. Para este tipo de modelos determinísticos discretos, las herramientas matemáticas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias. El presente tema es una breve introducción a su estudio. Comenzaremos con los conceptos y definiciones básicas y nos centraremos en el estudio de las ecuaciones en diferencias lineales de primer y segundo orden con coeficientes constantes, así como en los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes.

A lo largo del capítulo llamaremos t a la variable independiente, y supondremos que sólo toma los valores enteros $t = 0, 1, 2, \dots$. Generalmente, t representa el número de generaciones (años, trimestres, meses, días, \dots) que han transcurrido desde un momento inicial $t = 0$. Del mismo modo, $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ es una sucesión, donde y_t corresponde a un valor concreto de t .

DEFINICIÓN 9.1.1 *Llamamos ecuación en diferencias a una expresión del tipo*

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, y_{t+n-2}, \dots, y_{t+1}, y_t, t) = 0.$$

Una solución de la misma, es toda sucesión y que la cumpla.

El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de **solución general**. Esta solución general presenta cierto número de parámetros, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes **soluciones particulares**.

DEFINICIÓN 9.1.2 *Llamamos orden de la ecuación, a la diferencia entre el mayor y el menor de los índices que afectan a y .*

La expresión $-2y_{t+3} + 3y_t = t + 1$, es una ecuación en diferencias de orden $t + 3 - t = 3$, o de tercer orden.

La ecuación en diferencias $y_{t+1} - y_t = 2$, es de primer orden y tiene por solución general a todas las progresiones aritméticas de razón 2, es decir

$$y_t = y(t) = 2t + C,$$

siendo C una constante cualquiera. Una solución particular, es la progresión aritmética

$$\{1, 3, 5, 7, \dots, 2t + 1, \dots\}.$$

EJEMPLO 9.1

- Vamos a construir el modelo que corresponde a la siguiente situación. Supongamos que una población de insectos crece el triple, en cada período de tiempo que transcurre entre dos medidas, de lo que creció en el período inmediatamente anterior.

Si llamamos y_t al número de individuos en el instante t ; del enunciado del ejemplo se deduce,

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t), \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

simplificando obtenemos,

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0, \tag{9.1}$$

que es una ecuación en diferencias de segundo orden. Si por ejemplo, conocemos el número inicial de insectos, $y_0 = y(0) = 100$, podemos sustituir y obtendríamos

$$y_2 - 4y_1 + 300 = 0,$$

lo cual nos indica que debemos saber otra medida, por ejemplo y_1 , para poder encontrar el resto de los valores. En las próximas secciones aprenderemos a resolver este tipo de ecuaciones, y volveremos sobre (9.1).

9.2. Ecuaciones lineales de primer orden

DEFINICIÓN 9.2.1 Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como

$$p_1(t)y_{t+1} + p_2(t)y_t = q(t), \quad (9.2)$$

donde $p_i(t)$, $i = 1, 2$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t . Si la sucesión $q(t)$ es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre de **ecuación homogénea** asociada a (9.2). Cuando las funciones $p_1(t)$ y $p_2(t)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal (9.2) es de **coeficientes constantes**.

Este tipo de ecuaciones son muy interesantes en el estudio de dinámica de poblaciones. Suelen aparecer escritas como

$$y_{t+1} = p(t)y_t + q(t),$$

donde $p(t)y_t$ representa el crecimiento de la población en el tiempo t y $q(t)$ el número de individuos que en el tiempo t se incorporan a la población como consecuencia de la inmigración.

EJEMPLO 9.2

- Supongamos que una determinada población de insectos con 100 individuos, duplica su número en cada generación, y que además, 10 nuevos individuos se incorporan en cada generación procedente de otro lugar. Vamos a construir una ecuación en diferencias que modele a esta situación y posteriormente la resolveremos.

Del enunciado se deduce,

$$y_t = 2y_{t-1} + 10, \quad y_0 = y(0) = 100,$$

lo que nos permite escribir,

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \times 100 + 10 \\ y_2 &= 2(2 \times 100 + 10) + 10 = 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 10 + 10 \\ y_3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 2 \times 10 + 2 \times 10 + 10 \\ &\vdots \\ y_t &= \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t)} \times 100 + \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t-1)} \times 10 + \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{(t-2)} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10 \\ &= 2^t \times 100 + 2^{t-1} \times 10 + 2^{t-2} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10 \\ &= 2^t \times 100 + (2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2^1 + 2^0) \times 10 \\ &= 2^t \times 100 + (2^t - 1) \times 10 = 110 \times 2^t - 10, \end{aligned}$$

donde en el último de los pasos hemos utilizado la fórmula que nos da la suma de t términos de una progresión geométrica de razón 2. La solución es, por tanto,

$$\boxed{y_t = 110 \times 2^t - 10.}$$

9.3. Ecuaciones lineales de segundo orden

DEFINICIÓN 9.3.1 Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden es aquella que puede expresarse como

$$p_1(t)y_{t+2} + p_2(t)y_{t+1} + p_3(t)y_t = q(t), \quad (9.3)$$

donde $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t .

Si la función $q(t) = 0$, entonces (9.3) es su ecuación lineal en diferencias homogénea de segundo orden asociada. Además, si todas las funciones $p_i(t)$ son constantes, entonces (9.3) es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, y será en la que nos centraremos.

Veamos en primer lugar un teorema de existencia y unicidad de solución para una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n .

TEOREMA 9.3.2 Dada la siguiente ecuación lineal en diferencias homogénea de orden n

$$y_{t+n} + p_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + p_n(t)y_t = 0,$$

y dados n números reales k_0, k_1, \dots, k_{n-1} , existe una única solución, cumpliendo

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1}.$$

Demostración. Comenzamos definiendo la siguiente sucesión:

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1},$$

y para los valores de t mayores que $n - 1$, procedemos de la siguiente manera

$$y_n = -p_1(0)y_{n-1} - \cdots - p_n(0)y_0 = -p_1(0)k_{n-1} - \cdots - p_n(0)k_0,$$

$$y_{n+1} = -p_1(1)y_n - \cdots - p_n(1)k_1.$$

De esta manera, y_t queda definida por la ley de recurrencia anterior. Puede comprobarse que y_t es solución de la ecuación pedida y cumple las condiciones iniciales. Además, es la única solución, ya que si w_t es otra solución que cumple

$$w_0 = k_0, \quad w_1 = k_1, \quad \cdots \quad w_{n-1} = k_{n-1},$$

la ley de recurrencia que hemos encontrado anteriormente, determina el resto de los valores de w_t . ■

Consideremos la ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = 0, \quad (9.4)$$

cualquier combinación lineal de soluciones de (9.4) sigue siendo otra solución.

TEOREMA 9.3.3 Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de (9.4), entonces $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, con k_1 y k_2 constantes, sigue siendo solución de (9.4).

Demostración. Es inmediata, basta llevar $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$ en (9.4). ■

Del mismo modo, también es evidente la demostración del siguiente resultado.

TEOREMA 9.3.4 Si y_t^c es una solución de

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = q(t), \quad (9.5)$$

e y_t^h es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_t = y_t^h + y_t^c$ es solución de la ecuación completa (9.5).

A continuación veremos las condiciones bajo las cuales la combinación lineal de dos soluciones particulares de la ecuación homogénea dan lugar a su solución general.

TEOREMA 9.3.5 Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de (9.4), entonces

$$y = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

con k_1 y k_2 constantes, es la solución general de (9.4) si

$$\begin{vmatrix} y_0^1 & y_0^2 \\ y_1^1 & y_1^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{cases} \alpha_1 y_0^1 + \alpha_2 y_0^2 = \beta_1 \\ \alpha_1 y_1^1 + \alpha_2 y_1^2 = \beta_2, \end{cases}$$

cualesquiera que sean los valores de β_1 y β_2 , por hipótesis del teorema, el sistema es compatible determinado. Pero por el Teorema 9.3.2 existe una única solución de la ecuación homogénea que puede ser escrita como $y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, pues basta tomar $\beta_1 = y_0$ y $\beta_2 = y_1$, y calcular α_1 y α_2 . Para finalizar asignamos los siguientes valores, $k_1 = \alpha_1$ y $k_2 = \alpha_2$. ■

A dos soluciones y_t^1 y y_t^2 cumpliendo las hipótesis del Teorema 9.3.2 le daremos el nombre de **sistema fundamental de soluciones**. Siguiendo un razonamiento similar al realizado en el Teorema 9.3.2, podemos demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 9.3.6 Si y_t^p es una solución particular de

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = q(t), \quad (9.6)$$

e y_t^1, y_t^2 forman un sistema fundamental de soluciones, entonces

$$y_t^p + k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

es la solución general de (9.6).

9.3.1. Resolución de la ecuación homogénea

El Teorema 9.3.6 nos dice que para resolver una ecuación en diferencias lineal de segundo orden, tenemos que empezar encontrando la solución general de su ecuación homogénea asociada, y para ello hemos de localizar dos soluciones particulares que den lugar a un sistema fundamental. Supongamos por tanto, la ecuación homogénea

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = 0,$$

que admitirá la solución $y_t = \lambda^t$ si

$$a \lambda^{t+2} + b \lambda^{t+1} + c \lambda^t = \lambda^t (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0,$$

es decir,

$$\boxed{a \lambda^2 + b \lambda + c = 0.} \quad (9.7)$$

A esta ecuación se la conoce con el nombre de **ecuación característica** de la ecuación en diferencias.

A continuación, presentamos un procedimiento para resolver la ecuación en diferencias homogénea, basado en el estudio de las raíces de (9.7).

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces reales diferentes** λ_1, λ_2 , entonces

$$\boxed{y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t,}$$

forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación (9.7) tiene **una raíz real doble** λ , entonces

$$\boxed{y_t^1 = \lambda^t, \quad y_t^2 = t \lambda^t,}$$

forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces complejas conjugadas**

$$\lambda_1 = \alpha + i \beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i \beta,$$

entonces

$$y_t^1 = \lambda_1^t, \quad y_t^2 = \lambda_2^t,$$

forman un sistema fundamental de soluciones. En este último caso, podemos escribir la solución general de la ecuación homogénea de la siguiente manera,

$$y_t = k_1 \lambda_1^t + k_2 \lambda_2^t,$$

y expresando los números complejos en su forma módulo argumental, teniendo en cuenta que poseen el mismo módulo y argumentos opuestos,

$$y_t = k_1 \rho^t (\cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta) + k_2 \rho^t (\cos t\theta - i \operatorname{sen} t\theta).$$

Al formar $\lambda_1^t = \rho^t(\cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta)$ y $\lambda_2^t = \rho^t(\cos t\theta - i \operatorname{sen} t\theta)$ un sistema fundamental de soluciones, también lo será cualquier combinación lineal de ellas, en particular

$$\frac{1}{2}(\lambda_1^t + \lambda_2^t) = \rho^t \cos t\theta$$

$$\frac{1}{2i}(\lambda_1^t - \lambda_2^t) = \rho^t \operatorname{sen} t\theta,$$

la solución general será entonces

$$y_t = k_1 \rho^t \cos t\theta + k_2 \rho^t \operatorname{sen} t\theta.$$

EJEMPLO 9.3

- Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias:

1.- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$

2.- $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2y_t = 0$

3.- $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 0$

- 1.- La ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, tiene como raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. En consecuencia, 2^t y 1 , forman un sistema fundamental de soluciones, siendo la solución general

$$y_t = k_1 + k_2 2^t.$$

- 2.- En el segundo de los casos, las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ son $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$. Los módulos de estos números complejos son $\sqrt{2}$ y el argumento $3\pi/4$, por consiguiente, la solución general es

$$y_t = k_1 (\sqrt{2})^t \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + k_2 (\sqrt{2})^t \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}t\right), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

- 3.- La ecuación $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene a $\lambda = -1$ como raíz doble. La solución general de la ecuación propuesta es

$$y_t = k_1 (-1)^t + k_2 t (-1)^t, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

9.3.2. Resolución de la ecuación completa

Para encontrar la solución general de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t = q(t), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (9.8)$$

podemos hacer uso de dos métodos diferentes.

Método de variación de parámetros.

Es también conocido como método de **coeficientes indeterminados**. Se empieza encontrando la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

y se supone que las constantes k_1 y k_2 dependen de t , es decir

$$y_t = k_1(t) y_t^1 + k_2(t) y_t^2. \quad (9.9)$$

De esta expresión deducimos inmediatamente

$$y_{t+1} = k_1(t+1) y_{t+1}^1 + k_2(t+1) y_{t+1}^2,$$

que sumando y restando $k_1(t) y_{t+1}^1 + k_2(t) y_{t+1}^2$, puede escribirse

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= k_1(t) y_{t+1}^1 + k_2(t) y_{t+1}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+1}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+1}^2. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior hacemos

$$[k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+1}^1 + [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+1}^2 = 0, \quad (9.10)$$

y nos queda la ecuación

$$y_{t+1} = k_1(t) y_{t+1}^1 + k_2(t) y_{t+1}^2, \quad (9.11)$$

que permite ser tratada utilizando el mismo procedimiento anterior

$$\begin{aligned} y_{t+2} &= k_1(t) y_{t+2}^1 + k_2(t) y_{t+2}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Llevando (9.9), (9.11) y (9.12) en (9.8),

$$\begin{aligned} &ak_1(t) y_{t+2}^1 + ak_2(t) y_{t+2}^2 + a[k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 \\ &+ a[k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2 + bk_1(t) y_{t+1}^1 + bk_2(t) y_{t+1}^2 \\ &+ ck_1(t) y_t^1 + ck_2(t) y_t^2 = q(t). \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} &k_1(t) [ay_{t+2}^1 + by_{t+1}^1 + cy_t^1] + k_2(t) [ay_{t+2}^2 + by_{t+1}^2 + cy_t^2] \\ &+ a[k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 + a[k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2 = q(t). \end{aligned}$$

Al ser y_t^1 y y_t^2 solución de la ecuación homogénea, la expresión anterior adopta la forma

$$a [k_1(t+1) - k_1(t)] y_{t+2}^1 + a [k_2(t+1) - k_2(t)] y_{t+2}^2 = q(t). \quad (9.13)$$

Las ecuaciones (9.10) y (9.13) dan lugar a un sistema lineal, siendo $k_1(t+1) - k_1(t)$ y $k_2(t+1) - k_2(t)$ las incógnitas. Al ser y_t^1 y y_t^2 un sistema fundamental de soluciones, ocurre que

$$\begin{vmatrix} y_{t+1}^1 & y_{t+1}^2 \\ a y_{t+2}^1 & a y_{t+2}^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Usando la Regla de Cramer, podemos resolver el sistema anterior

$$\begin{aligned} k_1(t+1) - k_1(t) &= \frac{-q(t)}{a y_{t+1}^1 (\lambda_2 - \lambda_1)} \\ k_2(t+1) - k_2(t) &= \frac{q(t)}{a y_{t+1}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \end{aligned} \quad (9.14)$$

y nos permite encontrar los valores de $k_1(t)$ y $k_2(t)$. ■

EJEMPLO 9.4

- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, partiendo de 100 individuos, se llega el primer año a 110 y que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Deseamos determinar la ecuación general de la evolución de efectivos.

El problema a estudiar es el siguiente:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 2(y_{t+1} - y_t) + 10, \quad y_0 = 100, \quad y_1 = 110.$$

Tenemos que resolver la ecuación en diferencias lineal de segundo grado

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 10,$$

con las condiciones iniciales $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$. Para ello, empezamos encontrando las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Es decir, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_t^h = k_1 + k_2 2^t.$$

Para poder resolver la ecuación completa utilizamos el método de variación de las constantes. Teniendo en cuenta (9.14), deducimos

$$\begin{cases} k_1(t+1) - k_1(t) = -10 \\ k_2(t+1) - k_2(t) = 10/2^{t+1} \end{cases}$$

De la primera ley de recurrencia obtenemos

$$\begin{aligned} k_1(1) &= k_1(0) - 10 \\ k_1(2) &= k_1(1) - 10 = k_1(0) - 2 \times 10 \\ &\vdots \\ k_1(t) &= k_1(0) - 10t \end{aligned}$$

De manera similar, de la segunda de las ecuaciones

$$\begin{aligned} k_2(1) &= k_2(0) + 10/2 \\ k_2(2) &= k_2(1) + 10/2^2 = k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 \\ &\vdots \\ k_2(t) &= k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 + 10/2^3 + \dots + 10/2^t = \\ &= k_2(0) + 10(1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \dots + 1/2^t) \\ &= k_2(0) + 10(1 - 1/2^t). \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación completa es

$$y_t = k_1(0) - 10 \times t + [k_2(0) + 10(1 - 1/2^t)] 2^t.$$

Las constantes $k_1(0)$ y $k_2(0)$ pueden encontrarse haciendo uso de las condiciones iniciales $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$ en y_t ,

$$100 = k_1(0) + k_2(0), \quad 110 = k_1(0) - 10 + (k_2(0) + 5) 2,$$

que dan como solución $k_1(0) = 90$, $k_2(0) = 10$. La ecuación de los efectivos de la población es:

$$y_t = 80 - 10t + 10 \times 2^{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Segundo método.

Para encontrar la solución general de una ecuación lineal completa de segundo orden nos fijaremos en el término independiente $q(t)$, y según sea, procederemos de una manera u otra. Los casos más usuales que suelen presentarse son:

- Si $q(t) = \alpha^t$, entonces para encontrar la solución de la ecuación completa probamos con la solución particular $\beta\alpha^t$ (excepto si α es raíz de la ecuación característica).
- Si $q(t)$ es un polinomio de grado n , entonces ensayamos con un polinomio del mismo grado. Si el 1 es raíz de la ecuación característica, tomaremos un polinomio de grado $n+1$, si además tiene grado de multiplicidad γ , probaremos con un polinomio de grado $n + \gamma$.
- Si $q(t)$ es seno o coseno de at , entonces tomaremos $\beta \sin at + \gamma \cos at$ y determinaremos los valores de las constantes β y γ .

EJEMPLO 9.5

- Hallar la solución general de las ecuaciones en diferencias,

1.- $2y_{t+2} - y_t = 2^t$

2.- $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3t^2$

3.- $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t + 1$.

- 1.- Empezamos resolviendo la ecuación característica

$$2\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

que nos permite escribir la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t^h = k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t + k_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t.$$

Ahora, para poder encontrar la solución de la ecuación completa, ensayamos con la solución particular $y_t^p = \beta 2^t$. Sustituyendo en la ecuación inicial

$$2\beta 2^{t+2} - \beta 2^t = 2^t \quad \Rightarrow \quad 2\beta 2^2 - \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1/7.$$

La solución general buscada es

$$y_t = k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t + k_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t + \frac{1}{7} 2^t.$$

- 2.- Para el segundo de los casos, es inmediato comprobar que
- $\lambda = 2$
- es una raíz doble de la ecuación característica. En consecuencia, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_t^h = k_1 2^t + k_2 t 2^t.$$

Al ser el término independiente un polinomio de segundo grado y el 1 no es raíz del polinomio característico, probamos con una solución particular del tipo

$$y_t^p = at^2 + bt + c,$$

llevando este valor en la ecuación en diferencias propuesta, e identificando coeficientes, se obtiene $a = 3$, $b = 12$ y $c = 24$.

La solución buscada es

$$y_t = k_1 2^t + k_2 t 2^t + 3t^2 + 12t + 24.$$

- 3.- Al coincidir la ecuación homogénea con la del caso anterior, lo único que tenemos que hacer es encontrar una solución particular. Para ello, buscamos una solución particular de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t,$$

y otra de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 1.$$

Para la primera de ellas, al ser $\lambda = 2$ una raíz doble, ensayamos con la solución $y_t^1 = kt^2 2^t$.

$$k(t+2)^2 2^{t+2} - 4k(t+1)^2 2^{t+1} + 4kt^2 2^t = 2^t,$$

que una vez resuelto da $k = 1/8$.

Para la segunda de las ecuaciones, el término independiente es una constante (un polinomio de grado cero), y probamos como solución particular con otra constante, $y_t^2 = k$.

$$k - 4k + 4k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1.$$

La solución de la ecuación propuesta es

$$y_t = k_1 2^t + k_2 t 2^t + \frac{1}{8} t^2 2^t + 1.$$

9.4. Sistemas de ecuaciones en diferencias

Hemos visto en las secciones anteriores que cuando se analizan fenómenos biológicos dinámicos discretos, aparecen las ecuaciones en diferencias. Del mismo modo, cuando en estos fenómenos el número de variables es mayor que uno, entonces nos aparecerán los sistemas de ecuaciones en diferencias.

Como ya hemos tenido ocasión de comentar, el estudio que estamos realizando es una breve introducción a las ecuaciones y a los sistemas en diferencias. Por este motivo, solo abordaremos aquellos sistemas de ecuaciones en diferencias lineales y de primer orden. Además, este tipo de sistemas son los que con más frecuencia se presentan en las aplicaciones biológicas.

DEFINICIÓN 9.4.1 *Un sistema en diferencias lineal con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \\ \vdots \\ y_{t+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

De entre este tipo de sistemas, el caso más elemental (aunque para casos más generales, el procedimiento a seguir es similar) consiste en dos ecuaciones y dos variables

$$\begin{cases} y_{t+1}^1 = a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + f_1(t) \\ y_{t+1}^2 = a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t) \end{cases}$$

La clave para resolver este tipo de sistemas, es intentar expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. En efecto, de la primera de las ecuaciones

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}y_{t+1}^2 + f_1(t+1), \quad (9.15)$$

sustituimos el valor de la segunda de las ecuaciones del sistema en (9.15)

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}(a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t)) + f_1(t+1),$$

en la que sólo aparece un término $a_{12}a_{22}y_t^2$, en el que no intervenga la función y_t^1 . Despejando de la primera de las ecuaciones del sistema

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t),$$

sustituyendo

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}a_{21}y_t^1 + a_{22}(y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1),$$

y sacando factor común, se obtiene finalmente,

$$y_{t+2}^1 = (a_{11} + a_{22})y_{t+1}^1 + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y_t^1 - a_{22}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1),$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden.

EJEMPLO 9.6

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ el número de individuos de dos poblaciones de animales en el mes t , que conviven en un ecosistema en el que realizamos un control cada mes. Supongamos que inicialmente tenemos $x_0 = 150$ e $y_0 = 325$, y que el desarrollo de la convivencia está gobernado por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t - y_t + 1 \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t + 3 \end{cases}$$

- Para encontrar el valor de x_t e y_t procedemos de la manera siguiente: De la primera de las ecuaciones

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - y_{t+1} + 1,$$

sustituimos la segunda de las ecuaciones en la expresión anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - (-x_t + 2y_t + 3) + 1 = 3x_{t+1} + x_t - 2y_t - 2,$$

que sigue dependiendo de y_t , pero podemos despejarlo de la primera de las ecuaciones y sustituir este valor en la ecuación anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} + x_t - 2(-x_{t+1} + 3x_t + 1) - 2 = 5x_{t+1} - 5x_t - 4,$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que puede ser escrita

$$\boxed{x_{t+2} - 5x_{t+1} + 5x_t = -4.} \quad (9.16)$$

Es fácil ver que las raíces de la ecuación característica de su ecuación homogénea son:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2},$$

dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea

$$x_t = k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t.$$

Para encontrar una solución particular de la solución completa, al ser el término independiente una constante, ensayamos con $x_t = a$. Sustituyendo en (9.16)

$$a - 5a + 5a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = -4,$$

la solución general de la ecuación completa será

$$\boxed{x_t = k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 4.}$$

- Ahora, tendremos que sustituir en la primera de las ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} y_t &= -x_{t+1} + 3x_t + 1 \\ &= -k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} + 4 + 3k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t \\ &\quad + 3k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 12 + 1. \end{aligned}$$

$$y_t = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) k_1 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^t + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) k_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^t - 7.$$

- Para encontrar los valores de k_1 y k_2 , imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{cases} 150 = k_1 + k_2 - 4 \\ 325 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) k_1 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) k_2 - 7, \end{cases}$$

sistema de ecuaciones lineales que tiene por solución $k_1 = 77 - 45\sqrt{5}$ y $k_2 = 77 + 5145\sqrt{5}$. En consecuencia, la solución particular para estas condiciones iniciales es:

$$\begin{aligned}x_t &= (77 - 45\sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^t + (77 - 51\sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^t - 4 \\y_t &= (151 - 61\sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^t + (166 - 64\sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^t - 7\end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 8

- 1.- Sea la ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t), \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (9.17)$$

siendo y_t el número de individuos de una población en el año t .

- Interpretar demográficamente (9.17).
 - Comprobar que $y_t = 2 + 5(3^t)$ es una solución particular de (9.17).
 - Encontrar la población al cabo de 4 años, sabiendo que $y_0 = 2, y_1 = 4$.
- 2.- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Plantear y resolver la ecuación en diferencias que modeliza la situación planteada.
- 3.- Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t . Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma,

$$y_{t+2} - y_{t+1} = \frac{1}{5}(y_{t+1} - y_t) + \left(\frac{1}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

probar que la población se estabiliza a largo plazo.

- 4.- Supongamos que si no intervienen factores externos, el incremento del número de conejos en un mes es la tres cuartas partes del incremento del mes anterior. Inicialmente el número de conejos es de 10 y al finalizar el primer mes es de 30, además cada mes se incorporan 25 conejos a la población. Determinar la población de conejos al finalizar el segundo año ¿Cuál será su comportamiento a largo plazo?
- 5.- Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:
- Sea la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$, donde y_t representa a la cantidad de individuos en el año t . Si el número inicial de individuos es 2 y al cabo de un año es 5, ¿cuál será el valor de la población al cabo de 10 años?
 - Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 8$$

- 6.- Estamos interesados en un determinado tipo de aves que viven en una laguna. La dinámica de la población está gobernada por la siguiente ecuación en diferencias,

$$6x_{t+2} + x_{t+1} = x_t + \left(\frac{1}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (9.18)$$

siendo $x_0 = 2$ y $x_1 = 5$.

- Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias (9.18)
 - ¿Aumentará esta población a largo plazo?
- 7.- La evolución de dos especies que comparten un mismo territorio viene dada por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t \\ y_{t+1} = x_t - 2y_t \end{cases}$$

donde x_t, y_t representan al número de animales de la primera y segunda especie en el año t ¿Cuál es el comportamiento a largo plazo de estas poblaciones?



Tema 10

SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

10.1. Introducción

La teoría de sistemas dinámicos es una rama de las Matemáticas que se ocupa del estudio del movimiento, y proporciona un lenguaje común para la Matemática, la Biología, la Ecología, la Física, la Historia y la Literatura. Esta disciplina académica fue creada en 1960 por *J.W. Forrester* del MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) para ser empleada en la Administración y en las Ingenierías, pero en los últimos años se ha extendido a campos muy diversos.

En la teoría de los sistemas dinámicos, un **sistema** se define como una colección de elementos que continuamente interactúan para formar un conjunto unificado. A las relaciones internas y las conexiones entre los componentes de un sistema se les llama la **estructura del sistema**. Un ejemplo de un sistema es un ecosistema. La estructura de un ecosistema está definida por las relaciones entre la población animal, nacimientos y muertes, cantidad de comida, y otras variables específicas para un ecosistema particular.

El término dinámico hace referencia al cambio a lo largo del tiempo. Si algo es dinámico, es porque se está modificando constantemente. Un sistema dinámico es aquel en el cual las variables se modifican para producir cambios a lo largo del tiempo. La manera por la cual los elementos o las variables de un sistema cambian con el tiempo se denomina **comportamiento del sistema**. En el ejemplo del ecosistema, el comportamiento está descrito por la dinámica que se produce como consecuencia de los nacimientos y las muertes de la población. El comportamiento está expuesto a la influencia de comida adicional, los depredadores, y al medio ambiente, los cuales son todos elementos del sistema.

Los sistemas dinámicos también pueden usarse para analizar, como pequeños cam-

bios en una parte del sistema, pueden afectar al comportamiento del sistema completo. Si nos referimos al ejemplo del ecosistema, podemos analizar el impacto de la sequía en el ecosistema o analizar el impacto de la eliminación de una determinada especie animal en el comportamiento del ecosistema completo.

En relación con los sistemas dinámicos discretos, fue *H. Poincaré* en 1899 el primero en utilizarlos al intentar simplificar un modelo continuo, pero ha sido en la década de los cincuenta donde han sido estudiados y aplicados en problemas muy diversos. En 1976 *R. May*, analizando el comportamiento de las ecuaciones en diferencias en el modelo que lleva su nombre, observó que aún para el caso determinista, el modelo podía presentar comportamientos “muy complicados”. En 1963 el meteorólogo *E. Lorenz* descubre el caos matemático en un sistema dinámico continuo, presentando a la comunidad científica el atractor que lleva su nombre. Poco después, en 1973, *M. Heron* estudia el caso discreto, descubriendo un tipo de atractor muy parecido al de *Lorenz*. Dos años después, *Feigenbaum* presentó por primera vez el diagrama de bifurcación correspondiente al modelo logístico. Actualmente la teoría de las bifurcaciones es un campo donde se investiga intensamente.

10.1.1. Ejemplos de sistemas dinámicos

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos:

- 1.- **La ecuación de Malthus.** Queremos estudiar la evolución de la población de una determinada especie. Llamamos x_k al número de individuos de la población en el instante temporal k . Si suponemos que por cada individuo existente en el período k habrá, por término medio, α individuos en el período $k + 1$, se tendrá

$$x_{k+1} = \alpha x_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.1)$$

Esta ecuación en diferencias lineal de primer orden, es la llamada ecuación de *Malthus*, economista y pensador del siglo XIX, propuesta para estimar la evolución de la población humana.

Si $\alpha > 1$, es decir, si existe algún crecimiento vegetativo en la población, los valores de x_k crecen en progresión geométrica y se disparan de forma exponencial, razón por la que esta ecuación desató una fuerte polémica entre los contemporáneos de *Malthus*, suponiendo la primera llamada de atención sobre el problema de la sobrepoblación del planeta.

- 2.- **La parábola logística de May.** En 1976 el biólogo *Robert May* formuló otra ecuación para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema aislado, diferente de la de *Malthus*. *May* tuvo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema. Cuando la población se acerca al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, entonces el parámetro α debe disminuir, lo que equivale a considerar este parámetro función del número de

individuos. Con ello se llega a una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = \alpha(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Podemos tomar como unidad de medida el máximo posible de la población, de manera que x_k expresa la fracción de población existente en el período k con respecto al nivel máximo de población. *May* formuló la hipótesis de que $\alpha(x_k)$ debería decrecer linealmente cuando x_k creciera, hasta hacerse nulo cuando x_k tomara el valor 1. Es decir que $\alpha(x_k)$ fuera de la forma $\mu(1 - x_k)$, llegando así a la ecuación de la **parábola logística de *May***

$$x_{k+1} = \mu(1 - x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.2)$$

Observemos que para valores pequeños de x_k se tiene $1 - x_k \approx 1$, con lo que la ecuación (10.2) es equivalente a la ecuación de *Malthus* (10.1) con parámetro μ .

- 3.- **Modelo matricial.** Supongamos que una especie de aves que vive muchos años, resulta capaz de reproducirse a partir del segundo año de vida y que, por término medio, cada pareja de aves en edad reproductora cría anualmente una nidada de la que sobreviven dos crías, una de cada sexo. Se supone que a partir del segundo año todas las aves han emparejado. Se suelta una pareja de aves en una región sin depredadores. ¿Cuál es la ley de evolución para la población de aves?.

Ante un problema de esta naturaleza, el primer paso consiste en seleccionar las variables. Debido a las diferentes condiciones de reproducción, conviene considerar dos segmentos en la población de aves: las de un año y las de dos o más. Tomamos como variable $x_1(k)$ el número de parejas adultas en el período k . Debido a que existe siempre el mismo número de machos que de hembras, la población de aves de un año puede también contarse por el número $x_2(k)$ de parejas que pueden formarse entre ellas. Se tienen entonces las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) \end{cases}$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

10.1.2. Conceptos de dinámica discreta

Un sistema dinámico discreto es simplemente, desde un punto de vista matemático, una ecuación en diferencias de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde f es una aplicación $f : X \rightarrow X$ definida en cierto conjunto X , que recibe el nombre de **espacio de fases o espacio de los estados**. Salvo que digamos lo contrario, siempre consideraremos funciones f suficientemente suaves, es decir, con derivadas continuas de todos los órdenes necesarios. Así, por ejemplo, cuando se quiere traducir un problema como los descritos en el apartado anterior al lenguaje de los sistemas dinámicos, se empieza por determinar el espacio de fases del problema que no es sino un conjunto cuyos elementos describen todos los posibles estados del sistema que se trata de analizar.

- En el modelo de *Malthus* se podría considerar como espacio de los estados el conjunto de los números reales no negativos (no son posibles poblaciones con un número negativo de individuos). Cuando el espacio de fases de un sistema es \mathbb{R} o algún subconjunto de \mathbb{R} se trata de un **sistema dinámico unidimensional**
- En el ejemplo la parábola logística de *May*, donde se estudia una única variable, que es la fracción de población con respecto a la máxima población posible, un espacio de fases adecuado es $X = [0, 1]$
- En el caso de la población de aves, el estado del sistema se describe a través de dos variables de estado $x_1(k)$ e $x_2(k)$ por lo que el espacio de los estados adecuado es un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$, el de todos los pares de números enteros no negativos. En sistemas más complejos, se hacen necesarias más variables para describir completamente el estado del sistema, por lo que \mathbb{R}^m , o un subconjunto de \mathbb{R}^m , es un espacio de fases adecuado para muchos problemas. Por ejemplo, en mecánica se requieren 10 variables para describir completamente una partícula: tres para fijar su posición espacial, otras seis para conocer su velocidad y aceleración y una más para determinar su masa.

Las variables que describen un sistema, se llaman **variables de estado**. Se agrupan en un vector, que se conoce como **vector de estado**, y que almacena la información completa acerca del estado del sistema. El espacio de fases es entonces el conjunto de todos los posibles vectores de estado del sistema.

La ecuación de un sistema dinámico puede interpretarse de la siguiente forma: si el sistema adopta en un instante k un estado descrito a través de un cierto elemento $x_k \in X$, entonces en el instante $k + 1$ el estado del sistema será x_{k+1} . La aplicación f representa por consiguiente la **ley de evolución del sistema dinámico** que transforma cada estado en el siguiente estado que el sistema adopta.

Si el sistema se encuentra en un estado inicial x_0 , su evolución temporal corresponde a la sucesión x_0, x_1, x_2, \dots , también llamada **solución con condición inicial** x_0 . Se obtiene recursivamente

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),$$

y en general

$$x_k = f^k(x_0).$$

La expresión $f^k(x)$, es la **solución general o flujo de los sistemas dinámicos discretos**. Permite conocer el estado del sistema en cualquier instante a partir de su posición inicial. El conjunto de valores

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, \}$$

recibe el nombre de **órbita de x** , (se diferencia de la solución $x, f(x), f^2(x), \dots$ en que ésta última es una sucesión ordenada cuyos términos son los elementos de la órbita).

Es fácil realizar el siguiente experimento: marquemos un número en una calculadora, por ejemplo 0.25, y pulsemos de forma reiterativa la tecla 10^x , con lo cual obtendremos la órbita correspondiente,

$$0.25, 10^{0.25}, 10^{10^{0.25}}, \dots$$

Si continuamos con este proceso la calculadora nos dará un mensaje de error. La causa de este comportamiento es que la órbita tiende a infinito. Si repetimos el proceso tomando como semilla cualquier número y como función el seno o el coseno, observaremos que en este caso las órbitas son convergentes.

EJEMPLO 10.1

- Puede comprobarse fácilmente que la ecuación de *Malthus* admite por solución general la expresión

$$\Phi_x(k) = \alpha^k x$$

El comportamiento de esta expresión es sencillo de comprender. Si $x > 0$ entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ x & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

- Menos sencillo resulta el problema de encontrar una fórmula explícita para el problema de las aves. Se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

Si calculamos las sucesivas potencias de la matriz, nos aparece un hecho curioso como es la aparición en estas matrices de los célebres números de *Fibonacci* 1, 1, 2, 3, 5, 8,....

- Para el modelo de *May* la situación es más complicada, como tendremos ocasión de comprobar cuando estudiemos los modelos discretos no lineales. Podemos encontrar las primeras iteraciones de la solución general $f^k(x)$ y nos convenceremos de la enorme complicación de los cálculos involucrados. Ello nos ayuda a comprender la imposibilidad de obtener expresiones explícitas para las soluciones generales de los sistemas dinámicos no lineales (modelo de *May*), cuya conducta se pueda entender de forma global, como sucede en el caso (lineal) de la ecuación de *Malthus*.

El campo de **aplicaciones** de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales es muy amplio, y en los últimos años continúan aumentando. A continuación mostramos algunas de ellas.

- **En Matemáticas para la resolución numérica de ecuaciones.** Recordemos que el método del punto fijo nos permite encontrar la raíz de una ecuación $f(x) = 0$. El proceso se inicia reescribiendo la ecuación como $g(x) = x$, se toma un valor x_0 próximo a la solución buscada, y se reitera el proceso $x_{k+1} = g(x_k)$. Si la órbita correspondiente

$$\{x_0, x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1) = g(g(x_0)), \dots\},$$

converge a cierto valor x^* , entonces el método es convergente.

Recordemos que gráficamente el punto fijo $g(x^*) = x^*$ se encuentra como la intersección de la función $g(x)$ con la bisectriz del primer cuadrante.

- **Elaboración de modelos matemáticos.** Por ejemplo, el modelo logístico (del francés *logis* = alojamiento), que suele ser el punto de partida de los sistemas dinámicos unidimensionales,

$$x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.3)$$

se puede obtener de la manera siguiente: Supongamos que x_0 es la población relativa inicial, esto es, el cociente entre la población inicial y la población máxima que puede soportar el habitat. Sea x_k la población relativa al cabo de k años. El crecimiento relativo de la población en cada año será

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k},$$

que según las hipótesis de *Verhulst* (1845), es proporcional a $1 - x_k$. Es decir,

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = \alpha(1 - x_k),$$

despejando

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(1 - x_k)x_k = x_k(1 + \alpha)(1 - x_k).$$

Si llamamos $\mu = 1 + \alpha$, entonces obtenemos la expresión (10.3)

- **Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.** Sea la ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = f(x),$$

que podemos expresarla como

$$x(t + dt) - x(t) = f(x)dt.$$

Si sustituimos dt por un valor numérico h , obtenemos

$$x_{k+1} - x_k = hf(x_k) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k + hf(x_k),$$

tomando h suficientemente pequeño, podemos entonces dibujar la solución que pasa por un punto inicial dado.

10.2. Modelos dinámicos discretos lineales.

En general, obtener la expresión explícita de la solución general $f^k(x)$ es bastante complicado. Con ayuda de un ordenador podemos conseguir numéricamente cuantas iteraciones deseemos en esa expresión, pero esto no resulta en general de mucha ayuda para entender la conducta global del sistema. Un instrumento que resulta en muchas ocasiones adecuado en el caso de sistemas unidimensionales es el análisis gráfico, a través del llamado **diagrama de Cobweb**.

Supongamos una árida isla cerca de la costa de un rico continente. Estamos interesados en una especie particular de pájaros que anidan en estas islas. Desgraciadamente el habitat de la isla es muy desfavorable ya que si los pájaros estuvieran aislados su población disminuiría un 20 % cada año. Esta situación podemos reflejarla utilizando el modelo de *Malthus* (exponencial)

$$x_{k+1} = 0.80x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde x_k es la población de pájaros en el tiempo k . Hay una colonia de pájaros en el continente y cada año 1000 pájaros emigran a nuestra isla. Entonces, el cambio de población en la isla puede ser descrito por el modelo

$$x_{k+1} = 0.80x_k + 1000, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Observemos que el modelo es lineal en el sentido de que la función $f(x) = 0.80x + 1000$ representa a una línea recta.

Ahora descubriremos y probaremos un teorema sobre sistemas dinámicos lineales discretos, que corresponden al tipo

$$x_{k+1} = mx_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde m y b son constantes. Recordemos que los sistemas dinámicos discretos están descritos por una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En el caso particular de sistemas dinámicos discretos lineales, la función f es del tipo $f(x) = mx + b$, y estamos interesados en puntos de equilibrio del sistema dinámico discreto. Aquellos puntos x tales que $f(x) = x$. Estos puntos se llaman de equilibrio porque si un término es uno de estos puntos, cada sucesión de términos siguientes permanece en el mismo punto. De esta manera decimos que el sistema se encuentra en equilibrio. Es inmediato comprobar el siguiente resultado.

RESULTADO 10.2.1 *Si m no vale 1 entonces hay un único punto de equilibrio*

$$x^* = \frac{b}{1 - m}$$

Los modelos dinámicos discretos pueden comportarse de manera sorprendente. Algunas veces una sucesión obtenida del sistema dinámico lineal discreto tiende directamente al punto de equilibrio. En otras ocasiones saltan alrededor de él, con saltos cada vez más pequeños hasta tender al punto de equilibrio. O por el contrario los saltos son cada vez más grandes y no tienden al punto de equilibrio.

Nuestro objetivo es formular y probar un teorema que nos determine cuando ocurre cada una de estas clases de comportamiento. Comenzamos la construcción del diagrama de *Cobweb* dibujando las gráficas

$$f(x) = mx + b, \quad g(x) = x$$

Dibujamos el punto x_1 en el eje OX. A continuación marcamos el valor $f(x_1) = x_2$ y obtenemos el punto (x_1, x_2) . El próximo paso es trazar una línea horizontal desde el punto (x_1, x_2) hasta que corte a la recta $g(x) = x$ en el punto (x_2, x_2) . Calculamos $x_3 = f(x_2)$ y repetimos sucesivamente este proceso.

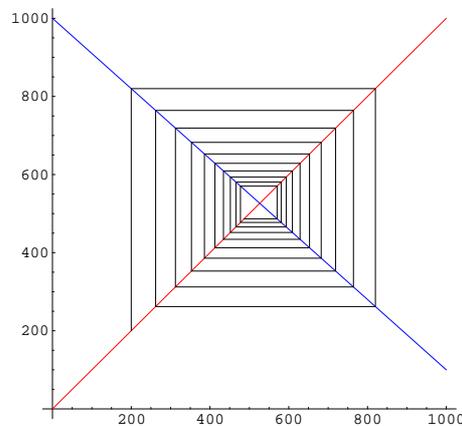


Figura 10.1: Diagrama de *Cobweb*.

Observemos en la Figura 10.1 que en este caso “la red de araña” nos lleva al punto de equilibrio. En la Figura 10.2 hemos representado en el eje de abscisas el tiempo y en el eje de ordenadas el número de individuos. Puede verse que si el tiempo aumenta la población tiende al punto de equilibrio. Se trata por tanto de un punto de equilibrio estable.

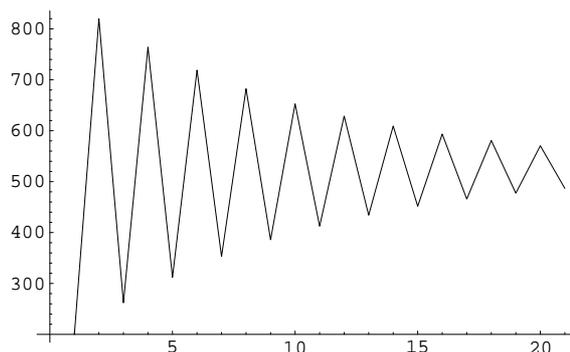


Figura 10.2: Punto de equilibrio estable.

EJEMPLO 10.2

- Vamos a calcular y dibujar x_2, x_3, \dots , para el modelo $x_{k+1} = 0.80x_k + 1000$ y el valor inicial $x_0 = 500$.

El modelo anterior podemos escribirlo como

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $f(x) = 0.80x + 1000$. Esta es una buena manera de representar a nuestro modelo porque la función $f(x)$ nos describe como la población, en cada año está determinada por la población en el año anterior.

Los dos gráficos $f(x) = 0.8x + 1000$ y $g(x) = x$ se cortan en el punto $x^* = 5000$. Este punto se llama **punto de equilibrio** ya que la población en los próximos años será la misma que la población actual.

$$f(5000) = 0.8 \times 5000 + 1000 = 5000$$

Podemos encontrar este valor también de manera algebraica

$$f(x) = x \Rightarrow x = 0.8x + 1000 \Rightarrow x = 5000$$

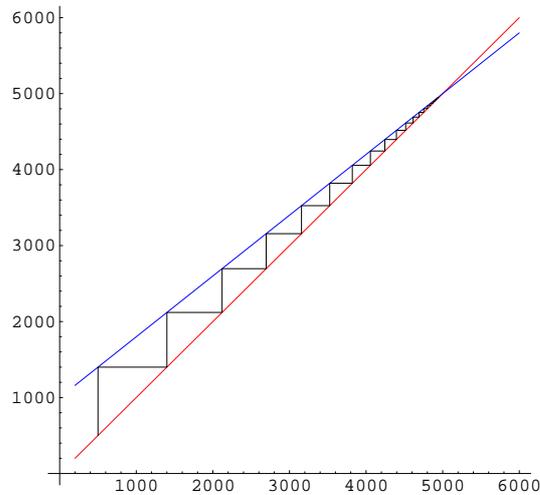


Figura 10.3: Estudio del punto de equilibrio.

La Figura 10.3 nos muestra como determinamos gráficamente el punto de equilibrio.

A continuación nos centraremos en la clasificación de los puntos de equilibrio o en el análisis de la estabilidad. En el análisis de la evolución de poblaciones el problema principal es:

- Evaluar la estabilidad de la población usando modelos matemáticos.
- Examinar los efectos de diferentes factores sobre la estabilidad de la población.

Hemos tenido ocasión de ver que en los sistemas dinámicos lineales discretos, el punto de equilibrio

$$x^* = \frac{b}{1 - m},$$

en algunas ocasiones es un **punto de equilibrio atractivo**, (aquel que a largo plazo los términos x_k tienden al x^* cuando k tiende a ∞), y otras veces es un **punto de equilibrio repulsivo**, (aquel donde x_k tiende a más o menos infinito). A continuación presentamos un teorema que nos permitirá determinar cuando un punto de equilibrio es atractivo o repulsivo.

TEOREMA 10.2.2 *Sea el sistema dinámico lineal discreto*

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad f(x) = mx + b$$

con $m \neq 1$. Sea $x^* = b/(1 - m)$ el punto de equilibrio,

- si $|m| < 1$ entonces x^* es atractivo, en el sentido de que para cualquier condición inicial x_0

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

- si $|m| > 1$, entonces x^* es repelente, y al menos que $x_0 = x^*$ se cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = \infty.$$

Demostración. Comenzamos calculando el valor de x_k

$$\begin{aligned} x_2 &= mx_1 + b \\ x_3 &= mx_2 + b = m^2x_1 + b(m+1) \\ x_4 &= mx_3 + b = m(m^2x_1 + b(1+m)) + b = m^3x_1 + b(1+m+m^2) \\ &\dots \\ x_k &= m^{k-1}x_1 + b(1+m+m^2+\dots+m^{k-2}) = m^{k-1}x_1 + b \sum_{j=0}^{k-2} m^j. \end{aligned}$$

Si suponemos que $|m| < 1$ entonces al hacer que k tienda a infinito

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^{k-1}x_1 = 0.$$

Por otro lado,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-2} m^j = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \frac{1}{1-m},$$

por ser la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $|m| < 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{b}{1-m} = x^*.$$

Por un razonamiento similar, si $|m| > 1$ se cumple que $m^{k-1}x_1$ y $\sum_{j=0}^{k-2} m^j$ no están acotados cuando $k \rightarrow \infty$. ■

10.3. Modelos dinámicos discretos no lineales

Para un sistema de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.4)$$

donde ahora la función f no es lineal, la situación es diferente a lo estudiado en la sección anterior. Lo que debemos tener en cuenta, es que pueden existir muchos puntos de equilibrio. En el caso lineal el tipo de punto de equilibrio nos lo daba el parámetro m de la recta. En el caso no lineal el carácter de cada punto está determinado por la pendiente de la curva $f(x)$ en el punto x^* , y sabemos que este valor puede determinarse por la derivada de la función f en el punto x^* .

TEOREMA 10.3.1 Consideremos el sistema dinámico (10.4) siendo x^* un punto de equilibrio $f(x^*) = x^*$. Entonces

- si $|f'(x^*)| < 1$ el punto de equilibrio es atractivo, en el sentido de que si x_0 está suficientemente cerca de x^* entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* .$$

Algunas veces a un equilibrio de esta características se le dice equilibrio estable, ya que si el sistema se mueve ligeramente del punto de equilibrio, al final retorna al mismo.

EJEMPLO 10.3

- Consideremos el sistema dinámico discreto no lineal de *May*

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k), \quad \alpha > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

- 1.- Encontrar los puntos de equilibrio y clasificarlos.
 - 2.- Sea $\alpha = 2.5$ y $x_0 = 0.1$. Utilizando el diagrama de *Cowbew*. clasificar el punto de equilibrio del sistema.
 - 3.- Repetir el proceso para $\alpha = 3.3, 3.55$
 - 4.- Cuando α aumenta de 3 a 4 ¿observas algún cambio en el tipo de soluciones obtenidas?.
- Empezamos encontrando los puntos de equilibrio. En este caso la función f no lineal que nos define el modelo es

$$f(x) = \alpha x(1 - x) .$$

Por tanto, tendremos que resolver la ecuación $f(x) = x$, que tiene por soluciones,

$$x^* = 0, \quad x^* = 1 - \frac{1}{\alpha} .$$

Para clasificar estos puntos de equilibrio, tenemos que hacer uso del Teorema 10.3.1. La derivada de la función $f(x)$ vale $f'(x) = \alpha - 2\alpha x$. Por tanto, el primero de los puntos es asintóticamente estable si

$$|f'(0)| = |\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha < 1 .$$

En cuanto al segundo, será estable si

$$\left| f' \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right| = |2 - \alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < \alpha < 3 .$$

- Si consideramos el modelo no lineal $f(x) = 2.5x(1 - x)$ y como semilla o valor inicial $x_0 = 0.8$, podemos encontrar su órbita haciendo uso del software **Mathematica**®.

Empezamos definiendo la función,

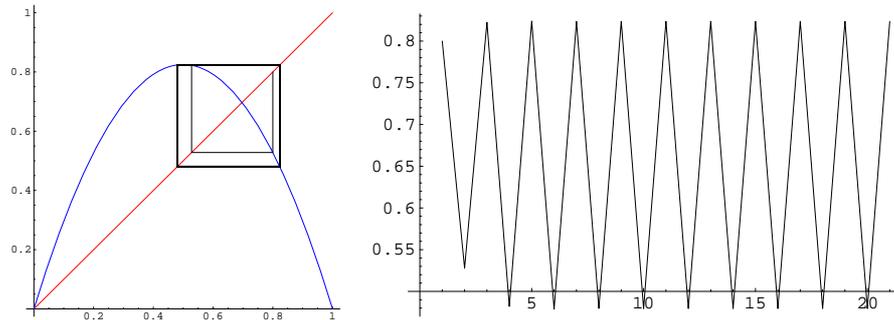


Figura 10.5: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.3x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Repitiendo los cálculos para $f(x) = 3.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$, se obtiene la órbita:

$\{ \{ 0.8, 0.559999, 0.8624, 0.41533, 0.84990, 0.44647, 0.86497, 0.40878, 0.84587, 0.45628, 0.86831, 0.40021, 0.84014, 0.47004, 0.87185, 0.391, 0.83343, 0.48587, 0.87430, 0.38464, 0.82842 \} \}$.

La población se comporta de manera periódica de orden 4.

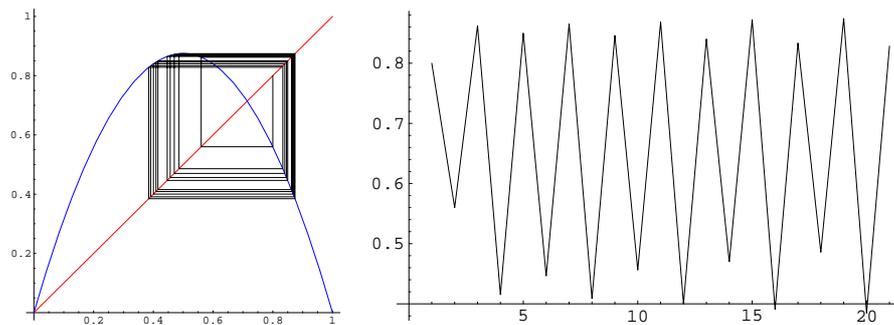


Figura 10.6: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Por último, si consideramos $f(x) = 4x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$, ahora la población se comporta caóticamente.

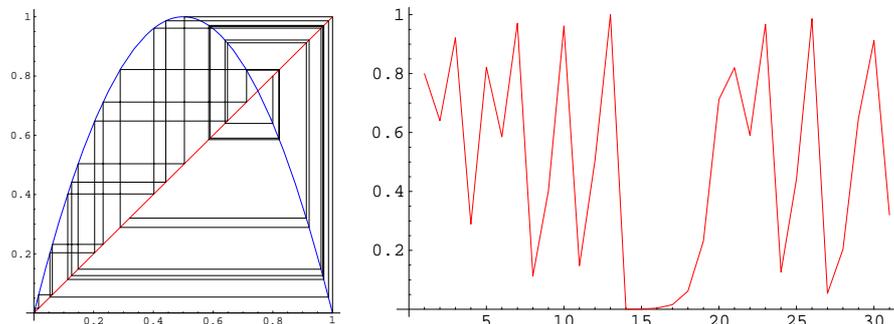


Figura 10.7: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 4x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

Tendremos ocasión de volver sobre este ejercicio cuando estudiemos los sistemas caóticos.

10.4. Puntos de equilibrio y periódicos de un sistema dinámico

En esta sección trataremos de sistematizar y formalizar los resultados obtenidos en las secciones anteriores, para estudiar los puntos de equilibrio y periódicos de un **sistema dinámico discreto unidimensional**.

Dado un sistema dinámico

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f : X \rightarrow X,$$

se dice que $x^* \in X$ es un punto de equilibrio del sistema si $f(x^*) = x^*$. Si x^* es un punto de equilibrio, la solución cuya condición inicial es $x_0 = x^*$ cumple $f^k(x_0) = x^*$. Esto significa que los puntos de equilibrio son estados fijos: una vez el sistema entra en ellos, permanece invariable en todos los instantes futuros.

Los puntos de equilibrio se clasifican según el comportamiento de las soluciones con condiciones iniciales cercanas a ellos, en **puntos de equilibrio atractivos, repulsivos e indiferentes**. En lo que sigue, consideraremos el siguiente sistema dinámico unidimensional

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- **Puntos de equilibrio atractivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es atractivo si $|f'(x^*)| < 1$
- **Puntos de equilibrio repulsivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es repulsivo si $|f'(x^*)| > 1$
- **Puntos de equilibrio indiferentes.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es indiferente si $|f'(x^*)| = 1$
- **Puntos cíclicos.** Se dice que x^* es un punto periódico o cíclico del sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$, si existe un n tal que $f^n(x^*) = x^*$. Un punto es periódico si su órbita se “cierra” vuelve a comenzar por su valor inicial. El mínimo entero k tal que $f^k(x^*) = x^*$, se llama **orden del punto periódico**. En tal caso la órbita

$$\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{k-1}(x^*)\}$$

recibe el nombre de **período o ciclo de orden k** .

10.4.1. Estabilidad

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico representa un estado fijo del sistema. Ahora bien, no todos los estados de equilibrio tienen la misma naturaleza.

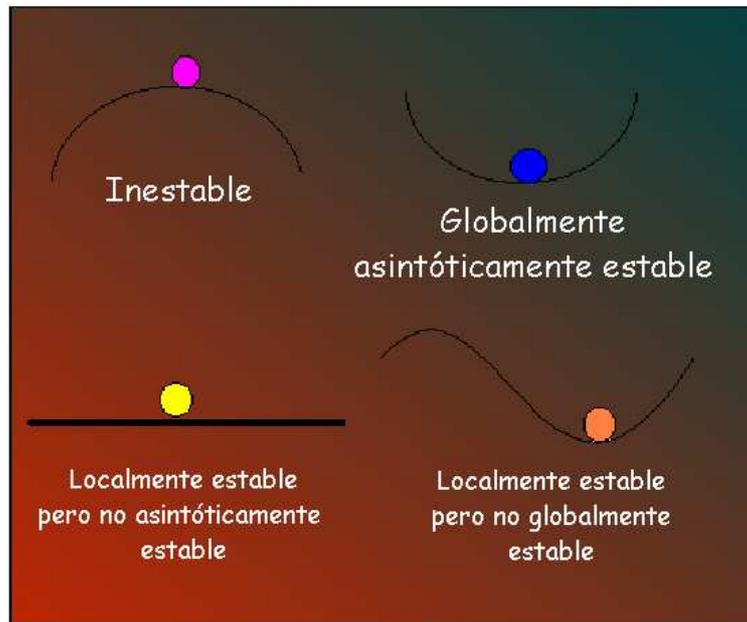


Figura 10.8: Tipos de estabilidad.

Si se deja rodar una bola en el cuenco de una copa, terminará deteniéndose en el centro de la misma. Si se desplaza la bola ligeramente de su posición de equilibrio, retornará a ella. Este es un equilibrio robusto frente a perturbaciones, conocido como **equilibrio asintóticamente estable**. Los puntos de equilibrio atractivos presentan esta forma de equilibrio.

La forma de equilibrio opuesta es el **equilibrio inestable**, representado por una pelota en el borde del tejado: basta una ligera perturbación para romper el equilibrio. Los puntos de equilibrio repulsivos presentan este tipo de equilibrio. Finalmente existe una forma intermedia de equilibrio, técnicamente conocido como **equilibrio estable**. Este se halla representado por un péndulo sin rozamiento en posición de reposo. Si se somete al péndulo a una pequeña perturbación, éste permanecerá oscilando indefinidamente en torno a la posición de equilibrio, sin alejarse mucho de ella, pero sin retornar a ella de forma definitiva.

EJEMPLO 10.4

- Comprobemos que el origen es un punto de equilibrio estable para el sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$ si $f(x) = -x$.

Es evidente que $x^* = 0$ es solución de la ecuación $f(x) = x$, por lo tanto, es un punto de equilibrio. Para comprobar que su equilibrio es estable, perturbamos este valor tomando $x_0 = 0.5$. La Figura 10.9 muestra que la órbita sólo toma los valores -0.5 y 0.5 .

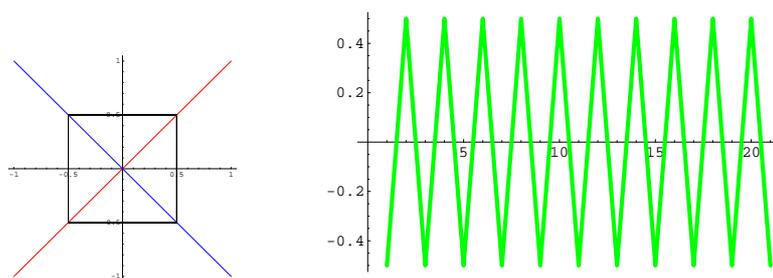


Figura 10.9: Diagrama de *Cobweb*.

10.5. Sistemas caóticos

En el Ejemplo 10.3 hemos tenido ocasión de comprobar que sistemas o modelos muy simples, pueden pasar de tener un comportamiento determinístico a un comportamiento caótico, modificando ligeramente los valores de un parámetro. En esta sección formalizaremos este concepto.

La teoría del caos fue introducida en ecología por *May* (1974, 1976) y *Oster* (1976) en el contexto de funciones reales de variable real está siendo estudiada con intensidad en los últimos años y aparece en casi todos los modelos discretos no lineales.

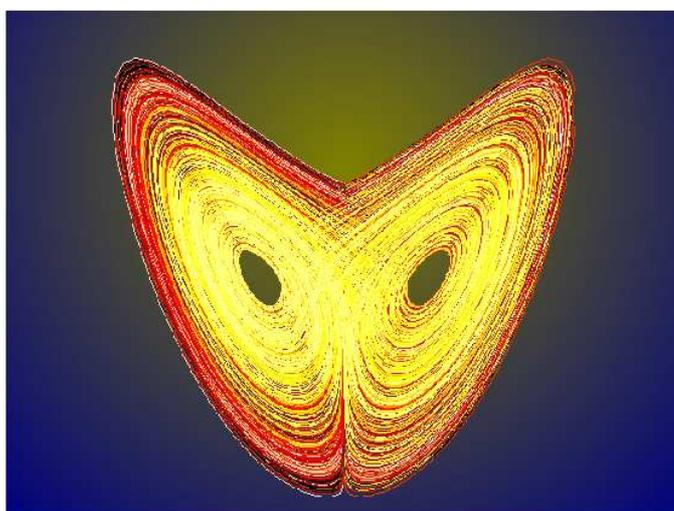


Figura 10.10: Mariposa o atractor de Lorenz.

Lo primero que nos llama la atención es el hecho de que vivimos inmersos en el caos. De manera usual, **llamamos caos a todo aquello que no somos capaces de sistematizar.**

El primer investigador del caos fue un meteorólogo llamado *Edward Lorenz*. En 1960 utilizaba un modelo matemático para predecir el tiempo, que consistía en un

sistema de 12 ecuaciones no lineales. La simulación se realizaba con un ordenador, que daba como respuesta un comportamiento probable de la atmósfera. En cierta ocasión, quiso repetir de nuevo los cálculos anteriores, para ello volvió a introducir los números en el ordenador, pero para ahorrar papel y tiempo, solo utilizó 3 números decimales en vez de 6. Lo sorprendente fue que el resultado encontrado era totalmente diferente a los obtenidos en la vez anterior. Del análisis de esta situación surgió una nueva teoría que se conoce con el nombre de la teoría del caos.

Lo verdaderamente interesante era que diferencias muy pequeñas en las condiciones iniciales tenían una gran influencia en la resolución final del problema. A este efecto que tienen las pequeñas diferencias iniciales después se le dio el nombre de **efecto mariposa**:

“El movimiento de una simple ala de mariposa hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma.”

Como podemos comprender, este descubrimiento causó en *Lorentz* un gran impacto, ya que según esta nueva hipótesis, no sería posible predecir con exactitud el comportamiento de cualquier sistema, pues todas las medidas se ven afectadas por los errores de calibración de los instrumentos. Es imposible, por tanto, conocer las condiciones iniciales exactas de la mayoría de los sistemas dinámicos. Afortunadamente, *Lorentz* se dio cuenta de que las soluciones del sistema que parecían tener un comportamiento hecho totalmente al azar, después de verlas representadas en una gráfica sucedía algo sorprendente. El resultado siempre ocupaba una determinada región del espacio, y tenía forma de una espiral doble.

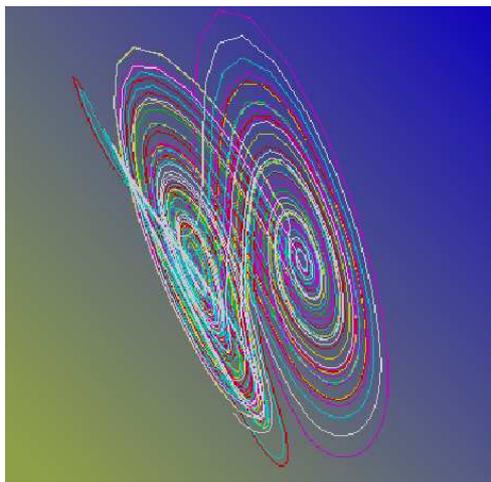


Figura 10.11: Atractor de Lorentz.

Antes de la aparición de esta nueva teoría, sólo había dos tipos de comportamientos conocidos para un sistema dinámico: un estado fijo, donde los variables nunca cambian, y el comportamiento periódico, donde el sistema está en un “circuito cerrado” y se repite infinitamente. Las soluciones del sistema de *Lorentz* son definitivamente ordenadas (siguen una espiral). Nunca se paran en un punto, ni se repiten, ni son periódicas. A su representación gráfica se la conoce con el nombre **Atractor de Lorentz**¹. Estas gráficas deben cumplir otra condición: no puede cortarse a sí misma ya que, si así fuese, habría dos curvas diferentes a partir de ese punto de corte, lo cual significaría dos realidades simultáneas y diferentes.

Una curva de estas características no puede estar contenida en un plano, y por supuesto su dimensión es fraccionaria. Este tipo de atractores reciben el nombre de **atractores extraños**, ya que su representación gráfica es un **fractal**. Queremos insistir en la idea fundamental que encierra el concepto de atractor, como es la siguiente: mientras es casi imposible predecir exactamente el estado futuro de un sistema, es posible, y aún más, muchas veces es fácil modelar el comportamiento general del sistema.

A continuación, resumimos algunos de los rasgos característicos de los sistemas caóticos.

- Son muy sensitivos a las condiciones iniciales. Un cambio muy pequeño en los datos iniciales dan lugar a resultados totalmente diferentes.
- Parecen un desorden, o hechos al azar, pero no lo son, hay reglas que determinan su comportamiento. Los sistemas hechos al azar no son caóticos.

10.5.1. Diagramas de bifurcación

Podemos preguntarnos si la teoría del caos puede ser utilizada para estudiar el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos biológicos. En efecto, la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = \mu x_t (1 - x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

donde x_t es la fracción de la población en el tiempo t , es una fórmula que hemos tenido ocasión de trabajar repetidamente con ella. Se trata de la curva logística, utilizada para estudiar la evolución de poblaciones en ecología.

Hemos visto en el Ejemplo 7.3 que al variar el valor del parámetro μ , el sistema puede tender a un solo punto de equilibrio, a dos, a cuatro, \dots , o bien presentar un comportamiento caótico.

¹El atractor es la región del espacio hacia la cual convergen las trayectorias posibles dentro de un sistema.

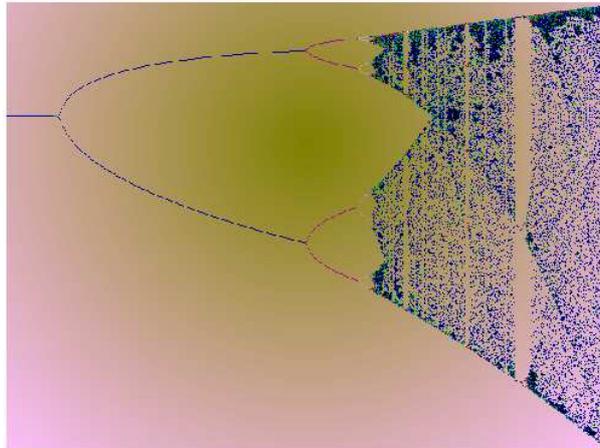


Figura 10.12: Diagrama de bifurcación del modelo de *May*.

Su diagrama de bifurcación se obtiene dibujando en el eje de abscisas los valores del parámetro μ y en el eje de ordenadas los valores a los que tiende el sistema. Por ejemplo si $\mu = 2.5$ entonces $x_t \rightarrow 0.6$, o bien, en el caso $\mu = 3.3$ entonces $x_t \rightarrow 0.823$ y $x_t \rightarrow 0.479$. La Figura 10.12 representa la gráfica obtenida. Si seleccionamos cualquiera de las zonas del diagrama de bifurcación de la Figura 10.12 y la ampliamos obtenemos la Figura 10.13. Podemos comprobar una de las propiedades que definen a un objeto fractal, como es la **autosemejanza**.

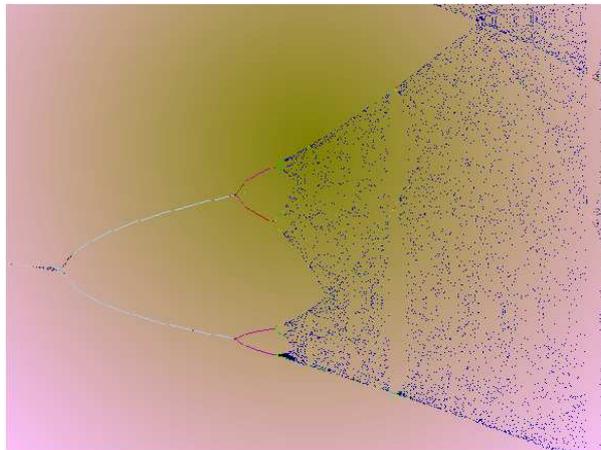


Figura 10.13: Autosemejanza del diagrama de bifurcación.

El diagrama de bifurcación tiene propiedades importantes. Entre ellas presentamos la siguiente: sabemos que a medida que aumentamos el valor del μ el período se va duplicando.

PERIODOS	INTERVALOS	COCIENTES
2	$3 < C < 3.4495$
4	$3.4495 < C < 3.5441$	4.75159
8	$3.5441 < C < 3.5644$	4.6601
16	$3.5644 < C < 3.5688$	4.61364

Tabla 10.1

La Tabla 10.1 muestra algunos de estos valores, y además los cocientes entre la amplitud de un intervalo y el inmediatamente anterior, por ejemplo $(3.5441 - 3.4495)/(3.4495 - 3)$. Lo llamativo de este hecho, es que los cocientes tienden al número trascendente:

$$4.669201609110299067185532038204662016\dots$$

que se conoce con el nombre de **constante de Feigenbaum**. Es un problema abierto el estudiar la importancia que este número juega en la naturaleza. Se piensa que puede tener un protagonismo similar al número e .

Las **aplicaciones de la teoría del caos** son múltiples y en campos muy diversos, en Biología, en Economía, en Medicina,... etc. Hasta ahora parecía que al estallar el caos no seríamos capaces de hacer nada, por ejemplo, si el avión empieza a moverse de una manera extraña pensamos que la catástrofe es inevitable; o bien, si el corazón empieza a latir rápidamente y sin ayuda inmediata puede ocurrir lo peor. En los últimos años, en el campo de la Medicina, las investigaciones actuales, nos ofrecen esperanzas de “domesticar” el caos. *Edward Ott*, *Ceslo Grebogi* (físicos) y *James A. Yorke* (matemático) han elaborado un algoritmo matemático que permite convertir un determinado tipo de caos en un proceso periódico sencillo. La idea que encierra el algoritmo, es que no es necesario comprender todo el movimiento caótico para poderlo regular. Lo que tenemos que hacer es “mirar” continuamente a que dirección tiende el proceso, y realizar perturbaciones pequeñas para volver a dirigirlo en el camino deseado. Naturalmente aquí no se termina de vigilar el sistema, porque después el caos aparecerá de nuevo. Por otro lado, el profesor *A. Garfinkel* de la Universidad de California, ha conseguido transformar el movimiento caótico de un corazón sacado a un conejo en un movimiento regular.

10.6. Modelos discretos con retardo

Hasta ahora en todos los modelos discretos estudiados hemos supuesto que cada miembro de la especie en el tiempo k contribuye al crecimiento de la población para el tiempo $k + 1$ de la siguiente manera:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esto ocurre, por ejemplo en la mayoría de poblaciones de insectos, pero no para otros muchos animales, donde son fértiles en una época muy concreta del año. En tales casos, para analizar la dinámica del modelo, hemos de incorporar el efecto del retardo, que en cierta manera viene a jugar un papel parecido al estudio que realizamos de la población por estructura de edades. Si el retardo (por ejemplo, la madurez), es de un paso T , entonces nos aparece el siguiente modelo de ecuaciones en diferencias

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-T}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Por ejemplo, se sabe que para cierto tipo de población de ballenas, el retardo T es del orden de varios años.

A continuación analizaremos un caso concreto con el objetivo de realizar un análisis de la estabilidad del modelo.

EJEMPLO 10.5

- Supongamos

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-1}) = x_k e^{r(1-x_{k-1})}; \quad r > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10.5)$$

Sus puntos de equilibrio se encuentra resolviendo la ecuación $f(x) = x$, siendo $f(x) = x e^{r(1-x)}$. Las soluciones son $x^* = 0$ y $x^* = 1$.

Si estamos interesados en clasificar el estado de equilibrio no trivial, supongamos que $x_k = 1 + v_k$ con $|v_k| \ll 1$. Sustituimos en (10.5), utilizamos $e^t \approx 1 + t$

$$1 + v_{k+1} = (1 + v_k) e^{-rv_{k-1}} \approx (1 + v_k)(1 - rv_{k-1}),$$

y simplificando, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$v_{k+1} - v_k + rv_{k-1} = 0. \quad (10.6)$$

Para resolverla, tenemos que encontrar las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \lambda + r = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4r}}{2} & \text{si } r < \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4r}}{2} & \text{si } r < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Cuando $r > 1/4$ las raíces son dos números complejos conjugados: $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$ y $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$, donde

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4r-1}{4}} = \sqrt{r}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{4r-1}/2}{1/2} = \arctan \sqrt{4r-1}$$

La solución de (10.6) será:

$$v_k = A\lambda_1^k + B\lambda_2^k,$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

- 1.- Si $0 < r < 1/4$, entonces λ_1 y λ_2 son dos números reales comprendidos estrictamente entre cero y uno. En consecuencia, si k tiende a infinito λ_1^k y λ_2^k tienden a cero.

Conclusión: El punto de equilibrio $x^* = 1$ será estable. Además, después de una pequeña perturbación la solución tiende de forma monótona al punto de equilibrio. Puede verse gráficamente en la Figura 10.14 (izquierda).

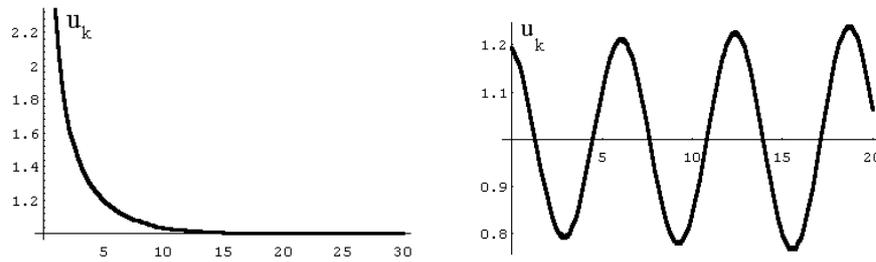


Figura 10.14: Soluciones de la ecuación en diferencias con retardo. Izquierda $r = 0.2$, $A = 0.1e^{1.26t}$; derecha: $r = 1.02$, $A = 0.1e^{1.26t}$.

2.- Si $1/4 < r$, entonces λ_1 y λ_2 son dos números complejos conjugados, con $\lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = \rho^2 = r$. Además, si $1/4 < r < 1$, entonces para que la solución

$$v_k = A\lambda_1^k + B\bar{\lambda}_1^k,$$

sea un número real, debe suceder que $B = \bar{A}$. Supongamos entonces que $A = \alpha e^{i\gamma}$ y $B = \alpha e^{-i\gamma}$, llevando estos valores en la solución

$$v_k = A\lambda_1^k + B\bar{\lambda}_1^k = \alpha e^{i\gamma} \rho^k e^{i\theta k} + \alpha e^{-i\gamma} \rho^k e^{-i\theta k} = \alpha \rho^k (e^{i(\gamma+\theta k)} + e^{-i(\gamma+\theta k)}) = 2\alpha \rho^k \cos(\gamma + \theta k),$$

y por lo tanto, cuando el parámetro r tiende a uno, entonces el ángulo θ tiende hacia $\arctan \sqrt{3} = \pi/3$.

(b1) Cuando r sea mayor que uno, entonces $|\lambda_1| > 1$ y v_k crece indefinidamente al tender k hacia infinito. En consecuencia $x^* = 1$ será un punto de equilibrio inestable.

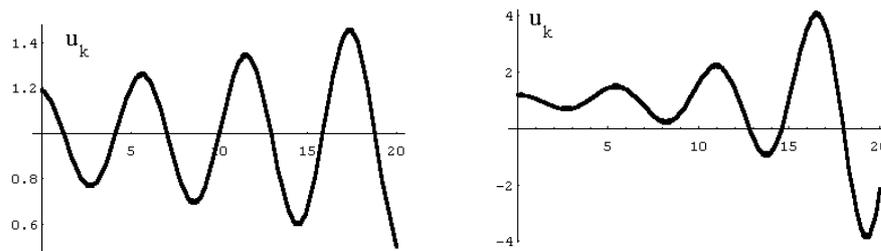


Figura 10.15: Soluciones de la ecuación en diferencias con retardo. Izquierda: $r = 1.1$, $A = 0.1e^{1.26t}$; derecha: $r = 1.4$, $A = 0.1e^{1.26t}$.

(b2) Para valores de r próximos a uno, el ángulo $\theta \approx \pi/3$, y

$$v_k \approx 2\alpha \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}k\right),$$

que es una función periódica de orden 6. En las Figuras 10.14 (derecha) y 7.15, hemos representado las soluciones $u(k)$ para tres valores de r mayores de uno. En la Figura 10.14 (derecha) puede apreciarse que es periódica de periodo 6. En la Figura 10.15 puede verse que se está cerca del caos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 9

1.- Sea x_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t . Se sabe que año tras año sobreviven la tercera parte de los animales y además se incorporan 200 a la población.

- Construir un modelo discreto lineal para la situación planteada.
- Calcular los seis primeros términos de las órbitas correspondientes a las semillas: $x_0 = 90$, $x_0 = 600$.
- Construir los diagramas de Cobweb del apartado anterior, e interpretar biológicamente los resultados obtenidos.

2.- Sea N_t la población de ardillas en el año t . Es conocido que la población en un año cualquiera disminuye en un 40 % de la población del año anterior, y que además siempre se incorporan 20 ardillas del exterior.

- Construir el modelo discreto y dibujar su diagrama de cobweb para los valores iniciales $N_0 = 10$ y $N_0 = 80$. Interpretar el resultado.
- Encontrar la población de ardillas N_t para un año cualquiera, sabiendo que inicialmente hay 15 ardillas.
- Relacionar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores.

3.- Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$y_{t+1} - y_t = t, \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t .

- Explicar el significado “biológico” de la ecuación anterior
- Resuelve la ecuación en diferencias anterior.

4.- La evolución de una población x_t viene determinada por el siguiente modelo discreto exponencial con inmigración y emigración,

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t - \mu, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

siendo el parámetro positivo μ la diferencia entre el número de personas que entran y las que salen, el parámetro r la tasa de crecimiento de la población, y x_0 el número inicial de individuos.

- Estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo según los diferentes valores del parámetro r .
- Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb, para $r = 0.2$ y $\mu = 10$.

5.- Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:

- Un modelo discreto frecuentemente utilizado para estudiar la dinámica de una población de insectos es el modelo de *Ricker*, que viene definido por la ecuación en diferencias:

$$x_{k+1} = x_k e^{r\left(1 - \frac{x_k}{\alpha}\right)}, \quad r, \alpha \in \mathbf{R}^+, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio no triviales.

- En el modelo logístico discreto:

$$x_{k+1} = 2.5x_k(1 - x_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Encontrar los cinco primeros términos de la órbita correspondiente a la semilla $x_0 = 0.8$ y dibujar su diagrama de Cobweb correspondiente. Analizar el resultado.

6.- La siguiente ecuación en diferencias describe la población de ardillas en años sucesivos,

$$x_{t+1} = x_t^3 - 3x_t^2 - 3x_t + a, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

siendo a un parámetros positivo y x_t el número de ardillas en el año t .

- Encuentra el valor del parámetro a sabiendo que existe un punto de equilibrio en $x^* = 2$
- Clasificar los puntos de equilibrios que tienen sentido biológico para conocer el comportamiento a largo plazo de la población.

7.- Calcular y clasificar los puntos de equilibrio para el modelo discreto:

$$N(t+1) = \frac{\lambda N(t)k}{N(t)(\lambda - 1) + k}, \quad k > 0, \quad \lambda > 1, \quad t = 0, 1, \dots,$$

donde $N(t)$ representa a la población en el período t .

8.- Responder a las siguientes cuestiones:

- La ecuación:

$$x_{t+1} = \lambda x_t(1 + ax_t)^{-b}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

donde $\lambda, a, b > 0$ es utilizada frecuentemente como un modelo de crecimiento de poblaciones que dependen de la densidad de dicha población.

Encontrar los puntos de equilibrio del modelo anterior, y probar que $x^* = 0$ es un punto de equilibrio estable si $\lambda < 1$.

- En el modelo logístico discreto:

$$x_{t+1} = 3x_t(1 - x_t), \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Encontrar los cinco primeros términos de la órbita correspondiente a la semilla $x_0 = 0.3$ y dibujar el diagrama de Cobweb correspondiente.

- 9.- Muchas poblaciones de insectos se rigen por el siguiente modelo

$$f(N_t) = N_{t+1} = \frac{\lambda}{\alpha} N_t^{1-b}, \quad \alpha, b, \lambda > 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (10.7)$$

donde λ representa a la tasa reproductiva ($\lambda > 1$) y N_t^{-b}/α es la fracción de la población que sobreviven desde la infancia a la edad adulta reproductiva. Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

- 10.- Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del siguiente modelo discreto:

$$x_{t+1} = \frac{kx_t}{a + x_t}, \quad k > a > 0,$$

donde x_t representa al número de individuos de una población en el tiempo t ¿Cuál será el comportamiento de la población a largo plazo, si $k = 30$, $a = 10$ y $x_0 = 15$ individuos?

- 11.- Sea N_t el número de individuos de una población en el tiempo t . Si la evolución de N_t queda definida por la siguiente ecuación en diferencias

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{1}{3} (-N_t^3 + N_t^2 + 4N_t - 1)$$

Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo para discutir la evolución a largo plazo de la población según los distintos valores de N_0 .

- 12.- La siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{t+1} = \frac{\alpha x_t}{1 + \beta x_t}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x_t \geq 0,$$

fue propuesta por *Kaplan & Glais* en 1995 y juega un papel muy importante en análisis de modelos no lineales genéticos y en redes neuronales.

- Encontrar y analizar los puntos de equilibrio
 - Sea $\alpha = \beta = 1$. Dibujar de forma aproximada el diagrama en telaraña (cobweb) tomando como semilla $x_0 = 4$.
-



Tema 11

APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

11.1. Introducción

En este tema estudiaremos los casos más simples de crecimiento de poblaciones, cuando la variable tiempo toma valores en un conjunto discreto, clasificados en modelos independientes y dependientes de la densidad de la población.

DEFINICIÓN 11.1.1 *Diremos que el crecimiento de una población es independiente de la densidad si las tasas de nacimiento y mortalidad no dependen del tamaño de la población.*

Recordemos que en el estudio de los modelos matriciales, ya hemos tenido ocasión de analizar el comportamiento de ciertos modelos discretos y una breve introducción a los modelos exponencial y logístico. Ahora, aplicaremos parte de los resultados obtenidos en los temas anteriores y realizaremos un estudio más completo de algunos de estos modelos.

11.2. Crecimiento independiente de la densidad de la población

Comenzaremos analizando el modelo más simple de crecimiento de poblaciones de una sola especie. Supondremos para empezar que:

- La tasa de nacimientos es proporcional al número de individuos presentes.
- La tasa de muertes es proporcional al número de individuos presentes.

Existen ciertos tipos de animales, como por ejemplo la mariposa *Euphydryas editha*, que se reproduce una vez al año, poniendo sus huevos a primeros de Abril. Las mariposas adultas vuelan durante un período corto de tiempo y entonces mueren. Existen ratones que tienen crías solamente una vez al año en primavera, y que viven alrededor de diez años. Para este tipo de especies, un modelo que suponga que los nacimientos se dan continuamente y que las generaciones se superponen es inapropiado.

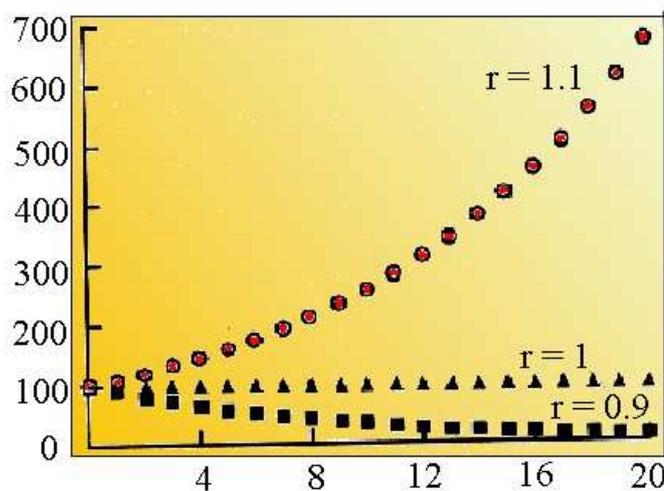


Figura 11.1: Modelo discreto exponencial.

Mediremos el tiempo k en unidades de generación (un año, un mes, ...), y supondremos que r es el número de individuos que nacen en la próxima generación a partir de un individuo de la generación actual. Si x_k simboliza al número de individuos de la población en la generación k , entonces

$$x_{k+1} = r x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si x_0 es el número inicial de individuos, de la expresión anterior se deduce

$$x_k = x_0 r^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.1)$$

es decir, estamos ante un crecimiento exponencial o geométrico. El comportamiento cualitativo de (11.1) está determinado por el valor de r y queda simbolizado en la Figura 11.1.

Es evidente que este modelo representa a la población sólo en un intervalo corto de tiempo, ya que el crecimiento es demasiado rápido. Además, este modelo basado en la independencia de la densidad, no puede explicar la evolución de la mayoría de las poblaciones que existen en la naturaleza.

Podemos preguntarnos por los valores reales, y no los teóricos, que se obtienen del parámetro r en el laboratorio y en la naturaleza. En los experimentos en el

laboratorio puede encontrarse valores de r muy diferentes, dando lugar a crecimiento muy rápido de poblaciones. Sin embargo, en la naturaleza este valor debe estar muy cerca de uno, ya que en caso contrario la población desaparecería o por el contrario crecería rápidamente.

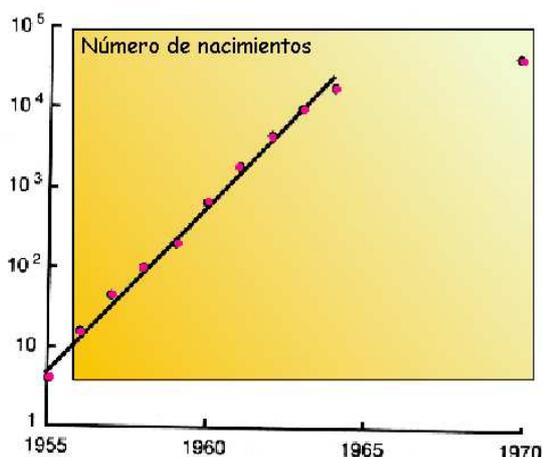


Figura 11.2: Crecimiento de una población de pájaros.

La Figura 11.2 muestra la representación en escala logarítmica de una población de pájaros de Gran Bretaña, desde el año 1955 al 1970. Observemos que al principio, la población crece exponencialmente, pero después de algunos años, disminuye sustancialmente. En la próxima sección trataremos de explicar este comportamiento. La cuestión más importante de la dinámica de poblaciones es determinar las causas y las consecuencias de la desviación del modelo exponencial.

EJEMPLO 11.1

- El censo de los Estados Unidos se elabora cada diez años. En la Tabla 11.1. se recogen los datos correspondientes al período 1790 - 2000.

La tasa de crecimiento en cada década se calcula dividiendo el censo correspondiente al año superior entre el número de individuos en el año inferior. Por ejemplo, la tasa de crecimiento en la década 1790 - 1800 es:

$$\frac{\text{Población en 1800}}{\text{Población en 1790}} = \frac{5.308.483}{3.929.214} = 1.351.$$

El modelo matemático discreto más simple supone que la población en la próxima década es igual a la población actual más la población actual por la tasa de crecimiento medio, r , de la población. El modelo empieza con una población inicial, por ejemplo, la correspondiente al año 1790. Para encontrar la población en la década próxima, multiplicamos por $(1+r)$. Con ello obtenemos una sucesión de poblaciones, todas ellas encontradas a partir de la década anterior. Por ejemplo,

$$\text{Población en 1800} = 1.349 \times \text{Población en 1790} = 5300510,$$

siendo 34.9 % la media de las tasas de crecimiento desde 1790 hasta 1860. Observemos que existe una diferencia de aproximadamente 8000 individuos que equivale a un error del 0.15 %. Podemos repetir el proceso anterior y encontrar las poblaciones para las décadas 1810, 1820, ... , 1860, ya que en estos períodos la tasa de crecimiento se mantiene razonablemente constante.

1790	3.929.214	1870	39.818.449	1950	151.325.798
1800	5.308.483	1880	50.155.783	1960	179.323.175
1810	7.239.881	1890	62.947.714	1970	203.302.031
1820	9.638.453	1900	75.994.575	1980	226.545.805
1830	12.866.020	1910	91.972.266	1990	248.709.873
1840	17.069.453	1920	105.710.620	2000	281.421.906
1850	23.191.876	1930	122.775.046		
1860	31.433.321	1940	131.669.275		

Tabla 11.1

La Tabla 11.2 muestra los datos obtenidos. En ella puede observarse que los errores cometidos son pequeños hasta 1870, y además la población predicha por el modelo es ligeramente superior a la población exacta, lo cual nos sugiere que durante el siglo XIX bajó la tasa de nacimiento. Entre los años 1860 y 1870 tuvo lugar la guerra civil americana, originando el brusco descenso en la tasa de crecimiento de la población de Estados Unidos; además durante estos años aconteció la revolución industrial y la sociedad pasó de ser mayoritariamente agrícola a una sociedad industrial con un descenso significativo de los nacimientos.

Si continuamos usando el modelo anterior hasta 1920 o 1970 nos encontraremos con una población predicha de 192365343 y 859382645 respectivamente, lo que supone una estimación del 82 % y 323 % mayores que las reales. La conclusión que deducimos es que el uso de este modelo de crecimiento está limitado a predecir la población futura en años muy próximos, no se puede extrapolar a largo plazo.

Recordemos que el modelo matemático dado por

$$x_{k+1} = x_k + rx_k = (1+r)x_k, \quad x_0 = P(1790) = 3.929.214, \quad (11.2)$$

siendo r la tasa media de crecimiento, se conoce con el nombre de **modelo de crecimiento discreto exponencial o de Malthus**. El modelo es un caso particular de un sistema dinámico discreto o ecuación en diferencias. Las ecuaciones en diferencias se usan con frecuencia en Ecología, donde a menudo se puede determinar la población de una especie o colección de especies, sabiendo la población en la generación anterior. El modelo de crecimiento malthusiano establece que la población en la próxima generación es proporcional a la población de la generación actual. De (11.2) se deduce inmediatamente

$$x_k = (1+r)^k x_0, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

AÑO	CENSO	$x(k+1)=1.349x(k)$	% ERROR
1790	3.929.214	3.929.214	----
1800	5.308.483	5.300.510	0.15
1818	7.239.881	7.150.388	1.24
1820	9.638.453	9.645.873	0.08
1830	12.866.020	13.012.282	1.14
1840	17.069.453	17.553.569	2.84
1850	23.191.876	23.679.765	2.10
1860	31.433.321	31.944.002	1.62
1870	39.818.449	43.092.459	8.22

Tabla 11.2

A continuación modificaremos el modelo anterior para obligar a que la tasa de crecimiento sea una función que dependa del tiempo. Hemos comprobado que la tasa media de crecimiento que calculamos para las primeras décadas predice una población muy superior a la ofrecida por el censo. Para mejorar esta predicción, podemos calcular para cada una de las décadas su tasa de crecimiento r y encontrar la recta de regresión de todos estos datos.

Se pasa así del modelo discreto autónomo $x_{k+1} = f(x_k)$, al modelo discreto no autónomo $x_{k+1} = f(x_k, t_k)$. La recta de regresión $r(k) = 3.158 - 0.00155k$ ajusta a la nube de puntos de las diferentes tasas de crecimiento. En este caso, la ecuación en diferencia no autónoma será:

$$x_{k+1} = (1 + r(k))x_k, \quad (11.3)$$

siendo $t_k = 1790 + 10k$, y k el número de décadas después de 1790.

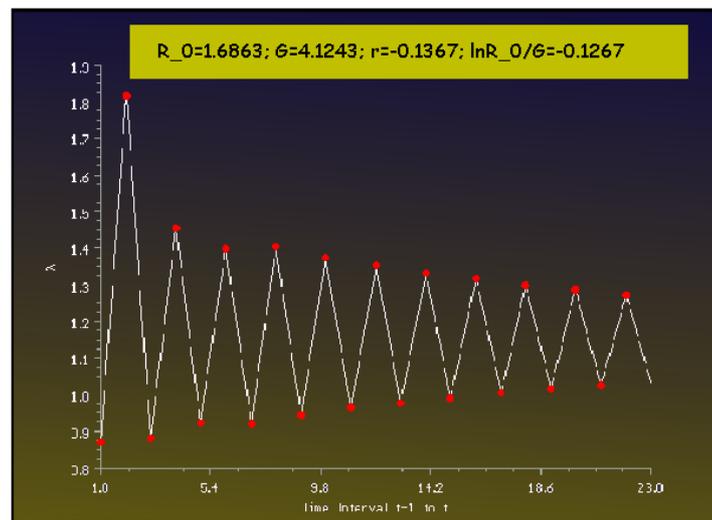


Figura 11.3: Tasa de crecimiento para la población de EEUU.

La Figura 11.4 permite comparar los datos del censo con las diferentes proyecciones que se obtienen al utilizar el modelo de crecimiento exponencial autónomo y no autónomo (que no dependen/dependen del tiempo). Llamamos la atención sobre el

hecho de que si utilizamos (11.3) para encontrar la población en cada década, es imprescindible conocer la población en la década anterior.

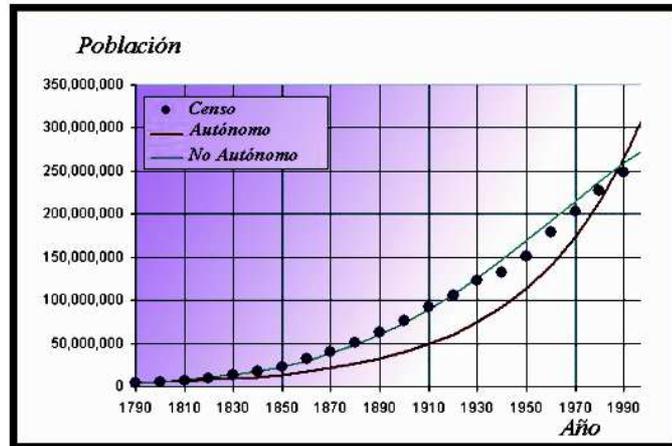


Figura 11.4: Modelos de crecimiento exponencial.

En la Tabla 11.3 se comparan numéricamente los datos reales con los obtenidos con (11.3). El modelo (11.3) predice 278244477 individuos para el año 2000, cifra que se encuentra ligeramente por debajo del valor real.

AÑO	CENSO	$1+r(k)$	$x(k+1)=(1+r(k))x(k)$	ERROR (%)
1790	3.929.214	1.3835	3.929.214	
1800	5.308.483	1.3680	5.436.068	2.4
1810	7.239.881	1.3525	7.436.540	2.7
1820	9.638.453	1.3370	10.057.921	4.4
1830	12.866.020	1.3215	13.447.440	4.5
1840	17.069.453	1.3060	17.770.792	4.1
1850	23.191.876	1.2905	23.208.655	0.1
1860	31.433.321	1.2750	29.950.769	4.7
1870	39.818.449	1.2595	38.187.231	4.1
1880	50.155.783	1.2440	48.096.817	4.1
1890	62.947.714	1.2285	59.832.440	4.9
1900	75.994.575	1.2130	73.504.153	3.3
1910	91.972.266	1.1975	89.160.537	3.1
1920	105.710.620	1.1820	106.769.743	1.0
1930	122.775.046	1.1665	126.201.837	2.8
1940	131.669.275	1.1510	147.214.442	11.8
1950	151.325.798	1.1355	169.443.823	12.0
1960	179.323.175	1.1200	192.403.461	7.3
1970	203.302.031	1.1045	215.491.877	6.0
1980	226.545.805	1.0890	238.010.778	5.1
1990	248.709.873	1.0735	259.193.737	4.2
2000	281.421.906		278.244.477	1.1

Tabla 11.3

11.2.1. Modelo discreto exponencial modificado

Hemos aplicado el modelo de crecimiento discreto exponencial para estudiar la evolución de una población. Durante su aplicación, se ha considerado el sistema como cerrado para poder trabajar con una tasa neta de crecimiento. Pero podemos modificar dicho modelo para tener en cuenta el hecho de la inmigración y de la emigración.

Supongamos que una población x_k crece de acuerdo al modelo discreto exponencial y asumimos que el número de personas que entran y salen en cada intervalo de tiempo es constante ($e - s = \mu$). Ahora, el crecimiento puede modelarse por la ecuación en diferencias:

$$x_{k+1} = (1 + r)x_k - \mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde r es la tasa de crecimiento. Conocidos estos datos y la población inicial x_0 podemos encontrar una expresión general de x_k . En efecto,

$$x_1 = (1 + r)x_0 - \mu$$

$$x_2 = (1 + r)x_1 - \mu = (1 + r)((1 + r)x_0 - \mu) - \mu = \\ (1 + r)^2 x_0 - ((1 + r) + 1)\mu$$

$$x_3 = (1 + r)^3 x_0 - ((1 + r)^2 + (1 + r) + 1)\mu$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_k = (1 + r)^k x_0 - ((1 + r)^{k-1} + (1 + r)^{k-2} + \dots + (1 + r) + 1)\mu$$

Aplicando la fórmula que nos da la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica, se obtiene

$$x_k = (1 + r)^k x_0 - \frac{(1 + r)^k - 1}{r} \mu,$$

expresión más complicada que la correspondiente al modelo discreto exponencial simple. Aunque en este caso concreto hemos podido encontrar una expresión para x_k en función de x_0 , r y μ , tenemos que decir que en general este cálculo suele ser complicado. Por esta razón, lo que se hace es estudiar el comportamiento cualitativo del modelo, por ejemplo, a través de su diagrama de *Cobweb*.

11.3. Crecimiento dependiente de la densidad de población

Ya hemos indicado que el análisis del modelo discreto exponencial y el sentido común, nos dicen que este tipo de crecimiento no puede mantenerse durante mucho tiempo.

En todos los casos, llega un momento en que la población se regula. Se han propuesto muchas hipótesis para explicar las causas que originan este autocontrol de la población, entre otras:

- Factores independientes de la densidad, como por ejemplo el clima.
- La cantidad de comida disponible.
- Problemas con su territorio o canibalismo.
- Depredadores.
- Parásitos o enfermedades.

De entre todos estos factores nosotros estudiaremos el segundo de ellos, es decir el crecimiento dependerá de la densidad de la población, y por tanto, ésta se autoregula.

Un modelo clásico apropiado para describir poblaciones de animales (o plantas) que viven un año, se reproducen y luego mueren, es de la forma:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.4)$$

donde f nos da el número de individuos para el próximo año en términos del número de individuos actuales. Se han propuesto diferentes modelos, simplemente cambiando la función f . Por ejemplo, en el estudio del caos se trabaja con el modelo de *May* (1974) donde la función f es,

$$f(x) = cx(1 - x).$$

11.3.1. El modelo de crecimiento discreto logístico

En 1913 *T. Carlson* estudió el crecimiento de un cultivo de levadura. La Tabla 11.4 muestra los datos recogidos en intervalos de una hora.

TIEMPO	POBLACIÓN	TIEMPO	POBLACIÓN	TIEMPO	POBLACIÓN
1	9.6	7	174.6	13	594.8
2	18.3	8	257.3	14	629.4
3	29.0	9	350.7	15	640.8
4	47.2	10	441.0	16	651.1
5	71.1	11	513.3	17	655.9
6	119.1	12	559.7	18	659.6

Tabla 11.4: Población de un cultivo de levadura

En ella se observa que la población no sigue un modelo de crecimiento discreto exponencial, ya que a partir de cierto momento la población se estabiliza y no crece exponencialmente. Es necesario que la función $f(x)$, del sistema discreto dinámico general $x_{k+1} = f(x_k)$, ahora sea cuadrática en lugar de ser una ecuación lineal.

Este nuevo modelo se conoce con el nombre de **modelo discreto logístico**, y viene expresado por

$$x_{k+1} = x_k + rx_k \left(1 - \frac{x_k}{M}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.5)$$

Observemos que para valores pequeños de la población $1 - \frac{x_k}{M} \approx 1$ y el modelo coincide con el exponencial. Sin embargo, para valores de la población $x_k \approx M$ entonces $x_{k+1} \approx x_k$. El parámetro M recibe el nombre de **capacidad de carga de la población**.

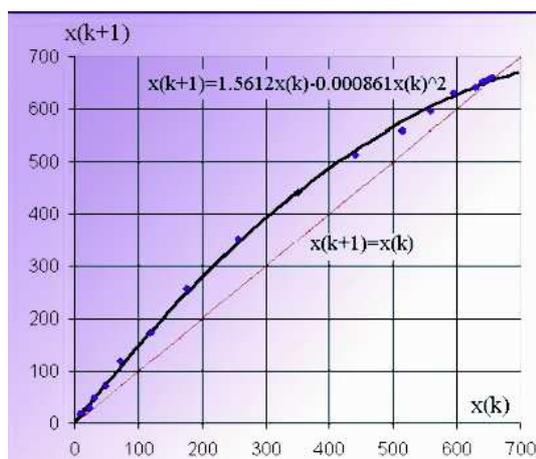


Figura 11.5: Modelo para un cultivo de levadura.

El comportamiento de (11.5) es bastante más complicado que (11.2). No existe una solución exacta de este sistema dinámico discreto. El ecólogo *Robert May* (1974) estudió dicha ecuación para diferentes poblaciones y descubrió que podía presentar dinámicas muy diferentes. Este hecho lo pusimos de manifiesto al analizar el caos matemático, ya que (11.5) puede ser escrita como $x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k)$.

A continuación aplicaremos este modelo para estudiar la evolución del cultivo de levadura.

EJEMPLO 11.2

- En la Figura 11.5 hemos dibujado x_{k+1} como función de x_k . Por ejemplo, los dos primeros puntos son (9.6, 18.3) y (18.3, 29). Posteriormente utilizando el programa **Mathematica®** se ha encontrado la parábola que pasa por el origen $y = ax - bx^2$ que mejor ajusta a estos datos, obteniéndose

$$x_{k+1} = 1.5612x_k - 0.000861x_k^2.$$

Podemos utilizar un programa de simulación, como por ejemplo **POPULUS®**, y obtendríamos la Figura 11.6. De forma cualitativa podemos ver que inicialmente se produce un crecimiento exponencial y que posteriormente la población se estabiliza alrededor de 650 que es la capacidad de carga del modelo.

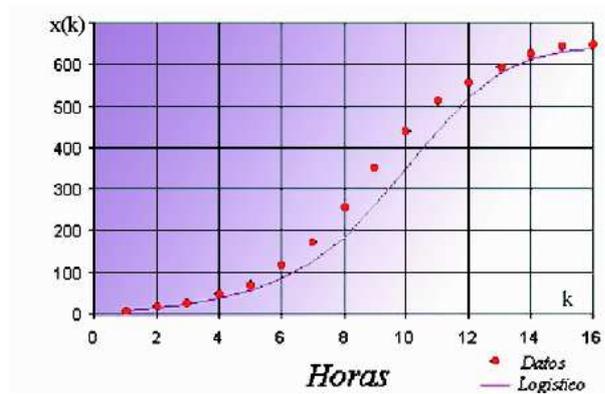


Figura 11.6: Simulación del modelo.

Observemos también que el punto de inflexión está situado en la mitad de la capacidad de carga, que corresponde a un tiempo entre las 9 y 10 horas. En este momento se produce el máximo crecimiento de la población.

11.3.2. Generalización del modelo discreto logístico

La mayoría de otros modelos comparten los rasgos cualitativos observados en el modelo de *May*. Si representamos en el eje de abscisas la población en el tiempo k , y en el eje de ordenadas la población en el período siguiente x_{k+1} , en gran parte de ellos se obtiene una curva del tipo representado en la Figura 11.7.

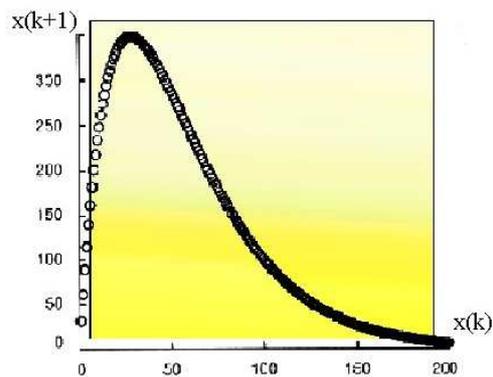


Figura 11.7

Observemos que esta curva tiene un único máximo. Cuando el nivel de la población es pequeño, entonces aumenta en función de la población actual, pero cuando el número de individuos es elevado, los mecanismos propios relacionados con la densidad de la población (competición, por ejemplo) reducen su nivel en los próximos años.

De entre los modelos más citados en el estudio de dinámica de poblaciones, se encuentran:

$$f(x) = x \left(1 + x \left(1 - \frac{x}{k} \right) \right),$$

$$f(x) = x e^{r(1-\frac{x}{k})},$$

$$f(x) = \frac{\lambda x}{(1 + \alpha x)^\beta}$$

En una de las prácticas del Laboratorio Matemático, realizamos un estudio intensivo del segundo de los modelos, conocido con el nombre de **modelo de Ricker** (1954). Para los otros dos casos, se puede hacer un tratamiento similar.

EJEMPLO 11.3

- Un modelo matemático dependiente de la densidad de la población y alternativo al modelo logístico de *May*, ha sido propuesto por *Gilpin* y *Ayala* (1973), y se expresa como:

$$x_{k+1} = f(x_k) = r x_k \left(1 - \left(\frac{x_k}{\beta} \right)^\alpha \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.6)$$

donde α es un parámetro positivo que depende del organismo en cuestión.

El punto de equilibrio no nulo de este modelo se obtiene resolviendo la ecuación

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad r x \left(1 - \left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right) = x$$

cuyo valor es

$$x^* = \beta \left(\frac{r-1}{r} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Para estudiar la estabilidad del modelo primero debemos derivar la función $f(x)$. Una vez simplificada se obtiene

$$f'(x) = r \left(1 - \left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha - \alpha \left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right).$$

Luego

$$f'(x^*) = f' \left(\beta \left(\frac{r-1}{r} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) = 1 - \alpha r + \alpha.$$

Este punto de equilibrio será estable cuando $|f'(x^*)| < 1$, lo cual ocurre cuando $1 < r < 1 + \frac{2}{\alpha}$.

En ciertas ocasiones, como por ejemplo en el modelo logístico de *May*

$$f(x) = cx(1 - x/M),$$

si el nivel de la población es demasiado bajo, entonces el número de individuos tiende a largo plazo al punto de equilibrio $x^* = 0$ y la población desaparece. Este fenómeno es conocido en ecología con el nombre de **Efecto Allen**. Muchas poblaciones biológicas que presentan este efecto, decrecen en su tamaño si el número de individuos se encuentran por debajo de cierto nivel crítico x_c . La región donde $x_k < x_c$ es conocida con el nombre de zona de depredación.

Podemos modificar el modelo anterior, para tener en cuenta este hecho, de la manera siguiente:

$$f(x) = cx \left(1 - \frac{x}{M}\right) (x - a), \quad a > 0.$$

11.4. Ejemplo de modelo discreto para la pesca

En los últimos años los modelos discretos han sido muy utilizados en el diseño de estrategias para la pesca. Se ha demostrado que son muy útiles para evaluar diversas tácticas de capturas de peces con un doble objetivo, en primer lugar para maximizar los beneficios y en segundo lugar para realizar una explotación de recursos mantenidos en el tiempo. El modelo que vamos a estudiar también puede ser aplicado a cualquier otro tipo de recurso renovable.

Supongamos que la densidad de la población en ausencia de capturas viene dada por

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si suponemos que $\epsilon(k)$ es la captura realizada en la población en el tiempo k , la cual es la que genera la población en el tiempo $k + 1$, entonces el modelo que estudia la dinámica de la población viene dado por:

$$x_{k+1} = f(x_k) - \epsilon(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.7)$$

Las dos preguntas que debemos contestar son:

- ¿Cuál es el máximo rendimiento biológico sostenible Y_M ?
- ¿Cuál es el máximo rendimiento económico E_M ?

Si encontramos los puntos de equilibrio de (11.7), deducimos que

$$x^* = f(x^*) - \epsilon^* \quad \Rightarrow \quad \epsilon^* = f(x^*) - x^*.$$

Si el máximo rendimiento sostenible del punto de equilibrio Y_M se alcanza cuando x^* toma el valor x_M , entonces su valor podemos encontrarlo haciendo

$$\frac{\partial \epsilon^*}{\partial x^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x^*) = 1.$$

El valor de Y_M será

$$Y_M = f(x_M) - x_M \quad (11.8)$$

y esta situación sólo es interesante cuando $Y_M \geq 0$.

Una estrategia podría ser mantener la población de peces en estos niveles con el objetivo de hacer máxima la captura Y_M . Pero como es difícil tener un conocimiento exacto de la población actual de peces, entonces este método puede ser difícil llevarlo a la práctica. Por esta razón, es más interesante formular el problema de optimización en términos de capturas y esfuerzos.

Supongamos que el esfuerzo para capturar un pez, de una población x , es ax , donde a es el parámetro de captura (que es independiente de la densidad x). Entonces el esfuerzo para reducir x en 1 unidad es $1/(ax)$ y $f(x)$ en 1 unidad es $1/(af(x))$. De esta manera, el esfuerzo E_M para obtener la captura $Y_M = f(x_M) - x_M$ es

$$E_M = \sum_{x_i=x_M}^{f(x_M)} (ax_i)^{-1}.$$

Frecuentemente los valores de este sumatorio son de tal manera que se pueden aproximar por la siguiente integral

$$E_M \approx \frac{1}{a} \int_{x_M}^{f(x_M)} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{f(x_M)}{x_M} \right). \quad (11.9)$$

Las ecuaciones (11.8) y (11.9) nos dan la relación de Y_M , E_M en función de x .

EJEMPLO 11.4

- Para terminar, aplicamos estos resultados a un modelo concreto, conocido como disco de *Holling*, que viene definido por:

$$x_{k+1} = \frac{\beta x_k}{\alpha + x_k}, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

En primer lugar encontramos el valor de x_M resolviendo $1 = f'(x_M)$. Es decir,

$$1 = \left(\frac{\beta x_M}{\alpha + x_M} \right)' = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + x_M)^2} \Rightarrow x_M = \sqrt{\alpha} (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}).$$

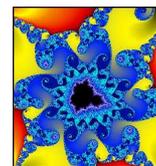
Si sustituimos en las ecuaciones (11.8) y (11.9), nos da

$$Y_M = \frac{\beta x_M}{\alpha + x_M} - x_M$$

$$E_M = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\beta}{\alpha + x_M} \right).$$

En este ejemplo, podemos eliminar entre las dos expresiones x_M y obtener una relación explícita entre Y_M y E_M ,

$$Y_M = (\beta e^{-cE_M} - \alpha) (e^{cE_M} - 1) .$$



Tema 12

FRACTALES Y BIOLOGÍA

12.1. Introducción

Unos de los científicos actuales más importantes en el campo de los fractales, el profesor *Michael F. Barnsley*, publicó en 1993 el libro *Fractals everywhere*, [8], el cual se ha convertido en la referencia básica de todos aquellos que se ocupan de esta disciplina. En la primera página, dentro del capítulo de introducción, puede leerse:

Fractal geometry will make you everything differently. There is danger in reading further. You risk the loss of your childhood vision of clouds, forests, galaxies, leaves, feathers, flowers, rocks, mountains, torrents of water, carpets, bricks, and much else besides. Never again will your interpretation of these things be quite the same.

Y en efecto, una vez conocidas las nociones básicas de esta teoría, ya nunca más se vuelve a mirar a la naturaleza y al mundo que nos rodea con los mismos ojos.

La geometría fractal como tal nace en 1975, pero muchas de sus aplicaciones y conceptos eran conocidos mucho antes en un contexto muy diferente. En 1875 tiene lugar una crisis importante de los fundamentos de las Matemáticas. Al mismo tiempo, un matemático, *Reymond*, estudió intensamente la función de *Weierstrass*, una curva continua que tiene la particularidad de que no posee derivada en cualquiera de sus puntos,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \text{sen}(\lambda^i x), \quad 1 < s < 2, \quad \lambda < 1.$$

Funciones de este tipo, con un gran número de irregularidades, ya eran conocidas en el siglo XVII, antes del descubrimiento del cálculo infinitesimal por *Newton* y

Leibnitz, pero se pensaba que eran muy escasas y además poco interesantes desde el punto de vista práctico. Los primeros en darse cuenta que estas funciones no eran la excepción sino la norma fueron *Cantor* y *Peano*, pero fue *Poincaré* el primero en hacer un estudio sistemático de todos estos hechos y elaborar una teoría que hoy en día se la conoce con el nombre de Teoría del Caos. El final de la crisis de fundamentos se produce en 1925, y durante su desarrollo aparece un grupo importante de excelentes matemáticos: *Cantor*, *Peano*, *Lebesgue*, *Hausdorff*, *Besicovitch*, *Bolzano*, *Koch*, *Sierpinski*.

Sabemos que la Geometría de Euclides es la herramienta adecuada para estudiar las estructuras regulares y la dinámica de *Newton*. Como hemos indicado, la necesidad de unas “nuevas matemáticas” se puso de manifiesto al descubrirse estructuras algebraicas, como son la curva de *Cantor* y la curva de *Peano*, con un gran número de irregularidades y que además eran capaces de “llenar” la porción del plano donde se encuentran. En este caso, observemos lo siguiente: al ser una curva tienen dimensión 1, pero al rellenar un cuadrado su dimensión debería ser 2, por tanto, ¿cuál es la dimensión de estos objetos? Estos nuevos elementos no estaban contemplados en la matemática tradicional y en un principio fueron considerados como “monstruos matemáticos”.

A continuación destacaremos algunos momentos relevantes relacionados con los objetos que presentan un elevado número de irregularidades, con el objetivo de poner de manifiesto la gran inquietud existente en relación a las funciones continuas no diferenciables.

- En el siglo XVII *Richard Bentley* llamó la atención sobre la relación existente entre los objetos regulares y la representación de la naturaleza: “..no hemos de creer que las orillas del mar sean realmente deformes por no tener la forma de un baluarte regular; que las montañas no son exactamente como conos o pirámides, ni las estrellas están situadas desmañadamente por no estar a una distancia uniforme..”
- En 1893 *Charles Hermite*, en una carta dirigida al gran matemático *T. Stieljes*, comentaba: “.. abandono con espanto y horror esta lamentable plaga de las funciones sin derivada...”.
- El premio nobel en 1906 por el descubrimiento del movimiento browniano de las partículas *Jean Perrin*, realizó el siguiente comentario: “.. los matemáticos son muy conscientes de lo pueril de tratar de demostrar, con dibujos solamente, que toda función continua tiene derivada, aunque las funciones diferenciables son las más simples, y las más fáciles de manejar, son una excepción. Podría darse el caso en los que usar una función no diferenciable fuera más simple que usar una que si lo fuera. Cuando esto ocurra se habrá probado el valor práctico del estudio matemático de los continuos irregulares...pero, por el momento, esta hipótesis no es más que un sueño”.

- En 1922 *Lebesgue* escribió un artículo sobre superficies sin planos tangentes, “*pañuelos totalmente arrugados*”, pero el gran matemático *Hermite* no recomendó su publicación.
- *Norbert Wiener* en 1956 construyó un modelo no diferenciable del movimiento browniano. Como hecho anecdótico podemos comentar que en su obra aparece por primera vez la palabra caos. “.. *la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de la geometría euclídea o el cálculo diferencial de Newton (no existe recta tangente en ningún punto de una costa)*”.
- Finalmente, es a partir de 1970 con *Paul Levy* cuando se aceptan de una forma natural aquellas curvas que no presentan derivadas.

Ya hemos puesto de manifiesto la importancia que tenían los objetos irregulares en la primera mitad del siglo XX. Sin embargo, fue necesario el impulso y la creación de estas nuevas estructuras, conocidas como fractales, por parte de *Benoit Mandelbrot*, a partir de un problema de la vida real. En 1958 *Mandelbrot* trabajaba en IBM en un problema bastante común en las líneas telefónicas como era el ruido de fondo. La cuestión era difícil de resolver debido a la complejidad de construir un modelo matemático que representase fielmente al patrón con el que se difundía el ruido. En 1945 había estudiado los trabajos de *Gastón M. Juliá*, en especial “*Mémoire sur l’iteration des fonctions rationnelles*”, y un poco después los trabajos de *Cantor*. Aplicando estos conocimientos y partiendo del conjunto de *Cantor* observó que el nuevo modelo representaba bastante bien al ruido de fondo de las líneas telefónicas.

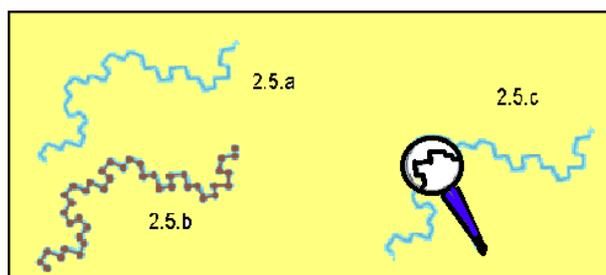


Figura 12.1: ¿Cuánto mide una costa?

Desde ese instante, su campo de investigación se centró en el análisis de las estructuras que presentaban un elevado número de irregularidades. En su famoso artículo *¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña?*, planteaba un problema aparentemente fácil: ¿cómo medir la longitud de la curva de la Figura 12.1.a? Podríamos utilizar una determinada unidad de medida y sumar todos los segmentos que aparecen en la Figura 12.1.b, pero es evidente que podemos encontrar una mejor aproximación de la solución si tomamos una unidad de medida más pequeña (Figura 12.1.c). Aunque más adelante volveremos sobre esta cuestión, es importante darse cuenta de un hecho relevante como es que la **longitud de la costa dependerá de la escala que**

utilicemos para medirla.

Desde finales de los años 70 los fractales han estado presentes en la investigación matemática, científicos como *Barnsley*, *Douady*, *Hubbard*, y *Sullivan* los estudian de manera teórica y práctica. De entre ellos, debemos destacar la labor realizada por el profesor *Robert L. Devaney* siendo sus libros, [11, 12, 13] referencias básicas para todos los interesados en el tema.

12.2. Concepto de fractal

Es muy difícil dar una definición exacta de un fractal, ya que es necesario un nivel muy elevado de abstracción para definirlo rigurosamente. Por otro lado, el número de sus aplicaciones es tan inmenso y en campos tan diversos que según sea la disciplina a estudiar aparecerá una definición u otra. A continuación presentamos algunas de las más usuales:

- Los fractales son los objetos matemáticos que conforman la geometría de la Teoría del Caos
- Los fractales son objetos cuya dimensión es un número racional.
- Un fractal es aquél objeto donde su dimensión Hausdorff - Besicovich es mayor que su dimensión topológica
- Un objeto fractal es aquél que es autosemejante y su dimensión es racional.

En general, los fractales son objetos matemáticos que se estudian dentro de la teoría geométrica de la medida. Bajo este nombre suelen entenderse ciertos objetos matemáticos con unos rasgos comunes, aunque debemos de aclarar que las definiciones concretas no son aplicables a todos ellos.

El término fractal fue introducido por *Benoit Mandelbrot* y procede del adjetivo latino *fractus* que significa fragmentado y también irregular.

Existe una gran variedad de fractales siendo los lineales los más simple.

DEFINICIÓN 12.2.1 *Un fractal lineal es el producto final que se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado.*

Este proceso geométrico elemental, que es generalmente de naturaleza muy simple, determina perfectamente la estructura final, que muy frecuentemente, debido a la repetición infinita que se ha efectuado, tiene una complicación aparente extraordinaria. Normalmente los fractales son **autosemejantes**, es decir, tienen la propiedad de que una pequeña sección de un fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal.

Un ejemplo de fractal lineal es el que aparece en la Figura 12.2 conocido con el nombre de “copo de nieve” curva que se obtiene tomando un triángulo equilátero y

colocando sucesivos triángulos, cada vez de menor tamaño, en el tercio medio de los lados, cada vez más pequeños. Notemos que la curva resultante es totalmente irregular y que no puede diferenciarse. Además, en teoría, el resultado es una figura que tiene superficie finita pero con un perímetro de longitud infinita y con un número infinito de vértices

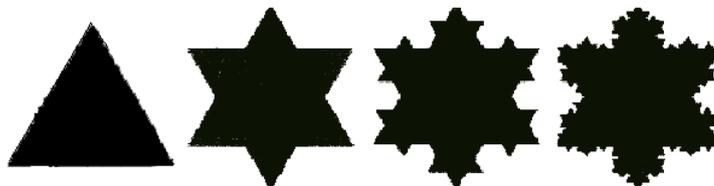


Figura 12.2: Fractal copo de nieve.

A pesar de la simplicidad de su construcción la figura resultante es bastante compleja, repitiéndose estas características en el resto de los fractales lineales como, por ejemplo, el conjunto de *Cantor*. Su construcción es la siguiente: se toma un segmento, se divide en tres partes iguales, se elimina el segmento central, y con cada uno de los dos restantes se procede del mismo modo, es decir, se divide en tres partes iguales. Y así infinitas veces. Lo que queda es el conjunto de Cantor.

Los fractales lineales son demasiado “perfectos” para representar los diferentes objetos de la naturaleza, como una hoja, un árbol o una neurona. Por este motivo, es necesario introducir los no lineales.

DEFINICIÓN 12.2.2 *Un fractal no lineal es aquel que se obtiene a partir de iterar una función no lineal definida en el cuerpo de los números complejos.*

Entre los fractales no lineales más conocidos se encuentran el conjunto de Julia y el conjunto de Mandelbrot (Figura 12.3).

Antes de seguir adelante es conveniente detenernos un momento y recordar el concepto clave que estudiamos en el tema de los sistemas dinámicos discretos, como es la **iteración**. La iteración es repetir y volver a repetir sobre sí mismo una cierta cantidad de veces. Por ejemplo, en el caso del conjunto de *Mandelbrot* la función no lineal con la que se trabaja es $f_C(z) = z^2 + C$, con z y C números complejos. Si seleccionamos un número complejo z_0 , entonces calculamos $z_1 = f_C(z_0) = z_0^2 + C$, a continuación $z_2 = f_C(z_1) = z_1^2 + C$, $z_3 = f_C(z_2) = z_2^2 + C$, y así sucesivamente. Si la sucesión $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}$, permanece a una distancia del origen menor de 2, entonces el punto z_0 está en el conjunto de *Mandelbrot*. Si la sucesión anterior diverge desde el origen, entonces el punto no pertenece al conjunto.

Dicho de otra forma, el conjunto de *Mandelbrot* es el conjunto de puntos cuya órbita generada con la fórmula dada nunca escapa de un círculo de radio 2. En cuanto a los números incluidos en el conjunto de *Mandelbrot*, el punto correspondiente a la imagen aparece en color negro. En el caso de los números que no están dentro del conjunto, los colores se asignarán de acuerdo a la “rapidez” de incremento de la sucesión de números complejos. Por ejemplo, si la sucesión se incrementa lentamente,

el punto inicial aparece de color azul claro, si crece más rápidamente, tendrá color amarillo o rojo, dependiendo de la velocidad de este incremento.

De acuerdo con la definición de fractal no lineal, podemos intuir que la geometría fractal es la herramienta más interesante a la hora de modelizar situaciones reales de gran complejidad originadas por múltiples repeticiones de procesos muy elementales, pues como hemos visto, los fractales nos ofrecen la posibilidad de construir estructuras complicadas a través de procesos simples. De esta manera, es corriente representar de forma simbólica la geometría fractal como un puente que conecta el orden y el caos, utilizando como instrumento los procesos infinitos iterativos.

Llama la atención del elevado número de personas, sin conocimientos matemáticos, que se han acercado a la geometría fractal por motivos únicamente estéticos. Pero aparte de estas cuestiones artística, existen poderosas razones para estudiar estas estructuras fractales, ya que el número de aplicaciones aumenta constantemente en múltiples y diversas ramas del conocimiento, entre ellas la Biología y la Medicina.

Es evidente, que el gran auge que este estudio ha experimentado en los últimos años se debe, en buena parte, a la introducción del ordenador como herramienta auxiliar. Los fractales autosemejantes, la teoría de la iteración, los sistemas dinámicos, se basan en la repetición, en principio infinita, de un cierto proceso bien determinado, y el ordenador es el instrumento ideal para llevar a la práctica estas tareas.

12.2.1. Fractales de Julia y Mandelbrot

En este apartado mostraremos dos de los fractales más importantes, como son el conjunto de Julia y el de Mandelbrot.

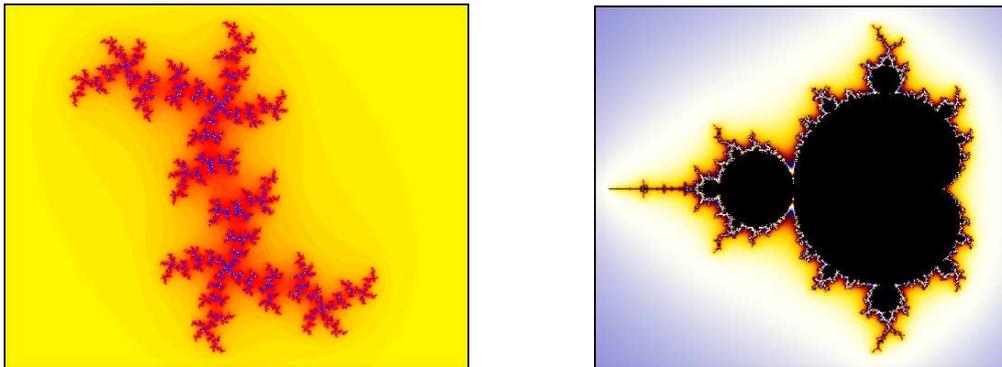


Figura 12.3: Izquierda: conjunto de Julia. Derecha: conjunto de Mandelbrot.

Gaston Maurice Julia nació el 3 de Febrero de 1893 en Sidi Bel Abbés (Argelia) y falleció en París el 19 de Marzo de 1978. Con solo 25 años publicó un manuscrito de 199 páginas titulado “*Mémoire sur l’iteration des fonctions rationnelles*” que es considerado un referente básico en la gestación y posterior desarrollo de los fractales. Luchó en la Primera Guerra Mundial, donde fue herido y mutilado en un ataque en el frente francés que le originó un cambio profundo en su personalidad.

En el artículo que hemos mencionado aparece una descripción precisa de los conjuntos $J(f)$, para los cuales la n -ésima iteración de un número complejo permanecía acotada cuando el número de iteraciones tendía a infinito. Por este trabajo recibió el gran premio de la Academia de las Ciencias. Durante los años 20 disfrutó de gran fama, siendo nombrado profesor titular en la Escuela Politécnica de París, pero posteriormente su trabajo fue olvidado, hasta que *B. Mandelbrot* lo puso de actualidad con sus experimentos con los ordenadores.

Benoit Mandelbrot, nació en Warsaw, Polonia el 20 de Noviembre de 1924, su familia emigró a Francia en 1936, donde su tío *Szolem Mandelbrot* se encargó de su educación. Después de completar sus estudios en la Escuela Politécnica de París, viajó al Instituto Tecnológico de California en Estados Unidos y al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton donde estudió con el gran matemático *John von Neuman*. Regresó a Francia en 1955 y trabajó en el Centro Nacional de Investigaciones Científicas. No permaneció en Francia mucho tiempo, descontento del tipo de Matemáticas que en aquel momento se hacían en este país. De nuevo en Estados Unidos trabajó en el centro de investigación *Watson Research Center* de IBM, donde realizó gran parte de su investigación más relevante. Su dedicación a las matemáticas aplicadas parece ser que fue una reacción de rechazo al tipo de investigaciones en matemática teórica que hacía el grupo Bourbaki donde se encontraba integrado *Szolem Mandelbrot*.

El germen de partida de su investigación puede situarse en torno al año 1945 cuando, a sugerencia de su tío, leyó los trabajos de *Julia* y decidió resolver los mismos problemas desde un punto de vista diferente. Con la ayuda del ordenador comprobó que en los trabajos de *Julia* se encuentra el origen de los fractales que hoy en día conocemos. Su primer estudio, publicado en 1975, es el libro “*Les objets fractals, form, hasard et dimension*”, el cual completó en 1982 en su libro numerosamente citado “*Fractal geometry of nature*”.

Julia y *Fatou* se dieron cuenta que para la función $f_C(z) = z^2 + C$, con z y C números complejos, para cualquier valor de C , el conjunto de *Julia* asociado resulta ser uno de estos dos tipos:

- Conexo. Formado por una sola pieza
- Completamente desconexo. Formado por una nube de puntos dispersos, similar al conjunto de *Cantor*.

El conjunto de *Mandelbrot* está formado por aquellos puntos C para los cuales el conjunto de *Julia* asociado al sistema dinámico resulta conexo. En consecuencia: Tomamos un valor C y calculamos el conjunto de *Julia* asociado. Si sale conexo lo pintamos de negro, en caso contrario de otro color. ¿Cómo saber si el conjunto de *Julia* asociado es conexo? *Julia* probó que basta ver si la órbita del $z = 0$ está acotada. ¿Cuándo diverge una órbita?, cuando alguno de sus puntos tiene un módulo mayor o igual que 2. (Para ello, es suficiente obtener cien iteraciones para conocer el comportamiento de la órbita).

12.3. Concepto de dimensión fractal

La característica principal de un fractal es lo que se conoce con el nombre de dimensión fractal, y en cierto modo este número indica el grado de irregularidad de un objeto.

12.3.1. Dimensión topológica

La dimensión topológica coincide con el número de direcciones ortogonales diferentes que podemos tomar al movernos por el espacio. En este caso, una línea cualquiera es unidimensional, ya que cada uno de sus puntos queda identificado por un número real. La línea no tiene por qué ser recta, pero basta un único valor para situarnos en un camino, por muchas curvas que tenga. El conjunto vacío tiene dimensión -1, un punto tiene dimensión 0, y el plano dimensión 2.

Ahora bien, esta definición de dimensión topológica no es tan elemental. En efecto, sabemos que en el espacio que conocemos contamos con tres direcciones: izquierda - derecha, atrás - delante y arriba - abajo, pero podemos estudiar espacios más caprichosos. Por ejemplo, el espacio formado por dos segmentos que se cruzan sería unidimensional de no ser por el punto de intersección, donde se pueden tomar dos direcciones. A este valor se le conoce como dimensión local, y varían dentro de un mismo espacio cuando éste no es homogéneo.

Una propiedad interesante en topología es la conservación del valor de la dimensión cuando se realiza una transformación homotópica. Es decir, si deformamos un objeto, sin romperlo, perforarlo o soldarlo, conservará su dimensión.

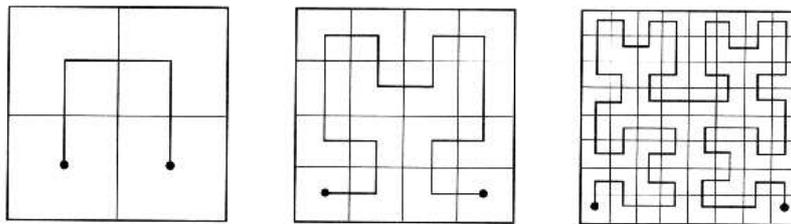


Figura 12.4: Curva de *Hilbert*.

En 1890, *Peano* construyó una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad $[0,1] \times [0,1]$. Era el primer ejemplo de una “curva que llena un espacio”. Años más tarde, *Hilbert*, interesado también por este tipo de problemas, ideó otra del mismo tipo con una construcción geométrica más simple de describir. La curva de *Hilbert* se construye de la siguiente manera (véase Figura 12.4). Dividimos el cuadrado unidad en cuatro cuadrados iguales y unimos los centros de dichos cuadrados por segmentos. Cada uno de esos cuadrados se divide de nuevo en cuatro cuadrados y conectamos sus centros comenzando siempre por el cuadrado inferior izquierdo y terminando en el cuadrado inferior derecho. Se continúa de esta forma indefinidamente uniendo los centros de los cuadrados que resultan en cada etapa. La curva límite de tales poligonales “llena” el cuadrado unidad.

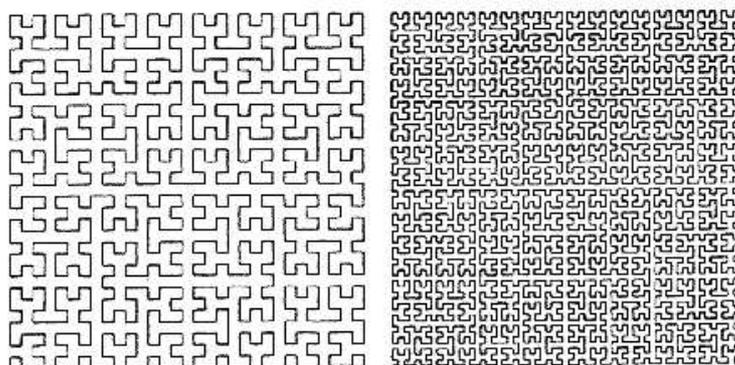


Figura 12.5: Curva de *Hilbert*.

Si una curva contiene todos los puntos de una superficie, ¿no sería más lógico decir que su dimensión es la misma que la de la superficie? Más aún: si iterásemos el patrón anterior, la curva resultante tocaría todos los puntos de un cuerpo tridimensional, como muestra la Figura 12.6.

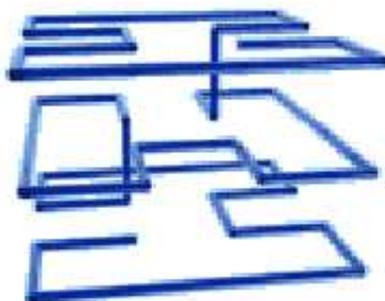


Figura 12.6: Curva de *Hilbert* en tres dimensiones.

En 1904 *Helge von Koch* presentó la curva que hoy lleva su nombre y que hemos tenido ocasión de comentar en la sección anterior. Repitamos ahora el proceso sobre el segmento unidad $[0, 1]$. Se divide en tres partes, sustituyendo la parte central por dos segmentos que junto con dicha parte, formarían un triángulo equilátero. Se obtiene así una poligonal de longitud $4/3$. Con cada uno de los cuatro segmentos que quedan determinados se repite la operación anteriormente descrita, obteniéndose una poligonal de longitud $16/9$. Se procede indefinidamente de esta forma obteniendo en cada etapa k una poligonal P_k de longitud $(4/3)^k$.

La curva de *Koch* se define como la curva límite a la cual converge la sucesión $\{P_k\}$ cuando k tiende a infinito. Se trata, por tanto, de una curva de longitud infinita pues $(4/3)^k$ tiende a infinito cuando k tiende a infinito. Más aún, la longitud de la parte de curva comprendida entre dos puntos cualesquiera de la misma también es infinita.

Para este tipo de nuevos objetos, la longitud es un concepto tremendamente complicado y en cierto modo carente de sentido. Por este motivo tenemos que recurrir

al concepto de dimensión, y preguntar no por la longitud de un fractal, sino por su dimensión.

12.3.2. Dimensión fraccionaria

El cálculo de la dimensión fractal es, en general, muy difícil. De hecho, existen muchos fractales que desconocemos su dimensión fractal exacta. Por este motivo, en un principio nos limitaremos a los fractales lineales.

Todos sabemos que si a un cuadrado de lado unidad, dividimos el lado por la mitad, nos aparecen 4 cuadrados de lados $1/2$. Del mismo modo si tomamos como lado $1/3$ nos aparecerán 9 cuadrados, y así sucesivamente. Si en lugar de un cuadrado partimos de un cubo, el factor de multiplicación sería de ocho. Nos encontramos, por tanto, ante un rasgo distintivo de cada dimensión. Precisando más, supongamos que una figura de dimensión entera d puede ser descompuesta en n copias a escala r de sí misma, entonces es fácil ver que $n = (1/r)^d$. Si el objeto de partida es un cuadrado y dividimos su lado en tres partes iguales, tenemos que $n = 9$ y $r = 1/3$. Es decir $9 = 3^2$.

Si en $n = (1/r)^d$, despejamos el valor de d ,

$$d = \frac{\ln n}{\ln(1/r)}.$$

Para el ejemplo anterior del cuadrado su dimensión será:

$$d = \frac{\ln 9}{\ln (1/(1/3))} = \frac{\ln 3^2}{\ln 3} = \frac{2 \ln 3}{\ln 3} = 2 .$$

De manera similar puede comprobarse que la dimensión fractal del conjunto de *Cantor* será $\ln 2 / \ln 3 = 0.6309..$ y la correspondiente a la curva de *Koch* $\ln 4 / \ln 3$.

Observemos que, en general, para este tipo de objetos la dimensión es un número fraccionario y además mayor que la dimensión topológica. Sin embargo, existen algunas patologías. Por ejemplo, la dimensión fractal de la curva de Peano es $d = \log 9 / \log 3 = 2$, un número entero. Para un fractal muy conocido como es el triángulo de *Sierpinski*, (Figura 12.8) tenemos que $d = \log 3 / \log 2 = 1.58496$ **menor** y no mayor que su dimensión topológica que es 2. Observemos que esto último también ocurre para el conjunto de *Cantor* ya que su dimensión fraccionaria 0.6309... es menor que su dimensión topológica que es 1.

12.3.3. Dimensión Hausdorff-Besicovich

Para hacer un estudio en profundidad de este apartado es necesario tener cierta base matemática, es particular conocer algo de topología y espacios métricos. Por este motivo, daremos la definición basándonos en la definición fraccionaria de fractal.

Como hemos comentado anteriormente, en el caso de fractales no lineales, cuando no podamos realizar una medición exacta, siempre podemos recurrir a un estudio progresivo. Se trata de cubrir la curva con el número mínimo de cuadrados cada vez más pequeños. Llamamos h al tamaño de cada uno de los cuadrados, y $N(h)$ al número de los cuadrados que cubren la curva en cada caso. El método nos permite obtener una aproximación de la dimensión fractal de cualquier objeto, también conocida como dimensión *Hausdorff - Besicovitch*, cuya fórmula es

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln N(h)}{\ln(1/h)}. \quad (12.1)$$

Es decir, la medida de *Hausdorff - Besicovitch* es la forma de asignar una dimensión fraccionaria a un conjunto. Su cálculo “a mano” es muy complejo y por este motivo lo que se hace es recurrir a diferentes programas de ordenador, que suelen utilizar el **método Box Counting**. Básicamente el método consiste en lo siguiente: a partir de una fotografía del objeto, obtenemos una versión binaria de la imagen. Es decir, a los píxeles brillantes del conjunto se le asocia el valor uno y cero al resto. A continuación se obtiene una imagen del contorno y superponemos sobre esta imagen una malla cuadrada de un tamaño dado. Se cuenta el número de estos cuadrados que contienen al contorno y se repite el proceso con diferentes tamaños de mallas. Finalmente, se realiza un ajuste por mínimos cuadrados y la pendiente de la recta de regresión será la dimensión del objeto fractal.

Por último, llamemos la atención sobre el hecho más importante en el concepto de dimensión fractal como es que el número obtenido es **independiente** de la escala que estemos utilizando.

12.4. Tipos de fractales

En este apartado subdividiremos los dos grandes tipos de fractales que hasta ahora conocemos: lineales y no lineales.

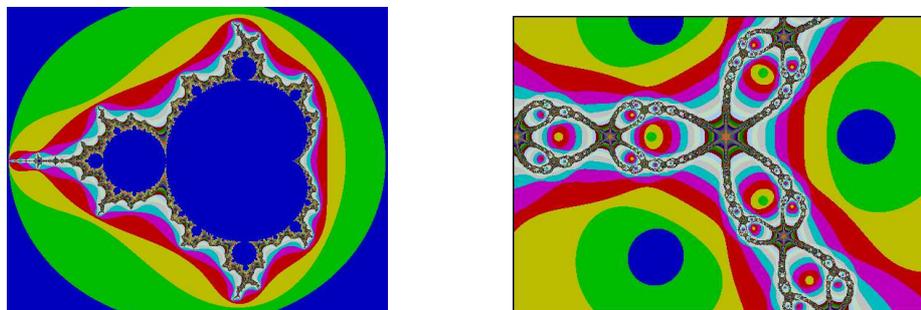


Figura 12.7: Algoritmos de escape.

A grandes rasgos, los fractales podemos clasificarlos en:

- **Algoritmos de escape.** La Figura 12.7 es un fractal de *Mandelbrot*, y se genera mediante un algoritmo de escape, básicamente el método consiste en lo siguiente: para cada punto se calculan una serie de valores mediante la repetición de una fórmula hasta que se cumple una condición, momento en el cual se asigna al punto un color relacionado con el número de repeticiones.

Los fractales de este tipo precisan de millones de operaciones, por lo cual sólo pueden dibujarse con la ayuda del ordenador.

- **Sistema de Funciones Iteradas (IFS).** Es un método creado por *M. Barnsley*, basándose en el principio de autosemejanza. En un fractal IFS siempre se puede encontrar una parte de la figura que guarda una relación de semejanza con la figura completa. Esa relación es a menudo muy difícil de apreciar, pero en el caso del helecho de la figura siguiente es bastante clara: cualquier hoja es una réplica exacta de la figura completa.

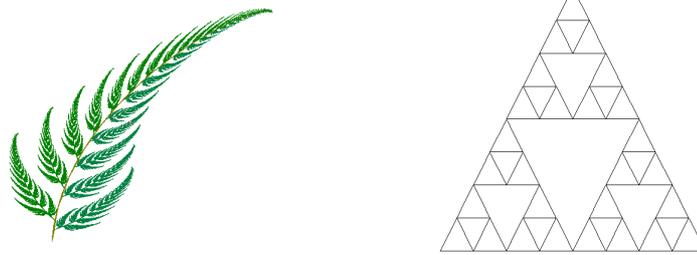


Figura 12.8: Funciones iteradas y Triángulo de *Sierpinski*.

- **L-Systems** Este método de construcción de fractales fue creado en 1968 por *Aristid Lindemayer*, y publicado en el *Journal of Theoretical Biology*, con el nombre “*Mathematical Models for Cellular Interaction in Development*”. En el trabajo *Lindemayer* proponía un modelo matemático para la creación de un filamento celular de la bacteria *Anabaena Catenula*. Se supone un sistema celular con dos posibles estados citológicos, *A* y *B*, y la siguiente regla de crecimiento: una célula en el estado *A* se divide y da lugar a una célula en el estado *A* y otra célula en el estado *B*; y lo representaremos por *AB*. Por otro lado, una célula en el estado *B* se divide en una célula en el estado *B* y otra en el estado *A*, es decir *BA*. En la tabla siguiente hemos representado el resultado de la división para las cuatro primera fases, tomando como célula de partida del tipo *A*.

Fase	Núm células	Resultado división
1	1 (<i>A</i>)	<i>AB</i>
2	2 (<i>AB</i>)	<i>ABBA</i>
3	4 (<i>ABBA</i>)	<i>ABBABAAB</i>
4	8 (<i>ABBABAAB</i>)	<i>ABBABAABBAABABBA</i>

Tabla 12.1

Nosotros podemos generar este tipo de fractales utilizando como software FantasticFractal[®].

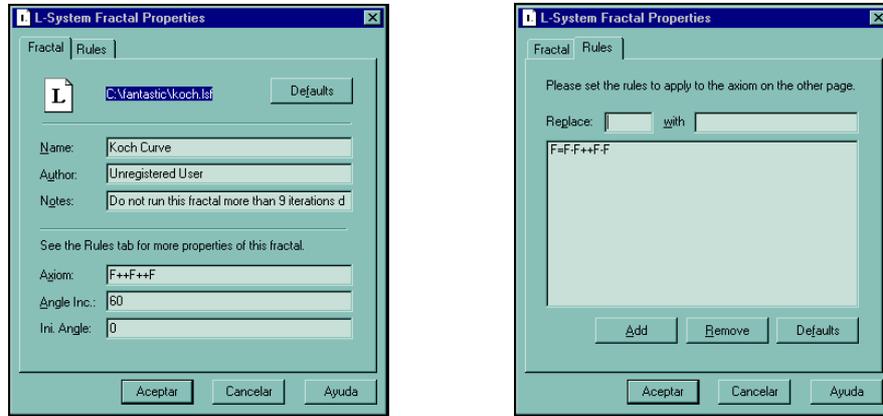


Figura 12.9: Propiedades del fractal.

En la Figura 12.9 aparecen las propiedades del fractal isla de Koch. El signo + representa un giro de 60 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj, y el signo - un giro de 60 grados en la dirección de las agujas del reloj. Para poder dibujar el fractal es necesario indicar la regla, que en nuestro caso viene dada por, $F=F-F++F-F$. Es decir, F estará definida por la figura siguiente: se traza un segmento unitario, en su extremo giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y dibujamos un segundo segmento, después giramos 120 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj y dibujamos otro segmento, finalmente giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y dibujamos el último de los segmentos. La figura que aparecerá será la que puede verse en 2.10



Figura 12.10: Regla para la isla de Koch.

A partir de la regla F se define el axioma, que en nuestro ejemplo viene dado por, $F++F++F$, y cuyo significado es el siguiente: una vez dibujada la Figura 12.10 (F), en su extremo giraremos 120 grados en dirección contraria a las agujas del reloj ($++$) y colocamos de nuevo la Figura 12.10 (F), finalmente se gira otros 120 grados ($++$) y se vuelve a representar la Figura 12.10 (F). El resultado final puede verse a la izquierda de la Figura 12.11.

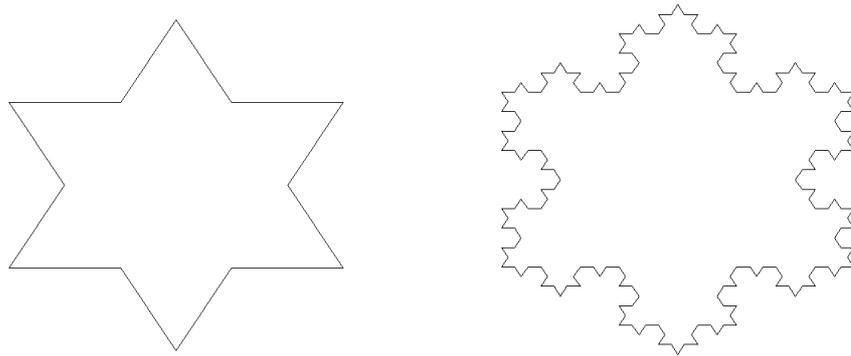


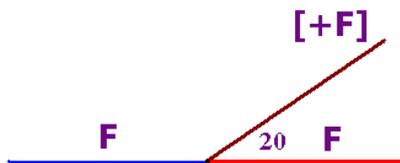
Figura 12.11: Izquierda: primera iteración. Derecha: tercera iteración

Si volvemos al ejemplo inicial de la bacteria *Anabaena Catenula*, podemos definir un algoritmo parecido a la isla de Koch de la manera siguiente:

- 1.- Indicamos cuales son los elementos de partida
 - Existencia de una única célula: A
- 2.- Definimos las reglas
 - La regla de sustitución de la célula A es $A=AB$
 - La regla de sustitución de la célula B es $B=BA$

Si lo implantamos en un programa de ordenador y lo ejecutamos con diferentes iteraciones, aparecerá la Tabla 12.1.

Los L-systems son muy adecuados para modelar muchos sistemas biológicos, especialmente aquellos que presentan bifurcaciones o ramificaciones en su desarrollo. El esquema básico para dibujar una bifurcación con un ángulo dado (por ejemplo 20°) es el siguiente: $F=F[+\text{F}]F$, donde los corchetes indican que al final se debe retroceder a la posición donde empezaba la bifurcación.



Naturalmente, podemos definir una regla más complicada y obtener un modelo más realista. Por ejemplo, para representar a un árbol se ha elegido como regla $F=F+F+[+\text{F}-\text{F}^-]-[-\text{F}+\text{F}+\text{F}]$ y un ángulo de 22° . En la Figura 12.12 pueden verse los resultados para un número diferentes de iteraciones.

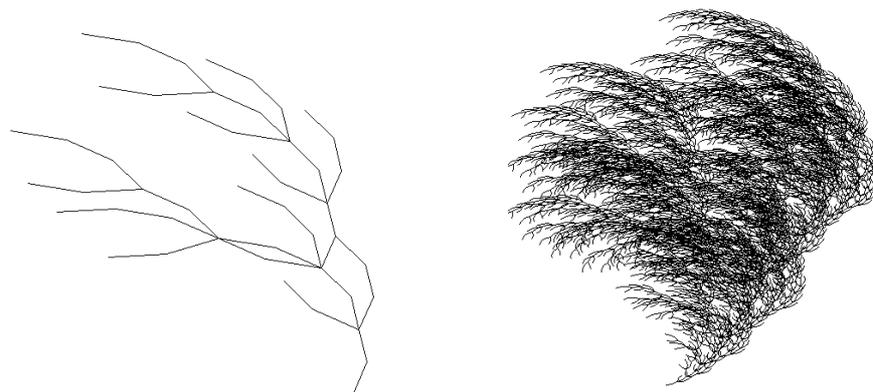


Figura 12.12: Izquierda: segunda iteración. Derecha: quinta iteración

También podemos dibujar el triángulo de *Sierpinski* través de este tipo de algoritmo. Recordemos que consiste en un triángulo en el que se aloja otro, uniendo los puntos medios de cada uno de sus lados. Esto se repite con todos y cada uno de los triángulos formados que tengan la misma orientación que el original, y así sucesivamente. El triángulo de *Sierpinski* es uno de los pocos fractales que se puede dibujar con exactitud sin ayuda de un ordenador, siguiendo las instrucciones anteriores. Como curiosidad, si en un triángulo de Pascal coloreamos los números impares, la figura que aparece se parece al triángulo de *Sierpinski*.

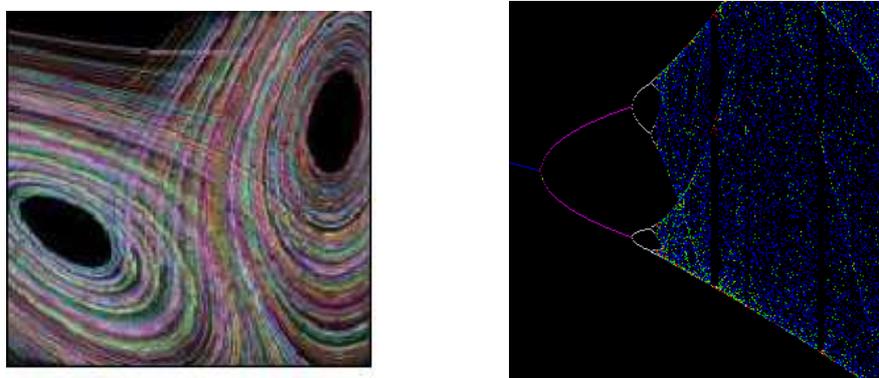


Figura 12.13: Fractales caóticos.

- **Órbitas caóticas.** Un ejemplo de este tipo de fractales es el atractor o mariposa de *Lorenz*, y el diagrama de bifurcación correspondiente al modelo discreto logístico, que tendremos ocasión de volver cuando estudiemos el capítulo de los sistemas dinámicos discretos.
- **Aleatorios y celulares.** Ciertas categorías de fractales no encajan del todo dentro de las características que hemos descrito anteriormente. Estructuras como el plasma o las imágenes de difusión dependen en cierta medida del azar, por lo cual son únicas.

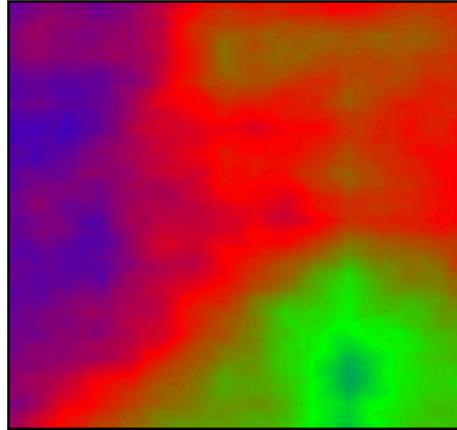


Figura 12.14: Fractal celular.

A este tipo de fractales corresponden los autómatas celulares, que funcionan con sencillas reglas que colorean zonas a partir del color de las adyacentes. Pese a que en principio pueda parecer que las imágenes conseguidas con este método vayan a ser sencillas, no tiene por qué ser así.

- **M. C. Escher y los fractales.** Es bastante probable que *Escher* no conociera el concepto de fractal, sin embargo desarrolló con frecuencia estructuras matemáticas muy parecidas a los fractales, ya que en un número considerable de sus obras incluye objetos relacionados con el infinito. Según comentó, su aproximación al infinito surgió del modelo de *Poincaré*, en el cual se puede representar la totalidad de una superficie infinita encerrada en un círculo finito.



Figura 12.15: Dibujos encajados en un círculo infinito.

12.5. Aplicaciones de la geometría fractal

En primer lugar, tenemos que preguntarnos; ¿qué significado tiene decir que un objeto real, tal como una costa o la red capilar del sistema venoso, es un fractal? Lo que queremos decir con ello, siguiendo a *Mandelbrot*, es que puede definirse un

modelo matemático fractal que aproxima satisfactoriamente al objeto real en toda una franja de escalas limitada por ciertos valores máximo y mínimo que llamaremos corte superior e inferior.

Según lo comentado, en el mundo real no existen fractales, como tampoco existen rectas ni esferas. Hablar de la dimensión fractal de una costa no es más absurdo que hablar del radio de la tierra, ya que ésta no es exactamente una esfera.

Puede construirse un modelo matemático de naturaleza fractal válido para el estudio del universo tomando un valor inferior del orden del diámetro de una galaxia con tal de considerar valores superiores suficientemente amplios. Tal modelo reproducirá la estructura geométrica de la distribución de las galaxias.

Los fractales y la Teoría del Caos pertenecen a lo que se conoce con el nombre de **Dinámica No Lineal**, la cual nos permite entender el mundo que nos rodea, por ejemplo: la difusión de una epidemia, la cinemática de algunas reacciones químicas, los cambios climáticos, ... etc.

- **Las fronteras de separación** entre diferentes medios físicos biológicos o sociales proporcionan, a menudo, excelentes ejemplos de sistemas que se pueden analizar mediante fractales. Un ejemplo clásico que responde a ciertos modelos de curvas fractales es el de las costas, pero hay numerosos ejemplos de este tipo, como pueden ser los bordes de una nube, una superficie montañosa, la orilla de un río o incluso la frontera entre dos países diferentes. Los célebres conjuntos de *Juliá* son también fronteras, en este caso matemáticas, entre distintas regiones del plano, e igual sucede con las más bellas e interesantes partes del conjunto de *Mandelbrot*.



Figura 12.16.

El trazado de una costa o de la orilla de un río es un proceso con rasgos comunes al de una frontera. Los dos medios en contacto, agua y tierra, están mutuamente sometidos a largos períodos de interacción que modifican permanentemente los trazados de las costas y orillas en procesos acumulativos que operan sobre un amplio margen de escalas diferentes.

Naturalmente, el proceso perfectamente regular de la formación de la curva de *Koch* es muy diferente al de la formación de una costa, que encierra elementos de tipo aleatorio. A pesar de las diferencias, es asombroso que la dimensión de *Hausdorff* de la curva de *Koch*, igual a 1.26128..., es muy parecida al valor 1.3 obtenido empíricamente por *Richardson* para la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña, y aún más parecido al valor empírico obtenido por el mismo investigador para la dimensión fractal de las fronteras de España y Portugal y para la costa australiana (*Mandelbrot*, 1977) mientras que *Feder* estima en 1.5 la dimensión fractal de la costa noruega, mucho más accidentada.

La clave que explica la frecuencia con que aparecen de forma espontánea algunas formas geométricas de la geometría clásica, como la recta, la circunferencia o la esfera, es que estas formas tienen propiedades que son “utilizadas” por la naturaleza. Por ejemplo, el hecho de que la esfera tenga superficie mínima a igualdad de volumen o de que una recta sea la curva de menor longitud entre dos puntos, hace de estas figuras elementos privilegiados en la naturaleza.

- Cuando hablamos de **árboles**, no nos referimos a ellos solamente en su sentido botánico, sino que también entenderemos como árbol un río y todos sus afluentes, el sistema arterial o la red bronquial. Desde un punto de vista matemático, un árbol es un conjunto de puntos o vértices (que serían los nudos de ramificación de los árboles botánicos), unidos entre sí por arcos (ramas), de forma que si caminamos desde un vértice por una sucesión consecutiva de arcos diferentes nunca regresaremos al vértice de partida. Este modelo puede ser aceptable y una primera aproximación para algunos de los objetos enumerados anteriormente.



Figura 12.17: Izquierda: árbol. Derecha: Río

El proceso de ramificación y subramificación da su naturaleza fractal a los árboles. Pensemos, por ejemplo, en toda la red de afluentes de una determinada cuenca hidrográfica que comprende desde el río principal a las más pequeñas cortaduras por donde resbalan pequeños hilos de agua cuando llueve. Puesto que su función es drenar el agua de toda una cuenca hidrográfica, una red fluvial es un modelo natural de curva que cubre una superficie, una de las propiedades concebidas como aberrantes por los matemáticos de hace cien años y que es característica de conjuntos fractales como la curva de *Peano* o de *Hilbert*.

Para un buen funcionamiento de los pulmones, éstos deben maximizar el área de su superficie para la difusión del oxígeno y el dióxido de carbono. El intercambio de estos gases se realiza a través de tres redes que tienen estructuras fractales: arterial pulmonar, venoso pulmonar y alveolar bronquial. Las estructuras fractales proporcionan un modelo que permite convertir un espacio de dimensión tres (la sangre de las arterias y el aire del sistema respiratorio), en una estructura que tenga la forma de una superficie de dimensión dos, facilitando el intercambio de gas.

- La **Osteoporosis**, es una enfermedad que para poder ser diagnosticada en un paciente tiene que estar en una fase muy avanzada. La enfermedad se detecta analizando la textura de los huesos, ya que son los que se ven afectados cuando la enfermedad ataca. Muchas veces la alteración tiene que ser muy grande para poder apreciarse y esto obliga a que los tratamientos tengan que ser muy prolongados.

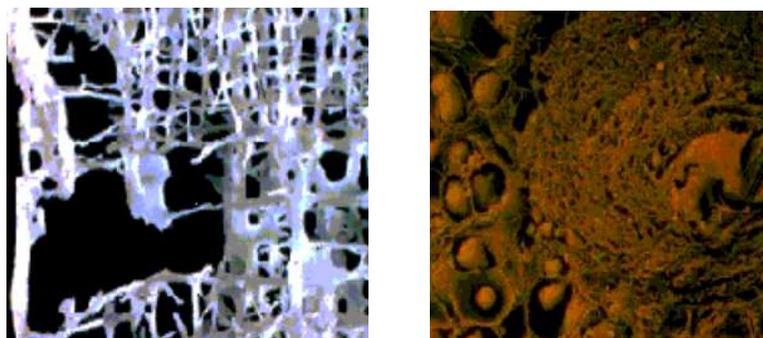


Figura 12.18: Izquierda: Osteoporosis. Derecha: Tumor.

Un grupo de investigadores dirigidos por el profesor *José Aranda*, realizó un programa de ordenador que ayudaba en la comparación de las texturas de los huesos. El proceso era el siguiente: se toma una muestra de la textura del hueso en su estado normal y se almacenaba en la memoria del ordenador. Luego se hacía lo mismo pero ya con los pacientes a los que se pensaban que eran propensos a sufrir la enfermedad. A continuación el programa comparaba las dos texturas y podía detectarse la presencia de la enfermedad.

- Recordemos que las **texturas** tienen mucho que ver con los fractales, lo que ha permitido ser incorporados también a otros aspectos muy diferentes como por ejemplo la industria textil. Hoy en día se observan determinados tumores, en forma de texturas, que parecen ser se ramifican en forma de un fractal.
- Los fractales también se usan en el tratamiento digital de imágenes para reducir su tamaño de almacenamiento. A este proceso se le conoce con el nombre de **proceso de transformación fractal**, y fue descubierto en 1987 por el matemático inglés *Michael F. Barnsley*.

Una imagen es considerada como un punto de un espacio métrico completo,

con la métrica de *Hausdorff*. Se define un conjunto de transformaciones que cuando se iteran y se aplican a un punto inicial arbitrario converge hacia un punto que depende únicamente del conjunto de transformaciones y no del punto de partida. A este punto se le conoce con el nombre de atractor.

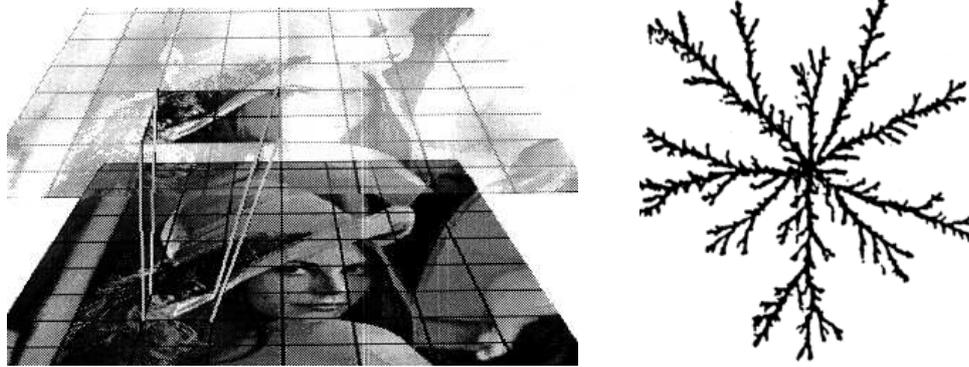


Figura 12.19: Izquierda: Transformación fractal. Derecha: ADL (dimensión 1.71).

La cuestión es saber si dada una imagen cualquiera es posible encontrar un conjunto de transformaciones cuyo atractor sea la imagen de partida. La respuesta es afirmativa y se conoce con el nombre de teorema del collage.

- A continuación comentaremos el proceso de **digitación viscosa**, un fenómeno que ha llamado recientemente la atención de los investigadores. Este fenómeno se produce cuando un líquido de baja viscosidad desplaza a otro viscoso en un medio capilar o poroso. Por ejemplo, cuando se trata de recuperar petróleo mediante la inyección de agua en un campo petrolífero.

Consideremos el siguiente modelo matemático particularmente válido para ciertos procesos de digitación viscosa: el llamado proceso de agregación por difusión limitada (ADL). Consiste en suponer que de un punto elegido al azar de entre los de una circunferencia sale un monómero que describe un movimiento browniano. El monómero vaga al azar hasta que llega al centro de la circunferencia, en cuyo momento se detiene. En este instante, un nuevo monómero se desprende de la circunferencia y camina hasta tropezar con el anterior, y así sucesivamente. Si en su movimiento errático algún monómero se aleja excesivamente, lo eliminamos y generamos uno nuevo. Este proceso resulta muy sencillo de simular en un ordenador, aunque requiere mucho tiempo de cálculo, especialmente en los primeros momentos de formación. El experimento produce estructuras de tipo fractal cuya dimensión de agregación ha sido estimada en 1.71 para el caso bidimensional y en 2.50 para el tridimensional, valores que muestran concordancia con los obtenidos en la digitación viscosa en medios porosos.

- En la actualidad, es posible regenerar tejido, como el de la piel, pero se está en la fase inicial de poder regenerar órganos completos para poderlos utilizar en

los trasplantes. El problema fundamental se encuentra en diseñar una estructura, similar al sistema circulatorio, en la que poder apoyar las células en crecimiento del órgano. Investigadores del Harvard Medical School y el Massachusetts Institute of technology están utilizando patrones fractales generados por ordenador y los están grabando en discos de silicio con el objetivo de formar un molde. A partir de estos discos se fabrican microcanales de polímeros biodegradables y biocompatibles, y posteriormente las redes se apilan para poder construir una estructura tridimensional.

- Por último, existe una gran relación entre el método de *Newton* para encontrar el valor aproximado de las raíces de una ecuación y los fractales. Como sabemos, el método de *Newton* es un método reiterativo, y por lo tanto debemos iniciarlo con valor particular. Si el valor inicial está cerca del verdadero valor de la raíz, entonces el método converge a la raíz. En caso contrario, no existirá convergencia al valor deseado.

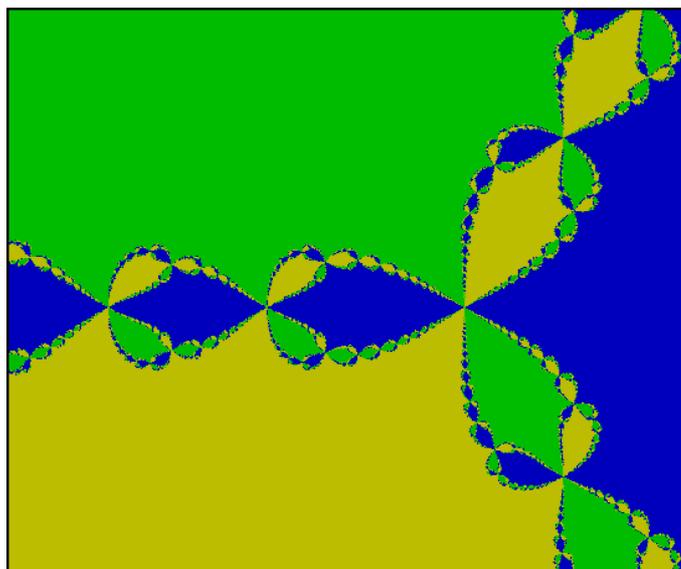


Figura 12.20: Método de *Newton*

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- [1] **ANTON, H., RORRES, C. Elementary Linear Algebra (applications version). John Wiley and Sons, Inc. New York, 2000.**

Es la última edición en inglés de [7]. El campo de aplicaciones que los autores presentan del Álgebra Lineal es muy completo y de plena actualidad. En relación a la presente Memoria, en el libro podemos encontrar ampliamente desarrollado el capítulo I, especialmente lo que hace referencia a las cadenas de *Markov*, al modelo de *Leslie* y sus aplicaciones, al estudio de la explotación de una población de animales y a la explotación racional y duradera de un bosque.

Los conceptos matemáticos se acompañan con numerosos ejemplos ilustrados generosamente con un nivel de calidad que no es frecuente en un texto de estas características. Se presta un gran interés en la forma de exponer los temas, de tal manera que puedan ser comprendidos por una gran parte de los alumnos. De esta manera, se ha potenciado la claridad de exposición de los conceptos, en detrimento de la profundidad. Finalmente, en cada uno de los capítulos se incluyen numerosos ejercicios resueltos y propuestos con diferentes grados de dificultad.

- [2] **BLANCHARD, P.; DEVANEY, R.L.; HALL, G.R. Ecuaciones Diferenciales. International Thomson Editores, S.A. de C.V., 1999.**

Las ecuaciones diferenciales son el lenguaje en el que se expresan los principios matemáticos que rigen muchos de los fenómenos biológicos. El enfoque clásico para su estudio es el de ofrecer procedimientos analíticos para poderlas resolver. Sin embargo, en muchas de ellas no pueden encontrarse las soluciones a través de estos métodos. Este texto elige para su estudio otro punto de vista, ya que se centra en la formulación de las ecuaciones diferenciales y en la interpretación de sus soluciones. Este camino, consideramos que es el más interesante para los alumnos de Biología, pues en la mayoría de los casos, se está más interesado en analizar el comportamiento de un determinado sistema biológico que en saber el valor exacto en un momento determinado. Siguiendo esta línea argumental, el libro aborda extensamente estos procedimientos geométricos o cualitativos. Al mismo tiempo, debido a la popularización del uso de los ordenadores y calculadoras programables, los autores presentan técnicas numéricas para conocer el valor aproximado de las soluciones. Frecuentemente, en aquellas ocasiones donde es posible aplicar los métodos clásicos de resolución, se encuentra la solución de la ecuación diferencial y paralelamente se realiza su estudio cualitativo y numérico con el objetivo de comparar los distintos métodos utilizados.

El libro puede utilizarse en gran parte de los capítulos III, IV, V y VI de la presente Memoria. El nivel con el que está escrito no es demasiado elevado, sirviendo de ejemplo como el rigor y la claridad de exposición pueden ir conjuntamente en un texto de matemáticas. A lo largo de su desarrollo se proponen diferentes prácticas a llevar a cabo en el Laboratorio de Matemáticas y asimismo, aparecen pequeñas biografías de matemáticos actuales cuyas investigaciones están relacionadas con los temas que se estudian.

- [3] **ZILL, D.G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, 6ª. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1998.**

El texto es un manual esencial de ecuaciones diferenciales para los alumnos. Su objetivo prioritario es la construcción de modelos matemáticos, utilizando como herramientas las ecuaciones diferenciales, su resolución e interpretación. El autor presta especial interés en los conceptos y hechos matemáticos básicos, para que de esta forma los alumnos puedan diferenciar los aspectos fundamentales de los accesorios. A lo largo del libro aparece una gran colección de ejercicios resueltos muy diferentes y con distintos grados de dificultad, presentados de forma escalonada. Las aplicaciones a diferentes campos científicos no sólo están presentes en cada uno de los capítulos, sino que se dedican diversos capítulos independientes al estudio detallado de algunas de estas aplicaciones.

En el contenido del libro se incluye, entre otros, el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, la ecuación diferencial lineal de orden superior, los sistemas de ecuaciones diferenciales, y el estudio de la estabilidad y la teoría cualitativa.

- [4] **BURDEN, R.L.; FAIRES, J.D. Análisis Numérico, 2ª ed. Grupo Editorial Iberoamericano, S.A., 1996.**

Es un libro interesante para introducirse en el Análisis Numérico, ya que es eminentemente práctico, prescindiendo en una gran parte de los casos de las demostraciones. Cada tema se inicia con un ejemplo motivador del concepto a estudiar, posteriormente se desarrolla el aspecto teórico completado con un número elevado de ejemplos y finalmente, cuando es posible, se termina con los algoritmos adecuados para su implantación en el ordenador.

Sus doce capítulos desarrollan gran parte del temario clásico de un curso de Análisis Numérico. Es decir: Interpolación y Aproximación Polinomial. Diferenciación e Integración Numérica. Problemas de Valor Inicial para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Métodos Directos para la Solución de Sistemas Lineales. Técnicas Iterativas en Álgebra de Matrices. Teoría de Aproximación. Aproximación de Valores Propios. Soluciones Numéricas de Sistemas de Ecuaciones no Lineales. Problemas de Valores en la Frontera para EDO. Soluciones Numéricas a Ecuaciones en Derivas Parciales.

Es el complemento adecuado para que los alumnos interesados puedan profundizar en las cuestiones planteadas en clase, relacionadas con el cálculo aproxi-

mado de valores y vectores propios, así como con la resolución aproximada de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- [5] **HASTINGS, A. Population Biology (Concepts and Models). Springer - Verlag, New York, Inc., 1997.**

Es un libro básico dedicado a la construcción y posterior análisis de modelos matemáticos aplicados a la Biología. En palabras del profesor *R.F. Costantino* de la Universidad de Rhode Islans, "... *Alan Hastings ha conseguido en este libro integrar de forma completa la Biología, las Matemáticas y la Ecología.*"^{E1} libro se encuentra muy bien escrito, claro, conciso y con la interesante característica de que los ejemplos y modelos que se exponen están basados en problemas de la vida real, o en trabajos actuales de investigación.

Básicamente el libro es una introducción a la ecología de poblaciones, poniéndose especial interés en la construcción de modelos matemáticos sencillos que estudian el crecimiento y el comportamiento de distintas poblaciones. El autor acompaña los conceptos con numerosos gráficos, los cuales pueden ser reproducidos con ayuda de cualquier programa matemático de ordenador.

Tienen especial interés los capítulos dedicados al estudio dinámico de poblaciones, dependiendo o no de la densidad de población, los modelos de competencia y depredación, así como el correspondiente a la evolución de una epidemia. El texto puede ser una excelente introducción para cualquier alumno que esté interesado en problemas relacionados con la Ecología.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

MODELOS DISCRETOS

- [6] ALLIGOOD, K.T.; ET AL. Chaos. An introduction to dynamical systems. Springer-Verlag, 1996.
- [7] ANTON, H. Álgebra Lineal, 3^a ed. Limusa S.A., México, D.F., 1990.
- [8] BARNSLEY, M.F. Fractals everywhere, 2^a ed. Morgan Kaufmann. Academic Press, 1988.
- [9] CANCELO, J.R., LÓPEZ J., GONZÁLEZ-CONDE C.; MONTERO, J.M. Problemas de Álgebra Lineal para economistas, Tomos I y II. Editorial Tebar Flores, Madrid, 1987.
- [10] CASWELL, H. Matrix Population Models (construction, analysis, and interpretation), 2^a ed. Sinauer Associates, Inc. Publishers, Sunderland, Massachusetts, 1995.

- [11] DEVANEY R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems , 2^a ed. Perseus Books Publishing, L.L.C., 1989.
- [12] DEVANEY R.L. First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment. Addison - Wesley, 1992.
- [13] DEVANEY R.L. Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics. Addison - Wesley, 1990. bitemgleick
GLEICK, J. Chaos: Marking a New Science. Penguin Books. Viking Penguin, Inc., 1987.
- [14] GROSSMAN, S.I. Álgebra lineal con aplicaciones, 4^a ed. McGraw Hill Interamericana de México S.A., México, D.F., 1991.
- [15] DE GUZMAN, M.; ET AL. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Labor. Serie Matemáticas. Barcelona, 1993.
- [16] HOLMGREN, R.A. A first course in discrete dynamical systems, 2^a ed. Springer - Verlag, New York, Inc., 1996.
bitemmandelbrot MANDELBROT, B. The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Company, 1983.
- [17] PEITGEN, H.O.; ET AL. Fractals for the classroom. Part one: Introduction to Fractals and Chaos. Springer-Verlag, 1992.
- [18] PEITGEN, H.O.; ET AL. Fractals for the classroom. Part two: Complex Systems and Mandelbrot Set. Springer-Verlag, 1992.
- [19] ROMERA, M. Técnicas de los Sistemas Dinámicos Discretos. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1997.
- [20] TAKAHASHI, T. Ecuaciones en diferencias con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1990.
- [21] TULJAPURKAR, S.; CASWELL, H. Structured - population models in marine, terrestrial, and freshwater systems. Chapman & Hall, London, 1996.

ECUACIONES DIFERENCIALES

- [22] BERMUDEZ, L., POCIELLO, E., RUÍZ, M.E.; VAREA, J. Ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas. Ediciones Media, Sant Cugat del Vallés, 1995.
- [23] BOYCE-DI PRIMA Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Limusa.

-
- [24] BRAUN, M. Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericano, 1990.
- [25] GUZMAN, M. DE El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis. Ediciones Pirámides, S.A., Madrid, 1997.
- [26] HIRSCH, M.W.; SMALE, S. Ecuaciones diferenciales. Sistemas dinámicos y Álgebra Lineal. Alianza Universidad, 1980.
- [27] JIMÉNEZ, V. Ecuaciones diferenciales. Cómo aprenderlas, cómo enseñarlas. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia, 2000.
- [28] LOMEN D.; LOVELOCK, D. Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos. Compañía Editorial Continental S.A. de C.V., México, 2000.
- [29] QUESADA, J.J. Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico y Métodos Matemáticos. Santa Rita, Granada, 1996.
- [30] QUESADA, J.M.; MOLINA, M.F.; SÁNCHEZ, F.T.; NAVAS, J. Problemas resueltos de Matemáticas II. Ecuaciones diferenciales. Jaén, Jabalruz, 2001.
- [31] QUESADA, J.M.; MOLINA, M.F.; SÁNCHEZ, F.T. Matemáticas II para Ingeniería Técnica Industrial. Los autores, Jaén, 2000.
- [32] ROMERO, J.L.; GARCÍA, C. Modelos y Sistemas Dinámicos. Servicio de Publicaciones, Universidad de Cádiz, 1998.
- [33] SIMMONS, G.F. Ecuaciones Diferenciales: con Aplicaciones y Notas Históricas, 2ª. McGraw-Hill, Madrid, 2000.
- [34] SPIEGEL, M.R. Ecuaciones diferenciales aplicadas. Prentice Hall Hispanoamericana, 1997.

CÁLCULO NUMÉRICO

- [35] ISAACSON, E.; KELLER, H.B. Analysis of numerical methods. John Wiley and Sons, 1966.
- [36] NIEVES, A.; DOMINGUEZ, F.C. Métodos numéricos aplicados a la ingeniería. CECSA, México, 1995.

PAQUETES INFORMÁTICOS

- [37] BLACHMAN, N. Mathematica: un enfoque práctico, 1ª. Ariel, Barcelona, 1993.

- [38] FORRESTER, J. Road Maps. A Guide to Learning System Dynamics. System Dynamic in Education Proje. Sloan School of Management Massachusetts Institute of Tecnology. Cambridge, Massachussets, USA, 1999.
- [39] RAMÍREZ V., ET AL. Matemáticas con Mathematica, vol. I,II y III. Proyecto Sur de Ediciones, Granada, 1995.
- [40] RAMÍREZ V., ET A Matemáticas con Mathematica. Cálculo Numérico. Proyecto Sur de Ediciones, Granada, 1996.

MODELOS APLICADOS A LA BIOLOGÍA

- [41] BEGON, M.; MORTIMER, M.; THOMPSON, D.J. Population Ecology. A unified study of animals and plants, 3^a. Blackwell Science, 2000.
- [42] CLEMENTS, R.R. Mathematical Modelling. A case study approach. Cambridge University Press, 1989.
- [43] FOWLER, A.C. Mathematical Models in the Applied Sciences. Cambridge University Press, 1997.
- [44] GIORDANO, F.R.; WEIR, M.D.; FOX, W.P. A first course in Mathematical Modelling, 2^a ed. Brooks/Cole, Pacific, California, 1997.
- [45] GOTELLI, N.J. A primer of ecology. Sinauer Associates, Inc. Publishers, Sunderland, Massachusetts, 1995.
- [46] DE GUZMAN, M.; ET AL. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Labor. Serie Matemáticas. Barcelona, 1993.
- [47] DOUCET; SLOEP Mathematical Modeling in the Life Sciencies. Ellis Horwood, 1992.
- [48] EDELSTEIN-KESHET L. Mathematical Models in Biology. Birkhäuser Mathematics Series, McGraw Hill, 1988.
- [49] GONZÁLEZ OLIVARES, E.; GONZÁLEZ YAÑEZ, B. Dinámicas de modelos depredador-prresa con efecto Allee. Grupo de Ecología Matemática. Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de valparaiso. Chile.
- [50] HADELER, K.P. Matemáticas para Biólogos. Editorial Reverté, 1982.
- [51] HANNON, B.; RUTH, M. Modeling dynamic biological systems. Springer - Verlag, New York, Inc., 1997.
- [52] LARSON R.; HOSTETLER, R.; EDWARDS, B. Cálculo y Geometría analítica. McGraw Hill, 1995.

-
- [53] MAHAFFY, J.M. Modeling Mathematical. San Diego State University, USA, 2001.
- [54] MARGALEF, R. Ecología. Editorial Omega, 1995.
- [55] MARTINEZ CALVO, C.; PÉREZ DE VARGAS, A. Métodos matemáticos en Biología. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A., Madrid, 1993.
- [56] MARTINEZ CALVO, C.; PÉREZ DE VARGAS, A. Problemas de Biomatemática. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A., Madrid, 1995.
- [57] MURRAY, J.D. Mathematical Biology, 2^a ed. Springer - Verlag, New York, 1993.
- [58] RICKLEFS, R. Invitación a la Ecología la Economía de la Naturaleza, 4^a ed. Editorial Médica Panamericana, Buenos Aires, Argentina, 1998.
- [59] RIOS, S. Modelización. Alianza Universidad, Madrid, 1995.
- [60] RODRÍGUEZ, J. Ecología. Pirámide, Madrid, 1999.
- [61] SIMON, W. Mathematical Techniques for Biology and Medicine. Dover Publications, Inc. New York, Madrid, 1977.
- [62] VALDERRAMA BONNET, M. J. Modelos matemáticos en las ciencias experimentales. Ediciones Pirámide, 1990.
- [63] VANDERMEER, J. Elementary Mathematical Ecology. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1990.

PAQUETES DE CÁLCULO

MATHEMATICA. Mathematica Wolfram Research Inc. 201W. Springfield Av. Champaign.

VENSIM. The Ventana Simulation Environment. Vensim Professional 32, version 3.0A. Copyright © 1988-1997 Ventana Systems Inc.

STATGRAPHICS. Plus for Window version 3.1. Copyright © 1994-1997 by Statistical Graphics Corporation.

POPULUS. Version 3.41X, 1994. Don Alstad. Department of Ecology, Evolution & Behavior. University of Minnesota, 1987. Upper Buford Circle. St Paul, MN 55108-6097.

RECURSOS EN LA RED

- http://smub.st-and.ac.uk/jason_matthiopoulos/page5.html
- <http://www.epa.gov/epahome/models.htm>
- <http://www.uni-klu.ac.at/gossimit/links/bookmksd.htm>
- <http://cisat.isciii.es/supercourse/>
- http://perso.wanadoo.fr/l.d.v.dujardin/ct/eng_index.html
- <http://hypertextbook.com/chaos/links.shtml>
- <http://www3.uakron.edu/biology/mitchell/ecology/ecolinks.html>
- <http://rulbii.leidenuniv.nl/wwwkim/popdyn.html>
- <http://www.gypsymoth.ento.vt.edu/sharov/PopEcol/popecol.html>
- <http://www-rohan.sdsu.edu/jmahaffy/courses/s00/math121/>
- <http://everest.ento.vt.edu/sharov/3d/3dinsect.html>

WEB DE LA ASIGNATURA

Modelos Matemáticos en Biología

La construcción y posterior simulación de un modelo matemático es una de las herramientas más importante que hoy en día disponemos para analizar, explicar y predecir el comportamiento de un sistema biológico. Actualmente, la modelización matemática está viviendo una edad de oro, debido fundamentalmente a que conocemos mucho mejor los procesos biológicos, y al avance espectacular que el mundo de la informática ha experimentado en los últimos años, en especial todo lo que hace referencia al software matemático.

Con frecuencia la palabra modelo tiene distintas interpretaciones, nosotros la aplicaremos en el sentido dado por el profesor *Sixto Ríos*.

Un modelo es un objeto, concepto o conjunto de relaciones, que se utiliza para representar y estudiar de forma simple y comprensible una porción de la realidad empírica.

El material que presentamos es una introducción al estudio de los Modelos Matemáticos en Biología, y es el fruto del trabajo que hemos desarrollado en los últimos años en la Licenciatura de Biología de la Universidad de Jaén.

J. Navas E.J. Esteban J.M. Quesada

Página WEB: ucua.ujaen.es/jnavas/web_modelos/index.htm