Tema 9

ECUACIONES Y SISTEMAS EN DIFERENCIAS

9.1. Introducción

En ocasiones, al construir un modelo matemático interesa elegir una variable que tome valores discretos. Así ocurre, por ejemplo, con el tiempo, ya que es común realizar mediciones regulares a la hora de controlar un experimento. Estos datos constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente. Para este tipo de modelos determinísticos discretos, las herramientas matemáticas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias. El presente tema es una breve introducción a su estudio. Comenzaremos con los conceptos y definiciones básicas y nos centraremos en el estudio de las ecuaciones en diferencias lineales de primer y segundo orden con coeficientes constantes, así como en los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes.

A lo largo del capítulo llamaremos t a la variable independiente, y supondremos que sólo toma los valores enteros $t = 0, 1, 2, \cdots$. Generalmente, t representa el número de generaciones (años, trimestres, meses, días, $\cdots$) que han transcurrido desde un momento inicial $t = 0$. Del mismo modo, $\{y_0, y_1, y_2, \cdots\}$ es una sucesión, donde y_t corresponde a un valor concreto de t.

DEFINICIÓN 9.1.1 *Llamamos ecuación en diferencias a una expresión del tipo*

$$F(y_{t+n}, y_{t+n-1}, y_{t+n-2}, \cdots, y_{t+1}, y_t, t) = 0\,.$$

Una solución de la misma, es toda sucesión y que la cumpla.

El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de **solución general**. Esta solución general presenta cierto número de parámetros, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes **soluciones particulares**.

DEFINICIÓN 9.1.2 *Llamamos orden de la ecuación, a la diferencia entre el mayor y el menor de los índices que afectan a* y.

La expresión $-2y_{t+3}+3y_t = t+1$, es una ecuación en diferencias de orden $t+3-t = 3$, o de tercer orden.

La ecuación en diferencias $y_{t+1} - y_t = 2$, es de primer orden y tiene por solución general a todas las progresiones aritméticas de razón 2, es decir

$$y_t = y(t) = 2t + C,$$

siendo C una constante cualquiera. Una solución particular, es la progresión aritmética

$$\{1,\, 3,\, 5,\, 7,\, \cdots, 2t+1,\, \cdots\}\,.$$

EJEMPLO 9.1

- Vamos a construir el modelo que corresponde a la siguiente situación. Supongamos que una población de insectos crece el triple, en cada período de tiempo que transcurre entre dos medidas, de lo que creció en el período inmediatamente anterior.

  Si llamamos y_t al número de individuos en el instante t; del enunciado del ejemplo se deduce,

  $$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t)\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \cdots$$

  simplificando obtenemos,

  $$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0\,, \tag{9.1}$$

  que es una ecuación en diferencias de segundo orden. Si por ejemplo, conocemos el número inicial de insectos, $y_0 = y(0) = 100$, podemos sustituir y obtendríamos

  $$y_2 - 4y_1 + 300 = 0\,,$$

  lo cual nos indica que debemos saber otra medida, por ejemplo y_1, para poder encontrar el resto de los valores. En las próximas secciones aprenderemos a resolver este tipo de ecuaciones, y volveremos sobre (9.1).

9.2. Ecuaciones lineales de primer orden

DEFINICIÓN 9.2.1 *Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como*

$$p_1(t)y_{t+1} + p_2(t)y_t = q(t)\,, \tag{9.2}$$

donde $p_i(t)$, $i = 1, 2$ *y* $q(t)$ *son funciones en la variable discreta* t. *Si la sucesión* $q(t)$ *es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre de* **ecuación homogénea** *asociada a* (9.2). *Cuando las funciones* $p_1(t)$ *y* $p_2(t)$ *son constantes, se dice que la ecuación lineal* (9.2) *es de* **coeficientes constantes**.

Este tipo de ecuaciones son muy interesantes en el estudio de dinámica de poblaciones. Suelen aparecer escritas como

$$y_{t+1} = p(t)y_t + q(t)\,,$$

donde $p(t)y_t$ representa el crecimiento de la población en el tiempo t y $q(t)$ el número de individuos que en el tiempo t se incorporan a la población como consecuencia de la inmigración.

EJEMPLO 9.2

- Supongamos que una determinada población de insectos con 100 individuos, duplica su número en cada generación, y que además, 10 nuevos individuos se incorporan en cada generación procedente de otro lugar. Vamos a construir una ecuación en diferencias que modele a esta situación y posteriormente la resolveremos.

  Del enunciado se deduce,

  $$y_t = 2y_{t-1} + 10, \quad y_0 = y(0) = 100\,,$$

  lo que nos permite escribir,

  $$\begin{aligned}
  y_1 &= 2\times 100 + 10\\
  y_2 &= 2(2\times 100 + 10) + 10 = 2\times 2\times 100 + 2\times 10 + 10\\
  y_3 &= 2\times 2\times 2\times 100 + 2\times 2\times 10 + 2\times 10 + 10\\
  \vdots & \qquad\qquad \vdots\\
  y_t &= \underbrace{2\times\cdots\times 2}_{(t)}\times 100 + \underbrace{2\times\cdots\times 2}_{(t-1)}\times 10 + \underbrace{2\times\cdots\times 2}_{(t-2)}\times 10 + \cdots + 2\times 10 + 10\\
  &= 2^t\times 100 + 2^{t-1}\times 10 + 2^{t-2}\times 10 + \cdots + 2\times 10 + 10\\
  &= 2^t\times 100 + \left(2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2^1 + 2^0\right)\times 10\\
  &= 2^t\times 100 + (2^t - 1)\times 10 = 110\times 2^t - 10\,,
  \end{aligned}$$

  donde en el último de los pasos hemos utilizado la fórmula que nos da la suma de t términos de una progresión geométrica de razón 2. La solución es, por tanto,

  $$\boxed{y_t = 110\times 2^t - 10\,.}$$

9.3. Ecuaciones lineales de segundo orden

DEFINICIÓN 9.3.1 *Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden es aquella que puede expresarse como*

$$p_1(t)y_{t+2} + p_2(t)y_{t+1} + p_3(t)y_t = q(t)\,, \tag{9.3}$$

donde $p_i(t)$, $i = 1,\, 2,\, 3$ y $q(t)$ son funciones en la variable discreta t.

Si la función $q(t) = 0$, entonces (9.3) es su ecuación lineal en diferencias homogénea de segundo orden asociada. Además, si todas las funciones $p_i(t)$ son constantes, entonces (9.3) es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, y será en la que nos centraremos.

Veamos en primer lugar un teorema de existencia y unicidad de solución para una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n.

TEOREMA 9.3.2 *Dada la siguiente ecuación lineal en diferencias homogénea de orden n*

$$y_{t+n} + p_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + p_n(t)y_t = 0\,,$$

y dados n números reales $k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}$, existe una única solución, cumpliendo

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1}\,.$$

Demostración. Comenzamos definiendo la siguiente sucesión:

$$y_0 = y(0) = k_0, \quad y_1 = k_1, \quad \cdots \quad y_{n-1} = k_{n-1}\,,$$

y para los valores de t mayores que $n - 1$, procedemos de la siguiente manera

$$y_n = -p_1(0)y_{n-1} - \cdots - p_n(0)y_0 = -p_1(0)k_{n-1} - \cdots - p_n(0)k_0\,,$$

$$y_{n+1} = -p_1(1)y_n - \cdots - p_n(1)k_1\,.$$

De esta manera, y_t queda definida por la ley de recurrencia anterior. Puede comprobarse que y_t es solución de la ecuación pedida y cumple las condiciones iniciales. Además, es la única solución, ya que si w_t es otra solución que cumple

$$w_0 = k_0, \quad w_1 = k_1, \quad \cdots \quad w_{n-1} = k_{n-1}\,,$$

la ley de recurrencia que hemos encontrado anteriormente, determina el resto de los valores de w_t. ■

Consideremos la ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

$$a\,y_{t+2} + b\,y_{t+1} + c\,y_t = 0\,, \tag{9.4}$$

cualquier combinación lineal de soluciones de (9.4) sigue siendo otra solución.

TEOREMA 9.3.3 *Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de* (9.4)*, entonces $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, con k_1 y k_2 constantes, sigue siendo solución de* (9.4)*.*

Demostración. Es inmediata, basta llevar $k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$ en (9.4). ■

Del mismo modo, también es evidente la demostración del siguiente resultado.

TEOREMA 9.3.4 *Si y_t^c es una solución de*

$$a\, y_{t+2} + b\, y_{t+1} + c\, y_t = q(t)\,, \tag{9.5}$$

e y_t^h es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_t = y_t^h + y_t^c$ es solución de la ecuación completa (9.5)*.*

A continuación veremos las condiciones bajo las cuales la combinación lineal de dos soluciones particulares de la ecuación homogénea dan lugar a su solución general.

TEOREMA 9.3.5 *Si y_t^1, y_t^2 son dos soluciones de* (9.4)*, entonces*

$$y = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2,$$

con k_1 y k_2 constantes, es la solución general de (9.4) *si*

$$\begin{vmatrix} y_0^1 & y_0^2 \\ y_1^1 & y_1^2 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Demostración. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 y_0^1 + \alpha_2 y_0^2 = \beta_1 \\ \alpha_1 y_1^1 + \alpha_2 y_1^2 = \beta_2\,, \end{array} \right.$$

cualesquiera que sean los valores de β_1 y β_2, por hipótesis del teorema, el sistema es compatible determinado. Pero por el Teorema 9.3.2 existe una única solución de la ecuación homogénea que puede ser escrita como $y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2$, pues basta tomar $\beta_1 = y_0$ y $\beta_2 = y_1$, y calcular α_1 y α_2. Para finalizar asignamos los siguientes valores, $k_1 = \alpha_1$ y $k_2 = \alpha_2$. ■

A dos soluciones y_t^1 y y_t^2 cumpliendo las hipótesis del Teorema 9.3.2 le daremos el nombre de **sistema fundamental de soluciones**. Siguiendo un razonamiento similar al realizado en el Teorema 9.3.2, podemos demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 9.3.6 *Si y_t^p es una solución particular de*

$$a\, y_{t+2} + b\, y_{t+1} + c\, y_t = q(t)\,, \tag{9.6}$$

e y_t^1, y_t^2 forman un sistema fundamental de soluciones, entonces

$$y_t^p + k_1\, y_t^1 + k_2\, y_t^2\,,$$

es la solución general de (9.6)*.*

9.3.1. Resolución de la ecuación homogénea

El Teorema 9.3.6 nos dice que para resolver una ecuación en diferencias lineal de segundo orden, tenemos que empezar encontrando la solución general de su ecuación homogénea asociada, y para ello hemos de localizar dos soluciones particulares que den lugar a un sistema fundamental. Supongamos por tanto, la ecuación homogénea

$$a\,y_{t+2} + b\,y_{t+1} + c\,y_t = 0\,,$$

que admitirá la solución $y_t = \lambda^t$ si

$$a\,\lambda^{t+2} + b\,\lambda^{t+1} + c\,\lambda^t = \lambda^t\left(a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c\right) = 0\,,$$

es decir,

$$\boxed{a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0.} \tag{9.7}$$

A esta ecuación se la conoce con el nombre de **ecuación característica** de la ecuación en diferencias.

A continuación, presentamos un procedimiento para resolver la ecuación en diferencias homogénea, basado en el estudio de las raíces de (9.7).

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces reales diferentes** λ_1, λ_2, entonces

  $$\boxed{y_t^1 = \lambda_1^t\,, \qquad y_t^2 = \lambda_2^t\,,}$$

  forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación (9.7) tiene **una raíz real doble** λ, entonces

  $$\boxed{y_t^1 = \lambda^t\,, \qquad y_t^2 = t\,\lambda^t\,,}$$

  forman un sistema fundamental de soluciones .

- Si la ecuación característica tiene **dos raíces complejas conjugadas**

  $$\lambda_1 = \alpha + i\,\beta\,, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\,\beta\,,$$

  entonces

  $$y_t^1 = \lambda_1^t\,, \qquad y_t^2 = \lambda_2^t\,,$$

  forman un sistema fundamental de soluciones. En este último caso, podemos escribir la solución general de la ecuación homogénea de la siguiente manera,

  $$y_t = k_1\,\lambda_1^t + k_2\,\lambda_2^t\,,$$

  y expresando los números complejos en su forma módulo argumental, teniendo en cuenta que poseen el mismo módulo y argumentos opuestos,

  $$y_t = k_1\rho^t(\cos t\theta + i\,\mathrm{sen}\,t\theta) + k_2\rho^t(\cos t\theta - i\,\mathrm{sen}\,t\theta)\,.$$

Al formar $\lambda_1^t = \rho^t(\cos t\theta + i\,\text{sen}\, t\theta)$ y $\lambda_2^t = \rho^t(\cos t\theta - i\,\text{sen}\, t\theta)$ un sistema fundamental de soluciones, también lo será cualquier combinación lineal de ellas, en particular

$$\tfrac{1}{2}\,(\lambda_1^t + \lambda_2^t) = \rho^t \cos t\theta$$

$$\tfrac{1}{2i}\,(\lambda_1^t - \lambda_2^t) = \rho^t\,\text{sen}\, t\theta\,,$$

la solución general será entonces

$$\boxed{y_t = k_1\rho^t\cos t\theta + k_2\rho^t\,\text{sen}\, t\theta\,.}$$

EJEMPLO 9.3

- Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias:

  1.- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$

  2.- $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2y_t = 0$

  3.- $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 0$

  1.- La ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, tiene como raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. En consecuencia, 2^t y 1, forman un sistema fundamental de soluciones, siendo la solución general

  $$\boxed{y_t = k_1 + k_2\, 2^t.}$$

  2.- En el segundo de los casos, las raíces de la ecuación característica $\lambda^2+2\lambda+2 = 0$ son $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$. Los módulos de estos números complejos son $\sqrt{2}$ y el argumento $3\pi/4$, por consiguiente, la solución general es

  $$\boxed{y_t = k_1\left(\sqrt{2}\right)^t\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + k_2\left(\sqrt{2}\right)^t\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}t\right), \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

  3.- La ecuación $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene a $\lambda = -1$ como raíz doble. La solución general de la ecuación propuesta es

  $$\boxed{y_t = k_1(-1)^t + k_2\, t\,(-1)^t, \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

9.3.2. Resolución de la ecuación completa

Para encontrar la solución general de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$a\,y_{t+2} + b\,y_{t+1} + c\,y_t = q(t)\,, \quad a,\, b,\, c\, \in \mathbb{R}\,, \tag{9.8}$$

podemos hacer uso de dos métodos diferentes.

Método de variación de parámetros.

Es también conocido como método de **coeficientes indeterminados**. Se empieza encontrando la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t = k_1 y_t^1 + k_2 y_t^2 \,, \quad k_1,\, k_2 \in \mathbb{R} \,,$$

y se supone que las constantes k_1 y k_2 dependen de t, es decir

$$y_t = k_1(t) y_t^1 + k_2(t) y_t^2 \,. \tag{9.9}$$

De esta expresión deducimos inmediatamente

$$y_{t+1} = k_1(t+1) y_{t+1}^1 + k_2(t+1) y_{t+1}^2 \,,$$

que sumando y restando $k_1(t)\, y_{t+1}^1 + k_2(t)\, y_{t+1}^2$, puede escribirse

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= k_1(t)\, y_{t+1}^1 + k_2(t)\, y_{t+1}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+1}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+1}^2 \,. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior hacemos

$$[k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+1}^1 + [k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+1}^2 = 0 \,, \tag{9.10}$$

y nos queda la ecuación

$$y_{t+1} = k_1(t)\, y_{t+1}^1 + k_2(t)\, y_{t+1}^2 \,, \tag{9.11}$$

que permite ser tratada utilizando el mismo procedimiento anterior

$$\begin{aligned} y_{t+2} &= k_1(t)\, y_{t+2}^1 + k_2(t)\, y_{t+2}^2 + [k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+2}^1 \\ &\quad + [k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+2}^2 \,. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Llevando (9.9), (9.11) y (9.12) en (9.8),

$$\begin{aligned} & ak_1(t)\, y_{t+2}^1 + ak_2(t)\, y_{t+2}^2 + a\,[k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+2}^1 \\ & + a\,[k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+2}^2 + bk_1(t)\, y_{t+1}^1 + bk_2(t)\, y_{t+1}^2 \\ & + ck_1(t) y_t^1 + ck_2(t) y_t^2 = q(t) \,. \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} & k_1(t)\left[ay_{t+2}^1 + by_{t+1}^1 + cy_t^1\right] + k_2(t)\left[ay_{t+2}^2 + by_{t+1}^2 + cy_t^2\right] \\ & + a\,[k_1(t+1) - k_1(t)]\, y_{t+2}^1 + a\,[k_2(t+1) - k_2(t)]\, y_{t+2}^2 = q(t) \,. \end{aligned}$$

Al ser y_t^1 y y_t^2 solución de la ecuación homogénea, la expresión anterior adopta la forma

$$a\,[k_1(t+1)-k_1(t)]\,y_{t+2}^1 + a\,[k_2(t+1)-k_2(t)]\,y_{t+2}^2 = q(t)\,. \qquad (9.13)$$

Las ecuaciones (9.10) y (9.13) dan lugar a un sistema lineal, siendo $k_1(t+1)-k_1(t)$ y $k_2(t+1)-k_2(t)$ las incógnitas. Al ser y_t^1 y y_t^2 un sistema fundamental de soluciones, ocurre que

$$\begin{vmatrix} y_{t+1}^1 & y_{t+1}^2 \\ a\,y_{t+2}^1 & a\,y_{t+2}^2 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Usando la Regla de Cramer, podemos resolver el sistema anterior

$$\begin{aligned} k_1(t+1)-k_1(t) &= \frac{-q(t)}{a y_{t+1}^1(\lambda_2-\lambda_1)} \\ k_2(t+1)-k_2(t) &= \frac{q(t)}{a y_{t+1}^2(\lambda_2-\lambda_1)} \end{aligned} \qquad (9.14)$$

y nos permite encontrar los valores de $k_1(t)$ y $k_2(t)$. ■

EJEMPLO 9.4

- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, partiendo de 100 individuos, se llega el primer año a 110 y que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Deseamos determinar la ecuación general de la evolución de efectivos.

  El problema a estudiar es el siguiente:

  $$y_{t+2}-y_{t+1} = 2(y_{t+1}-y_t)+10, \quad y_0 = 100, \quad y_1 = 110\,.$$

  Tenemos que resolver la ecuación en diferencias lineal de segundo grado

  $$y_{t+2}-3y_{t+1}+2y_t = 10\,,$$

  con las condiciones iniciales $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$. Para ello, empezamos encontrando las raíces de la ecuación característica

  $$\lambda^2-3\lambda+2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2\,.$$

  Es decir, la solución general de la ecuación homogénea es

  $$y_t^h = k_1 + k_2\,2^t\,.$$

  Para poder resolver la ecuación completa utilizamos el método de variación de las constantes. Teniendo en cuenta (9.14), deducimos

  $$\begin{cases} k_1(t+1)-k_1(t) = -10 \\ k_2(t+1)-k_2(t) = 10/2^{t+1} \end{cases}$$

De la primera ley de recurrencia obtenemos

$$\begin{array}{rll} k_1(1) = & k_1(0) - 10 & \\ k_1(2) = & k_1(1) - 10 & = k_1(0) - 2\times 10 \\ \vdots & \vdots & \\ k_1(t) = & k_1(0) - 10t & \end{array}$$

De manera similar, de la segunda de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} k_2(1) & = & k_2(0) + 10/2 \\ k_2(2) & = & k_2(1) + 10/2^2 = k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 \\ \vdots & & \vdots \\ k_2(t) & = & k_2(0) + 10/2 + 10/2^2 + 10/2^3 + \cdots + 10/2^t = \\ & = & k_2(0) + 10(1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \cdots + 1/2^t \\ & = & k_2(0) + 10(1 - 1/2^t)\,. \end{array}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación completa es

$$\boxed{y_t = k_1(0) - 10\times t + \left[k_2(0) + 10(1 - 1/2^t)\right]\, 2^t\,.}$$

Las constantes $k_1(0)$ y $k_2(0)$ pueden encontrarse haciendo uso de las condiciones iniciales $y_0 = 100$ y $y_1 = 110$ en y_t,

$$100 = k_1(0) + k_2(0), \quad 110 = k_1(0) - 10 + (k_2(0) + 5)\,2\,,$$

que dan como solución $k_1(0) = 90$, $k_2(0) = 10$. La ecuación de los efectivos de la población es:

$$\boxed{y_t = 80 - 10\,t + 10\times 2^{t+1}, \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots}$$

Segundo método.

Para encontrar la solución general de una ecuación lineal completa de segundo orden nos fijaremos en el término independiente $q(t)$, y según sea, procederemos de una manera u otra. Los casos más usuales que suelen presentarse son:

- Si $q(t) = \alpha^t$, entonces para encontrar la solución de la ecuación completa probamos con la solución particular $\beta\alpha^t$ (excepto si α es raíz de la ecuación característica).

- Si $q(t)$ es un polinomio de grado n, entonces ensayamos con un polinomio del mismo grado. Si el 1 es raíz de la ecuación característica, tomaremos un polinomio de grado $n+1$, si además tiene grado de multiplicidad γ, probaremos con un polinomio de grado $n+\gamma$.

- Si $q(t)$ es seno o coseno de αt, entonces tomaremos $\beta \operatorname{sen}\alpha t + \gamma\cos\alpha t$ y determinaremos los valores de las constantes β y γ.

EJEMPLO 9.5

- Hallar la solución general de las ecuaciones en diferencias,

1.- $2y_{t+2} - y_t = 2^t$

2.- $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3t^2$

3.- $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t + 1$.

1.- Empezamos resolviendo la ecuación característica

$$2\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

que nos permite escribir la solución general de la ecuación homogénea

$$y_t^h = k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t + k_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t .$$

Ahora, para poder encontrar la solución de la ecuación completa, ensayamos con la solución particular $y_t^p = \beta 2^t$. Sustituyendo en la ecuación inicial

$$2\beta 2^{t+2} - \beta 2^t = 2^t \quad \Rightarrow \quad 2\beta 2^2 - \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1/7\,.$$

La solución general buscada es

$$\boxed{y_t = k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t + k_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t + \frac{1}{7}\,2^t\,.}$$

2.- Para el segundo de los casos, es inmediato comprobar que $\lambda = 2$ es una raíz doble de la ecuación característica. En consecuencia, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_t^h = k_1\, 2^t + k_2\, t\, 2^t\,.$$

Al ser el término independiente un polinomio de segundo grado y el 1 no es raíz del polinomio característico, probamos con una solución particular del tipo

$$y_t^p = at^2 + bt + c\,,$$

llevando este valor en la ecuación en diferencias propuesta, e identificando coeficientes, se obtiene $a = 3$, $b = 12$ y $c = 24$.

La solución buscada es

$$\boxed{y_t = k_1\, 2^t + k_2\, t\, 2^t \; + 3t^2 + 12t + 24\,.}$$

3.- Al coincidir la ecuación homogénea con la del caso anterior, lo único que tenemos que hacer es encontrar una solución particular. Para ello, buscamos una solución particular de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t \,,$$

y otra de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 1 \,.$$

Para la primera de ellas, al ser $\lambda = 2$ una raíz doble, ensayamos con la solución $y_t^1 = kt^2\, 2^t$.

$$k(t+2)^2\, 2^{t+2} - 4k(t+1)^2\, 2^{t+1} + 4kt^2\, 2^t = 2^t \,,$$

que una vez resuelto da $k = 1/8$.

Para la segunda de las ecuaciones, el término independiente es una constante (un polinomio de grado cero), y probamos como solución particular con otra constante, $y_t^2 = k$.

$$k - 4k + 4k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1 \,.$$

La solución de la ecuación propuesta es

$$\boxed{y_t = k_1\, 2^t + k_2\, t\, 2^t + \tfrac{1}{8}\, t^2\, 2^t + 1 \,.}$$

9.4. Sistemas de ecuaciones en diferencias

Hemos visto en las secciones anteriores que cuando se analizan fenómenos biológicos dinámicos discretos, aparecen las ecuaciones en diferencias. Del mismo modo, cuando en estos fenómenos el número de variables es mayor que uno, entonces nos aparecerán los sistemas de ecuaciones en diferencias.

Como ya hemos tenido ocasión de comentar, el estudio que estamos realizando es una breve introducción a las ecuaciones y a los sistemas en diferencias. Por este motivo, solo abordaremos aquellos sistemas de ecuaciones en diferencias lineales y de primer orden. Además, este tipo de sistemas son los que con más frecuencia se presentan en las aplicaciones biológicas.

DEFINICIÓN 9.4.1 *Un sistema en diferencias lineal con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \\ \vdots \\ y_{t+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

De entre este tipo de sistemas, el caso más elemental (aunque para casos más generales, el procedimiento a seguir es similar) consiste en dos ecuaciones y dos variables

$$\begin{cases} y^1_{t+1} = a_{11}y^1_t + a_{12}y^2_t + f_1(t) \\ y^2_{t+1} = a_{21}y^1_t + a_{22}y^2_t + f_2(t) \end{cases}$$

La clave para resolver este tipo de sistemas, es intentar expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. En efecto, de la primera de las ecuaciones

$$y^1_{t+2} = a_{11}y^1_{t+1} + a_{12}y^2_{t+1} + f_1(t+1)\,, \tag{9.15}$$

sustituimos el valor de la segunda de las ecuaciones del sistema en (9.15)

$$y^1_{t+2} = a_{11}y^1_{t+1} + a_{12}\left(a_{21}y^1_t + a_{22}y^2_t + f_2(t)\right) + f_1(t+1)\,,$$

en la que sólo aparece un término $a_{12}\,a_{22}\,y^2_t$, en el que no intervenga la función y^1_t. Despejando de la primera de las ecuaciones del sistema

$$a_{12}y^2_t = y^1_{t+1} - a_{11}y^1_t - f_1(t)\,,$$

sustituyendo

$$y^1_{t+2} = a_{11}y^1_{t+1} + a_{12}a_{21}y^1_t + a_{22}(y^1_{t+1} - a_{11}y^1_t - f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1)\,,$$

y sacando factor común, se obtiene finalmente,

$$y^1_{t+2} = (a_{11} + a_{22})y^1_{t+1} + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y^1_t - a_{22}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1)\,,$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden.

EJEMPLO 9.6

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ el número de individuos de dos poblaciones de animales en el mes t, que conviven en un ecosistema en el que realizamos un control cada mes. Supongamos que inicialmente tenemos $x_0 = 150$ e $y_0 = 325$, y que el desarrollo de la convivencia está gobernado por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t - y_t + 1 \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t + 3 \end{cases}$$

- Para encontrar el valor de x_t e y_t procedemos de la manera siguiente: De la primera de las ecuaciones

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - y_{t+1} + 1\,,$$

sustituimos la segunda de las ecuaciones en la expresión anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - (-x_t + 2y_t + 3) + 1 = 3x_{t+1} + x_t - 2y_t - 2\,,$$

que sigue dependiendo de y_t, pero podemos despejarlo de la primera de las ecuaciones y sustituir este valor en la ecuación anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} + x_t - 2(-x_{t+1} + 3x_t + 1) - 2 = 5x_{t+1} - 5x_t - 4\,,$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que puede ser escrita

$$\boxed{x_{t+2} - 5x_{t+1} + 5x_t = -4\,.} \tag{9.16}$$

Es fácil ver que las raíces de la ecuación característica de su ecuación homogénea son:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\,,$$

dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea

$$x_t = k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Para encontrar una solución particular de la solución completa, al ser el término independiente una constante, ensayamos con $x_t = a$. Sustituyendo en (9.16)

$$a - 5a + 5a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = -4\,,$$

la solución general de la ecuación completa será

$$\boxed{x_t = k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 4\,.}$$

- Ahora, tendremos que sustituir en la primera de las ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} y_t &= -x_{t+1} + 3x_t + 1 \\ &= -k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} - k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} + 4 + 3k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t \\ &\quad +3k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 12 + 1\,. \\ y_t &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 7\,. \end{aligned}$$

- Para encontrar los valores de k_1 y k_2, imponemos las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} 150 = k_1 + k_2 - 4 \\ 325 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) k_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) k_2 - 7\,, \end{array} \right.$$

sistema de ecuaciones lineales que tiene por solución $k_1 = 77 - 45\sqrt{5}$ y $k_2 = 77 + 5145\sqrt{5}$. En consecuencia, la solución particular para estas condiciones iniciales es:

$$\boxed{\begin{aligned} x_t &= (77 - 45\sqrt{5})\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + (77 - 51\sqrt{5})\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 4 \\ y_t &= (151 - 61\sqrt{5})\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + (166 - 64\sqrt{5})\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 7 \end{aligned}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 8

1.- **Sea la ecuación en diferencias:**

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t)\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3 \cdots \tag{9.17}$$

siendo y_t el número de individuos de una población en el año t.

- **Interpretar demográficamente (9.17).**
- **Comprobar que $y_t = 2 + 5(3^t)$ es una solución particular de (9.17).**
- **Encontrar la población al cabo de 4 años, sabiendo que $y_0 = 2$, $y_1 = 4$.**

2.- **En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que, cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 10 individuos de fuera. Plantear y resolver la ecuación en diferencias que modeliza la situación planteada.**

3.- **Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma,**

$$y_{t+2} - y_{t+1} = \frac{1}{5}\,(y_{t+1} - y_t) + \left(\frac{1}{5}\right)^t\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots\,,$$

probar que la población se estabiliza a largo plazo.

4.- **Supongamos que si no intervienen factores externos, el incremento del número de conejos en un mes es la tres cuartas partes del incremento del mes anterior. Inicialmente el número de conejos es de 10 y al finalizar el primer mes es de 30, además cada mes se incorporan 25 conejos a la población. Determinar la población de conejos al finalizar el segundo año ¿Cuál será su comportamiento a largo plazo?**

5.- **Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:**

- **Sea la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$, donde y_t representa a la cantidad de individuos en el año t. Si el número inicial de individuos es 2 y al cabo de un año es 5, ¿cuál será el valor de la población al cabo de 10 años?**
- **Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias**

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 8$$

6.- **Estamos interesados en un determinado tipo de aves que viven en una laguna. La dinámica de la población está gobernada por la siguiente ecuación en diferencias,**

$$6x_{t+2} + x_{t+1} = x_t + \left(\frac{1}{5}\right)^t , \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots \tag{9.18}$$

siendo $x_0 = 2$ **y** $x_1 = 5$**.**

- **Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias (9.18)**
- **¿Aumentará esta población a largo plazo?**

7.- **La evolución de dos especies que comparten un mismo territorio viene dada por el sistema de ecuaciones en diferencias,**

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t \\ y_{t+1} = x_t - 2y_t \end{array} \right.$$

donde $x_t\,, y_t$ **representan al número de animales de la primera y segunda especie en el año** t **¿Cuál es el comportamiento a largo plazo de estas poblaciones?**

Tema 10

SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

10.1. Introducción

La teoría de sistemas dinámicos es una rama de las Matemáticas que se ocupa del estudio del movimiento, y proporciona un lenguaje común para la Matemática, la Biología, la Ecología, la Física, la Historia y la Literatura. Esta disciplina académica fue creada en 1960 por *J.W. Forrester* del MIT (*Massachussetts Institute of Technology*) para ser empleada en la Administración y en las Ingenierías, pero en los últimos años se ha extendido a campos muy diversos.

En la teoría de los sistemas dinámicos, un **sistema** se define como una colección de elementos que continuamente interactuan para formar un conjunto unificado. A las relaciones internas y las conexiones entre los componentes de un sistema se les llama la **estructura del sistema**. Un ejemplo de un sistema es un ecosistema. La estructura de un ecosistema está definida por las relaciones entre la población animal, nacimientos y muertes, cantidad de comida, y otras variables específicas para un ecosistema particular.

El término dinámico hace referencia al cambio a lo largo del tiempo. Si algo es dinámico, es porque se está modificando constantemente. Un sistema dinámico es aquel en el cual las variables se modifican para producir cambios a lo largo del tiempo. La manera por la cual los elementos o las variables de un sistema cambian con el tiempo se denomina **comportamiento del sistema**. En el ejemplo del ecosistema, el comportamiento está descrito por la dinámica que se produce como consecuencia de los nacimientos y las muertes de la población. El comportamiento está expuesto a la influencia de comida adicional, los depredadores, y al medio ambiente, los cuales son todos elementos del sistema.

Los sistemas dinámicos también pueden usarse para analizar, como pequeños cambios en una parte del sistema, pueden afectar al comportamiento del sistema completo. Si nos referimos al ejemplo del ecosistema, podemos analizar el impacto de la sequía en el ecosistema o analizar el impacto de la eliminación de una determinada especie animal en el comportamiento del ecosistema completo.

En relación con los sistemas dinámicos discretos, fue *H. Poincaré* en 1899 el primero en utilizarlos al intentar simplificar un modelo continuo, pero ha sido en la década de los cincuenta donde han sido estudiados y aplicados en problemas muy diversos. En 1976 *R. May*, analizando el comportamiento de las ecuaciones en diferencias en el modelo que lleva su nombre, observó que aún para el caso determinista, el modelo podía presentar comportamientos "muy complicados". En 1963 el meteorólogo *E. Lorentz* descubre el caos matemático en un sistema dinámico continuo, presentando a la comunidad científica el atractor que lleva su nombre. Poco después, en 1973, *M. Heron* estudia el caso discreto, descubriendo un tipo de atractor muy parecido al de *Lorentz*. Dos años después, *Feigenbaum* presentó por primera vez el diagrama de bifurcación correspondiente al modelo logístico. Actualmente la teoría de las bifurcaciones es un campo donde se investiga intensamente.

10.1.1. Ejemplos de sistemas dinámicos

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos:

1.- **La ecuación de** *Malthus*. Queremos estudiar la evolución de la población de una determinada especie. Llamamos x_k al número de individuos de la población en el instante temporal k. Si suponemos que por cada individuo existente en el período k habrá, por término medio, α individuos en el período $k+1$, se tendrá

$$x_{k+1} = \alpha x_k \,, \quad k = 0, 1, \cdots \,. \tag{10.1}$$

Esta ecuación en diferencias lineal de primer orden, es la llamada ecuación de *Malthus*, economista y pensador del siglo XIX, propuesta para estimar la evolución de la población humana.

Si $\alpha > 1$, es decir, si existe algún crecimiento vegetativo en la población, los valores de x_k crecen en progresión geométrica y se disparan de forma exponencial, razón por la que esta ecuación desató una fuerte polémica entre los contemporáneos de *Malthus*, suponiendo la primera llamada de atención sobre el problema de la sobrepoblación del planeta.

2.- **La parábola logística de** *May*. En 1976 el biólogo *Robert May* formuló otra ecuación para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema aislado, diferente de la de *Malthus*. *May* tuvo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema. Cuando la población se acerca al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, entonces el parámetro α debe disminuir, lo que equivale a considerar este parámetro función del número de individuos. Con ello se llega a una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = \alpha(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Podemos tomar como unidad de medida el máximo posible de la población, de manera que x_k expresa la fracción de población existente en el período k con respecto al nivel máximo de población. *May* formuló la hipótesis de que $\alpha(x_k)$ debería decrecer linealmente cuando x_k creciera, hasta hacerse nulo cuando x_k tomara el valor 1. Es decir que $\alpha(x_k)$ fuera de la forma $\mu(1 - x_k)$, llegando así a la ecuación de la **parábola logística de** *May*

$$x_{k+1} = \mu(1 - x_k)x_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{10.2}$$

Observemos que para valores pequeños de x_k se tiene $1 - x_k \approx 1$, con lo que la ecuación (10.2) es equivalente a la ecuación de *Malthus* (10.1) con parámetro μ.

3.- **Modelo matricial.** Supongamos que una especie de aves que vive muchos años, resulta capaz de reproducirse a partir del segundo año de vida y que, por término medio, cada pareja de aves en edad reproductora cría anualmente una nidada de la que sobreviven dos crías, una de cada sexo. Se supone que a partir del segundo año todas las aves han emparejado. Se suelta una pareja de aves en una región sin depredadores. ¿Cuál es la ley de evolución para la población de aves?.

Ante un problema de esta naturaleza, el primer paso consiste en seleccionar las variables. Debido a las diferentes condiciones de reproducción, conviene considerar dos segmentos en la población de aves: las de un año y las de dos o más. Tomamos como variable $x_1(k)$ el número de parejas adultas en el período k. Debido a que existe siempre el mismo número de machos que de hembras, la población de aves de un año puede también contarse por el número $x_2(k)$ de parejas que pueden formarse entre ellas. Se tienen entonces las siguientes relaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(k+1) & = & x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) & = & x_1(k) \end{array}\right.$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

10.1.2. Conceptos de dinámica discreta

Un sistema dinámico discreto es simplemente, desde un punto de vista matemático, una ecuación en diferencias de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

donde f es una aplicación $f : X \to X$ definida en cierto conjunto X, que recibe el nombre de **espacio de fases o espacio de los estados**. Salvo que digamos lo contrario, siempre consideraremos funciones f suficientemente suaves, es decir, con derivadas continuas de todos los órdenes necesarios. Así, por ejemplo, cuando se quiere traducir un problema como los descritos en el apartado anterior al lenguaje de los sistemas dinámicos, se empieza por determinar el espacio de fases del problema que no es sino un conjunto cuyos elementos describen todos los posibles estados del sistema que se trata de analizar.

- En el modelo de *Malthus* se podría considerar como espacio de los estados el conjunto de los números reales no negativos (no son posibles poblaciones con un número negativo de individuos). Cuando el espacio de fases de un sistema es $\mathbb{R}$ o algún subconjunto de $\mathbb{R}$ se trata de un **sistema dinámico unidimensional**
- En el ejemplo la parábola logística de *May*, donde se estudia una única variable, que es la fracción de población con respecto a la máxima población posible, un espacio de fases adecuado es $X = [0, 1]$
- En el caso de la población de aves, el estado del sistema se describe a través de dos variables de estado $x_1(k)$ e $x_2(k)$ por lo que el espacio de los estados adecuado es un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$, el de todos los pares de números enteros no negativos. En sistemas más complejos, se hacen necesarias más variables para describir completamente el estado del sistema, por lo que $\mathbb{R}^m$, o un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, es un espacio de fases adecuado para muchos problemas. Por ejemplo, en mecánica se requieren 10 variables para describir completamente una partícula: tres para fijar su posición espacial, otras seis para conocer su velocidad y aceleración y una más para determinar su masa.

Las variables que describen un sistema, se llaman **variables de estado**. Se agrupan en un vector, que se conoce como **vector de estado**, y que almacena la información completa acerca del estado del sistema. El espacio de fases es entonces el conjunto de todos los posibles vectores de estado del sistema.

La ecuación de un sistema dinámico puede interpretarse de la siguiente forma: si el sistema adopta en un instante k un estado descrito a través de un cierto elemento $x_k \in X$, entonces en el instante $k+1$ el estado del sistema será x_{k+1}. La aplicación f representa por consiguiente la **ley de evolución del sistema dinámico** que transforma cada estado en el siguiente estado que el sistema adopta.

Si el sistema se encuentra en un estado inicial x_0, su evolución temporal corresponde a la sucesión $x_0, x_1, x_2, \cdots$, también llamada **solución con condición inicial** x_0. Se obtiene recursivamente

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),$$

y en general

$$x_k = f^k(x_0)\,.$$

La expresión $f^k(x)$, es la **solución general o flujo de los sistemas dinámicos discretos**. Permite conocer el estado del sistema en cualquier instante a partir de su posición inicial. El conjunto de valores

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \cdots, \}$$

recibe el nombre de **órbita de** x, (se diferencia de la solución $x, f(x), f^2(x), \cdots$ en que ésta última es una sucesión ordenada cuyos términos son los elementos de la órbita).

Es fácil realizar el siguiente experimento: marquemos un número en una calculadora, por ejemplo 0.25, y pulsemos de forma reiterativa la tecla 10^x, con lo cual obtendremos la órbita correspondiente,

$$0.25,\ 10^{0.25},\ 10^{10^{0.25}},\ \cdots$$

Si continuamos con este proceso la calculadora nos dará un mensaje de error. La causa de este comportamiento es que la órbita tiende a infinito. Si repetimos el proceso tomando como semilla cualquier número y como función el seno o el coseno, observaremos que en este caso las órbitas son convergentes.

EJEMPLO 10.1

- Puede comprobarse fácilmente que la ecuación de *Malthus* admite por solución general la expresión

$$\Phi_x(k) = \alpha^k x$$

  El comportamiento de esta expresión es sencillo de comprender. Si $x > 0$ entonces

$$\lim_{k\to\infty} \alpha^k x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1 \\ x & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

- Menos sencillo resulta el problema de encontrar una fórmula explícita para el problema de las aves. Se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

  Si calculamos las sucesivas potencias de la matriz, nos aparece un hecho curioso como es la aparición en estas matrices de los célebres números de *Fibonacci* $1, 1, 2, 3, 5, 8$,....

- Para el modelo de *May* la situación es más complicada, como tendremos ocasión de comprobar cuando estudiemos los modelos discretos no lineales. Podemos encontrar las primeras iteraciones de la solución general $f^k(x)$ y nos convenceremos de la enorme complicación de los cálculos involucrados. Ello nos ayuda a comprender la imposibilidad de obtener expresiones explícitas para las soluciones generales de los sistemas dinámicos no lineales (modelo de *May*), cuya conducta se pueda entender de forma global, como sucede en el caso (lineal) de la ecuación de *Malthus*.

El campo de **aplicaciones** de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales es muy amplio, y en los últimos años continúan aumentando. A continuación mostramos algunas de ellas.

- **En Matemáticas para la resolución numérica de ecuaciones.** Recordemos que el método del punto fijo nos permite encontrar la raíz de una ecuación $f(x) = 0$. El proceso se inicia reescribiendo la ecuación como $g(x) = x$, se toma un valor x_0 próximo a la solución buscada, y se reitera el proceso $x_{k+1} = g(x_k)$. Si la órbita correspondiente

  $$\{x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1) = g(g(x_0)),\, \cdots,\},$$

  converge a cierto valor x^*, entonces el método es convergente.

  Recordemos que gráficamente el punto fijo $g(x^*) = x^*$ se encuentra como la intersección de la función $g(x)$ con la bisectriz del primer cuadrante.

- **Elaboración de modelos matemáticos.** Por ejemplo, el modelo logístico (del francés logis = alojamiento), que suele ser el punto de partida de los sistemas dinámicos unidimensionales,

  $$x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{10.3}$$

  se puede obtener de la manera siguiente: Supongamos que x_0 es la población relativa inicial, esto es, el cociente entre la población inicial y la población máxima que puede soportar el habitat. Sea x_k la población relativa al cabo de k años El crecimiento relativo de la población en cada año será

  $$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k}\,,$$

  que según las hipótesis de *Verhulst* (1845), es proporcional a $1 - x_k$. Es decir,

  $$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = \alpha(1 - x_k)\,,$$

  despejando

  $$x_{k+1} = x_k + \alpha(1 - x_k)x_k = x_k(1 + \alpha)(1 - x_k)\,.$$

  Si llamamos $\mu = 1 + \alpha$, entonces obtenemos la expresión (10.3)

- **Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.** Sea la ecuación diferencial

  $$x'(t) = \frac{dx}{dt} = f(x)\,,$$

  que podemos expresarla como

  $$x(t + dt) - x(t) = f(x)dt\,.$$

  Si sustituimos dt por un valor numérico h, obtenemos

  $$x_{k+1} - x_k = hf(x_k) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k + hf(x_k)\,,$$

  tomando h suficientemente pequeño, podemos entonces dibujar la solución que pasa por un punto inicial dado.

10.2. Modelos dinámicos discretos lineales.

En general, obtener la expresión explícita de la solución general $f^k(x)$ es bastante complicado. Con ayuda de un ordenador podemos conseguir numéricamente cuantas iteraciones deseemos en esa expresión, pero esto no resulta en general de mucha ayuda para entender la conducta global del sistema. Un instrumento que resulta en muchas ocasiones adecuado en el caso de sistemas unidimensionales es el análisis gráfico, a través del llamado **diagrama de Cobweb**.

Supongamos una árida isla cerca de la costa de un rico continente. Estamos interesados en una especie particular de pájaros que anidan en estas islas. Desgraciadamente el habitat de la isla es muy desfavorable ya que si los pájaros estuvieran aislados su población disminuiría un 20 % cada año. Esta situación podemos reflejarla utilizando el modelo de *Malthus* (exponencial)

$$x_{k+1} = 0.80x_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,,$$

donde x_k es la población de pájaros en el tiempo k. Hay una colonia de pájaros en el continente y cada año 1000 pájaros emigran a nuestra isla. Entonces, el cambio de población en la isla puede ser descrito por el modelo

$$x_{k+1} = 0.80x_k + 1000\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,.$$

Observemos que el modelo es lineal en el sentido de que la función $f(x) = 0.80x + 1000$ representa a una línea recta.

Ahora descubriremos y probaremos un teorema sobre sistemas dinámicos lineales discretos, que corresponden al tipo

$$x_{k+1} = mx_k + b\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,,$$

donde m y b son constantes. Recordemos que los sistemas dinámicos discretos están descritos por una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

En el caso particular de sistemas dinámicos discretos lineales, la función f es del tipo $f(x) = mx + b$, y estamos interesados en puntos de equilibrio del sistema dinámico discreto. Aquellos puntos x tales que $f(x) = x$. Estos puntos se llaman de equilibrio porque si un término es uno de estos puntos, cada sucesión de términos siguientes permanece en el mismo punto. De esta manera decimos que el sistema se encuentra en equilibrio. Es inmediato comprobar el siguiente resultado.

RESULTADO 10.2.1 *Si m no vale 1 entonces hay un único punto de equilibrio*

$$x^* = \frac{b}{1-m}$$

Los modelos dinámicos discretos pueden comportarse de manera sorprendente. Algunas veces una sucesión obtenida del sistema dinámico lineal discreto tiende directamente al punto de equilibrio. En otras ocasiones saltan alrededor de él, con saltos cada vez más pequeños hasta tender al punto de equilibrio. O por el contrario los saltos son cada vez más grandes y no tienden al punto de equilibrio.

Nuestro objetivo es formular y probar un teorema que nos determine cuando ocurre cada una de estas clases de comportamiento. Comenzamos la construcción del diagrama de *Cobweb* dibujando las gráficas

$$f(x) = mx + b\,, \quad g(x) = x$$

Dibujamos el punto x_1 en el eje OX. A continuación marcamos el valor $f(x_1) = x_2$ y obtenemos el punto (x_1, x_2). El próximo paso es trazar una línea horizontal desde el punto (x_1, x_2) hasta que corte a la recta $g(x) = x$ en el punto (x_2, x_2). Calculamos $x_3 = f(x_2)$ y repetimos sucesivamente este proceso.

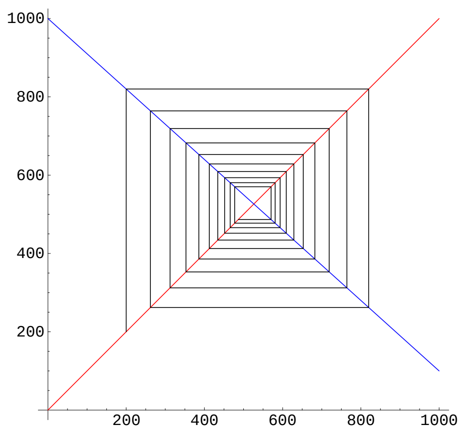

Figura 10.1: Diagrama de *Cobweb*.

Observemos en la Figura 10.1 que en este caso "la red de araña" nos lleva al punto de equilibrio. En la Figura 10.2 hemos representado en el eje de abscisas el tiempo y en el eje de ordenadas el número de individuos. Puede verse que si el tiempo aumenta la población tiende al punto de equilibrio. Se trata por tanto de un punto de equilibrio estable.

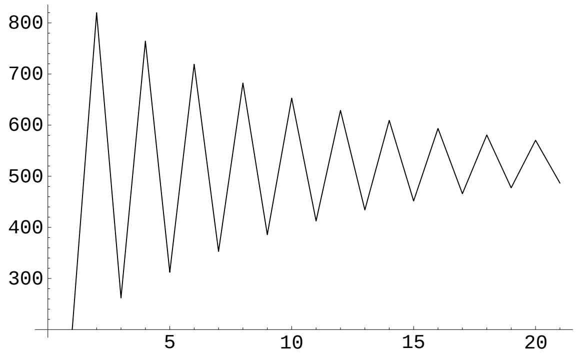

Figura 10.2: Punto de equilibrio estable.

EJEMPLO 10.2

- Vamos a calcular y dibujar $x_2, x_3, \cdots$, para el modelo $x_{k+1} = 0.80x_k + 1000$ y el valor inicial $x_0 = 500$.

  El modelo anterior podemos escribirlo como

  $$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots ,$$

  donde $f(x) = 0.80x + 1000$. Esta es una buena manera de representar a nuestro modelo porque la función $f(x)$ nos describe como la población, en cada año está determinada por la población en el año anterior.

  Los dos gráficos $f(x) = 0.8x + 1000$ y $g(x) = x$ se cortan en el punto $x^* = 5000$. Este punto se llama **punto de equilibrio** ya que la población en los próximos años será la misma que la población actual.

  $$f(5000) = 0.8 \times 5000 + 1000 = 5000$$

  Podemos encontrar este valor también de manera algebraica

  $$f(x) = x \;\Rightarrow\; x = 0.8x + 1000 \;\Rightarrow\; x = 5000$$

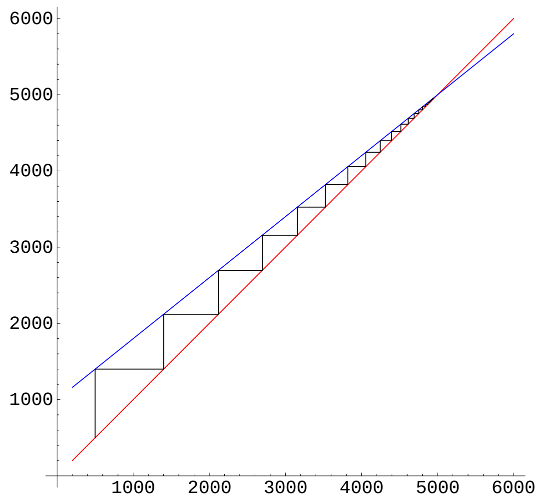

Figura 10.3: Estudio del punto de equilibrio.

La Figura 10.3 nos muestra como determinamos gráficamente el punto de equilibrio.

A continuación nos centraremos en la clasificiacación de los puntos de equilibrio o en el análisis de la estabilidad. En el análisis de la evolución de poblaciones el problema principal es:

- Evaluar la estabilidad de la población usando modelos matemáticos.
- Examinar los efectos de diferentes factores sobre la estabilidad de la población.

Hemos tenido ocasión de ver que en los sistemas dinámicos lineales discretos, el punto de equilibrio

$$x^* = \frac{b}{1-m},$$

en algunas ocasiones es un **punto de equilibrio atractivo**, (aquel que a largo plazo los términos x_k tienden al x^* cuando k tiende a ∞), y otras veces es un **punto de equilibrio repulsivo**, (aquel donde x_k tiende a mas o menos infinito). A continuación presentamos un teorema que nos permitirá determinar cuando un punto de equilibrio es atractivo o repulsivo.

TEOREMA 10.2.2 *Sea el sistema dinámico lineal discreto*

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad f(x) = mx + b$$

con $m \neq 1$. *Sea* $x^* = b/(1-m)$ *el punto de equilibrio,*

- *si* $|m| < 1$ *entonces* x^* *es atractivo, en el sentido de que para cualquier condición inicial* x_0

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

- *si* $|m| > 1$, *entonces* x^* *es repelente, y al menos que* $x_0 = x^*$ *se cumple*

$$\lim_{k\to\infty} |x_k| = \infty\,.$$

Demostración. Comenzamos calculando el valor de x_k

$$\begin{array}{l}
x_2 = mx_1 + b \\
x_3 = mx_2 + b = m^2x_1 + b(m+1) \\
x_4 = mx_3 + b = m(m^2x_1 + b(1+m)) + b = m^3x_1 + b(1+m+m^2) \\
\cdots \\
x_k = m^{k-1}x_1 + b(1+m+m^2+\cdots+m^{k-2}) = m^{k-1}x_1 + b\displaystyle\sum_{j=0}^{k-2} m^j\,.
\end{array}$$

Si suponemos que $|m| < 1$ entonces al hacer que k tienda a infinito

$$\lim_{k\to\infty} m^{k-1}x_1 = 0\,.$$

Por otro lado,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k-2} m^k = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \frac{1}{1-m}\,,$$

por ser la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $|m| < 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{b}{1-m} = x^*\,.$$

Por un razonamiento similar, si $|m| > 1$ se cumple que $m^{k-1}x_1$ y $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-2} m^j$ no están acotados cuando $k \to \infty$. ■

10.3. Modelos dinámicos discretos no lineales

Para un sistema de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0,\, 1,\, 2, \cdots\,, \tag{10.4}$$

donde ahora la función f no es lineal, la situación es diferente a lo estudiado en la sección anterior. Lo que debemos tener en cuenta, es que pueden existir muchos puntos de equilibrio. En el caso lineal el tipo de punto de equilibrio nos lo daba el parámetro m de la recta. En el caso no lineal el carácter de cada punto está determinado por la pendiente de la curva $f(x)$ en el punto x^*, y sabemos que este valor puede determinarse por la derivada de la función f en el punto x^*.

TEOREMA 10.3.1 *Consideremos el sistema dinámico* (10.4) *siendo* x^* *un punto de equilibrio* $f(x^*) = x^*$*. Entonces*

- *si* $|f'(x^*)| < 1$ *el punto de equilibrio es atractivo, en el sentido de que si* x_0 *está suficientemente cerca de* x^* *entonces*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* .$$

Algunas veces a un equilibrio de esta características se le dice equilibrio estable, ya que si el sistema se mueve ligeramente del punto de equilibrio, al final retorna al mismo.

EJEMPLO 10.3

- Consideremos el sistema dinámico discreto no lineal de *May*

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k)\,, \quad \alpha > 0\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2\cdots .$$

1.- Encontrar los puntos de equilibrio y clasificarlos.

2.- Sea $\alpha = 2.5$ y $x_0 = 0.1$. Utilizando el diagrama de *Cowbew.* clasificar el punto de equilibrio del sistema.

3.- Repetir el proceso para $\alpha = 3.3,\ 3.55$

4.- Cuando α aumenta de 3 a 4 ¿observas algún cambio en el tipo de soluciones obtenidas?.

- Empezamos encontrando los puntos de equilibrio. En este caso la función f no lineal que nos define el modelo es

$$f(x) = \alpha x(1 - x)\,.$$

Por tanto, tendremos que resolver la ecuación $f(x) = x$, que tiene por soluciones,

$$x^* = 0, \qquad x^* = 1 - \frac{1}{\alpha}\,.$$

Para clasificar estos puntos de equilibrio, tenemos que hacer uso del Teorema 10.3.1. La derivada de la función $f(x)$ vale $f'(x) = \alpha - 2\alpha x$. Por tanto, el primero de los puntos es asintóticamente estable si

$$|f'(0)| = |\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha < 1\,.$$

En cuanto al segundo, será estable si

$$\left|f'\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right| = |2 - \alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < \alpha < 3\,.$$

- Si consideramos el modelo no lineal $f(x) = 2.5x(1 - x)$ y como semilla o valor inicial $x_0 = 0.8$, podemos encontrar su órbita haciendo uso del software `Mathematica`®.

Empezamos definiendo la función,

`f[k_][x_] := k * x * (1 − x)`

posteriormente, encontramos los puntos de equilibrio

`NSolve[p[2.5][x] == x, x]`

{{x→ 0,   x→ 0.6 }} y finalmente la órbita

`NestList[p[2.5], 0.8, 25]`

{{ 0.8, 0.4, 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 0.6 }}
En consecuencia, $x^* = 0.6$ es un punto de equilibrio estable. Podemos comprobarlo si dibujamos su diagrama de *Cobweb*.

```
iters = NestList[p[2.5], 0.8, 20]
gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{iters,
iters}]], 2, 1], PlotJoined → True, DisplayFunction
→ Identity]
fg = Plot[{x, p[0.5][x]}, {x, 0, 1},
PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
DisplayFunction → Identity]
Show[fg, gi, AspectRatio ->1, DisplayFunction →
DisplayFunction]
```

Obteniéndose como respuesta

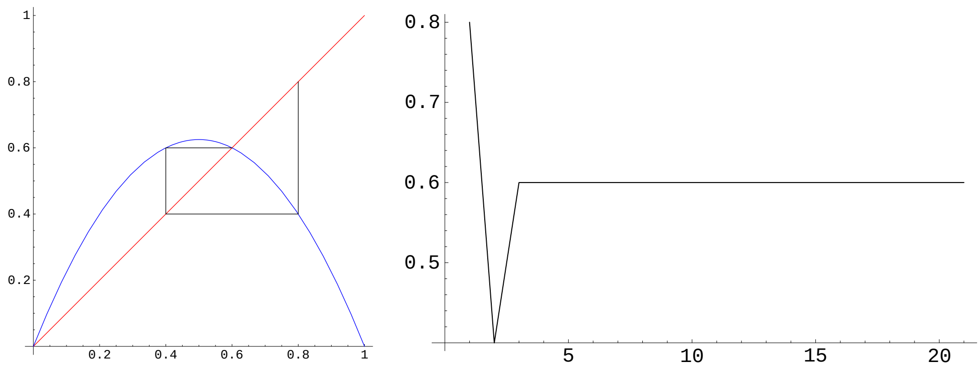

Figura 10.4: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 2.5x(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Ahora, consideramos el diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.3\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$. Los primeros 25 elementos de su órbita son:

{ 0.8, 0.52799, 0.82241, 0.48196, 0.82392, 0.47873, 0.82350, 0.47963, 0.82363, 0.47936, 0.82359, 0.47944, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47946, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942, 0.82360, 0.47942 } .

Es decir, en este caso la población tiene un comportamiento periódico de orden dos tendiendo a los valores $x_1^* \approx 0.4794270$ y $x_2^* \approx 0.823603$.

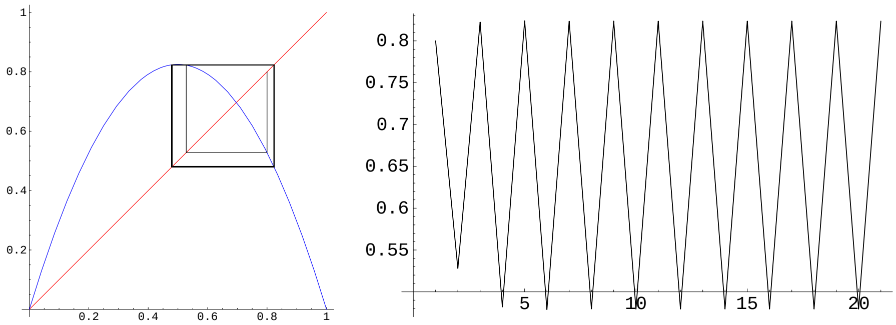

Figura10.5: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.3\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Repitiendo los cálculos para $f(x) = 3.5\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$, se obtiene la órbita:

  $\{\{\,0.8,\ 0.559999,\ 0.8624,\ 0.41533,\ 0.84990,\ 0.44647,\ 0.86497,\ 0.40878,\ 0.84587,\ 0.45628,\ 0.86831,\ 0.40021,\ 0.84014,\ 0.47004,\ 0.87185\,,\ 0.391,\ 0.83343,\ 0.48587,\ 0.87430,\ 0.38464,\ 0.82842\ \}\ \}$.

  La población se comporta de manera periódica de orden 4.

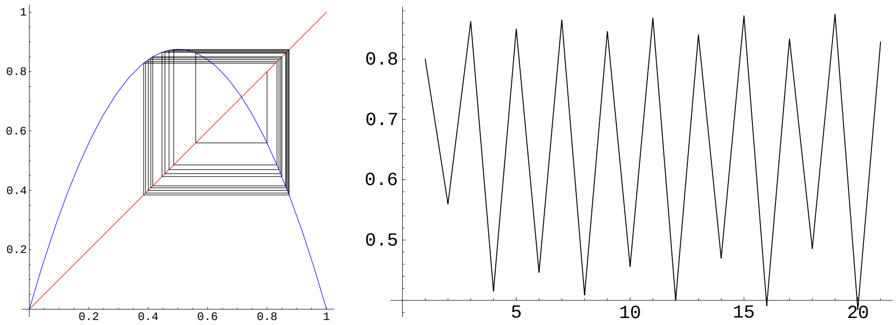

Figura 10.6: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 3.5\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

- Por último, si consideramos $f(x) = 4\,x\,81-x)$ y $x_0 = 0,8$, ahora la población se comporta caóticamente.

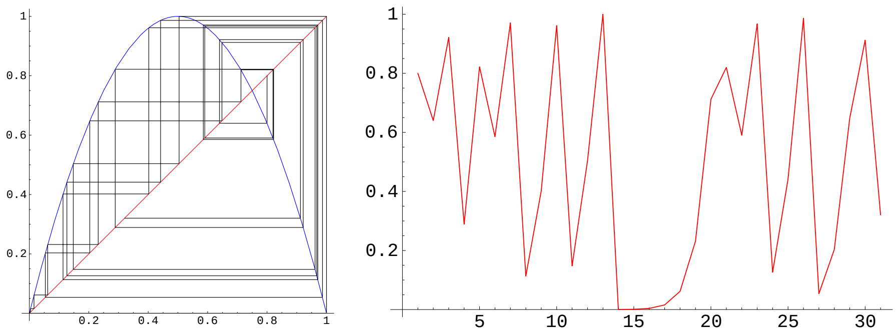

Figura 10.7: Diagrama de *Cobweb* para $f(x) = 4\,x\,(1-x)$ y $x_0 = 0.8$.

Tendremos ocasión de volver sobre este ejercicio cuando estudiemos los sistemas caóticos.

10.4. Puntos de equilibrio y periódicos de un sistema dinámico

En esta sección trataremos de sistematizar y formalizar los resultados obtenidos en las secciones anteriores, para estudiar los puntos de equilibrio y periódicos de un **sistema dinámico discreto unidimensional**.

Dado un sistema dinámico

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f : X \to X \,,$$

se dice que $x^* \in X$ es un punto de equilibrio del sistema si $f(x^*) = x^*$. Si x^* es un punto de equilibrio, la solución cuya condición inicial es $x_0 = x^*$ cumple $f^k(x_0) = x^*$. Esto significa que los puntos de equilibrio son estados fijos: una vez el sistema entra en ellos, permanece invariable en todos los instantes futuros.

Los puntos de equilibrio se clasifican según el comportamiento de las soluciones con condiciones iniciales cercanas a ellos, en **puntos de equilibrio atractivos, repulsivos e indiferentes**. En lo que sigue, consideraremos el siguiente sistema dinámico unidimensional

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- **Puntos de equilibrio atractivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es atractivo si $|f'(x^*)| < 1$
- **Puntos de equilibrio repulsivos.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es repulsivo si $|f'(x^*)| > 1$
- **Puntos de equilibrio indiferentes.** Sea x^* un punto de equilibrio de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que x^* es indiferente si $|f'(x^*)| = 1$
- **Puntos cíclicos.** Se dice que x^* es un punto periódico o cíclico del sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$, si existe un n tal que $f^n(x^*) = x^*$. Un punto es periódico si su órbita se "cierraz vuelve a comenzar por su valor inicial. El mínimo entero k tal que $f^k(x^*) = x^*$, se llama **orden del punto periódico**. En tal caso la órbita

$$\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \cdots , f^{k-1}(x^*)\}$$

recibe el nombre de **período o ciclo de orden** k.

10.4.1. Estabilidad

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico representa un estado fijo del sistema. Ahora bien, no todos los estados de equilibrio tienen la misma naturaleza.

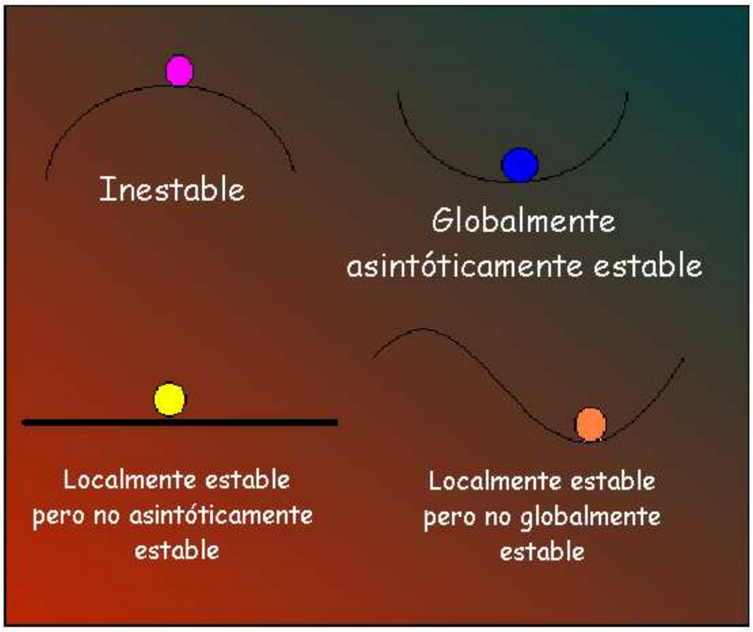

Figura 10.8: Tipos de estabilidad.

Si se deja rodar una bola en el cuenco de una copa, terminará deteniéndose en el centro de la misma. Si se desplaza la bola ligeramente de su posición de equilibrio, retornará a ella. Este es un equilibrio robusto frente a perturbaciones, conocido como **equilibrio asintóticamente estable**. Los puntos de equilibrio atractivos presentan esta forma de equilibrio.

La forma de equilibrio opuesta es el **equilibrio inestable**, representado por una pelota en el borde del tejado: basta una ligera perturbación para romper el equilibrio. Los puntos de equilibrio repulsivos presentan este tipo de equilibrio. Finalmente existe una forma intermedia de equilibrio, técnicamente conocido como **equilibrio estable**. Este se halla representado por un péndulo sin rozamiento en posición de reposo. Si se somete al péndulo a una pequeña perturbación, éste permanecerá oscilando indefinidamente en torno a la posición de equilibrio, sin alejarse mucho de ella, pero sin retornar a ella de forma definitiva.

EJEMPLO 10.4

- Comprobemos que el origen es un punto de equilibrio estable para el sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$ si $f(x) = -x$.

  Es evidente que $x^* = 0$ es solución de la ecuación $f(x) = x$, por lo tanto, es un punto de equilibrio. Para comprobar que su equilibrio es estable, perturbamos este valor tomando $x_0 = 0.5$. La Figura 10.9 muestra que la órbita sólo toma los valores -0.5 y 0.5.

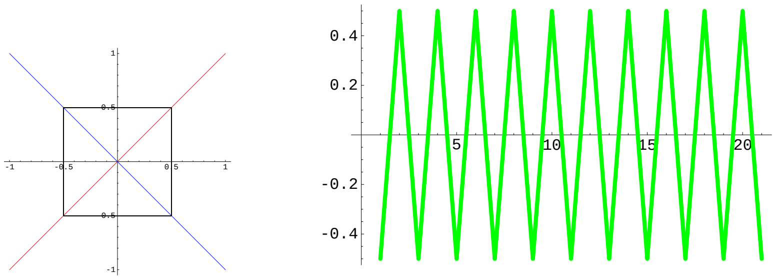

Figura 10.9: Diagrama de *Cobweb*.

10.5. Sistemas caóticos

En el Ejemplo 10.3 hemos tenido ocasión de comprobar que sistemas o modelos muy simples, pueden pasar de tener un comportamiento determinístico a un comportamiento caótico, modificando ligeramente los valores de un parámetro. En esta sección formalizaremos este concepto.

La teoría del caos fue introducida en ecología por *May* (974, 1976) y *Oster* (1976) en el contexto de funciones reales de variable real está siendo estudiada con intensidad en los últimos años y aparece en casi todos los modelos discretos no lineales.

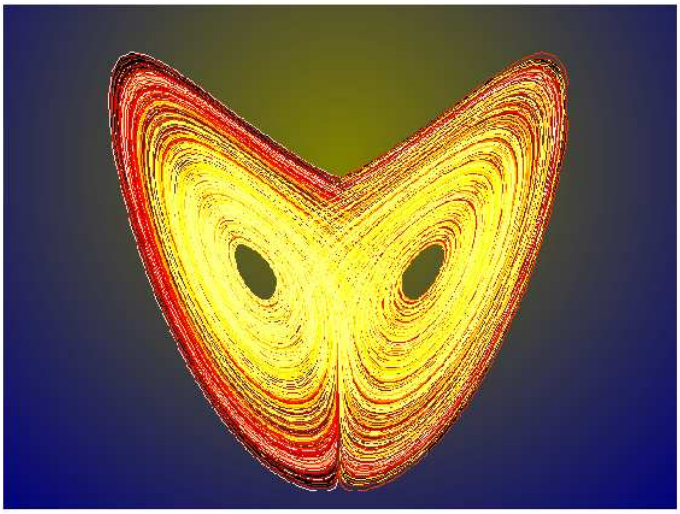

Figura 10.10: Mariposa o atractor de Lorentz.

Lo primero que nos llama la atención es el hecho de que vivimos inmersos en el caos. De manera usual, **llamamos caos a todo aquello que no somos capaces de sistematizar**.

El primer investigador del caos fue un meteorólogo llamado *Edward Lorentz*. En 1960 utilizaba un modelo matemático para predecir el tiempo, que consistía en un sistema de 12 ecuaciones no lineales. La simulación se realizaba con un ordenador, que daba como respuesta un comportamiento probable de la atmósfera. En cierta ocasión, quiso repetir de nuevo los cálculos anteriores, para ello volvió a introducir los números en el ordenador, pero para ahorrar papel y tiempo, solo utilizó 3 números decimales en vez de 6. Lo sorprendente fue que el resultado encontrado era totalmente diferente a los obtenidos en la vez anterior. Del análisis de esta situación surgió una nueva teoría que se conoce con el nombre de la teoría del caos.

Lo verdaderamente interesante era que diferencias muy pequeñas en las condiciones iniciales tenían una gran influencia en la resolución final del problema. A este efecto que tienen las pequeñas diferencias iniciales después se le dio el nombre de **efecto mariposa**:

> "*El movimiento de una simple ala de mariposa hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma.*"

Como podemos comprender, este descubrimiento causó en *Lorentz* un gran impacto, ya que según esta nueva hipótesis, no sería posible predecir con exactitud el comportamiento de cualquier sistema, pues todas las medidas se ven afectadas por los errores de calibración de los instrumentos. Es imposible, por tanto, conocer las condiciones iniciales exactas de la mayoría de los sistemas dinámicos. Afortunadamente, *Lorentz* se dio cuenta de que las soluciones del sistema que parecían tener un comportamiento hecho totalmente al azar, después de verlas representadas en una gráfica sucedía algo sorprendente. El resultado siempre ocupaba una determinada región del espacio, y tenía forma de una espiral doble.

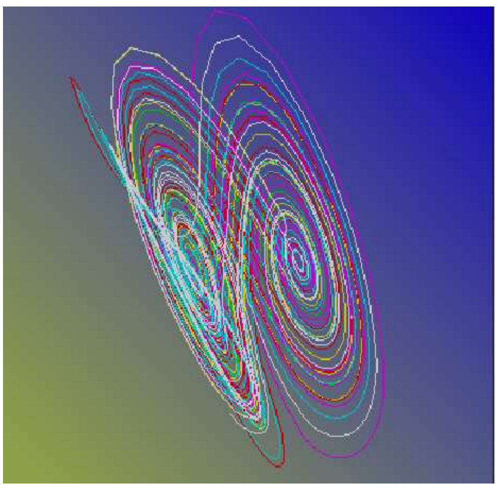

Figura 10.11: Atractor de Lorentz.

Antes de la aparición de esta nueva teoría, sólo había dos tipos de comportamientos conocidos para un sistema dinámico: un estado fijo, donde los variables nunca cambian, y el comportamiento periódico, donde el sistema está en un "circuito cerrado" y se repite infinitamente. Las soluciones del sistema de *Lorentz* son definitivamente ordenadas (siguen una espiral). Nunca se paran en un punto, ni se repiten, ni son periódicas. A su representación gráfica se la conoce con el nombre **Atractor de Lorentz**[1]. Estas gráficas deben cumplir otra condición: no puede cortarse a sí misma ya que, si así fuese, habría dos curvas diferentes a partir de ese punto de corte, lo cual significaría dos realidades simultáneas y diferentes.

Una curva de estas características no puede estar contenida en un plano, y por supuesto su dimensión es fraccionaria. Este tipo de atractores reciben el nombre de **atractores extraños**, ya que su representación gráfica es un **fractal**. Queremos insistir en la idea fundamental que encierra el concepto de atractor, como es la siguiente: mientras es casi imposible predecir exactamente el estado futuro de un sistema, es posible, y aún más, muchas veces es fácil modelar el comportamiento general del sistema.

A continuación, resumimos algunos de los rasgos característicos de los sistemas caóticos.

- Son muy sensitivos a las condiciones iniciales. Un cambio muy pequeño en los datos iniciales dan lugar a resultados totalmente diferentes.

- Parecen un desorden, o hechos al azar, pero no lo son, hay reglas que determinan su comportamiento. Los sistemas hechos al azar no son caóticos.

10.5.1. Diagramas de bifurcación

Podemos preguntarnos si la teoría del caos puede ser utilizada para estudiar el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos biológicos. En efecto, la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = \mu\, x_t\,(1 - x_t)\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$$

donde x_t es la fracción de la población en el tiempo t, es una fórmula que hemos tenido ocasión de trabajar repetidamente con ella. Se trata de la curva logística, utilizada para estudiar la evolución de poblaciones en ecología.
Hemos visto en el Ejemplo 7.3 que al variar el valor del parámetro μ, el sistema puede tender a un solo punto de equilibrio, a dos, a cuatro, $\cdots$, o bien presentar un comportamiento caótico.

[1]El atractor es la región del espacio hacia la cual convergen las trayectorias posibles dentro de un sistema.

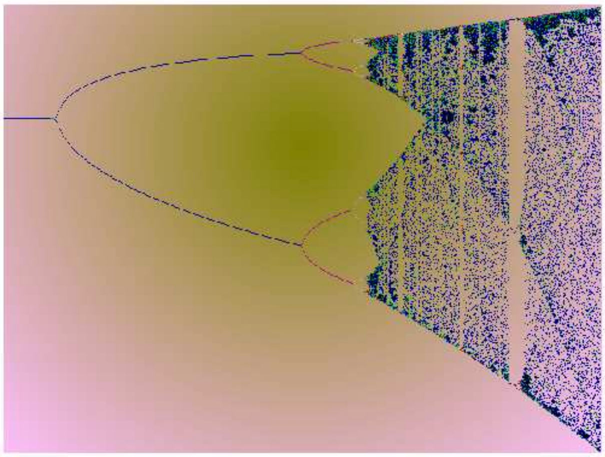

Figura 10.12: Diagrama de bifurcación del modelo de *May*.

Su diagrama de bifurcación se obtiene dibujando en el eje de abscisas los valores del parámetro μ y en el eje de ordenadas los valores a los que tiende el sistema. Por ejemplo si $\mu = 2.5$ entonces $x_t \to 0.6$, o bien, en el caso $\mu = 3.3$ entonces $x_t \to 0.823$ y $x_t \to 0.479$. La Figura 10.12 representa la gráfica obtenida. Si seleccionamos cualquiera de las zonas del diagrama de bifurcación de la Figura 10.12 y la ampliamos obtenemos la Figura 10.13. Podemos comprobar una de las propiedades que definen a un objeto fractal, como es la **autosemejanza**.

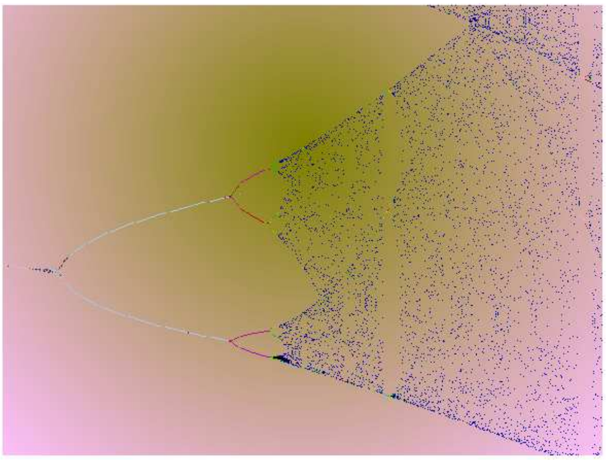

Figura 10.13: Autosemejanza del diagrama de bifurcación.

El diagrama de bifurcación tiene propiedades importantes. Entre ellas presentamos la siguiente: sabemos que a medida que aumentamos el valor del μ el período se va duplicando.

PERIODOS	INTERVALOS	COCIENTES
2	$3 < C < 3.4495$	....
4	$3.4495 < C < 3.5441$	4.75159
8	$3.5441 < C < 3.5644$	4.6601
16	$3.5644 < C < 3.5688$	4.61364

Tabla 10.1

La Tabla 10.1 muestra algunos de estos valores, y además los cocientes entre la amplitud de un intervalo y el inmediatamente anterior, por ejemplo $(3.5441 - 3.4495)/(3.4495 - 3)$. Lo llamativo de este hecho, es que los cocientes tienden al número transcendente:

$$4.669201609110299067185532038204662016...$$

que se conoce con el nombre de **constante de Feigembaun**. Es un problema abierto el estudiar la importancia que este número juega en la naturaleza. Se piensa que puede tener un protagonismo similar al número e.

Las **aplicaciones de la teoría del caos** son múltiples y en campos muy diversos, en Biología, en Economía, en Medicina,... etc. Hasta ahora parecía que al estallar el caos no seríamos capaces de hacer nada, por ejemplo, si el avión empieza a moverse de una manera extraña pensamos que la catástrofe es inevitable; o bien, si el corazón empieza a latir rápidamente y sin ayuda inmediata puede ocurrir lo peor. En los últimos años, en el campo de la Medicina, las investigaciones actuales, nos ofrecen esperanzas de "domesticar" el caos. *Edward Ott, Ceslo Grebogi* (físicos) y *James A. Yorke* (matemático) han elaborado un algoritmo matemático que permite convertir un determinado tipo de caos en un proceso periódico sencillo. La idea que encierra el algoritmo, es que no es necesario comprender todo el movimiento caótico para poderlo regular. Lo que tenemos que hacer es "mirar" continuamente a que dirección tiende el proceso, y realizar perturbaciones pequeñas para volver a dirigirlo en el camino deseado. Naturalmente aquí no se termina de vigilar el sistema, porque después el caos aparecerá de nuevo. Por otro lado, el profesor *A. Garfinkel* de la Universidad de California, ha conseguido transformar el movimiento caótico de un corazón sacado a un conejo en un movimiento regular.

10.6. Modelos discretos con retardo

Hasta ahora en todos los modelos discretos estudiados hemos supuesto que cada miembro de la especie en el tiempo k contribuye al crecimiento de la población para el tiempo $k+1$ de la siguiente manera:

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Esto ocurre, por ejemplo en la mayoría de poblaciones de insectos, pero no para otros muchos animales, donde son fértiles en una época muy concreta del año. En tales casos, para analizar la dinámica del modelo, hemos de incorporar el efecto del retardo, que en cierta manera viene a jugar un papel parecido al estudio que realizamos de la población por estructura de edades. Si el retardo (por ejemplo, la madurez), es de un paso T, entonces nos aparece el siguiente modelo de ecuaciones en diferencias

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-T})\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Por ejemplo, se sabe que para cierto tipo de población de ballenas, el retardo T es del orden de varios años.

A continuación analizaremos un caso concreto con el objetivo de realizar un análisis de la estabilidad del modelo.

EJEMPLO 10.5

- Supongamos

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-1}) = x_k e^{r(1-x_{k-1})}\,; \qquad r > 0\,, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots\,. \tag{10.5}$$

Sus puntos de equilibrio se encuentra resolviendo la ecuación $f(x) = x$, siendo $f(x) = xe^{r(1-x)}$. Las soluciones son $x^* = 0$ y $x^* = 1$.

Si estamos interesados en clasificar el estado de equilibrio no trivial, supongamos que $x_k = 1 + v_k$ con $|v_k| \ll 1$. Sustituimos en (10.5), utilizamos $e^t \approx 1 + t$

$$1 + v_{k+1} = (1 + v_k)e^{-rv_{k-1}} \approx (1 + v_k)(1 - rv_{k-1})\,,$$

y simplificando, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$v_{k+1} - v_k + rv_{k-1} = 0\,. \tag{10.6}$$

Para resolverla, tenemos que encontrar las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \lambda + r = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4r}}{2} & \text{si} \quad r < \frac{1}{4} \\ \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4r}}{2} & \text{si} \quad r < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Cuando $r > 1/4$ las raíces son dos números complejos conjugados: $\lambda_1 = \rho e^{i\theta}$ y $\lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$, donde

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4r-1}{4}} = \sqrt{r}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{4r-1}/2}{1/2} = \arctan \sqrt{4r-1}$$

La solución de (10.6) será:

$$v_k = A\lambda_1^k + B\lambda_2^k\,,$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

1.- Si $0 < r < 1/4$, entonces λ_1 y λ_2 son dos números reales comprendidos estrictamente entre cero y uno. En consecuencia, si k tiende a infinito λ_1^k y λ_2^k tienden a cero.

Conclusión: El punto de equilibrio $x^* = 1$ será estable. Además, después de una pequeña perturbación la solución tiende de forma monótona al punto de equilibrio. Puede verse gráficamente en la Figura 10.14 (izquierda).

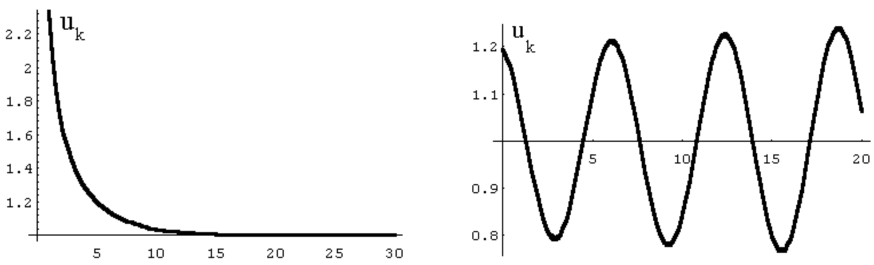

Figura 10.14: Soluciones de la ecuación en diferencias con retardo. Izquierda $r = 0.2$, $A = 0.1e^{1.26t}$; derecha: $r = 1.02$, $A = 0.1e^{1.26t}$.

2.- Si $1/4 < r$, entonces λ_1 y λ_2 son dos números complejos conjugados, con $\lambda_1\,\lambda_2 = |\lambda_1|^2 = \rho^2 = r$. Además, si $1/4 < r < 1$, entonces para que la solución

$$v_k = A\lambda_1^k + B\bar{\lambda}_1^k\,,$$

sea un número real, debe suceder que $B = \bar{A}$. Supongamos entonces que $A = \alpha\, e^{i\gamma}$ y $B = \alpha\, e^{-i\gamma}$, llevando estos valores en la solución

$$\begin{aligned} v_k &= A\lambda_1^k + B\bar{\lambda}_1^k = \alpha\, e^{i\gamma}\rho^k e^{i\theta k} + \alpha\, e^{-i\gamma}\rho^k e^{-i\theta k} = \\ &\alpha\rho^k\left(e^{i(\gamma+\theta k)} + e^{-i(\gamma+\theta k)}\right) = 2\alpha\rho^k\cos\left(\gamma+\theta k\right)\,, \end{aligned}$$

y por lo tanto, cuando el parámetro r tiende a uno, entonces el ángulo θ tiende hacia $\arctan\sqrt{3} = \pi/3$.

(b1) Cuando r sea mayor que uno, entonces $|\lambda_1| > 1$ y v_k crece indefinidamente al tender k hacia infinito. En consecuencia $x^* = 1$ será un punto de equilibrio inestable.

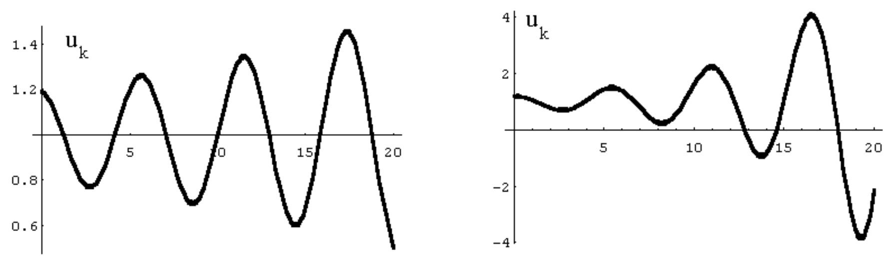

Figura 10.15: Soluciones de la ecuación en diferencias con retardo. Izquierda: $r = 1.1$, $A = 0.1e^{1.26t}$; derecha: $r = 1.4$, $A = 0.1e^{1.26t}$.

(b2) Para valores de r próximos a uno, el ángulo $\theta \approx \pi/3$, y

$$v_k \approx 2\alpha\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}k\right)\,,$$

que es una función periódica de orden 6. En las Figuras 10.14 (derecha) y 7.15, hemos representado las soluciones $u(k)$ para tres valores de r mayores de uno. En la Figura 10.14 (derecha) puede apreciarse que es periódica de periodo 6. En la Figura 10.15 puede verse que se está cerca del caos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO 9

1.- **Sea x_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Se sabe que año tras año sobreviven la tercera parte de los animales y además se incorporan 200 a la población.**

- **Construir un modelo discreto lineal para la situación planteada.**
- **Calcular los seis primeros términos de las órbitas correspondientes a las semillas:** $x_0 = 90\,, \quad x_0 = 600\,.$
- **Construir los diagramas de Cobweb del apartado anterior, e interpretar biológicamente los resultados obtenidos.**

2.- **Sea N_t la población de ardillas en el año t. Es conocido que la población en un año cualquiera disminuye en un 40 % de la población del año anterior, y que además siempre se incorporan 20 ardillas del exterior.**

- **Construir el modelo discreto y dibujar su diagrama de cobweb para los valores iniciales $N_0 = 10$ y $N_0 = 80$. Interpretar el resultado.**
- **Encontrar la población de ardillas N_t para un año cualquiera, sabiendo que inicialmente hay 15 ardillas.**
- **Relacionar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores.**

3.- **Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,**

$$y_{t+1} - y_t = t\,, \quad t = 0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots\,,$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t.

- **Explicar el significado "biológico" de la ecuación anterior**
- **Resuelve la ecuación en diferencias anterior.**

4.- **La evolución de una población x_t viene determinada por el siguiente modelo discreto exponencial con inmigración y emigración,**

$$x_{t+1} = (1+r)x_t - \mu\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo el parámetro positivo μ la diferencia entre el número de personas que entran y las que salen, el parámetro r la tasa de crecimiento de la población, y x_0 el número inicial de individuos.

- **Estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo según los diferentes valores del parámetro r.**
- **Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb, para $r = 0.2$ y $\mu = 10$.**

5.- **Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:**

- **Un modelo discreto frecuentemente utilizado para estudiar la dinámica de una población de insectos es el modelo de *Ricker*, que viene definido por la ecuación en diferencias:**

$$x_{k+1} = x_k \, e^{r\left(1-\dfrac{x_k}{\alpha}\right)}, \quad r, \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad \cdots \quad .$$

  Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio no triviales.

- **En el modelo logístico discreto:**

$$x_{k+1} = 2.5 x_k (1 - x_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots .$$

  Encontrar los cinco primeros términos de la órbita correspondiente a la semilla $x_0 = 0.8$ y dibujar su diagrama de Cobweb correspondiente. Analizar el resultado.

6.- **La siguiente ecuación en diferencias describe la población de ardillas en años sucesivos,**

$$x_{t+1} = x_t^3 - 3x_t^2 - 3x_t + a, \quad t = 0, 1, 2, 3, \quad \cdots \quad .$$

siendo a un parámetros positivo y x_t el número de ardillas en el año t .

- **Encuentra el valor del parámetro a sabiendo que existe un punto de equilibrio en $x^* = 2$**
- **Clasificar los puntos de equilibrios que tienen sentido biológico para conocer el comportamiento a largo plazo de la población.**

7.- **Calcular y clasificar los puntos de equilibrio para el modelo discreto:**

$$N(t+1) = \frac{\lambda \, N(t) \, k}{N(t)(\lambda - 1) + k}, \quad k > 0, \quad \lambda > 1, \quad t = 0, 1, \cdots ,$$

donde $N(t)$ representa a la población en el período t.

8.- **Responder a las siguientes cuestiones:**

- **La ecuación:**

$$x_{t+1} = \lambda x_t (1 + a x_t)^{-b}, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

  donde λ, a, $b > 0$ es utilizada frecuentemente como un modelo de crecimiento de poblaciones que dependen de la densidad de dicha población.

  Encontrar los puntos de equilibrio del modelo anterior, y probar que $x^* = 0$ es un punto de equilibrio estable si $\lambda < 1$.

- **En el modelo logístico discreto:**

$$x_{t+1} = 3x_t(1 - x_t)\,, \quad t = 0, 1, 2, 3, \cdots .$$

Encontrar los cinco primeros términos de la órbita correspondiente a la semilla $x_0 = 0.3$ y dibujar el diagrama de Cobweb correspondiente.

9.- **Muchas poblaciones de insectos se rigen por el siguiente modelo**

$$f(N_t) = N_{t+1} = \frac{\lambda}{\alpha} N_t^{1-b}\,, \quad \alpha,\, b,\, \lambda > 0\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2 \cdots \tag{10.7}$$

donde λ representa a la tasa reproductiva ($\lambda > 1$) y N_t^{-b}/α es la fracción de la población que sobreviven desde la infancia a la edad adulta reproductiva. Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

10.- **Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del siguiente modelo discreto:**

$$x_{t+1} = \frac{kx_t}{a + x_t}\,, \quad k > a > 0\,,$$

donde x_t representa al número de individuos de una población en el tiempo t ¿Cuál será el comportamiento de la población a largo plazo, si $k = 30$, $a = 10$ y $x_0 = 15$ individuos?

11.- **Sea N_t el número de individuos de una población en el tiempo t. Si la evolución de N_t queda definida por la siguiente ecuación en diferencias**

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{1}{3}\left(-N_t^3 + N_t^2 + 4N_t - 1\right)$$

Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo para discutir la evolución a largo plazo de la población según los distintos valores de N_0.

12.- **La siguiente ecuación en diferencias:**

$$x_{t+1} = \frac{\alpha\, x_t}{1 + \beta\, x_t}\,, \quad \alpha\,, \beta > 0\,, \quad x_t \geq 0\,,$$

fue propuesta por *Kaplan* & *Glais* en 1995 y juega un papel muy importante en análisis de modelos no lineales genéticos y en redes neuronales.

- **Encontrar y analizar los puntos de equilibrio**
- **Sea $\alpha = \beta = 1$. Dibujar de forma aproximada el diagrama en telaraña (cobweb) tomando como semilla $x_0 = 4$.**

Tema 11

APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

11.1. Introducción

En este tema estudiaremos los casos más simples de crecimiento de poblaciones, cuando la variable tiempo toma valores en un conjunto discreto, clasificados en modelos independientes y dependientes de la densidad de la población.

DEFINICIÓN 11.1.1 *Diremos que el crecimiento de una población es independiente de la densidad si las tasas de nacimiento y mortalidad no dependen del tamaño de la población.*

Recordemos que en el estudio de los modelos matriciales, ya hemos tenido ocasión de analizar el comportamiento de ciertos modelos discretos y una breve introducción a los modelos exponencial y logístico. Ahora, aplicaremos parte de los resultados obtenidos en los temas anteriores y realizaremos un estudio más completo de algunos de estos modelos.

11.2. Crecimiento independiente de la densidad de la población

Comenzaremos analizando el modelo más simple de crecimiento de poblaciones de una sola especie. Supondremos para empezar que:

- La tasa de nacimientos es proporcional al número de individuos presentes.
- La tasa de muertes es proporcional al número de individuos presentes.

Existen ciertos tipos de animales, como por ejemplo la mariposa *Euphydrias editha,* que se reproduce una vez al año, poniendo sus huevos a primeros de Abril. Las mariposas adultas vuelan durante un período corto de tiempo y entonces mueren. Existen ratones que tienen crías solamente una vez al año en primavera, y que viven alrededor de diez años. Para este tipo de especies, un modelo que suponga que los nacimientos se dan continuamente y que las generaciones se superponen es inapropiado.

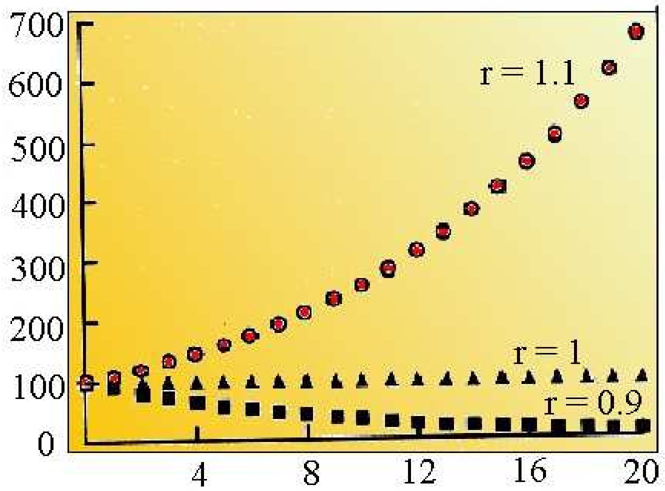

Figura 11.1: Modelo discreto exponencial.

Mediremos el tiempo k en unidades de generación (un año, un mes, ...), y supondremos que r es el número de individuos que nacen en la próxima generación a partir de un individuo de la generación actual. Si x_k simboliza al número de individuos de la población en la generación k, entonces

$$x_{k+1} = r\, x_k\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2, \cdots .$$

Si x_0 es el número inicial de individuos, de la expresión anterior se deduce

$$x_k = x_0\, r^k\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2, \cdots , \tag{11.1}$$

es decir, estamos ante un crecimiento exponencial o geométrico. El comportamiento cualitativo de (11.1) está determinado por el valor de r y queda simbolizado en la Figura 11.1.

Es evidente que este modelo representa a la población sólo en un intervalo corto de tiempo, ya que el crecimiento es demasiado rápido. Además, este modelo basado en la independencia de la densidad, no puede explicar la evolución de la mayoría de las poblaciones que existen en la naturaleza.

Podemos preguntarnos por los valores reales, y no los teóricos, que se obtienen del parámetro r en el laboratorio y en la naturaleza. En los experimentos en el laboratorio puede encontrarse valores de r muy diferentes, dando lugar a crecimiento muy rápido de poblaciones. Sin embargo, en la naturaleza este valor debe estar muy cerca de uno, ya que en caso contrario la población desaparecería o por el contrario crecería rápidamente.

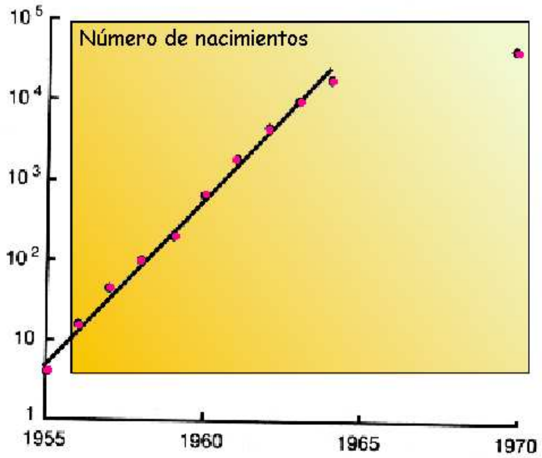

Figura 11.2: Crecimiento de una población de pájaros.

La Figura 11.2 muestra la representación en escala logarítmica de una población de pájaros de Gran Bretaña, desde el año 1955 al 1970. Observemos que al principio, la población crece exponencialmente, pero después de algunos años, disminuye sustancialmente. En la próxima sección trataremos de explicar este comportamiento. La cuestión más importante de la dinámica de poblaciones es determinar las causas y las consecuencias de la desviación del modelo exponencial.

EJEMPLO 11.1

- El censo de los Estados Unidos se elabora cada diez años. En la Tabla 11.1. se recogen los datos correspondientes al período 1790 - 2000.

  La tasa de crecimiento en cada década se calcula dividiendo el censo correspondiente al año superior entre el número de individuos en el año inferior. Por ejemplo, la tasa de crecimiento en la década 1790 - 1800 es:

  $$\frac{\text{Población en 1800}}{\text{Población en 1790}} = \frac{5.308.483}{3.929.214} = 1.351\,.$$

  El modelo matemático discreto más simple supone que la población en la próxima década es igual a la población actual más la población actual por la tasa de crecimiento medio, r, de la población. El modelo empieza con una población inicial, por ejemplo, la correspondiente al año 1790. Para encontrar la población en la década próxima, multiplicamos por $(1+r)$. Con ello obtenemos una sucesión de poblaciones, todas ellas encontradas a partir de la década anterior. Por ejemplo,

  $$\text{Población en 1800} = 1.349 \times \text{Población en 1790} = 5300510\,,$$

siendo 34.9 % la media de las tasas de crecimiento desde 1790 hasta 1860. Observemos que existe una diferencia de aproximadamente 8000 individuos que equivale a un error del 0.15 %. Podemos repetir el proceso anterior y encontrar las poblaciones para las décadas 1810, 1820, ... , 1860, ya que en estos períodos la tasa de crecimiento se mantiene razonablemente constante.

1790	3.929.214	**1870**	39.818.449	**1950**	151.325.798
1800	5.308.483	**1880**	50.155.783	**1960**	179.323.175
1810	7.239.881	**1890**	62.947.714	**1970**	203.302.031
1820	9.638.453	**1900**	75.994.575	**1980**	226.545.805
1830	12.866.020	**1910**	91.972.266	**1990**	248.709.873
1840	17.069.453	**1920**	105.710.620	**2000**	281.421.906
1850	23.191.876	**1930**	122.775.046		
1860	31.433.321	**1940**	131.669.275		

Tabla 11.1

La Tabla 11.2 muestra los datos obtenidos. En ella puede observarse que los errores cometidos son pequeños hasta 1870, y además la población predicha por el modelo es ligeramente superior a la población exacta, lo cual nos sugiere que durante el siglo XIX bajó la tasa de nacimiento. Entre los años 1860 y 1870 tuvo lugar la guerra civil americana, originando el brusco descenso en la tasa de crecimiento de la población de Estados Unidos; además durante estos años aconteció la revolución industrial y la sociedad pasó de ser mayoritariamente agrícola a una sociedad industrial con un descenso significativo de los nacimientos.

Si continuamos usando el modelo anterior hasta 1920 o 1970 nos encontraremos con una población predicha de 192365343 y 859382645 respectivamente, lo que supone una estimación del 82 % y 323 % mayores que las reales. La conclusión que deducimos es que el uso de este modelo de crecimiento está limitado a predecir la población futura en años muy próximos, no se puede extrapolar a largo plazo.

Recordemos que el modelo matemático dado por

$$x_{k+1} = x_k + r x_k = (1+r)x_k\,, \quad x_0 = P(1790) = 3.929.214\,, \tag{11.2}$$

siendo r la tasa media de crecimiento, se conoce con el nombre de **modelo de crecimiento discreto exponencial o de Malthus**. El modelo es un caso particular de un sistema dinámico discreto o ecuación en diferencias. Las ecuaciones en diferencias se usan con frecuencia en Ecología, donde a menudo se puede determinar la población de una especie o colección de especies, sabiendo la población en la generación anterior. El modelo de crecimiento malthusiano establece que la población en la próxima generación es proporcional a la población de la generación actual. De (11.2) se deduce inmediatamente

$$x_k = (1+r)^k x_0\,, \quad k = 1, 2, 3\cdots\,.$$

AÑO	CENSO	x(k+1)=1.349x(k)	% ERROR
1790	**3.929.214**	3.929.214	-----
1800	**5.308.483**	5.300.510	**0.15**
1818	**7.239.881**	7.150.388	**1.24**
1820	**9.638.453**	9.645.873	**0.08**
1830	**12.866.020**	13.012.282	**1.14**
1840	**17.069.453**	17.553.569	**2.84**
1850	**23.191.876**	23.679.765	**2.10**
1860	**31.433.321**	31.944.002	**1.62**
1870	**39.818.449**	43.092.459	**8.22**

Tabla 11.2

A continuación modificaremos el modelo anterior para obligar a que la tasa de crecimiento sea una función que dependa del tiempo. Hemos comprobado que la tasa media de crecimiento que calculamos para las primeras décadas predice una población muy superior a la ofrecida por el censo. Para mejorar esta predicción, podemos calcular para cada una de las décadas su tasa de crecimiento r y encontrar la recta de regresión de todos estos datos.

Se pasa así del modelo discreto autónomo $x_{k+1} = f(x_k)$, al modelo discreto no autónomo $x_{k+1} = f(x_k, t_k)$. La recta de regresión $r(k) = 3.158 - 0.00155k$ ajusta a la nube de puntos de las diferentes tasas de crecimiento. En este caso, la ecuación en diferencia no autónoma será:

$$x_{k+1} = (1 + r(k))x_k \,, \tag{11.3}$$

siendo $t_k = 1790 + 10k$, y k el número de décadas después de 1790.

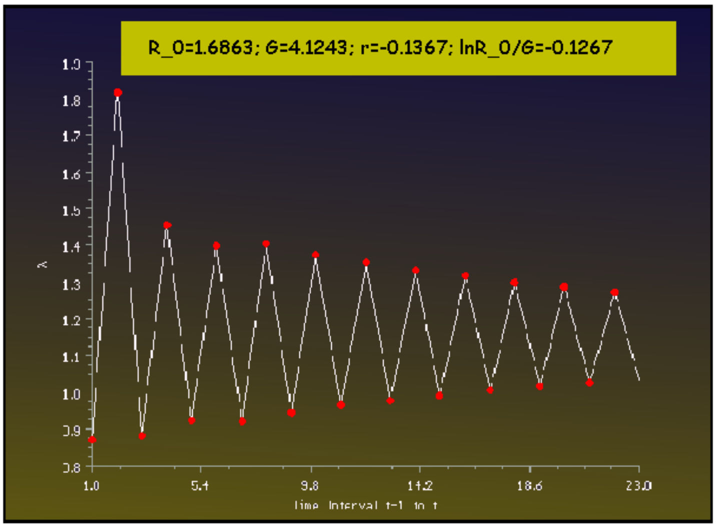

Figura 11.3: Tasa de crecimiento para la población de EEUU.

La Figura 11.4 permite comparar los datos del censo con las diferentes proyecciones que se obtienen al utilizar el modelo de crecimiento exponencial autónomo y no autónomo (que no dependen/dependen del tiempo). Llamamos la atención sobre el hecho de que si utilizamos (11.3) para encontrar la población en cada década, es imprescindible conocer la población en la década anterior.

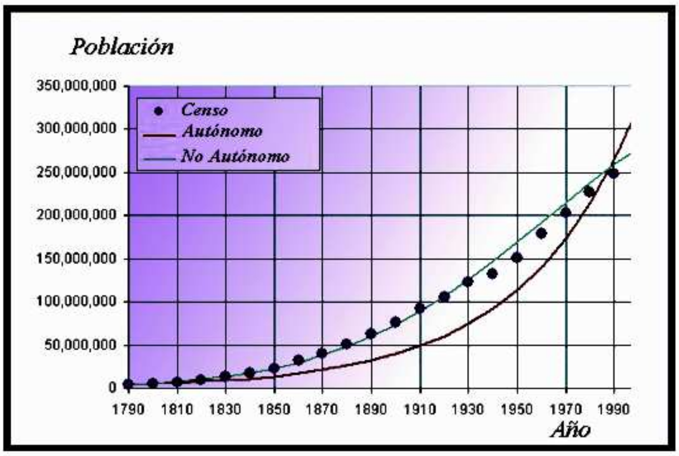

Figura 11.4: Modelos de crecimiento exponencial.

En la Tabla 11.3 se comparan numéricamente los datos reales con los obtenidos con (11.3). El modelo (11.3) predice 278244477 individuos para el año 2000, cifra que se encuentra ligeramente por debajo del valor real.

AÑO	CENSO	1+r(k)	x(k+1)=(1+r(k))x(k)	ERROR (%)
1790	3.929.214	1.3835	3.929.214	
1800	5.308.483	1.3680	5.436.068	2.4
1810	7.239.881	1.3525	7.436.540	2.7
1820	9.638.453	1.3370	10.057.921	4.4
1830	12.866.020	1.3215	13.447.440	4.5
1840	17.069.453	1.3060	17.770.792	4.1
1850	23.191.876	1.2905	23.208.655	0.1
1860	31.433.321	1.2750	29.950.769	4.7
1870	39.818.449	1.2595	38.187.231	4.1
1880	50.155.783	1.2440	48.096.817	4.1
1890	62.947.714	1.2285	59.832.440	4.9
1900	75.994.575	1.2130	73.504.153	3.3
1910	91.972.266	1.1975	89.160.537	3.1
1920	105.710.620	1.1820	106.769.743	1.0
1930	122.775.046	1.1665	126.201.837	2.8
1940	131.669.275	1.1510	147.214.442	11.8
1950	151.325.798	1.1355	169.443.823	12.0
1960	179.323.175	1.1200	192.403.461	7.3
1970	203.302.031	1.1045	215.491.877	6.0
1980	226.545.805	1.0890	238.010.778	5.1
1990	248.709.873	1.0735	259.193.737	4.2
2000	281.421.906		278.244.477	1.1

Tabla 11.3

11.2.1. Modelo discreto exponencial modificado

Hemos aplicado el modelo de crecimiento discreto exponencial para estudiar la evolución de una población. Durante su aplicación, se ha considerado el sistema como cerrado para poder trabajar con una tasa neta de crecimiento. Pero podemos modificar dicho modelo para tener en cuenta el hecho de la inmigración y de la emigración.

Supongamos que una población x_k crece de acuerdo al modelo discreto exponencial y asumimos que el número de personas que entran y salen en cada intervalo de tiempo es constante ($e - s = \mu$). Ahora, el crecimiento puede modelarse por la ecuación en diferencias:

$$x_{k+1} = (1+r)x_k - \mu\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,,$$

donde r es la tasa de crecimiento. Conocidos estos datos y la población inicial x_0 podemos encontrar una expresión general de x_k. En efecto,

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & (1+r)x_0 - \mu \\
x_2 & = & (1+r)x_1 - \mu = (1+r)\left((1+r)x_0 - \mu\right) - \mu = \\
 & & (1+r)^2 x_0 - \left((1+r)+1\right)\mu \\
x_3 & = & (1+r)^3 x_0 - \left((1+r)^2 + (1+r) + 1\right)\mu \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_k & = & (1+r)^k x_0 - \Big((1+r)^{k-1} + (1+r)^{k-2} + \cdots + (1+r) + 1\Big)\mu
\end{array}$$

Aplicando la fórmula que nos da la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica, se obtiene

$$\boxed{x_k = (1+r)^k x_0 - \frac{(1+r)^k - 1}{r}\mu\,,}$$

expresión más complicada que la correspondiente al modelo discreto exponencial simple. Aunque en este caso concreto hemos podido encontrar una expresión para x_k en función de x_0, r y μ, tenemos que decir que en general este cálculo suele ser complicado. Por esta razón, lo que se hace es estudiar el comportamiento cualitativo del modelo, por ejemplo, a través de su diagrama de *Cobweb*.

11.3. Crecimiento dependiente de la densidad de población

Ya hemos indicado que el análisis del modelo discreto exponencial y el sentido común, nos dicen que este tipo de crecimiento no puede mantenerse durante mucho tiempo.

En todos los casos, llega un momento en que la población se regula. Se han propuesto muchas hipótesis para explicar las causas que originan este autocontrol de la población, entre otras:

- Factores independientes de la densidad, como por ejemplo el clima.
- La cantidad de comida disponible.
- Problemas con su territorio o canibalismo.
- Depredadores.
- Parásitos o enfermedades.

De entre todos estos factores nosotros estudiaremos el segundo de ellos, es decir el crecimiento dependerá de la densidad de la población, y por tanto, ésta se autoregula.

Un modelo clásico apropiado para describir poblaciones de animales (o plantas) que viven un año, se reproducen y luego mueren, es de la forma:

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,, \tag{11.4}$$

donde f nos da el número de individuos para el próximo año en términos del número de individuos actuales. Se han propuesto diferentes modelos, simplemente cambiando la función f. Por ejemplo, en el estudio del caos se trabaja con el modelo de *May* (1974) donde la función f es,

$$f(x) = cx\,(1-x)\,.$$

11.3.1. El modelo de crecimiento discreto logístico

En 1913 *T. Carlson* estudió el crecimiento de un cultivo de levadura. La Tabla 11.4 muestra los datos recogidos en intervalos de una hora.

TIEMPO	POBLACIÓN	TIEMPO	POBLACIÓN	TIEMPO	POBLACIÓN
1	9.6	7	174.6	13	594.8
2	18.3	8	257.3	14	629.4
3	29.0	9	350.7	15	640.8
4	47.2	10	441.0	16	651.1
5	71.1	11	513.3	17	655.9
6	119.1	12	559.7	18	659.6

Tabla 11.4: Población de un cultivo de levadura

En ella se observa que la población no sigue un modelo de crecimiento discreto exponencial, ya que a partir de cierto momento la población se estabiliza y no crece exponencialmente. Es necesario que la función $f(x)$, del sistema discreto dinámico general $x_{k+1} = f(x_k)$, ahora sea cuadrática en lugar de ser una ecuación lineal.

Este nuevo modelo se conoce con el nombre de **modelo discreto logístico**, y viene expresado por

$$x_{k+1} = x_k + r x_k \left(1 - \frac{x_k}{M}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{11.5}$$

Observemos que para valores pequeños de la población $1 - \frac{x_k}{M} \approx 1$ y el modelo coincide con el exponencial. Sin embargo, para valores de la población $x_k \approx M$ entonces $x_{k+1} \approx x_k$. El parámetro M recibe el nombre de **capacidad de carga de la población**.

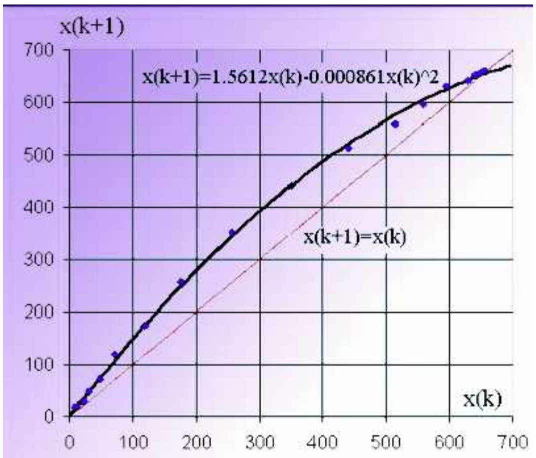

Figura 11.5: Modelo para un cultivo de levadura.

El comportamiento de (11.5) es bastante más complicado que (11.2). No existe una solución exacta de este sistema dinámico discreto. El ecologísta *Robert May* (1974) estudió dicha ecuación para diferentes poblaciones y descubrió que podía presentar dinámicas muy diferentes. Este hecho lo pusimos de manifiesto al analizar el caos matemático, ya que (11.5) puede ser escrita como $x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k)$.

A continuación aplicaremos este modelo para estudiar la evolución del cultivo de levadura.

EJEMPLO 11.2

- En la Figura 11.5 hemos dibujado x_{k+1} como función de x_k. Por ejemplo, los dos primeros puntos son (9.6 , 18.3) y (18.3 , 29). Posteriormente utilizando el programa `Mathematica`® se ha encontrado la parábola que pasa por el origen $y = ax - bx^2$ que mejor ajusta a estos datos, obteniéndose

$$x_{k+1} = 1.5612 x_k - 0.000861 x_k^2 .$$

  Podemos utilizar un programa de simulación, como por ejemplo `POPULUS`®, y obtendríamos la Figura 11.6. De forma cualitativa podemos ver que inicialmente se produce un crecimiento exponencial y que posteriormente la población se estabiliza alrededor de 650 que es la capacidad de carga del modelo.

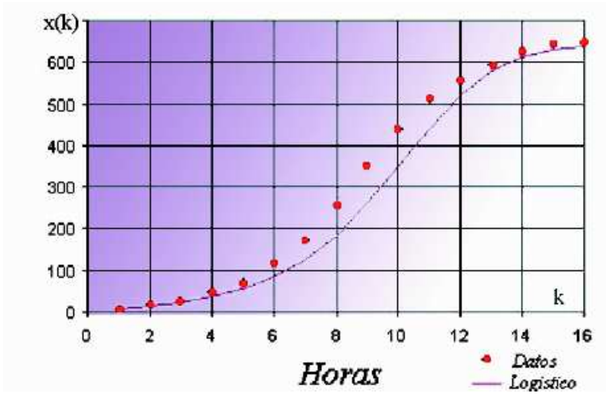

Figura 11.6: Simulación del modelo.

Observemos también que el punto de inflexión está situado en la mitad de la capacidad de carga, que corresponde a un tiempo entre las 9 y 10 horas. En este momento se produce el máximo crecimiento de la población.

11.3.2. Generalización del modelo discreto logístico

La mayoría de otros modelos comparten los rasgos cualitativos observados en el modelo de *May*. Si representamos en el eje de abscisas la población en el tiempo k, y en el eje de ordenadas la población en el período siguiente x_{k+1}, en gran parte de ellos se obtiene una curva del tipo representado en la Figura 11.7.

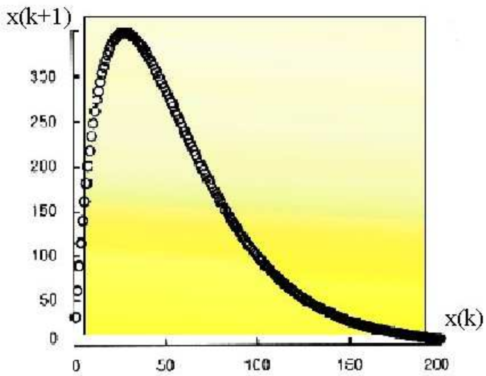

Figura 11.7

Observemos que esta curva tiene un único máximo. Cuando el nivel de la población es pequeño, entonces aumenta en función de la población actual, pero cuando el número de individuos es elevado, los mecanismos propios relacionados con la densidad de la población (competición, por ejemplo) reducen su nivel en los próximos años.

De entre los modelos más citados en el estudio de dinámica de poblaciones, se encuentran:

$$f(x) = x\left(1 + x(1 - \frac{x}{k})\right),$$

$$f(x) = x\, e^{r(1-\frac{x}{k})},$$

$$f(x) = \frac{\lambda x}{(1+\alpha x)^{\beta}}$$

En una de las prácticas del Laboratorio Matemático, realizamos un estudio intensivo del segundo de los modelos, conocido con el nombre de **modelo de** *Ricker* (1954). Para los otros dos casos, se puede hacer un tratamiento similar.

EJEMPLO 11.3

- Un modelo matemático dependiente de la densidad de la población y alternativo al modelo logístico de *May*, ha sido propuesto por *Gilpin* y *Ayala* (1973), y se expresa como:

$$x_{k+1} = f(x_k) = r\, x_k \left(1 - \left(\frac{x_k}{\beta}\right)^{\alpha}\right), \quad k = 0\,, 1,\, 2, \cdots \tag{11.6}$$

  donde α es un parámetro positivo que depende del organismo en cuestión.

  El punto de equilibrio no nulo de este modelo se obtiene resolviendo la ecuación

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad r\,x\left(1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right) = x$$

  cuyo valor es

$$x^* = \beta\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

  Para estudiar la estabilidad del modelo primero debemos derivar la función $f(x)$. Una vez simplificada se obtiene

$$f'(x) = r\left(1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} - \alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right).$$

  Luego

$$f'(x^*) = f'\left(\beta\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 1 - \alpha r + \alpha\,.$$

  Este punto de equilibrio será estable cuando $|f'(x^*)| < 1$, lo cual ocurre cuando $1 < r < 1 + \frac{2}{\alpha}$.

En ciertas ocasiones, como por ejemplo en el modelo logístico de *May*

$$f(x) = c\,x\,(1 - x/M),$$

si el nivel de la población es demasiado bajo, entonces el número de individuos tiende a largo plazo al punto de equilibrio $x^* = 0$ y la población desaparece. Este fenómeno es conocido en ecología con el nombre de **Efecto Allen**. Muchas poblaciones biológicas que presentan este efecto, decrecen en su tamaño si el número de individuos se encuentran por debajo de cierto nivel crítico x_c. La región donde $x_k < x_c$ es conocida con el nombre de zona de depredación.

Podemos modificar el modelo anterior, para tener en cuenta este hecho, de la manera siguiente:

$$f(x) = c\,x\,\left(1 - \frac{x}{M}\right)(x - a)\,, \quad a > 0\,.$$

11.4. Ejemplo de modelo discreto para la pesca

En los últimos años los modelos discretos han sido muy utilizados en el diseño de estrategias para la pesca. Se ha demostrado que son muy útiles para evaluar diversas tácticas de capturas de peces con un doble objetivo, en primer lugar para maximizar los beneficios y en segundo lugar para realizar una explotación de recursos mantenidos en el tiempo. El modelo que vamos a estudiar también puede ser aplicado a cualquier otro tipo de recurso renovable.

Supongamos que la densidad de la población en ausencia de capturas viene dada por

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\,.$$

Si suponemos que $\epsilon(k)$ es la captura realizada en la población en el tiempo k, la cual es la que genera la población en el tiempo $k+1$, entonces el modelo que estudia la dinámica de la población viene dado por:

$$x_{k+1} = f(x_k) - \epsilon(k)\,, k = 0, 1, 2, \cdots\,. \tag{11.7}$$

Las dos preguntas que debemos contestar son:

- ¿Cuál es el máximo rendimiento biológico sostenible Y_M?
- ¿Cuál es el máximo rendimiento económico E_M?

Si encontramos los puntos de equilibrio de (11.7), deducimos que

$$x^* = f(x^*) - \epsilon^* \quad \Rightarrow \quad \epsilon^* = f(x^*) - x^*\,.$$

Si el máximo rendimiento sostenible del punto de equilibrio Y_M se alcanza cuando x^* toma el valor x_M, entonces su valor podemos encontrarlo haciendo

$$\frac{\partial \epsilon^*}{\partial x^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x^*) = 1\,.$$

El valor de Y_M será

$$Y_M = f(x_M) - x_M \tag{11.8}$$

y esta situación sólo es interesante cuando $Y_M \geq 0$.

Una estrategia podría ser mantener la población de peces en estos niveles con el objetivo de hacer máxima la captura Y_M. Pero como es difícil tener un conocimiento exacto de la población actual de peces, entonces este método puede ser difícil llevarlo a la práctica. Por esta razón, es más interesante formular el problema de optimización en términos de capturas y esfuerzos.

Supongamos que el esfuerzo para capturar un pez, de una población x, es ax, donde a es el parámetro de captura (que es independiente de la densidad x). Entonces el esfuerzo para reducir x en 1 unidad es $1/(ax)$ y $f(x)$ en 1 unidad es $1/(af(x))$. De esta manera, el esfuerzo E_M para obtener la captura $Y_M = f(x_M) - x_M$ es

$$E_M = \sum_{x_i = x_M}^{f(x_M)} (ax_i)^{-1} .$$

Frecuentemente los valores de este sumatorio son de tal manera que se pueden aproximar por la siguiente integral

$$E_M \approx \frac{1}{a}\int_{x_M}^{f(x_M)} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{f(x_M)}{x_M} \right) . \tag{11.9}$$

Las ecuaciones (11.8) y (11.9) nos dan la relación de Y_M, E_M en función de x.

EJEMPLO 11.4

- Para terminar, aplicamos estos resultados a un modelo concreto, conocido como disco de *Holling*, que viene definido por:

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{\beta x_k}{\alpha + x_k} , \quad 0 < \alpha < \beta .}$$

En primer lugar encontramos el valor de x_M resolviendo $1 = f'(x_M)$. Es decir,

$$1 = \left(\frac{\beta x_M}{\alpha + x_M} \right)' = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + x_M)^2} \quad \Rightarrow \quad x_M = \sqrt{\alpha} \left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} \right) .$$

Si sustituimos en las ecuaciones (11.8) y (11.9), nos da

$$Y_M = \frac{\beta x_M}{\alpha + x_M} - x_M$$

$$E_M = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\beta}{\alpha + x_M} \right) .$$

En este ejemplo, podemos eliminar entre las dos expresiones x_M y obtener una relación explícita entre Y_M y E_M,

$$\boxed{Y_M = \left(\beta e^{-cE_M} - \alpha\right)\left(e^{cE_M} - 1\right)\ .}$$