

Tema 12

FRACTALES Y BIOLOGÍA

12.1. Introducción

Unos de los científicos actuales más importantes en el campo de los fractales, el profesor *Michael F. Barnsley*, publicó en 1993 el libro *Fractals everywhere*, [8], el cual se ha convertido en la referencia básica de todos aquellos que se ocupan de esta disciplina. En la primera página, dentro del capítulo de introducción, puede leerse:

Fractal geometry will make you everything differently. There is danger in reading further. You risk the loss of your childhood vision of clouds, forests, galaxies, leaves, feathers, flowers, rocks, mountains, torrents of water, carpets, bricks, and much else besides. Never again will your interpretation of these things be quite the same.

Y en efecto, una vez conocidas las nociones básicas de esta teoría, ya nunca más se vuelve a mirar a la naturaleza y al mundo que nos rodea con los mismos ojos.

La geometría fractal como tal nace en 1975, pero muchas de sus aplicaciones y conceptos eran conocidos mucho antes en un contexto muy diferente. En 1875 tiene lugar una crisis importante de los fundamentos de las Matemáticas. Al mismo tiempo, un matemático, *Reymond*, estudió intensamente la función de *Weierstrass*, una curva continua que tiene la particularidad de que no posee derivada en cualquiera de sus puntos,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \text{sen}(\lambda^i x), \quad 1 < s < 2, \quad \lambda < 1.$$

Funciones de este tipo, con un gran número de irregularidades, ya eran conocidas en el siglo XVII, antes del descubrimiento del cálculo infinitesimal por *Newton* y

Leibnitz, pero se pensaba que eran muy escasas y además poco interesantes desde el punto de vista práctico. Los primeros en darse cuenta que estas funciones no eran la excepción sino la norma fueron *Cantor* y *Peano*, pero fue *Poincaré* el primero en hacer un estudio sistemático de todos estos hechos y elaborar una teoría que hoy en día se la conoce con el nombre de Teoría del Caos. El final de la crisis de fundamentos se produce en 1925, y durante su desarrollo aparece un grupo importante de excelentes matemáticos: *Cantor*, *Peano*, *Lebesgue*, *Hausdorff*, *Besicovitch*, *Bolzano*, *Koch*, *Sierpinski*.

Sabemos que la Geometría de Euclides es la herramienta adecuada para estudiar las estructuras regulares y la dinámica de *Newton*. Como hemos indicado, la necesidad de unas “nuevas matemáticas” se puso de manifiesto al descubrirse estructuras algebraicas, como son la curva de *Cantor* y la curva de *Peano*, con un gran número de irregularidades y que además eran capaces de “llenar” la porción del plano donde se encuentran. En este caso, observemos lo siguiente: al ser una curva tienen dimensión 1, pero al rellenar un cuadrado su dimensión debería ser 2, por tanto, ¿cuál es la dimensión de estos objetos? Estos nuevos elementos no estaban contemplados en la matemática tradicional y en un principio fueron considerados como “monstruos matemáticos”.

A continuación destacaremos algunos momentos relevantes relacionados con los objetos que presentan un elevado número de irregularidades, con el objetivo de poner de manifiesto la gran inquietud existente en relación a las funciones continuas no diferenciables.

- En el siglo XVII *Richard Bentley* llamó la atención sobre la relación existente entre los objetos regulares y la representación de la naturaleza: “..no hemos de creer que las orillas del mar sean realmente deformes por no tener la forma de un baluarte regular; que las montañas no son exactamente como conos o pirámides, ni las estrellas están situadas desmañadamente por no estar a una distancia uniforme..”
- En 1893 *Charles Hermite*, en una carta dirigida al gran matemático *T. Stieljes*, comentaba: “.. abandono con espanto y horror esta lamentable plaga de las funciones sin derivada...”.
- El premio nobel en 1906 por el descubrimiento del movimiento browniano de las partículas *Jean Perrin*, realizó el siguiente comentario: “.. los matemáticos son muy conscientes de lo pueril de tratar de demostrar, con dibujos solamente, que toda función continua tiene derivada, aunque las funciones diferenciables son las más simples, y las más fáciles de manejar, son una excepción. Podría darse el caso en los que usar una función no diferenciable fuera más simple que usar una que si lo fuera. Cuando esto ocurra se habrá probado el valor práctico del estudio matemático de los continuos irregulares...pero, por el momento, esta hipótesis no es más que un sueño”.

- En 1922 *Lebesgue* escribió un artículo sobre superficies sin planos tangentes, “*pañuelos totalmente arrugados*”, pero el gran matemático *Hermite* no recomendó su publicación.
- *Norbert Wiener* en 1956 construyó un modelo no diferenciable del movimiento browniano. Como hecho anecdótico podemos comentar que en su obra aparece por primera vez la palabra caos. “.. *la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de la geometría euclídea o el cálculo diferencial de Newton (no existe recta tangente en ningún punto de una costa)*”.
- Finalmente, es a partir de 1970 con *Paul Levy* cuando se aceptan de una forma natural aquellas curvas que no presentan derivadas.

Ya hemos puesto de manifiesto la importancia que tenían los objetos irregulares en la primera mitad del siglo XX. Sin embargo, fue necesario el impulso y la creación de estas nuevas estructuras, conocidas como fractales, por parte de *Benoit Mandelbrot*, a partir de un problema de la vida real. En 1958 *Mandelbrot* trabajaba en IBM en un problema bastante común en las líneas telefónicas como era el ruido de fondo. La cuestión era difícil de resolver debido a la complejidad de construir un modelo matemático que representase fielmente al patrón con el que se difundía el ruido. En 1945 había estudiado los trabajos de *Gastón M. Juliá*, en especial “*Mémoire sur l’iteration des fonctions rationnelles*”, y un poco después los trabajos de *Cantor*. Aplicando estos conocimientos y partiendo del conjunto de *Cantor* observó que el nuevo modelo representaba bastante bien al ruido de fondo de las líneas telefónicas.

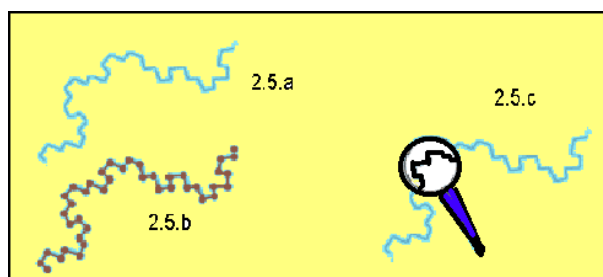


Figura 12.1: ¿Cuánto mide una costa?

Desde ese instante, su campo de investigación se centró en el análisis de las estructuras que presentaban un elevado número de irregularidades. En su famoso artículo *¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña?*, planteaba un problema aparentemente fácil: ¿cómo medir la longitud de la curva de la Figura 12.1.a? Podr+amos utilizar una determinada unidad de medida y sumar todos los segmentos que aparecen en la Figura 12.1.b, pero es evidente que podemos encontrar una mejor aproximación de la solución si tomamos una unidad de medida más pequeña (Figura 12.1.c). Aunque más adelante volveremos sobre esta cuestión, es importante darse cuenta de un hecho relevante como es que la **longitud de la costa dependerá de la escala que**

utilicemos para medirla.

Desde finales de los años 70 los fractales han estado presentes en la investigación matemática, científicos como *Barnsley*, *Douady*, *Hubbard*, y *Sullivan* los estudian de manera teórica y práctica. De entre ellos, debemos destacar la labor realizada por el profesor *Robert L. Devaney* siendo sus libros, [11, 12, 13] referencias básicas para todos los interesados en el tema.

12.2. Concepto de fractal

Es muy difícil dar una definición exacta de un fractal, ya que es necesario un nivel muy elevado de abstracción para definirlo rigurosamente. Por otro lado, el número de sus aplicaciones es tan inmenso y en campos tan diversos que según sea la disciplina a estudiar aparecerá una definición u otra. A continuación presentamos algunas de las más usuales:

- Los fractales son los objetos matemáticos que conforman la geometría de la Teoría del Caos
- Los fractales son objetos cuya dimensión es un número racional.
- Un fractal es aquél objeto donde su dimensión Hausdorff - Besicovich es mayor que su dimensión topológica
- Un objeto fractal es aquél que es autosemejante y su dimensión es racional.

En general, los fractales son objetos matemáticos que se estudian dentro de la teoría geométrica de la medida. Bajo este nombre suelen entenderse ciertos objetos matemáticos con unos rasgos comunes, aunque debemos de aclarar que las definiciones concretas no son aplicables a todos ellos.

El término fractal fue introducido por *Benoit Mandelbrot* y procede del adjetivo latino *fractus* que significa fragmentado y también irregular.

Existe una gran variedad de fractales siendo los lineales los más simple.

DEFINICIÓN 12.2.1 *Un fractal lineal es el producto final que se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado.*

Este proceso geométrico elemental, que es generalmente de naturaleza muy simple, determina perfectamente la estructura final, que muy frecuentemente, debido a la repetición infinita que se ha efectuado, tiene una complicación aparente extraordinaria. Normalmente los fractales son **autosemejantes**, es decir, tienen la propiedad de que una pequeña sección de un fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal.

Un ejemplo de fractal lineal es el que aparece en la Figura 12.2 conocido con el nombre de “copo de nieve” curva que se obtiene tomando un triángulo equilátero y

colocando sucesivos triángulos, cada vez de menor tamaño, en el tercio medio de los lados, cada vez más pequeños. Notemos que la curva resultante es totalmente irregular y que no puede diferenciarse. Además, en teoría, el resultado es una figura que tiene superficie finita pero con un perímetro de longitud infinita y con un número infinito de vértices

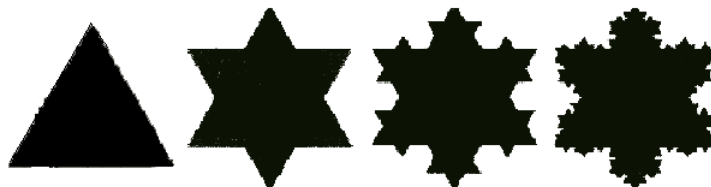


Figura 12.2: Fractal copo de nieve.

A pesar de la simplicidad de su construcción la figura resultante es bastante compleja, repitiéndose estas características en el resto de los fractales lineales como, por ejemplo, el conjunto de *Cantor*. Su construcción es la siguiente: se toma un segmento, se divide en tres partes iguales, se elimina el segmento central, y con cada uno de los dos restantes se procede del mismo modo, es decir, se divide en tres partes iguales. Y así infinitas veces. Lo que queda es el conjunto de Cantor.

Los fractales lineales son demasiado “perfectos” para representar los diferentes objetos de la naturaleza, como una hoja, un árbol o una neurona. Por este motivo, es necesario introducir los no lineales.

DEFINICIÓN 12.2.2 *Un fractal no lineal es aquel que se obtiene a partir de iterar una función no lineal definida en el cuerpo de los números complejos.*

Entre los fractales no lineales más conocidos se encuentran el conjunto de Julia y el conjunto de Mandelbrot (Figura 12.3).

Antes de seguir adelante es conveniente detenernos un momento y recordar el concepto clave que estudiamos en el tema de los sistemas dinámicos discretos, como es la **iteración**. La iteración es repetir y volver a repetir sobre sí mismo una cierta cantidad de veces. Por ejemplo, en el caso del conjunto de *Mandelbrot* la función no lineal con la que se trabaja es $f_C(z) = z^2 + C$, con z y C números complejos. Si seleccionamos un número complejo z_0 , entonces calculamos $z_1 = f_C(z_0) = z_0^2 + C$, a continuación $z_2 = f_C(z_1) = z_1^2 + C$, $z_3 = f_C(z_2) = z_2^2 + C$, y así sucesivamente. Si la sucesión $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}$, permanece a una distancia del origen menor de 2, entonces el punto z_0 está en el conjunto de *Mandelbrot*. Si la sucesión anterior diverge desde el origen, entonces el punto no pertenece al conjunto.

Dicho de otra forma, el conjunto de *Mandelbrot* es el conjunto de puntos cuya órbita generada con la fórmula dada nunca escapa de un círculo de radio 2. En cuanto a los números incluidos en el conjunto de *Mandelbrot*, el punto correspondiente a la imagen aparece en color negro. En el caso de los números que no están dentro del conjunto, los colores se asignarán de acuerdo a la “rapidez” de incremento de la sucesión de números complejos. Por ejemplo, si la sucesión se incrementa lentamente,

el punto inicial aparece de color azul claro, si crece más rápidamente, tendrá color amarillo o rojo, dependiendo de la velocidad de este incremento.

De acuerdo con la definición de fractal no lineal, podemos intuir que la geometría fractal es la herramienta más interesante a la hora de modelizar situaciones reales de gran complejidad originadas por múltiples repeticiones de procesos muy elementales, pues como hemos visto, los fractales nos ofrecen la posibilidad de construir estructuras complicadas a través de procesos simples. De esta manera, es corriente representar de forma simbólica la geometría fractal como un puente que conecta el orden y el caos, utilizando como instrumento los procesos infinitos iterativos.

Llama la atención del elevado número de personas, sin conocimientos matemáticos, que se han acercado a la geometría fractal por motivos únicamente estéticos. Pero aparte de estas cuestiones artística, existen poderosas razones para estudiar estas estructuras fractales, ya que el número de aplicaciones aumenta constantemente en múltiples y diversas ramas del conocimiento, entre ellas la Biología y la Medicina.

Es evidente, que el gran auge que este estudio ha experimentado en los últimos años se debe, en buena parte, a la introducción del ordenador como herramienta auxiliar. Los fractales autosemejantes, la teoría de la iteración, los sistemas dinámicos, se basan en la repetición, en principio infinita, de un cierto proceso bien determinado, y el ordenador es el instrumento ideal para llevar a la práctica estas tareas.

12.2.1. Fractales de Julia y Mandelbrot

En este apartado mostraremos dos de los fractales más importantes, como son el conjunto de Julia y el de Mandelbrot.

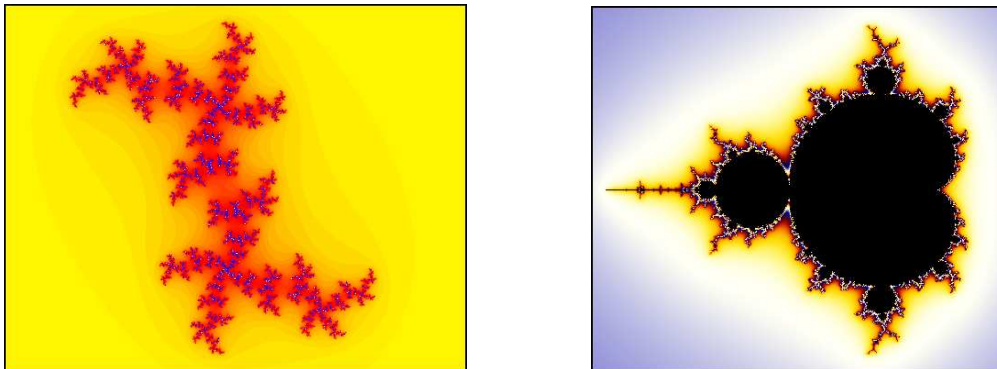


Figura 12.3: Izquierda: conjunto de Julia. Derecha: conjunto de Mandelbrot.

Gaston Maurice Julia nació el 3 de Febrero de 1893 en Sidi Bel Abbés (Argelia) y falleció en París el 19 de Marzo de 1978. Con solo 25 años publicó un manuscrito de 199 páginas titulado “*Mémoire sur l’iteration des fonctions rationnelles*” que es considerado un referente básico en la gestación y posterior desarrollo de los fractales. Luchó en la Primera Guerra Mundial, donde fue herido y mutilado en un ataque en el frente francés que le originó un cambio profundo en su personalidad.

En el artículo que hemos mencionado aparece una descripción precisa de los conjuntos $J(f)$, para los cuales la n -ésima iteración de un número complejo permanecía acotada cuando el número de iteraciones tendía a infinito. Por este trabajo recibió el gran premio de la Academia de las Ciencias. Durante los años 20 disfrutó de gran fama, siendo nombrado profesor titular en la Escuela Politécnica de París, pero posteriormente su trabajo fue olvidado, hasta que *B. Mandelbrot* lo puso de actualidad con sus experimentos con los ordenadores.

Benoit Mandelbrot, nació en Warsaw, Polonia el 20 de Noviembre de 1924, su familia emigró a Francia en 1936, donde su tío *Szolem Mandelbrot* se encargó de su educación. Después de completar sus estudios en la Escuela Politécnica de París, viajó al Instituto Tecnológico de California en Estados Unidos y al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton donde estudió con el gran matemático *John von Neuman*. Regresó a Francia en 1955 y trabajó en el Centro Nacional de Investigaciones Científicas. No permaneció en Francia mucho tiempo, descontento del tipo de Matemáticas que en aquel momento se hacían en este país. De nuevo en Estados Unidos trabajó en el centro de investigación *Watson Research Center* de IBM, donde realizó gran parte de su investigación más relevante. Su dedicación a las matemáticas aplicadas parece ser que fue una reacción de rechazo al tipo de investigaciones en matemática teórica que hacía el grupo Bourbaki donde se encontraba integrado *Szolem Mandelbrot*.

El germen de partida de su investigación puede situarse en torno al año 1945 cuando, a sugerencia de su tío, leyó los trabajos de *Julia* y decidió resolver los mismos problemas desde un punto de vista diferente. Con la ayuda del ordenador comprobó que en los trabajos de *Julia* se encuentra el origen de los fractales que hoy en día conocemos. Su primer estudio, publicado en 1975, es el libro “*Les objets fractals, form, hasard et dimension*”, el cual completó en 1982 en su libro numerosamente citado “*Fractal geometry of nature*”.

Julia y *Fatou* se dieron cuenta que para la función $f_C(z) = z^2 + C$, con z y C números complejos, para cualquier valor de C , el conjunto de *Julia* asociado resulta ser uno de estos dos tipos:

- Conexo. Formado por una sola pieza
- Completamente desconexo. Formado por una nube de puntos dispersos, similar al conjunto de *Cantor*.

El conjunto de *Mandelbrot* está formado por aquellos puntos C para los cuales el conjunto de *Julia* asociado al sistema dinámico resulta conexo. En consecuencia: Tomamos un valor C y calculamos el conjunto de *Julia* asociado. Si sale conexo lo pintamos de negro, en caso contrario de otro color. ¿Cómo saber si el conjunto de *Julia* asociado es conexo? *Julia* probó que basta ver si la órbita del $z = 0$ está acotada. ¿Cuándo diverge una órbita?, cuando alguno de sus puntos tiene un módulo mayor o igual que 2. (Para ello, es suficiente obtener cien iteraciones para conocer el comportamiento de la órbita).

12.3. Concepto de dimensión fractal

La característica principal de un fractal es lo que se conoce con el nombre de dimensión fractal, y en cierto modo este número indica el grado de irregularidad de un objeto.

12.3.1. Dimensión topológica

La dimensión topológica coincide con el número de direcciones ortogonales diferentes que podemos tomar al movernos por el espacio. En este caso, una línea cualquiera es unidimensional, ya que cada uno de sus puntos queda identificado por un número real. La línea no tiene por qué ser recta, pero basta un único valor para situarnos en un camino, por muchas curvas que tenga. El conjunto vacío tiene dimensión -1, un punto tiene dimensión 0, y el plano dimensión 2.

Ahora bien, esta definición de dimensión topológica no es tan elemental. En efecto, sabemos que en el espacio que conocemos contamos con tres direcciones: izquierda - derecha, atrás - delante y arriba - abajo, pero podemos estudiar espacios más caprichosos. Por ejemplo, el espacio formado por dos segmentos que se cruzan sería unidimensional de no ser por el punto de intersección, donde se pueden tomar dos direcciones. A este valor se le conoce como dimensión local, y varían dentro de un mismo espacio cuando éste no es homogéneo.

Una propiedad interesante en topología es la conservación del valor de la dimensión cuando se realiza una transformación homotópica. Es decir, si deformamos un objeto, sin romperlo, perforarlo o soldarlo, conservará su dimensión.

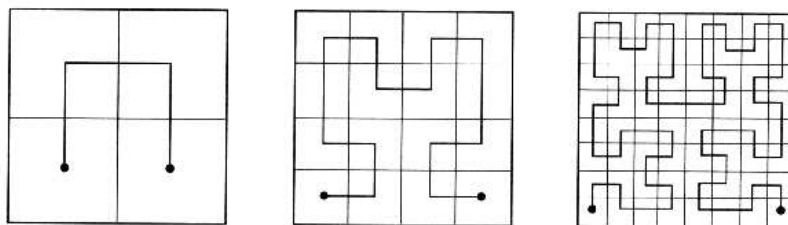


Figura 12.4: Curva de *Hilbert*.

En 1890, *Peano* construyó una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad $[0,1] \times [0,1]$. Era el primer ejemplo de una “curva que llena un espacio”. Años más tarde, *Hilbert*, interesado también por este tipo de problemas, ideó otra del mismo tipo con una construcción geométrica más simple de describir. La curva de *Hilbert* se construye de la siguiente manera (véase Figura 12.4). Dividimos el cuadrado unidad en cuatro cuadrados iguales y unimos los centros de dichos cuadrados por segmentos. Cada uno de esos cuadrados se divide de nuevo en cuatro cuadrados y conectamos sus centros comenzando siempre por el cuadrado inferior izquierdo y terminando en el cuadrado inferior derecho. Se continúa de esta forma indefinidamente uniendo los centros de los cuadrados que resultan en cada etapa. La curva límite de tales poligonales “llena” el cuadrado unidad.

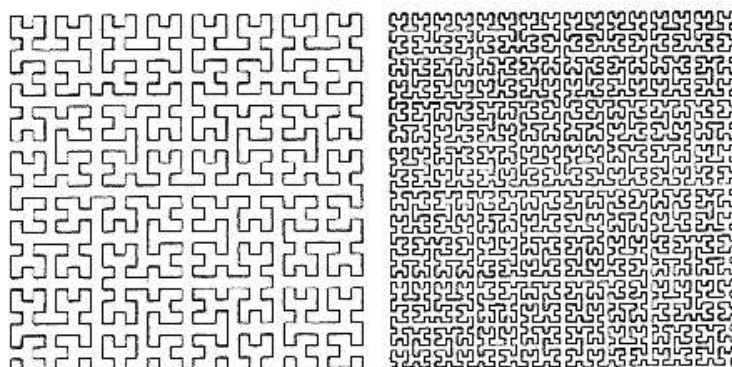


Figura 12.5: Curva de *Hilbert*.

Si una curva contiene todos los puntos de una superficie, ¿no sería más lógico decir que su dimensión es la misma que la de la superficie? Más aún: si iterásemos el patrón anterior, la curva resultante tocaría todos los puntos de un cuerpo tridimensional, como muestra la Figura 12.6.

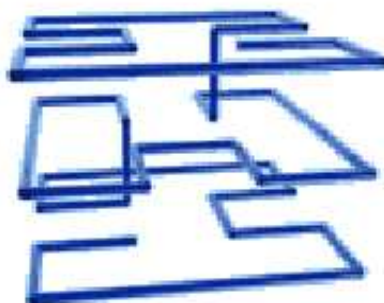


Figura 12.6: Curva de *Hilbert* en tres dimensiones.

En 1904 *Helge von Koch* presentó la curva que hoy lleva su nombre y que hemos tenido ocasión de comentar en la sección anterior. Repitamos ahora el proceso sobre el segmento unidad $[0, 1]$. Se divide en tres partes, sustituyendo la parte central por dos segmentos que junto con dicha parte, formarían un triángulo equilátero. Se obtiene así una poligonal de longitud $4/3$. Con cada uno de los cuatro segmentos que quedan determinados se repite la operación anteriormente descrita, obteniéndose una poligonal de longitud $16/9$. Se procede indefinidamente de esta forma obteniendo en cada etapa k una poligonal P_k de longitud $(4/3)^k$.

La curva de *Koch* se define como la curva límite a la cual converge la sucesión $\{P_k\}$ cuando k tiende a infinito. Se trata, por tanto, de una curva de longitud infinita pues $(4/3)^k$ tiende a infinito cuando k tiende a infinito. Más aún, la longitud de la parte de curva comprendida entre dos puntos cualesquiera de la misma también es infinita.

Para este tipo de nuevos objetos, la longitud es un concepto tremendamente complicado y en cierto modo carente de sentido. Por este motivo tenemos que recurrir

al concepto de dimensión, y preguntar no por la longitud de un fractal, sino por su dimensión.

12.3.2. Dimensión fraccionaria

El cálculo de la dimensión fractal es, en general, muy difícil. De hecho, existen muchos fractales que desconocemos su dimensión fractal exacta. Por este motivo, en un principio nos limitaremos a los fractales lineales.

Todos sabemos que si a un cuadrado de lado unidad, dividimos el lado por la mitad, nos aparecen 4 cuadrados de lados $1/2$. Del mismo modo si tomamos como lado $1/3$ nos aparecerán 9 cuadrados, y así sucesivamente. Si en lugar de un cuadrado partimos de un cubo, el factor de multiplicación sería de ocho. Nos encontramos, por tanto, ante un rasgo distintivo de cada dimensión. Precizando más, supongamos que una figura de dimensión entera d puede ser descompuesta en n copias a escala r de sí misma, entonces es fácil ver que $n = (1/r)^d$. Si el objeto de partida es un cuadrado y dividimos su lado en tres partes iguales, tenemos que $n = 9$ y $r = 1/3$. Es decir $9 = 3^2$.

Si en $n = (1/r)^d$, despejamos el valor de d ,

$$d = \frac{\ln n}{\ln(1/r)}.$$

Para el ejemplo anterior del cuadrado su dimensión será:

$$d = \frac{\ln 9}{\ln (1/(1/3))} = \frac{\ln 3^2}{\ln 3} = \frac{2 \ln 3}{\ln 3} = 2 .$$

De manera similar puede comprobarse que la dimensión fractal del conjunto de *Cantor* será $\ln 2 / \ln 3 = 0.6309..$ y la correspondiente a la curva de *Koch* $\ln 4 / \ln 3$.

Observemos que, en general, para este tipo de objetos la dimensión es un número fraccionario y además mayor que la dimensión topológica. Sin embargo, existen algunas patologías. Por ejemplo, la dimensión fractal de la curva de Peano es $d = \log 9 / \log 3 = 2$, un número entero. Para un fractal muy conocido como es el triángulo de *Sierpinski*, (Figura 12.8) tenemos que $d = \log 3 / \log 2 = 1.58496$ **menor** y no mayor que su dimensión topológica que es 2. Observemos que esto último también ocurre para el conjunto de *Cantor* ya que su dimensión fraccionaria 0.6309... es menor que su dimensión topológica que es 1.

12.3.3. Dimensión Hausdorff-Besicovich

Para hacer un estudio en profundidad de este apartado es necesario tener cierta base matemática, es particular conocer algo de topología y espacios métricos. Por este motivo, daremos la definición basándonos en la definición fraccionaria de fractal.

Como hemos comentado anteriormente, en el caso de fractales no lineales, cuando no podamos realizar una medición exacta, siempre podemos recurrir a un estudio progresivo. Se trata de cubrir la curva con el número mínimo de cuadrados cada vez más pequeños. Llamamos h al tamaño de cada uno de los cuadrados, y $N(h)$ al número de los cuadrados que cubren la curva en cada caso. El método nos permite obtener una aproximación de la dimensión fractal de cualquier objeto, también conocida como dimensión *Hausdorff - Besicovitch*, cuya fórmula es

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln N(h)}{\ln(1/h)}. \quad (12.1)$$

Es decir, la medida de *Hausdorff - Besicovitch* es la forma de asignar una dimensión fraccionaria a un conjunto. Su cálculo “a mano” es muy complejo y por este motivo lo que se hace es recurrir a diferentes programas de ordenador, que suelen utilizar el **método Box Counting**. Básicamente el método consiste en lo siguiente: a partir de una fotografía del objeto, obtenemos una versión binaria de la imagen. Es decir, a los píxeles brillantes del conjunto se le asocia el valor uno y cero al resto. A continuación se obtiene una imagen del contorno y superponemos sobre esta imagen una malla cuadrada de un tamaño dado. Se cuenta el número de estos cuadrados que contienen al contorno y se repite el proceso con diferentes tamaños de mallas. Finalmente, se realiza un ajuste por mínimos cuadrados y la pendiente de la recta de regresión será la dimensión del objeto fractal.

Por último, llamemos la atención sobre el hecho más importante en el concepto de dimensión fractal como es que el número obtenido es **independiente** de la escala que estemos utilizando.

12.4. Tipos de fractales

En este apartado subdividiremos los dos grandes tipos de fractales que hasta ahora conocemos: lineales y no lineales.

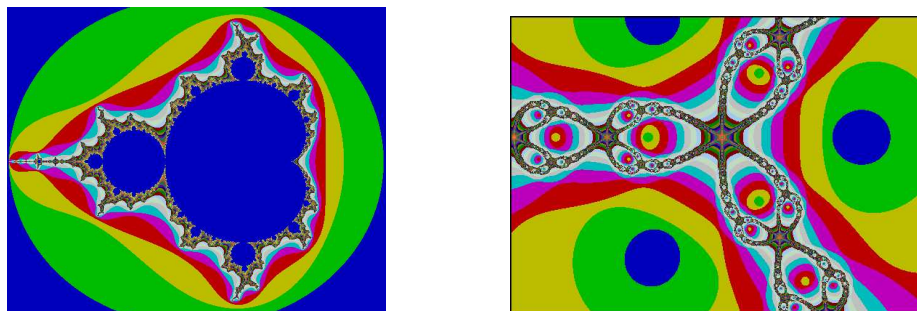


Figura 12.7: Algoritmos de escape.

A grandes rasgos, los fractales podemos clasificarlos en:

- **Algoritmos de escape.** La Figura 12.7 es un fractal de *Mandelbrot*, y se genera mediante un algoritmo de escape, básicamente el método consiste en lo siguiente: para cada punto se calculan una serie de valores mediante la repetición de una fórmula hasta que se cumple una condición, momento en el cual se asigna al punto un color relacionado con el número de repeticiones.

Los fractales de este tipo precisan de millones de operaciones, por lo cual sólo pueden dibujarse con la ayuda del ordenador.

- **Sistema de Funciones Iteradas (IFS).** Es un método creado por *M. Barnsley*, basándose en el principio de autosemejanza. En un fractal IFS siempre se puede encontrar una parte de la figura que guarda una relación de semejanza con la figura completa. Esa relación es a menudo muy difícil de apreciar, pero en el caso del helecho de la figura siguiente es bastante clara: cualquier hoja es una réplica exacta de la figura completa.

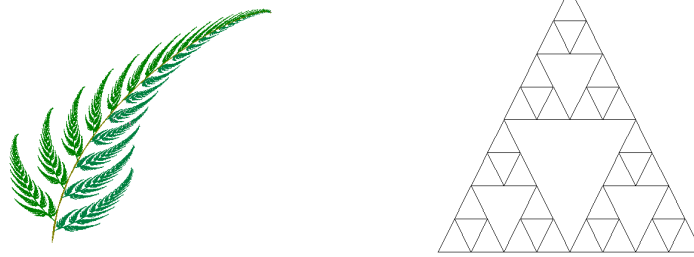


Figura 12.8: Funciones iteradas y Triángulo de *Sierpinski*.

- **L-Systems** Este método de construcción de fractales fue creado en 1968 por *Aristid Lindemayer*, y publicado en el *Journal of Theoretical Biology*, con el nombre “*Mathematical Models for Cellular Interaction in Development*”. En el trabajo *Lindemayer* proponía un modelo matemático para la creación de un filamento celular de la bacteria *Anabaena Catenula*. Se supone un sistema celular con dos posibles estados citológicos, *A* y *B*, y la siguiente regla de crecimiento: una célula en el estado *A* se divide y da lugar a una célula en el estado *A* y otra célula en el estado *B*; y lo representaremos por *AB*. Por otro lado, una célula en el estado *B* se divide en una célula en el estado *B* y otra en el estado *A*, es decir *BA*. En la tabla siguiente hemos representado el resultado de la división para las cuatro primera fases, tomando como célula de partida del tipo *A*.

Fase	Núm células	Resultado división
1	1 (<i>A</i>)	<i>AB</i>
2	2 (<i>AB</i>)	<i>ABBA</i>
3	4 (<i>ABBA</i>)	<i>ABBABAAB</i>
4	8 (<i>ABBABAAB</i>)	<i>ABBABAABBAABABBA</i>

Tabla 12.1

Nosotros podemos generar este tipo de fractales utilizando como software FantasticFractal[®].

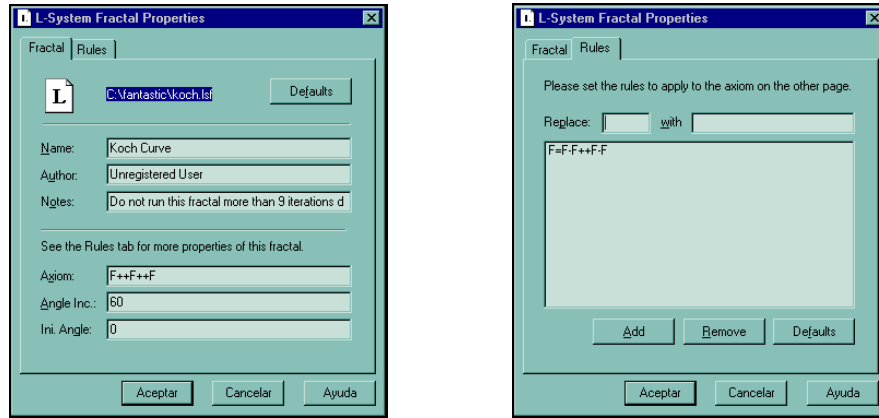


Figura 12.9: Propiedades del fractal.

En la Figura 12.9 aparecen las propiedades del fractal isla de Koch. El signo + representa un giro de 60 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj, y el signo - un giro de 60 grados en la dirección de las agujas del reloj. Para poder dibujar el fractal es necesario indicar la regla, que en nuestro caso viene dada por, $F=F-F++F-F$. Es decir, F estará definida por la figura siguiente: se traza un segmento unitario, en su extremo giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y dibujamos un segundo segmento, después giramos 120 grados en la dirección contraria a las agujas del reloj y dibujamos otro segmento, finalmente giramos 60 grados en la dirección de las agujas del reloj y dibujamos el último de los segmentos. La figura que aparecerá será la que puede verse en 2.10

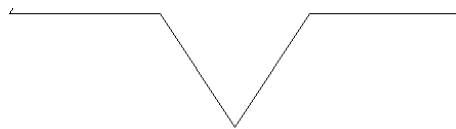


Figura 12.10: Regla para la isla de Koch.

A partir de la regla F se define el axioma, que en nuestro ejemplo viene dado por, $F++F++F$, y cuyo significado es el siguiente: una vez dibujada la Figura 12.10 (F), en su extremo giraremos 120 grados en dirección contraria a las agujas del reloj ($++$) y colocamos de nuevo la Figura 12.10 (F), finalmente se gira otros 120 grados ($++$) y se vuelve a representar la Figura 12.10 (F). El resultado final puede verse a la izquierda de la Figura 12.11.

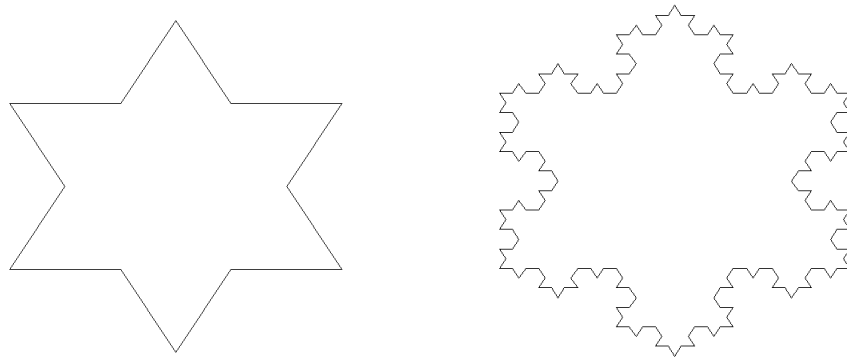


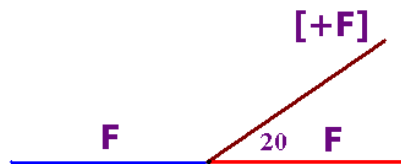
Figura 12.11: Izquierda: primera iteración. Derecha: tercera iteración

Si volvemos al ejemplo inicial de la bacteria *Anabaena Catenula*, podemos definir un algoritmo parecido a la isla de Koch de la manera siguiente:

- 1.- Indicamos cuales son los elementos de partida
 - Existencia de una única célula: A
- 2.- Definimos las reglas
 - La regla de sustitución de la célula A es $A=AB$
 - La regla de sustitución de la célula B es $B=BA$

Si lo implantamos en un programa de ordenador y lo ejecutamos con diferentes iteraciones, aparecerá la Tabla 12.1.

Los L-systems son muy adecuados para modelar muchos sistemas biológicos, especialmente aquellos que presentan bifurcaciones o ramificaciones en su desarrollo. El esquema básico para dibujar una bifurcación con un ángulo dado (por ejemplo 20°) es el siguiente: $F=F[+F]F$, donde los corchetes indican que al final se debe retroceder a la posición donde empezaba la bifurcación.



Naturalmente, podemos definir una regla más complicada y obtener un modelo más realista. Por ejemplo, para representar a un árbol se ha elegido como regla $F=F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]$ y un ángulo de 22° . En la Figura 12.12 pueden verse los resultados para un número diferentes de iteraciones.

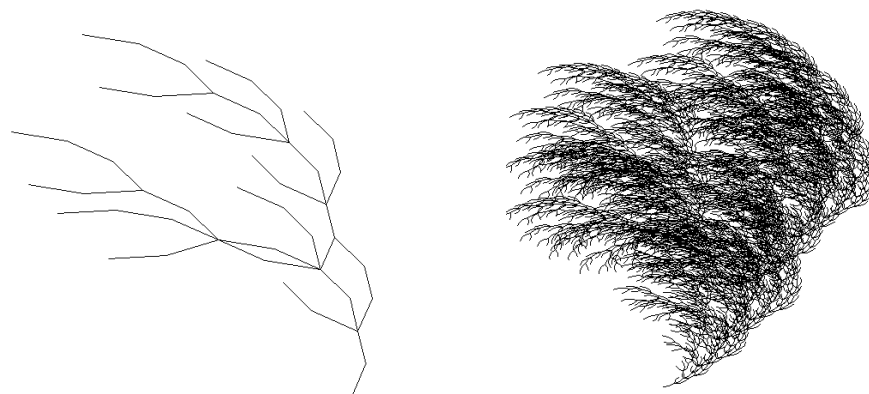


Figura 12.12: Izquierda: segunda iteración. Derecha: quinta iteración

También podemos dibujar el triángulo de *Sierpinski* través de este tipo de algoritmo. Recordemos que consiste en un triángulo en el que se aloja otro, uniendo los puntos medios de cada uno de sus lados. Esto se repite con todos y cada uno de los triángulos formados que tengan la misma orientación que el original, y así sucesivamente. El triángulo de *Sierpinski* es uno de los pocos fractales que se puede dibujar con exactitud sin ayuda de un ordenador, siguiendo las instrucciones anteriores. Como curiosidad, si en un triángulo de Pascal coloreamos los números impares, la figura que aparece se parece al triángulo de *Sierpinski*.



Figura 12.13: Fractales caóticos.

- **Órbitas caóticas.** Un ejemplo de este tipo de fractales es el atractor o mariposa de *Lorenz*, y el diagrama de bifurcación correspondiente al modelo discreto logístico, que tendremos ocasión de volver cuando estudiemos el capítulo de los sistemas dinámicos discretos.
- **Aleatorios y celulares.** Ciertas categorías de fractales no encajan del todo dentro de las características que hemos descrito anteriormente. Estructuras como el plasma o las imágenes de difusión dependen en cierta medida del azar, por lo cual son únicas.

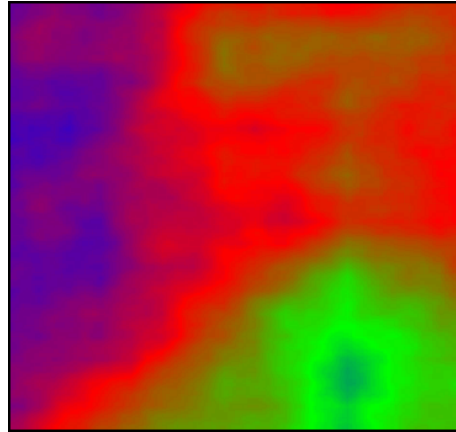


Figura 12.14: Fractal celular.

A este tipo de fractales corresponden los autómatas celulares, que funcionan con sencillas reglas que colorean zonas a partir del color de las adyacentes. Pese a que en principio pueda parecer que las imágenes conseguidas con este método vayan a ser sencillas, no tiene por qué ser así.

- **M. C. Escher y los fractales.** Es bastante probable que *Escher* no conociera el concepto de fractal, sin embargo desarrolló con frecuencia estructuras matemáticas muy parecidas a los fractales, ya que en un número considerable de sus obras incluye objetos relacionados con el infinito. Según comentó, su aproximación al infinito surgió del modelo de *Poincaré*, en el cual se puede representar la totalidad de una superficie infinita encerrada en un círculo finito.



Figura 12.15: Dibujos encajados en un círculo infinito.

12.5. Aplicaciones de la geometría fractal

En primer lugar, tenemos que preguntarnos; ¿qué significado tiene decir que un objeto real, tal como una costa o la red capilar del sistema venoso, es un fractal? Lo que queremos decir con ello, siguiendo a *Mandelbrot*, es que puede definirse un

modelo matemático fractal que aproxima satisfactoriamente al objeto real en toda una franja de escalas limitada por ciertos valores máximo y mínimo que llamaremos corte superior e inferior.

Según lo comentado, en el mundo real no existen fractales, como tampoco existen rectas ni esferas. Hablar de la dimensión fractal de una costa no es más absurdo que hablar del radio de la tierra, ya que ésta no es exactamente una esfera.

Puede construirse un modelo matemático de naturaleza fractal válido para el estudio del universo tomando un valor inferior del orden del diámetro de una galaxia con tal de considerar valores superiores suficientemente amplios. Tal modelo reproducirá la estructura geométrica de la distribución de las galaxias.

Los fractales y la Teoría del Caos pertenecen a lo que se conoce con el nombre de **Dinámica No Lineal**, la cual nos permite entender el mundo que nos rodea, por ejemplo: la difusión de una epidemia, la cinemática de algunas reacciones químicas, los cambios climáticos, ... etc.

- **Las fronteras de separación** entre diferentes medios físicos biológicos o sociales proporcionan, a menudo, excelentes ejemplos de sistemas que se pueden analizar mediante fractales. Un ejemplo clásico que responde a ciertos modelos de curvas fractales es el de las costas, pero hay numerosos ejemplos de este tipo, como pueden ser los bordes de una nube, una superficie montañosa, la orilla de un río o incluso la frontera entre dos países diferentes. Los célebres conjuntos de *Juliá* son también fronteras, en este caso matemáticas, entre distintas regiones del plano, e igual sucede con las más bellas e interesantes partes del conjunto de *Mandelbrot*.



Figura 12.16.

El trazado de una costa o de la orilla de un río es un proceso con rasgos comunes al de una frontera. Los dos medios en contacto, agua y tierra, están mutuamente sometidos a largos períodos de interacción que modifican permanentemente los trazados de las costas y orillas en procesos acumulativos que operan sobre un amplio margen de escalas diferentes.

Naturalmente, el proceso perfectamente regular de la formación de la curva de *Koch* es muy diferente al de la formación de una costa, que encierra elementos de tipo aleatorio. A pesar de las diferencias, es asombroso que la dimensión de *Hausdorff* de la curva de *Koch*, igual a 1.26128..., es muy parecida al valor 1.3 obtenido empíricamente por *Richardson* para la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña, y aún más parecido al valor empírico obtenido por el mismo investigador para la dimensión fractal de las fronteras de España y Portugal y para la costa australiana (*Mandelbrot*, 1977) mientras que *Feder* estima en 1.5 la dimensión fractal de la costa noruega, mucho más accidentada.

La clave que explica la frecuencia con que aparecen de forma espontánea algunas formas geométricas de la geometría clásica, como la recta, la circunferencia o la esfera, es que estas formas tienen propiedades que son “utilizadas” por la naturaleza. Por ejemplo, el hecho de que la esfera tenga superficie mínima a igualdad de volumen o de que una recta sea la curva de menor longitud entre dos puntos, hace de estas figuras elementos privilegiados en la naturaleza.

- Cuando hablamos de **árboles**, no nos referimos a ellos solamente en su sentido botánico, sino que también entenderemos como árbol un río y todos sus afluentes, el sistema arterial o la red bronquial. Desde un punto de vista matemático, un árbol es un conjunto de puntos o vértices (que serían los nudos de ramificación de los árboles botánicos), unidos entre sí por arcos (ramas), de forma que si caminamos desde un vértice por una sucesión consecutiva de arcos diferentes nunca regresaremos al vértice de partida. Este modelo puede ser aceptable y una primera aproximación para algunos de los objetos enumerados anteriormente.



Figura 12.17: Izquierda: árbol. Derecha: Río

El proceso de ramificación y subramificación da su naturaleza fractal a los árboles. Pensemos, por ejemplo, en toda la red de afluentes de una determinada cuenca hidrográfica que comprende desde el río principal a las más pequeñas cortaduras por donde resbalan pequeños hilos de agua cuando llueve. Puesto que su función es drenar el agua de toda una cuenca hidrográfica, una red fluvial es un modelo natural de curva que cubre una superficie, una de las propiedades concebidas como aberrantes por los matemáticos de hace cien años y que es característica de conjuntos fractales como la curva de *Peano* o de *Hilbert*.

Para un buen funcionamiento de los pulmones, éstos deben maximizar el área de su superficie para la difusión del oxígeno y el dióxido de carbono. El intercambio de estos gases se realiza a través de tres redes que tienen estructuras fractales: arterial pulmonar, venoso pulmonar y alveolar bronquial. Las estructuras fractales proporcionan un modelo que permite convertir un espacio de dimensión tres (la sangre de las arterias y el aire del sistema respiratorio), en una estructura que tenga la forma de una superficie de dimensión dos, facilitando el intercambio de gas.

- La **Osteoporosis**, es una enfermedad que para poder ser diagnosticada en un paciente tiene que estar en una fase muy avanzada. La enfermedad se detecta analizando la textura de los huesos, ya que son los que se ven afectados cuando la enfermedad ataca. Muchas veces la alteración tiene que ser muy grande para poder apreciarse y esto obliga a que los tratamientos tengan que ser muy prolongados.

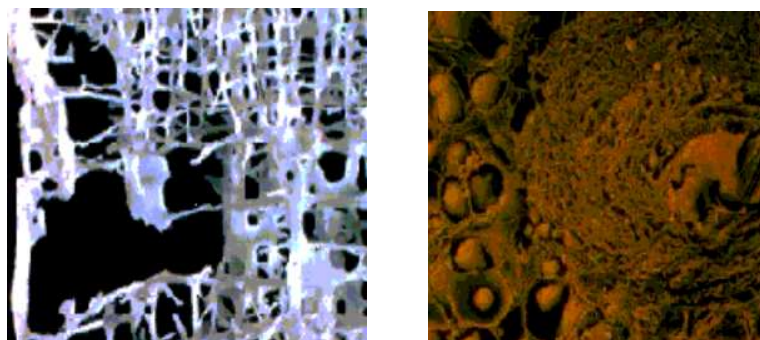


Figura 12.18: Izquierda: Osteoporosis. Derecha: Tumor.

Un grupo de investigadores dirigidos por el profesor *José Aranda*, realizó un programa de ordenador que ayudaba en la comparación de las texturas de los huesos. El proceso era el siguiente: se toma una muestra de la textura del hueso en su estado normal y se almacenaba en la memoria del ordenador. Luego se hacía lo mismo pero ya con los pacientes a los que se pensaban que eran propensos a sufrir la enfermedad. A continuación el programa comparaba las dos texturas y podía detectarse la presencia de la enfermedad.

- Recordemos que las **texturas** tienen mucho que ver con los fractales, lo que ha permitido ser incorporados también a otros aspectos muy diferentes como por ejemplo la industria textil. Hoy en día se observan determinados tumores, en forma de texturas, que parecen ser se ramifican en forma de un fractal.
- Los fractales también se usan en el tratamiento digital de imágenes para reducir su tamaño de almacenamiento. A este proceso se le conoce con el nombre de **proceso de transformación fractal**, y fue descubierto en 1987 por el matemático inglés *Michael F. Barnsley*.

Una imagen es considerada como un punto de un espacio métrico completo,

con la métrica de *Hausdorff*. Se define un conjunto de transformaciones que cuando se iteran y se aplican a un punto inicial arbitrario converge hacia un punto que depende únicamente del conjunto de transformaciones y no del punto de partida. A este punto se le conoce con el nombre de atractor.

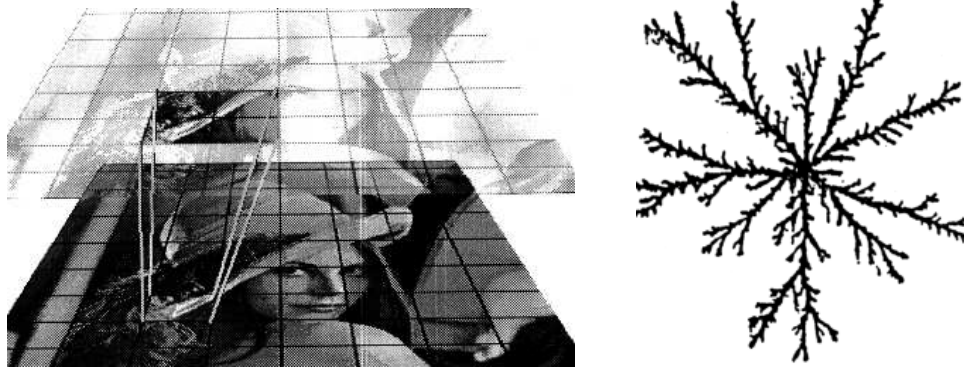


Figura 12.19: Izquierda: Transformación fractal. Derecha: ADL (dimensión 1.71).

La cuestión es saber si dada una imagen cualquiera es posible encontrar un conjunto de transformaciones cuyo atractor sea la imagen de partida. La respuesta es afirmativa y se conoce con el nombre de teorema del collage.

- A continuación comentaremos el proceso de **digitación viscosa**, un fenómeno que ha llamado recientemente la atención de los investigadores. Este fenómeno se produce cuando un líquido de baja viscosidad desplaza a otro viscoso en un medio capilar o poroso. Por ejemplo, cuando se trata de recuperar petróleo mediante la inyección de agua en un campo petrolífero.

Consideremos el siguiente modelo matemático particularmente válido para ciertos procesos de digitación viscosa: el llamado proceso de agregación por difusión limitada (ADL). Consiste en suponer que de un punto elegido al azar de entre los de una circunferencia sale un monómero que describe un movimiento browniano. El monómero vaga al azar hasta que llega al centro de la circunferencia, en cuyo momento se detiene. En este instante, un nuevo monómero se desprende de la circunferencia y camina hasta tropezar con el anterior, y así sucesivamente. Si en su movimiento errático algún monómero se aleja excesivamente, lo eliminamos y generamos uno nuevo. Este proceso resulta muy sencillo de simular en un ordenador, aunque requiere mucho tiempo de cálculo, especialmente en los primeros momentos de formación. El experimento produce estructuras de tipo fractal cuya dimensión de agregación ha sido estimada en 1.71 para el caso bidimensional y en 2.50 para el tridimensional, valores que muestran concordancia con los obtenidos en la digitación viscosa en medios porosos.

- En la actualidad, es posible regenerar tejido, como el de la piel, pero se está en la fase inicial de poder regenerar órganos completos para poderlos utilizar en

los trasplantes. El problema fundamental se encuentra en diseñar una estructura, similar al sistema circulatorio, en la que poder apoyar las células en crecimiento del órgano. Investigadores del Harvard Medical School y el Massachusetts Institute of technology están utilizando patrones fractales generados por ordenador y los están grabando en discos de silicio con el objetivo de formar un molde. A partir de estos discos se fabrican microcanales de polímeros biodegradables y biocompatibles, y posteriormente las redes se apilan para poder construir una estructura tridimensional.

- Por último, existe una gran relación entre el método de *Newton* para encontrar el valor aproximado de las raíces de una ecuación y los fractales. Como sabemos, el método de *Newton* es un método reiterativo, y por lo tanto debemos iniciarlo con valor particular. Si el valor inicial está cerca del verdadero valor de la raíz, entonces el método converge a la raíz. En caso contrario, no existirá convergencia al valor deseado.

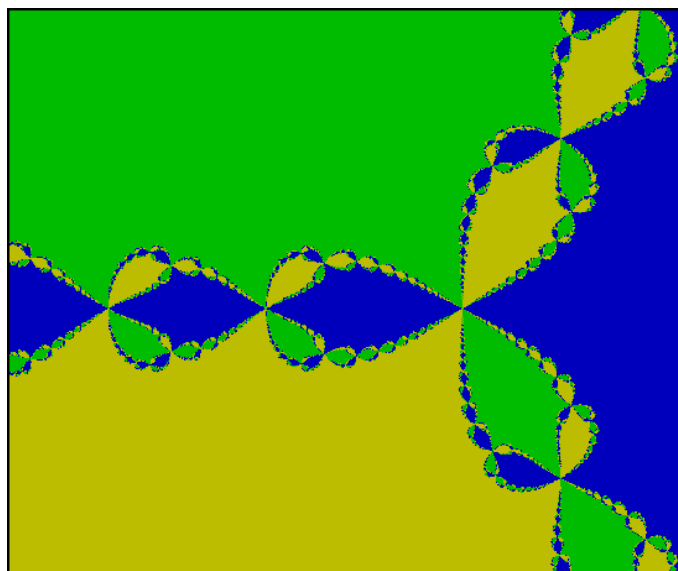


Figura 12.20: Método de *Newton*

