La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto

Juan E. Nápoles Valdés y Carlos Negrón Segura
Universidad de la Cuenca del Plata (Argentina) e Instituto Superior Pedagógico de Holguín (Cuba).
idic@ucp.edu.ar

"Solo aprendemos de aquellos a quienes amamos".
Goethe

1. Preliminares.

Un análisis de los programas de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para no matemáticos, nos permite compartir la idea de Hernández (ver [32]) al decir que siguen una tradición básicamente Euleriana ("Institutionis Calculi Integralis" (1768-1770), cf. [23]), pues se componen, generalmente, de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden: de variables separables, homogéneas, exactas, lineales, etc., Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes, donde se exponen fundamentalmente dos métodos de solución: variación de constantes y coeficientes indeterminados y Aplicaciones (a la Física, principalmente).

Esta concepción algorítmica-algebraica dominante en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, da lugar a que los estudiantes tengan una imagen muy limitada sobre los diferentes acercamientos que existen para encontrar la solución de una ecuación diferencial, la cual repercute en asignaturas aplicadas (entiéndase físicas y técnicas, en dependencia de la especialidad en la que esté enmarcado el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) pues en éstas, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que se utilizan, requieren, en muchas ocasiones, acercamientos *geométricos* y *numéricos* y articular, en la mayoría de los casos, las diferentes representaciones que se dan para la solución entre estos tres acercamientos.

La relativa estabilidad en el enfoque de este curso (caracterizado por algunos como "un libro de cocina"), se debe principalmente al predominio avasallador que han ejercido los procedimientos algorítmicos-algebraicos sobre el discurso matemático en el nivel superior y a la concepción de los estudiantes y algunos profesores sobre lo que es el cálculo. En efecto, Artigue (en [78]) nos muestra una serie de estudios, que confirman esta afirmación. Así, se muestra una razonable maestría del álgebra algorítmica en términos de cálculo de derivadas y primitivas, así como la dificultad de representaciones gráficas relevantes (Artigue en [78, pp. 176-178]).

Asimismo, en el trabajo [4], sobre las concepciones de los estudiantes de la diferencial, y el proceso de diferenciación e integración, se observa en el caso de la diferencial que los algoritmos algebraicos abruman el significado y proceso de la aproximación lineal ([78, pág. 185]) y finalmente en la conclusión y perspectivas futuras de la educación (para el caso del Análisis) se señala lo siguiente:

"*La investigación sugiere que al enfrentar esas dificultades, la instrucción común, se refugia en una algebrización intensiva de análisis: la manipulación de fórmulas, más que* *la teoría de las aproximaciones lineales, al cálculo de primitivas por integración más que regirse por el significado de los procedimientos de integración y recetas de aprendizaje para resolver ecuaciones diferenciales sin desarrollar un enfoque numérico o gráfico general a la solución. Además, se trata de resolver dificultades debido a una formalización, dando definiciones, entonces rápidamente resolviendo o citando teoremas fuertes que le permiten al alumno trasladarse de una teoría conveniente y regresar a los algoritmos algebraicos*".

Esta es, en general, la situación que prevalece en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el programa de estudio tradicional. En lo adelante, intentaremos explicar esta situación a través de una revisión histórica del desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias –este esbozo histórico está enfocado, no a brindar una cronología de los resultados obtenidos, sino a los métodos, problemas, dificultades y obstáculos que han enfrentado los matemáticos en este campo de investigación-, y su repercusión en los libros de textos más conocidos, en base a la presencia de los métodos algebraicos, geométricos y numéricos, en cada texto. Es decir, estamos interesados en mostrar la trascendencia histórica de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias[1] vinculadas con su enseñanza y cómo el desarrollo integral de las primeras, se ha soslayado en el caso de la segunda, teniendo en cuenta los tres escenarios diferentes en que podemos considerar las soluciones, tres escenarios que son, en definitiva, *tres aspectos del mismo problema*. Estos conocimientos fueron utilizados en una investigación de Ingeniería Didáctica realizada en la Universidad Pedagógica de Holguín, para la Licenciatura en Educación, especialidad Física-Astronomía.

2. Apuntes metodológicos a una historia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias[2]

La Mecánica es la más antigua de las ciencias físicas. Los escritos más antiguos que se registran acerca de esta materia, son los de Arquímedes (287-212 a.C.) referentes al principio de la palanca y al principio del empuje.[3] A la formulación de las leyes de la

[1] Esta evolución histórica nos permite aceptar una concepción dinámica de la Ciencia, en particular de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y las teorías del significado de los objetos matemáticos de [18]. En un marco general sobre las perspectivas actuales en Filosofía e Historia de las Matemáticas sobre el conocimiento matemático, se deben destacar los ensayos de [46] y [33], así como el trabajo [77] por su agudeza crítica; [84] una visión próxima (aunque un tanto superficial) a un sentir hoy común sobre los aspectos culturales, sociales e históricos del desarrollo de las Matemáticas; [45], como perspectiva general del campo temático con singular atención a algunos puntos (e.g., la discusión del presunto estatuto *a priori* del conocimiento matemático, el cambio histórico en Matemáticas, la rigorización) y [80], una síntesis histórica-filosófica apropiada. No es descartado un libro como el de I. Lakatos [50].

Un trabajo que no debe pasarse por alto es el de Garciadiego [25], donde se presenta, en lenguaje ameno, la historia de la matemática como problema: más allá de descripciones y enfoques genético-cronológicos, la historia debe tratar de resolver los cómo y los porqué y destaca, como una de las problemáticas de los historiadores de la ciencia, la atención que le deben prestar estos al *"desarrollo técnico del pensamiento científico, y [...] encontrar, entre otros, los conceptos claves que influenciaron el desarrollo de las ciencias"*. En esta dirección se enmarca nuestro trabajo. No debe olvidarse en estas latitudes, la influencia de un filósofo como Albert Lautman (ver [85]).

[2] Para mayor información sobre los aspectos aquí tratados, ver [64], [60-62] y [63].

[3] Puede que un "rigorista" alegara que Arquímedes trata más bien con la estática matemática y puede que si se tomara "mecánica" en un sentido genérico, serían anteriores algunas ideas de Aristóteles y quizás un escrito de la escuela aristotélica sobre "Problemas –o cuestiones– físicos –o mecánicos–" nuestra afirmación se basa

composición vectorial de fuerzas dada por Stevin (1548-1620), aguardaba un progreso sustancial y el mismo autor enunció la mayoría de los principios de la Estática. El primer estudio de un problema dinámico se debe a Galileo (1564-1642) y se refiere a los experimentos sobre la caída de los cuerpos, aunque debemos considerar un precursor importante: Copérnico (1473-1543), quien con su sistema heliocéntrico, sentó las bases de una nueva ciencia: la Mecánica Celeste.[4]

Históricamente, la integración antecedió a la diferenciación por, prácticamente, dos mil años. El antiguo método griego de exhaución y las medidas infinitesimales de Arquímedes [6], representan ejemplos antiguos de procesos límites de sumas integrales, pero no fue hasta el siglo XVII que Fermat, encontró las tangentes y los puntos críticos por métodos equivalentes a la evaluación de cocientes incrementales. Él descubrió la naturaleza inversa de estos dos procesos, junto con la consecuente explicación de la anti-derivación en la determinación límite de sumas. La diferenciación, tanto inversa como directa, convirtió el algoritmo básico en una nueva y poderosa parte de la Matemática. La integración fue tomada como "la memoria de la derivación" y no fue hasta 150 años más tarde, que la atención se dirigió directamente al concepto de sumación en el cálculo [31].

El Calculus apareció impreso, por primera vez, en una memoria de seis páginas de Leibniz (1646-1716) en el Acta Eruditorium de 1684, que contenía una definición de la diferencial y donde dio pequeñas reglas para su cálculo en sumas, productos, cocientes, potencias y raíces.[5] Él incluyó también pequeñas aplicaciones a problemas de tangentes y puntos críticos.

Ante los creadores del Calculus, el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales, en su inicio, se presentaba como parte de un problema más general: el problema inverso del análisis infinitesimal. Naturalmente, al inicio la atención se concentraba en las diferentes ecuaciones de primer orden. Su solución se buscaba en forma de funciones algebraicas o trascendentes elementales, con ayuda de métodos más o menos exitosamente elegidos. Para reducir este problema a la operación de búsqueda de funciones primitivas, los creadores del análisis y sus discípulos, tendían en cada ecuación diferencial a separar las variables. Este método, con el que actualmente comienzan los textos sistemáticos de la teoría de ecuaciones diferenciales, resultó, al parecer, históricamente el primero.

En primer lugar, señalaremos que el término *aequatio differentialis*, fue primeramente usado por Leibniz (en un sentido bastante restringido) en 1676 para denotar una relación

en que Arquímedes (cf. [2]) es el principal sistematizador de estos estudios en la antiguedad y la aplicación de éstos a problemas geométricos y estáticos (¡mecánicos!), ver [53] y [59]; recomendamos además [66], donde se afirma: "*…Arquitas de Taras (Tarento), estadista y científico que se ocupó de Mecánica Teórica y práctica (autómatas), de aritmética (progresiones y proporciones) y de geometría…*".

4 En la época del astrónomo polaco, la astronomía geocéntrica llevaba reinando más de mil años, cierto es que prelados instruidos advertían que la Semana Santa llegaba demasiado pronto en el calendario anual y unos pocos astrólogos sabían que la posición de los planetas divergía a veces, en varios grados, de la que podía preverse con las tablas de Ptolomeo. El sistema heliocéntrico (que se remonta a Aristarco de Samos en el siglo III a.C.) resolvió estas y otras dificultades y la publicación de la obra de Copérnico "De revolutionibus orbium coelestium" (1543), abrió el camino de la verdad celeste por la que transitarían más adelante Kepler, Galileo, Newton, Poincaré y muchos más.

5 Una excelente traducción del trabajo de Leibniz de 1684 aparece en [75]. Sobre la trascendencia y repercusiones del surgimiento del Calculus en la Matemática y la Física, así como interesantes notas históricas, consultar principalmente [58] y [16]. Recomendamos también [22] y [27].

entre las diferenciales dx y dy y dos variables x e y,[6] concepción que se conserva hasta los tiempos de Euler (en los años 1768-1770). Asimismo, es importante destacar que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias surgen prácticamente con la aparición del Calculus, en la célebre polémica Newton-Leibniz se tiene un gran momento cuando Newton comunica (por medio de Oldenburg) a Leibniz el siguiente anagrama:[7]

6a cc d ae 13e ff 7i el 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x,

el cual en latín quiere decir "Data aequetione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et viceversa", o bien: "Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa". Este fue, como dice Arnold, el descubrimiento fundamental de Newton que consideró necesario mantener en secreto, y el cual en lenguaje matemático contemporáneo significa: "Es útil resolver ecuaciones diferenciales". Curiosamente Ince afirma que la fecha de aparición de estas es el 11 de Noviembre de 1675 cuando Leibniz escribió la ecuación $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ (continúa Ince) "...por lo tanto no resolvió una ecuación diferencial, la cual por si mismo es un asunto trivial, sino que fue un acto de un gran momento, fraguando una herramienta poderosa, el signo de integral".

La primera clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden (en lenguaje de la época ecuaciones fluxionales) la dio Newton. El primer tipo estaba compuesto de aquellas ecuaciones en las cuales dos fluxiones x', y', y un fluente x o y están relacionados, como por ejemplo $\frac{x'}{y'} = f(x)$ o, o bien como escribiríamos en la actualidad $dy/dx=f(x)$, $dy/dx=f(y)$; el segundo tipo abarcó aquellas ecuaciones que involucran dos fluxiones y dos fluentes $x'/y'=f(x,y)$ ($dy/dx=f(x,y)$). Y finalmente, el tercer tipo abarcó a ecuaciones que involucran más de dos fluxiones, las cuales en la actualidad conducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Por último, es conveniente resaltar algunas de las características más importantes con que abandonamos el momento histórico de Newton-Leibniz:

1. En esta época los problemas todavía eran abordados con una visión geométrico-euclidiana. Tanto Leibniz como Newton, elaboran sus conceptualizaciones matemáticas en términos de entes geométricos en los que se representan las propiedades y conceptos. Esto era una consecuencia de lo *restringido que se encontraba el concepto de función* en el siglo XVII. La noción de función permanecía aún ligada a la idea de curva geométrica. En este sentido, obviamente el concepto de tangente era el euclidiano. En Leibniz hay un elemento diferente aunque ambiguo, de concebir la recta tangente como aquella que une dos puntos infinitamente próximos. De todas maneras la noción que se manejaba de recta tangente era netamente intuitiva.

2. El cálculo tanto de Newton como el de Leibniz trataba de cantidades variables. En Leibniz una sucesión de valores infinitamente próximos; en Newton cantidades que

[6] No obstante, existen historiadores que afirman la imposibilidad de ser precisos, por ejemplo llegando incluso a contraponerse ambos en sus afirmaciones, pues mientras Ince [38] afirma que fue Leibniz quien primero habló explícitamente de ecuaciones diferenciales, Kline [46] por el contrario, dice que fue Huygens en el Acta Eruditorium de 1693, e incluso con una fecha distinta a la dada por Ince.

[7] Ver [52].

variaban con el tiempo. El primero concibe el continuo geométrico formado por segmentos infinitesimales. El segundo tiene una idea intuitiva de movimiento continuo cercana al concepto de límite. Newton prefería referirse a lo indefinidamente pequeño en términos de *últimas razones*.

En la última década del siglo XVII, los hermanos Bernoulli (James y Johan) introducen términos como el de "integrar" una ecuación diferencial, así como el proceso de "separación de variables" (**separatio indeterminatarum**) de una ecuación diferencial.

Alrededor de 1692, Johan Bernoulli I (1667-1748) encontró otro método, utilizado en una serie de problemas, la "multiplicación por un factor integrante" (sobre todo para resolver ecuaciones en los cuales el método anterior no se podía aplicar, digamos la ecuación $\alpha x dy - y dx = 0$, ya que aunque era posible separar las variables no se podía integrar, ya que en la época no se conocía que $\int dx/x = \ln x$), método también usado por su sobrino Daniel (1700-1782) a partir de 1720.

Sin embargo, los métodos eran incompletos y la teoría general de las ecuaciones diferenciales, a comienzos del siglo XVIII no podía ser propuesta.

Resultados de carácter general comienzan a advertirse a mediados de los años 20 del siglo XVIII. En 1724, el matemático italiano J. F. Riccati (1676-1754) estudió la ecuación $dy/dx + ay^2 = bx^\alpha$, (α, a, b constantes) determinando la integrabilidad en funciones elementales de esta, de aquí que (y a propuesta de D'Alembert en 1769) lleve su nombre, denominación extendida a todas las ecuaciones del tipo $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$, ($P$, Q y R funciones continuas). La investigación de esta ecuación fue ocupación de muchos matemáticos: Leibniz, Ch. Goldbach (1690-1764), Johan I, Nicolás I (1687-1759) y Daniel Bernoulli entre otros. Daniel estableció que esta se integra mediante funciones elementales sí $\alpha = -2$ ó $\alpha = 4k/(2k-1)$ k entero [54].

Es a Euler a quien le corresponde la primera sistematización de los trabajos anteriores en [23], donde encontramos lo que se puede llamar la primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta obra contiene una buena parte (y mucho más) del material que encontraríamos en un libro de texto actual, como el estudio de las ecuaciones diferenciales de 1er orden (y su correspondiente clasificación en "separables", "homogéneas", "lineales", "exactas"), las de segundo orden (lineales, y las susceptibles de reducir el orden), y su generalización a las de orden superior. Asimismo, encontramos el método de series de potencias para resolver ecuaciones como $y'' + ax^n y = 0$. Lo que desde nuestra perspectiva, vale destacar de este trabajo, es su forma de **conceptualizar** las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la expresión dy/dx significa para Euler un cociente entre diferenciales y no nuestra derivada actual, en una ecuación de segundo orden aparecen los diferenciales ddy, dx^2 en lugar de la segunda derivada y''. Por otra parte, consideramos que este trabajo marca el fin de la etapa *algebraica-algorítmica* en la historia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y comienza la segunda etapa (hasta fines del siglo XIX), que hemos llamado *Fundamentos*, en atención a que en ésta, las principales cuestiones de fundamentación, recibirán tratamiento y solución.

D'Alembert (en 1766) encontró que la solución general de una ecuación lineal no homogénea, es igual a la suma de una cierta solución particular y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.

Muchos matemáticos (en particular Clairaut y Euler) siguieron elaborando el método de factor integrante. Así, en los años 1768-1769, Euler investigó las clases de ecuaciones diferenciales que tienen factor integrante de un tipo dado e intentó extender estas investigaciones a ecuaciones de orden superior. Finalmente, cerraremos esta etapa, mencionando las contribuciones de Lagrange (1736-1813), las cuales, al igual que Euler, fueron hacia el último cuarto del siglo XVIII. Lagrange demostró que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes, es de la forma $y = c_1y_1 + c_2y_2 +...+ c_ny_n$, donde $y_1, y_2, ..., y_n$ son un conjunto de soluciones linealmente independientes y $c_1, c_2, ..., c_n$ son constantes arbitrarias ("Principio de Superposición"); asimismo, también descubrió en su forma general el "método de variación de parámetros (o constantes)", hacia 1774.

La citada Ecuación de Riccati, "rompe" con la tradición algebraica: una ecuación relativamente sencilla que en la mayoría de los casos no puede integrarse en cuadraturas. En segundo lugar, este rompimiento es más fuerte si puntualizamos que una de las razones por las cuales es más fácil resolver una ecuación diferencial lineal que una no lineal (aparte de la propia naturaleza de esta última que puede impedir tal propósito) es la existencia del Principio de Superposición ya mencionado. Este principio, es la forma usual de expresar la solución general como una función de un número finito de soluciones particulares. La Ecuación de Riccati es una ecuación no lineal que posee una solución general que satisface la fórmula:

$$\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_4)}$$

para cuatro valores diferentes de α, y cualesquiera tres soluciones particulares $y_1, y_2, ..., y_3$, o sea, una solución general de una ecuación no lineal que se expresa en términos de otras particulares.

De esta manera, en el siglo XVIII, el trabajo consistía en la solución de ecuaciones particulares específicas. Asimismo, fueron elaboradas las premisas para la creación de las bases para la teoría general, con una serie de conceptos fundamentales.

En el año 1743, surgieron los conceptos de integral particular y general, encontradas por Euler ya en 1739. Ellos fueron publicados en la memoria donde se trata de un único algoritmo de resolución de ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes.

La teoría general de la que tanto se había hablado, aparece expuesta por vez primera, como ya dijimos, en el famoso "Institutiones..." de Euler [23], obra que consta de tres tomos que vieron la luz sucesivamente en los años 1768, 1769 y 1770 y con un suplemento en 1794, culminando la serie de libros de Euler dedicados a la exposición sistemática del análisis contemporáneo.

En este contexto, veamos el protocolo de rigor que imperaba a finales del siglo XVIII:

- Cada concepto matemático debía ser explícitamente definido en términos de otros conceptos cuya naturaleza era suficientemente conocida.[8]
- Las pruebas de los teoremas debían ser completamente justificadas en cada una de sus etapas, o bien por un teorema anteriormente probado, por una definición, o por un axioma explícitamente establecido.

[8] La argumentación reposa en un punto de partida conformado por razones consensuales para un grupo de "entendidos".

- Las definiciones y axiomas escogidos debían ser lo suficientemente amplios para que pudiesen cubrir los resultados ya existentes.
- La intuición (geométrica o física) no era un criterio válido para desarrollar una prueba matemática.

Las dos primeras caracterizaciones han permanecido más o menos estables desde la época de Euclides. Los dos últimos, son un pronunciamiento en contra de concepciones matemáticas muy comunes hasta el siglo XVIII. En esta época, casi todos los problemas del cálculo, surgían de la necesidad de matematizar algún fenómeno de índole físico. Por este hecho, los resultados matemáticos cobraban importancia en la medida en que reflejaran una realidad tangible. La relación entre matemáticas y naturaleza era muy cercana. Lo que hacía el cálculo era traducir al lenguaje de las funciones la explicación o las relaciones causales de los fenómenos naturales. Afortunadamente, estas funciones (de carácter *regular* en el sentido euleriano) tenían comportamiento adecuado al nivel del saber matemático entonces dominante, es decir, no problematizaban ni hacían entrar en crisis sus resultados.

La contradicción entre los algoritmos del cálculo diferencial y su correspondencia con las representaciones existentes entonces con el rigor matemático heredado de los griegos, fue evidente para la mayoría de los matemáticos del siglo XVIII. Por otra parte, este cálculo encontraba cada día nuevas aplicaciones en la mecánica y la astronomía, convirtiéndose, poco a poco, en la parte central y más productiva del conocimiento matemático. El problema de la fundamentación del cálculo diferencial se hizo cada vez más actual, convirtiéndose en uno de los problemas del siglo. Está claro que una teoría puede ser lógicamente fundamentada sólo cuando llega a determinado nivel de madurez. Una teoría que todavía se encuentra en el estadio de búsqueda de leyes fundamentales de desarrollo y de definición precisa de sus conceptos principales no puede ser fundamentada lógicamente. Además, para poder hablar de una fundamentación filosófica los conceptos fundamentales deben ser suficientemente generales y a la vez bien determinados. La fundamentación lógica y filosófica del cálculo diferencial e integral era objetivamente imposible sobre la base de los conceptos sobre los cuales aparecieron y por eso los esfuerzos de Newton, Leibniz, Lagrange y otros, hasta los mismos comienzos del siglo XIX, terminaron en el fracaso. Señalemos las principales insuficiencias:[9]

<u>Incorrecta comprensión del concepto de diferencial</u>: En Leibniz, L'Hospital, Euler y otros matemáticos del siglo XVIII el concepto de diferencial se confundía en el incremento. Una aproximación suficientemente correcta del concepto de diferencial fue dada sólo por Lagrange (1765).

<u>Insuficiente comprensión del concepto de función</u>: De hecho hasta fines del siglo XIX los matemáticos partiendo de la intuición mecánica y geométrica, entendieron por fundamentación sólo las funciones analíticas representadas por una determinada fórmula (en algunos casos infinita como es el caso de las consideraciones de Fourier ligadas con su teoría del calor). Sólo con la aparición de las funciones discontinuas en problemas prácticos, los matemáticos prestaron atención a la formación lógica del concepto de función.

<u>Ausencia de un concepto claro de límite</u>: Los seguidores de Newton: Maclaurin, Taylor, Wallis y otros, mantuvieron una larga discusión sobre el hecho de que si la variable alcanza o no el límite. Este problema no era fácil, precisamente, porque no había una

[9] Completamos a [70].

definición precisa de límite y sólo se determinaba por razonamientos mecánicos y geométricos. Esta insuficiencia permaneció hasta Cauchy (1823).

El concepto de continuidad funcional era intuitivo: Esto se explica porque los matemáticos del siglo XVIII consideraban todas las funciones continuas y por eso no tenían la nacesidad de precisar este concepto. Sólo a principios del siglo XIX se comenzó a pensar en este problema (otros detalles los puede encontrar en la última sección de esta conferencia).

Concepto difuso de integral definida: Relacionado ante todo con la ausencia de un teorema de existencia. Se consideraba por ejemplo, que la fórmula de Newton-Leibniz tenía un significado universal, es decir, que era válida para todas las funciones y en todas las condiciones. Los esfuerzos en la precisión del concepto hechas por Lacroix, Poisson y Cauchy pusieron en primer plano el concepto de límite y de continuidad. Pero el problema de la integral definida sólo halló una respuesta completa hasta fines del siglo XIX en los trabajos de Lebesgue.

Se necesitaba tener una clara comprensión de lo que era un sistema numérico: En particular, la estructura del sistema de los números reales, lo que no sucederá sino con las investigaciones de Dedekind y Cantor, entre otros; otra de las concepciones básicas relacionadas con este tópico, era el concepto mismo de número (aquí, nuevamente debemos mencionar a los matemáticos del siglo XIX y a Frege en especial, para seguir con Russel, etc.).

Así, el movimiento del análisis matemático en el siglo XVIII hacia su fundamentación, puede describirse completamente en el sistema ***"teoría-práctica"***, esto es, como interrelación dialéctica entre estos momentos. La necesidad del cálculo de áreas y volúmenes y del hallazgo de máximos y mínimos entre otros problemas concretos, conllevó a la creación del algoritmo del cálculo diferencial e integral. La aplicación de estos algoritmos a nuevos problemas inevitablemente conllevó a la generalización y precisión de los algoritmos. En última instancia, el análisis se formalizó como lógicamente no-contradictorio, como un sistema relativamente cerrado y completo.

Existe una etapa intermedia entre esta época y los trabajos de Poincaré y Liapunov, caracterizada fundamentalmente, por un lado, por los métodos en series para la búsqueda de soluciones, los cuales produjeron las llamadas funciones especiales y por otro, por la investigación sobre los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial, los cuales sirvieron, como afirma Ince "*para determinar en forma rigurosa, la pregunta de la existencia de soluciones de aquellas ecuaciones que no fueron integrables por métodos elementales*".[10]

Ilustremos el desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, tomando como base, el péndulo matemático libre. El estudio de tal péndulo constituye, hace un buen número de años, un capítulo clásico de todo libro de texto de mecánica analítica. Mgr. Lemaitre, lo "adelantó" en sus conferencias en la Universidad de Louvain (Bélgica). Sus notas de conferencia son tituladas: "Lecciones de Mecánica. El Péndulo", y podemos leer en su introducción: *"Una actitud intermedia que nosotros seguiremos, consiste en retener de la historia de la ciencia, la preeminencia dada a un problema particular, el movimiento del péndulo, y por tanto presentar los conceptos fundamentales en el marco de este problema particular... Este problema del péndulo es uno de aquellos donde la ciencia de la mecánica fue surtida de una de sus mayores contribuciones a la edificación de las matemáticas modernas, porque él puede ser ampliamente identificado, con el estudio de*

[10] [39, pág. 93].

las funciones elípticas alrededor de las cuales, fue construida la teoría de funciones de una variable compleja...".

Mucho más reciente, en la "Encyclopediae Universalis" francesa, en un artículo titulado "Systemes dynamiques differentiables", A. Chenchiner usa de nuevo el péndulo como un tema central, para iniciar al lector a la teoría moderna de sistemas dinámicos: el primer capítulo describe en detalle ejemplos conectados al péndulo e introduce más y más comportamientos asintóticos complejos cuyos análisis van a requerir los conceptos más abstractos de la última parte, en el capítulo nueve de este artículo, encontramos: *el péndulo sin fricción; un sistema Hamiltoniano, el péndulo con fricción lineal: un sistema estructuralmente estable, perturbaciones periódicas de un péndulo friccionado y difeomorfismo que preservan el área en el plano*.

A pesar de sus precursores, Galileo es el primer científico asociado al estudio experimental y teórico del péndulo. Es conocida la historia -verdadera o falsa- de su descubrimiento en 1583 o 1584, del isocronismo de las oscilaciones del péndulo, observando una lámpara suspendida en la Catedral de Pisa.

El primer documento escrito de Galileo sobre el isocronismo del péndulo es una carta de 1602 a Guidobaldo del Monte: "Ud debe perdonar mi insistencia en mi deseo de convencerlo de la verdad de la proposición que los movimientos en el mismo cuadrante de un círculo son hechos a igual tiempo". En su famoso "Diálogo", él escribió: "El mismo péndulo hace sus oscilaciones con la misma frecuencia, o con poca diferencia, casi imperceptible, cuando estas son hechas por una circunferencia mayor o sobre una muy pequeña". Esto es, por supuesto, un planteamiento erróneo o, en un camino positivo, podemos considerar que es una manifestación muy primitiva de lo que es, posiblemente, la primera herramienta básica en la ciencia no-lineal: la linealización. Conocemos que el isocronismo no es una propiedad de las soluciones de la ecuación diferencial del péndulo con longitud l:

$$u''+(g/l)\operatorname{sen}u=0, \qquad (1)$$

pero de su forma linealizada si

$$u''+(g/l)u=0. \qquad (2)$$

La expresión precisa $T=2(g/l)^{1/2}$ para el período de las soluciones de (2), será lo primero dado por Newton en su "Principia", en 1687.

Note que algunas aplicaciones del péndulo fueron ya presentidas por Galileo, en particular a la medición de un "Pulsilogium" para chequear el pulso de un paciente, a la navegación en la determinación de la longitud y a la horología con la regulación de los relojes mecánicos.

Si Guidobaldo del Monte expresó en 1602 un buen grado de escepticismo al llamado Isocronismo de Galileo, fue un astrónomo belga, Wendelin, quien primero mostró experimentalmente que el período de las oscilaciones crece con las amplitudes de las oscilaciones y dio tablas justas en su "Luminacarni Eclipses Lunares" de 1644. Este hecho fue entonces deducido matemáticamente por Huggens en su famoso "Horologium" de 1673, y el mismo Huyggens también observó los fenómenos no-lineales de "Sincronización" en dos péndulos fijados sobre una misma cuerda delgada. Doscientos quince años después, Van der Pool y Appleton descubrieron un fenómeno análogo en circuitos eléctricos y la teoría iniciada por Galileo.

La relación matemática entre el período T y la amplitud A es expresada por Euler en 1736 en su "Mechanica" por la serie:

$$T = 2\pi\,(l/g)^{1/2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1.3...(2k-1)}{2.4....(2k)}\right)^{2}\mathrm{sen}(A/2)\right],$$

y Poisson en su "Traite de Mecanique" de 1811, analizó la ecuación del período, usando un método de desarrollo en "series de potencia de un parámetro pequeño". La relación anterior fue formulada por Legendre en 1825 ("Traite des fonctions elliptiques") y por Jacobí en 1829 ("Fundamenta nova theoriae functionem ellipticarum") para integrales y funciones elípticas.

La teoría cuantitativa del péndulo libre fue completada por la expresión de las soluciones de la ecuación (1) en términos de funciones elípticas. Debemos a Poincaré en 1881 el estudio cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales nolineales, particularmente, en el caso de la ecuación (1), la descripción topológica de las órbitas $(u(t),u'(t))$ de las soluciones de (1), en el plano de fases (u,u'). El retrato correspondiente, con el equilibrio estable $(2k\pi,0)$, centros, el equilibrio inestable $((2k+1)\pi,0)$, puntos de sillas, las soluciones periódicas no constantes (órbitas cerradas) sobre las que Poincaré apuntó: *"Lo que hace que estas soluciones periódicas sean tan apreciadas es que son, por así decirlo, la única brecha por donde podemos intentar penetrar en un lugar considerado hasta aquí inabordable"*, las soluciones rotatorias y las separatrices conectadas con el equilibrio inestable[11] (órbitas heteroclínicas u órbitas homoclínicas, si identificamos, módulo 2π, el equilibrio inestable, i.e., si trabajamos sobre la variedad natural cilíndrica de fases). Como tantas veces, la historia tomó el camino opuesto con respecto a la metodología de Poincaré en el "ataque" de las ecuaciones diferenciales no-lineales: el estudio cuantitativo del péndulo libre había precedido al cualitativo.

Por otra parte, en el estudio de ciertos sistemas físicos, resulta interesante, y casi siempre necesario, conocer propiedades (de las soluciones de la ecuación o sistema que modela tal sistema) tales como acotamiento, estabilidad, periodicidad, etc., sin tener que recurrir a la ardua y laboriosa tarea, que en muchos casos es impracticable, de encontrar expresiones analíticas para las soluciones. De este modo, surgió el problema de investigar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial a partir de "su propia expresión", dando lugar a la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, teoría que surge en la segunda mitad del siglo XIX y que fue abordada inicialmente por Jules Henri Poincaré (1854-1912) y Alexander Mijailovich Liapunov (1857-1918) aunque por motivos diferentes[12] y que marca el inicio de la 3era etapa en el desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la etapa *Cualitativa*, que transcurre hasta nuestros días, aunque en los últimos años, se han ido modificando estos estudios.

Así, 1892 es un *annus mirabalis* en la formalización de métodos generales para la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales y la mecánica no lineal. Liapunov y

[11] Ver [30] y [34].

[12] El primero, debido al estudio de figuras de equilibrio y de la estabilidad del movimiento "Probléme géneral de la stabilité du mouvement", traducción francesa (1907) del original en ruso (1892) y "Sur les figures d'equilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne dovée d' un mouvement de rotation" (1906) y el otro, debido a sus investigaciones en Mecánica Celeste, "Sur les courbes définie par une équations differentielle" (1880), "Memoire sur les courbes définie par une équation differentielle" (1881-1886) y "Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste" (1892-1899).

Poincaré,[13] convirtieron la nolinealidad en su objeto de estudio y aportaron métodos y conceptos fundamentales en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Más aún, cuando sus resultados son combinados con las nuevas técnicas matemáticas desarrolladas durante esta centuria.[14] Más estricto, algunos aspectos de estos trabajos han mostrado su conexión con la Teoría del Caos, el nuevo paradigma de las Matemáticas y la Física, por ejemplo, los resultados de Poincaré sobre movimientos cercanos a órbitas homoclínicas y heteroclínicas y el concepto de Liapunov de números característicos, hoy llamados exponentes de Liapunov. Después de una centuria de *totalitarismo*, se ha descubierto que las Matemáticas pueden ser en ocasiones el estudio de estructuras y que la Física puede ser la Física Cuántica. Y el común denominador de esta liberalización es la nolinealidad.

En los últimos 15 ó 20 años, se modificó fuertemente el aspecto de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Uno de los progresos más importantes, consistió en el descubrimiento de regiones límites de nuevo tipo, que recibieron el nombre de *atractores*.

Resultó que, paralelamente a los regímenes límites estacionarios y periódicos, son también posibles regímenes límites de una naturaleza completamente distinta, en las cuales cada trayectoria por separada es inestable, mientras que el mismo fenómeno de la salida al régimen límite en cuestión es estructuralmente estable. El descubrimiento y el estudio detallado de tales regímenes (atractores) para los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, requirió de la participación de los recursos de la geometría diferencial y la topología, del análisis funcional y la teoría de las probabilidades. En la actualidad tiene lugar una penetración intensiva de estos conceptos matemáticos en las aplicaciones. Así, por ejemplo, los fenómenos que tienen lugar durante el paso de una corriente laminar a una turbulenta, con el aumento de los números de Reynolds, se describen mediante un atractor.

Durante la utilización de cualquier modelo matemático surge el problema de la validez de la aplicación de los resultados matemáticos a la realidad objetiva. Si el resultado es fuertemente sensible a una pequeña modificación del modelo, entonces, variaciones tan pequeñas como se quiera del mismo, conducirán a un modelo con propiedades distintas. No se pueden extender tales resultados al proceso real investigado, debido a que en la construcción del modelo se realiza siempre una cierta idealización y los parámetros se determinan solamente de manera aproximada.

Esto llevó a Andronov y Pontriaguin (en 1937) al concepto de sistemas *gruesos* o *de estabilidad estructural*. Este concepto resultó muy fructífero, en el caso de los espacios de fases de dimensiones pequeñas (1 ó 2) y en este caso, los problemas de la estabilidad estructural, fueron detalladamente estudiados. De esta manera, la teoría de las ecuaciones diferenciales en el presente, constituye una rama de la matemática, excepcionalmente rica por su contenido, que se desarrolla rápidamente, en estrecha relación con otros dominios de la matemática y sus aplicaciones.

Sin embargo, en el desarrollo de la Matemática figuran varios desengaños sucesivos, cuyo desenlace puede citarse en la *pérdida de la certidumbre* -como reza el título del libro

[13] Para mayores detalles biográficos de Poincaré y Liapunov puede consultar, por ejemplo, [15], [29] y [74].
[14] Para una mayor información técnica, consulte por ejemplo [55] y [64]; un resumen de este último trabajo fue publicado en el Bol. Soc. Cub. Mat. Comp., 15(1993), 1-9.

de Kline [47]. Parafraseándolo, las Matemáticas han pasado desde mediados del siglo XIX por estos trances (entre otros):[15]

1º. La pérdida de arraigadas evidencias y certezas físico-matemáticas, sobre todo a partir del desarrollo de las geometrías no-euclidianas. Con ello se fue diluyendo la fe del pensamiento moderno de los siglos XVII-XVIII en una suerte de armonía preestablecida entre la geometría euclidiana y bien la configuración real del espacio físico, o bien la confirmación mental de nuestra percepción del espacio, tan es así, que la asimilación de los conjuntos fractales aún hoy en día, no es ni siquiera satisfactoria.

2º. La quiebra de las aspiraciones a cimentar la solidez lógico y/o teórico del edificio deductivo de la matemática clásica. Se pensó, por ejemplo, que las investigaciones en el campo de la existencia y la unicidad de las soluciones, para ecuaciones diferenciales definidas sobre espacios infinito-dimensionales, podían seguir el mismo esquema que en el caso de espacios de dimensión finita. Uno de los primeros resultados en tal sentido es debido a F. E. Browder (en 1964) y W. J. Knight demostró que estaba incorrecto [48, 49]. Quizás en este orden de cosas, el ejemplo típico es el debido a Dieudonné [19, 20].

Sea $\mathrm{N}=\{1,2,3,...\}$ y tomemos:

$$l_\infty := l_\infty(\mathrm{N}) = \{x/x=(x_n)_{n\in \mathrm{N}} \text{ sucesión acotada}\},$$

introduzcamos el subespacio acotado de l_∞:

$$c_0 = \{x/x\in l_\infty,\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

La función ($\varepsilon\in \mathrm{R}$):

$$\varphi(\varepsilon) = \begin{cases} 2, \text{ si } \varepsilon \geq 4 \\ \sqrt{\varepsilon}, \text{ si } 0 \leq \varepsilon \leq 4, \\ 0, \text{ si } \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

es acotada, creciente y uniformemente continua. Las fórmulas:

$$f_n(x) = 1/n + \varphi(x_n),\ n \in \mathrm{N},\ x \in l_\infty,$$
$$f(x) = (f_n(x))_{n\in \mathrm{N}},\ x \in l_\infty,$$

definen una función $f: l_\infty \to l_\infty$ acotada, creciente y uniformemente continua. Vemos fácilmente que $f(c_0)\subseteq c_0$, pudiéramos suponer que el Problema de Cauchy:

$$u(0)=0,\ u'=f(u),$$

posee una solución única $u:[0,T] \to l_\infty$, sin embargo Dieudonné mostró que $u(t)\notin c_0$ ($0<t\leq T$). Esto muestra a las claras, que requerimientos de otro tipo eran necesarios al abordar el estudio de la Existencia y la Unicidad en espacios de infinitas dimensiones.

Un señalamiento similar puede hacerse a las primeras extensiones a B-espacios de la Teoría de la Estabilidad.

Después de estos y otros descalabros, es claro que la integración de teorías, a veces disímiles, permitirían obtener las nociones, los resultados y los métodos matemáticos por

[15] Cf. también [81].

diferentes vías prácticas e intuitivas, antes de saltar al plano de la abstracción teórica y de la demostración sistemática en que se mueven los matemáticos *puros*.

Como se destacara en [1], la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias *"permite estudiar los más diversos procesos de evolución que pueden determinarse, tener dimensión finita y ser diferenciables"*. Estas tres propiedades forman la base de la mecánica de los sistemas discretos. Un proceso se llama determinado, si su estado pasado y futuro puede obtenerse a partir de su estado presente. El conjunto de todos los estados del proceso, se llama Espacio de Fases. El proceso se denomina de dimensión finita si su espacio de fases lo es, i.e., si el número de parámetros necesarios para describir completamente su estado, es finito. El proceso se llama diferenciable, si su estado de fases tiene estructura de variedad diferencial.

A propósito de lo anterior, la expresión exacta de la idea de la determinación, son los teoremas de existencia y unicidad. Para una ecuación escalar de primer orden $y'=f(x,y)$, esta preocupación comienza con Euler -en su "Institutiones..."- con su método de las quebradas, el cual se usa en la actualidad como un método numérico, lo continúa Cauchy (1789-1857), demostrando semejante teorema por primera vez en sus conferencias dictadas en 1820-1830 bajo el título "Exposition d'une Méthode à l'aide de laquelle on peut intégrer par approximation un grand nombre d'Equations différentielles au premier ordre" y lo presentamos a continuación, por su indudable valor histórico y metodológico.

Teorema de Cauchy. Si el segundo miembro de la ecuación diferencial

$$y'=f(x,y), \tag{3}$$

es analítica en ambas variables, x e y, en una vecindad del punto (x_0,y_0), entonces la ecuación (3) posee una única solución $y(x)$ que satisface la condición inicial

$$y(x_0)=y_0, \tag{4}$$

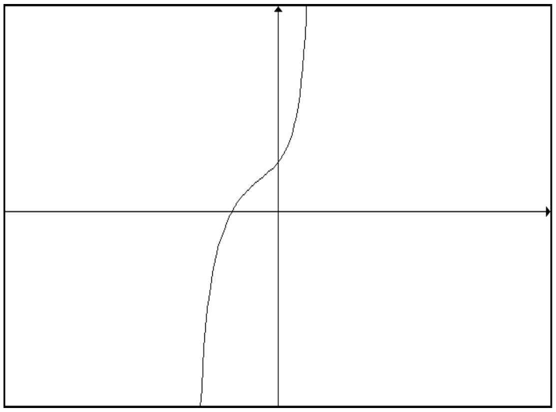
y esta solución es analítica en una vecindad de x_0.

Es fácil entender que el requerimiento de que f sea analítica es artificial, por otra parte, esta restricción falla en muchos problemas de aplicaciones, así, como teoría general, es muy exigente.

El problema del rigor en el Calculus, se pudo establecer en el siglo XIX, básicamente por las tres circunstancias siguientes:

I. existía un álgebra de desigualdades bien desarrollada,
II. el rigor se empezaba a considerar importante, y
III. los conceptos relacionados con la convergencia (límites, series, derivadas, integrales definidas, etc.) eran describibles en el lenguaje de las desigualdades.

Si tomamos en cuenta la demostración del Teorema de Cauchy (construcción de las Quebradas de Euler y demostración de su convergencia usando una serie numérica mayorante) veremos que necesitaba de los requerimientos antes señalados. Este método de Cauchy-Lipschitz tiene sobre el de Picard-Lindeloff (aproximaciones sucesivas), la ventaja que permite construir la solución en todo intervalo finito donde ésta es continua. En general, los teoremas que son utilizados en los cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no son constructivos, es decir, no brindan fórmulas o algoritmos para



determinar las soluciones. Pese a ello, su tratamiento se ha mantenido pues permite una formulación matemática razonable, aún en el ambiente algebraico en que está inmerso. Así, la ecuación $y'=y^2+t^2$, $y(0)=1$, no se puede resolver en cuadraturas sin embargo, admite una única solución y las quebradas convergen uniformemente hacia dicha solución.

Por otra parte, la necesidad de escribir libros de textos para las nuevas instituciones surgidas de la Revolución Francesa y el Imperio Napoleónico (Cauchy en París, Weierstrass en Berlín) obligó a repensar y estructurar el Cálculo. El establecimiento de la Ecole Polytechnique en 1795, creó una forma de explicar la Matemática, que se convertiría en el modelo de la educación universitaria. Aparte de la obra de Lacroix ya citada, no existen textos de referencia, por lo que Cauchy comenzaría la escritura sistemática de sus notas de clase. Sin embargo, el objetivo último no sería el entrenamiento de sus principiantes sino la *investigación* científica, de ahí que su obra escrita resalte el pensamiento conceptual y la eliminación del pensamiento algorítmico presente hasta el momento.

Sin embargo, hay un detalle sobre el que queremos volver y es el del “famoso” teorema de existencia de Peano.

A fines del siglo pasado, G. Peano (1858-1932) publica dos artículos, en los cuales formula dos teoremas de existencia diferentes, considerando que x y f pertenecen al d-espacio euclidiano $R^{\mathbf{d}}$ y t es real. Sea K un número positivo, $J=[0,1]$, f continua en Jx $R^{\mathbf{d}}$ y $|f(t,x)|\leq K$ para $(t,x)\in J$x $R^{\mathbf{d}}$.

Teorema 1(1886). Sea $d=1$. El problema inicial

$x'(t)f(t,x(t))$ para $t\in J, x(0)=0$, (6)

posee soluciones x_{min} , x_{max} tal que para toda solución $x_{min}(t) \leq x(t) \leq x_{max}(t)$ para $t\in J$.

Teorema 2(1890). Sea $d\geq 1$. El problema inicial (6) posee al menos una solución.

Observemos que en el caso $d=1$, el Teorema 2 es una consecuencia trivial del Teorema 1. Esto significa que toda prueba del Teorema 1 es también una prueba del Teorema 2, por otra parte, las demostraciones del Teorema 2 son más simples que las del Teorema 1.

Todos los autores que mencionan el nombre de Peano, llaman en todo momento al Teorema 2 el Teorema de Peano, cuando hemos visto que en realidad, no es un único teorema.

Una prueba elemental del Teorema de Peano es aquella en la cual se evita la equicontinuidad y en lugar del Lema de Arzelá-Ascoli se utilizan propiedades especiales de R (ó $R^{\mathbf{d}}$), sin entrar a valorar la noción de constructividad enfatizada por numerosos autores. Muchas pruebas elementales del Teorema 1 existen, sin embargo las del

Teorema 2 son escasas, una demostración de este tipo es de interés didáctico al menos, puesto que el caso $d=1$ del Teorema 2, es tratado separadamente en muchos textos, por otra parte la existencia de x_{min}, x_{max} puede justificarse como el ínfimo, supremo del conjunto de todas las soluciones de (6) probando que éste es no vacío (exactamente el planteamiento del Teorema 2).

Este bosquejo histórico nos permite hacer las siguientes observaciones respecto al programa actual:

1. El concepto de Ecuación Diferencial nace (a fines del siglo XVII) como una ecuación que relaciona diferenciales, este concepto se mantiene estable hasta que Cauchy (hacia 1821) agrega la derivada. Como veremos en el análisis de los libros de texto, esta última definición es la que se conserva en la actualidad “desapareciendo” las diferenciales, aunque cuando se exponen los métodos de resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden se usa la primera concepción sin explicitarla (es decir, la derivada ya no es la derivada, sino un cociente entre diferenciales), renaciendo el manejo algebraico del que tanto hemos hablado, pues hace de este método de solución, una herramienta "apetecible" desde el punto de vista didáctico, sin olvidar el Principio de Superposición ya mencionado.
2. La forma de introducir las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden en la obra de Euler y Cauchy, es tomando la expresión diferencial $pdx + qdy$, como la diferencial de una cierta función $u=u(x,y)$, y de aquí a $du=0$ y finalmente a la solución general $u(x,y)=c$. En el caso en que no se pueda encontrar la función $u(x,y)$, construyen un factor de integración que convierte en exacta la ecuación diferencial. Después pasan a estudiar los otros tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden (v.g., las lineales, de Bernoulli, las homogéneas, etc.), teniendo siempre en mente que necesitan construir un factor de integración. Esta situación, en general, no se conserva en el curriculum actual. Los principales hechos que propiciaron esto son la aparición y demostración del Teorema Fundamental del Algebra (la primera demostración cierta, la ofreció Gauss a los 22 años en su tesis doctoral) que, en su formulación actual, afirma que todo polinomio de grado n en C, tiene exactamente n ceros complejos (iguales o distintos) por lo que C es un dominio numérico que proporciona solución a cualquier ecuación algebraica, y el desarrollo de la Teoría de Funciones de Variable Compleja, que permitieron presentar una teoría de "solubilidad" completa para las ecuaciones lineales de orden n, brindando de esta forma, una formidable herramienta docente para modelar múltiples fenómenos prácticos.
3. Los acercamientos que existen para la búsqueda de las soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, se han dado fundamentalmente en tres escenarios: *el algebraico, el numérico, el geométrico*, cada uno con procedimientos distintos y representaciones diferentes para la solución, a saber: una fórmula o una serie infinita, un conjunto (obtenidos por un proceso iterativo) y una familia de curvas. De estos tres, el algebraico siempre se ha trasladado a los libros de texto, mientras que el numérico es más escaso y aparece comúnmente en textos de Análisis Numéricos, en el caso del geométrico, a pesar de contar con más de 100 años de antigüedad, está prácticamente confinado al tratamiento de las isoclinas y el campo de pendientes, sin embargo la solución de sistemas lineales con coeficientes constantes en el plano, es decir, sistemas del tipo $x'=ax+by$, $y'=cx+dy$ $(ad\neq bc)$, en el cual el tratamiento de sus raíces características es puramente algebraico, se olvida que en esa naturaleza algebraica está toda la información necesaria para determinar la configuración

geométrica de los puntos de reposo, pues existe solo un número limitado de casos posibles.

4. Una cuestión crucial de la concepción actual del curso de ecuaciones diferenciales es su carácter algorítmico-algebraico, la cual está determinada, por la relación tan cercana que existe entre el desarrollo del álgebra (como búsqueda de las raíces de un polinomio en términos de radicales) y de las ecuaciones diferenciales lineales (en cuanto a su integración por cuadraturas). Incluso, aún en la concepción "moderna" de operadores lineales, esta herencia está presente.

5. Respecto del programa de estudio actual, existe una clara permanencia del escenario algebraico sobre los otros dos escenarios, el cual se debe, además de la contundencia de la componente histórica y a lo señalado antes, a otros factores, de los cuales señalaremos los siguientes:

   a) Los procedimientos algorítmico-algebraicos son más sencillos de desarrollar en los estudiantes como los demuestran los estudios de Artigue [3] entre otros. Muy vinculado con las tendencias cognitivas y conductistas de la Educación Matemática que, poco a poco, y en mayor medida gracias al rechazo de las "Matemáticas Modernas", ha ido desapareciendo y dando lugar al "Problem Solving", con una concepción didáctica y epistémica, totalmente diferente.

   b) Instrumentar los escenarios geométrico y numérico en el aula, requiere necesariamente de la microcomputadora, ya que de otra forma es difícil visualizar, v.g., los campos de pendientes y las curvas isoclinas, por un lado, y las soluciones aproximadas por el otro.

   c) Con la incorporación de la trasformada de Laplace, hacia la segunda mitad de éste siglo, los procedimientos algebraicos vuelven a cobrar un nuevo impulso en la enseñanza. Este recibió soporte adicional con la nueva ola de las Matemáticas Modernas, mencionadas arriba, y su "*¡Abajo Euclides!*".

3. La presentación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en los libros de texto.

En esta sección (de la misma forma que en la anterior), no se pretende hacer una historia de los libros de texto sobre las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias,[16] sino a partir del programa de estudio, hacer un análisis global de cómo han evolucionado estos, en cuanto a la estructuración de sus contenidos, sus métodos y en general, ver como se han incorporado los distintos escenarios de solución, con el fin de tener un punto de comparación y sacar conclusiones hacia ese mismo curriculum. Desde el punto de vista de la Transposición Didáctica, ésta parte juega un papel esencial, ya que permite “ver” el proceso de reestructuración del *saber matemático* que hacen los autores de libros de texto, con la finalidad de hacer llegar este nuevo saber a los estudiantes y profesores.

Nosotros tomaremos una muestra de los libros de texto, por un lado los que se mencionan en los planes de estudio y los que han incidido en la enseñanza de los cursos tradicionales de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En este sentido aclaremos que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias han aparecido desde Euler, como parte de libros de texto para el Cálculo y luego como textos independientes, donde solo se trata lo

[16] Autores como Gert Shubring [72], proponen una metodología para analizar los libros de texto histórico (a propósito de la obra de Lacroix en la primera mitad del siglo XIX); en nuestro caso no seguiremos una metodología de este estilo ya que rebasaría los fines de nuestro trabajo.

referido a esa materia y además, como libros de texto de matemática para ciencias e ingeniería.

Desde luego, que en un período que abarca más de dos siglos, existen diferencias entre esos textos. Como ya hemos mencionado en el análisis histórico ellos se inician con Euler [23], donde se concebían las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como ecuaciones que involucran diferenciales y se hace una clasificación que ha perdurado hasta nuestra época. Este discurso es sostenido hasta el “Cours Inédit” de Cauchy [13], donde se agrega a la concepción Euleriana de ecuación diferencial la derivada. Estas ideas aparecen luego en el trabajo [51] de Lacroix hacia 1837. En este texto, como dice Shubring, él intentó no solamente ensamblar los resultados originales de varios investigadores dispersos en las academias europeas, sino también darles una estructura y ponerlos en forma elemental, es decir, analizar los elementos del cálculo mirados como un cuerpo conceptual (en el sentido de Vergnaud, [82]), y presentar el cálculo como una sucesión ordenada y bien definida que comienza desde estos elementos básicos.

Desde nuestro punto de vista, Lacroix es el primer maestro en efectuar Transposición Didáctica en el sentido de reestructurar el conocimiento matemático guiado por objetivos educativos. Una buena parte de este saber re-estructurado es el que se enseñó hasta mediados de este siglo y se enseña actualmente en un curso elemental de la Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, a saber: las técnicas algebraicas para resolver tipos de ecuaciones diferenciales. Así por ejemplo, en el texto de Ince [39], el autor afirma: “*una de las primeras cosas que el principiante debe aprender es la identificación del tipo al que pertenece una Ecuación Diferencial dada”****;*** por ello los ejemplos, en lugar de repartirlos en los finales del capítulo, van reunidos al final de la obra. Esta concepción está presente en la mayoría de los autores de libros de texto. Los acercamientos numéricos y geométricos para encontrar la solución de una ecuación diferencial no solamente no aparecen, sino que ni siquiera se mencionan a lo largo de toda la obra. Por otro lado, para estudiar cuestiones teóricas de los teoremas de existencia y unicidad de soluciones, el autor nos remite a textos más especializados. Así, pudiéramos preguntarnos si el alejamiento entre la verdadera historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias y la que presentan los libros de texto es casual. Por supuesto que no, es fácil darnos cuenta que en un primer momento, la atención se dirigió a la resolución de dichas ecuaciones y no a la obtención de métodos generales o de propiedades generales de las soluciones. Si a esto unimos diversos obstáculos epistemológicos, presentes en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias (y de la Matemática) –que podemos resumir en las que presentamos más abajo–, nos daremos perfecta cuenta de la distancia *real* que existe entre una y otra historia:

- El concepto de función aún debía esperar a los trabajos de Borel, Lebesgue y Bourbaki, a mediados de siglo, para lograr su cabal comprensión.
- El tratamiento del infinito actual en los procesos de convergencia y aproximación era incorrecto y estaba insuficientemente fundamentado.
- La noción de distancia solo vino a tener "personalidad" matemática, después de los trabajos de Frechét en 1906.
- La Topología no se había consolidado aún como una disciplina matemática "independiente".
- Los trabajos cualitativos de Poincaré y Liapunov en una primera etapa (hasta los años 20 del siglo XX), no recibieron suficiente atención por parte de la comunidad matemática.

- La utilización de los métodos numéricos era teórica sobretodo, su implementación debería aguardar muchos años todavía.

Las ideas geométricas de Poincaré que se gestan entre 1881 y 1886, así como los métodos numéricos (los cuales cobran importancia con el algorítmo de Runge-Kutta hacia principios de este siglo) se comienzan a incorporar a los libros de texto después de la segunda mitad de este siglo, básicamente en los libros de texto de matemática para ingenieros. Asimismo, los métodos operacionales que se originan con Heaviside a fines del siglo pasado, los encontramos en muchos de los textos escritos en este siglo (en la forma del "operador D"), como una técnica para resolver ecuaciones diferenciales lineales; en algunos de los libros escritos después de 1940, esta técnica es sustituida por la técnica de la "Transformada de Laplace".

Aunque si bien la característica predominante en los libros de texto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias desde Euler, pasando por Cauchy, hasta su aparición en este siglo, bien como textos "solos", bien como partes de libros de textos para Cálculo, bien como parte de textos "de matemáticas para ciencias e ingeniería", ha sido el predominio del escenario algebraico (con sus tres variantes), existen algunas características de las cuales destacaremos las siguientes:

1. En la forma de abordar el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden se sigue básicamente el acercamiento de Euler y Cauchy, aunque en la mayoría de los casos con un orden distinto. Más preciso, mientras que Euler y Cauchy hacían énfasis inicial en encontrar un factor de integración que transforme la ecuación $Pdx + Qdy = 0$ en una exacta (de la forma $du=0$ y luego $u=c$), para los demás autores de los textos de nuestra muestra, no existe este énfasis, lo común es comenzar con las ecuaciones de variables separables.
2. En general, el acercamiento geométrico (en la forma del estudio de los "campos de pendientes" y las curvas isoclinas) para la solución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no aparece (como por ejemplo en [28]) o aparece muy limitadamente ([69], [5], [43], [10] y otros). Como excepciones están [41] y [24], que no solo tratan los temas clásicos de los campos de direcciones y de las curvas isoclinas, sino que extienden estos resultados a algunas ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, e incluso pasan a bosquejar el comportamiento cualitativo de las soluciones de la clásica ecuación $y' = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$ alrededor del origen [24, pág. 45].
3. La observación anterior también es válida para el acercamiento numérico, por ejemplo no se hace mención a éste en los textos en los que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias forman parte de libros de Cálculo, de igual forma en textos como [5] y [73]. Se mencionan de forma muy limitada, en general, en los textos de matemáticas para ingeniería, y excepcionalmente como el caso de [10, pág.111], los métodos numéricos se instrumentan vía lenguaje de programación. En este sentido el enfoque que propone el [71] es realmente novedoso.
4. Las aplicaciones se presentan en los textos escritos en la década del 50 de este siglo en adelante y están orientadas en primer término hacia los circuitos eléctricos y las vibraciones mecánicas y luego, a tratar problemas sobre fenómenos de la Física, situaciones biológicas, velocidades de reacciones químicas, etc. Textos como [10] (que nos suministra una variada muestra de aplicaciones), y el [40] (con aplicaciones de los sistemas lineales y la ingeniería de control) rompe con el discurso sostenido en la mayoría de los libros.

5. El método de la Transformada de Laplace, aparece fundamentalmente en los textos escritos hacia la segunda mitad de este siglo, lo cual es natural, pues el método tal como lo conocemos fue desarrollado por Doetsch hacia 1937. La forma de presentar el material es, en general, como un tercer método (a los ya existentes de variación de constantes y coeficientes indeterminados) para resolver ecuaciones diferenciales lineales.
6. El dominio del escenario algebraico en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, se puede observar si tomamos como punto de referencia el tratamiento que realizan algunos textos a una ecuación muy estudiada (muy importante) sobre todo en la Física, "la ecuación del péndulo", por ejemplo, en [76], [68], [43], [44], [17], [69], [57], [42], [83], [8], [67], [37], [86]; en estos, predomina el análisis para oscilaciones pequeñas y oscilaciones pequeñas con términos de forcing y damping; el escenario geométrico se observa en [14], [9], [79] y el numérico en [7] y [24]. Esto muestra una vez más la poca integración entre los diferentes escenarios de solución.
7. Existen ecuaciones diferenciales sencillas de primer orden, muy útiles por su articulación con diferentes contenidos conocidos por los estudiantes, y que sin embargo, no son explotadas suficientemente, tal es el caso de $y'=f(x)$, $y'=g(y)$, ver [67]. La resolución de éstas, podemos tomarlas como extensión del conocido *Teorema Fundamental del Cálculo Integral*, amén de poder introducir ciertas propiedades asintóticas de las mismas, en conexión con el tema Extremos de Funciones de Una Variable Real y el escenario de su solución.

Quisiéramos reiterar en esta sección, la "distancia" que aún subsiste entre el desarrollo histórico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y la que cuentan sus libros de texto. Esta distancia no es solo en cuanto al objeto de investigación o de estudio, propiamente dicho, sino a los métodos y resultados conceptuales utilizados en una y otra vertiente. De ahí que podamos concluir diciendo que la historia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que cuentan los libros de texto, es algo bien distinto de lo acontecido en la realidad. Un intento por remediar tal situación, lo presentamos en la sección siguiente.

4. A modo de resumen.

En nuestra investigación el aspecto más enriquecedor, globalmente, fue el trabajo realizado con los recursos históricos, lo que permitió mostrar a los estudiantes y profesores, cuán fecunda y conveniente resulta esta visión.

De esta forma, la Historia de la Matemática no es un simple conjunto de problemas históricos que introducir en clase, unas anécdotas biográficas que motiven al alumno. No es un recurso ocasional sino uno de los fundamentos epistemológicos de la actual reforma escolar [56]. Así, es siempre conveniente tener en cuenta algunas observaciones generales sobre la utilización de los recursos históricos en nuestras clases, por ejemplo:

- casi toda la Matemática ha sido construida sobre una sucesión de ideas precedentes y como uno puede volver sobre esta cadena, la motivación para un problema se torna claro,
- los estudiantes al dedicarse a un problema original, se relacionan con la experiencia de la creación matemática, sin un interprete intermedio,
- además, algo muy relacionado con el punto anterior, los estudiantes son iniciados en el camino de la creación matemática de una forma práctica: investigación, publicación y discusión,

- la objetividad histórica no debe ceder ante las necesidades pedagógicas, sino integrarse a las mismas (ver [25]), ejemplo de esto son los muy conocidos E.T. Bell-"Men of Mathematics", New York, Simon and Schuster, 1937 y L. Infield-"Whom the gods love", New York, Whittlesey House, 1948, mal concebidos como tratados históricos en virtud de un determinado interés motivacional.

A raíz de nuestro trabajo, creemos útil concluir con los siguientes hechos:

1. El significado de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para la formación de un futuro profesional, es muy importante, tanto desde el punto de vista de las aplicaciones, como por el carácter integrador que tiene esta disciplina. A título de ejemplo, repasemos los métodos proporcionados por otras asignaturas a este curso.
2. Destacaremos que algunos fenómenos físicos conocidos en el entorno social,[17] entre ellos los ciclones, que están muy relacionados con lo histórico-social en nuestra región, podemos vincularlos a la Etnomatemática y el esquema de Furinghetti. La posible utilización de los elementos históricos aquí presentados, en una Transposición Didáctica realizada para el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para los Licenciados en Educación, especialidad Física-Electrónica de la Universidad Pedagógica de Holguín, puede ser consultada en [65].

Todo lo anterior, nos lleva a la siguiente Transposición Didàctica en cuanto a los contenidos a tratar:

- Introducción. ¿Qué es una ecuación diferencial?, marcos de solución.
- El marco[18] geométrico (estudio cualitativo de la solución). Campos de direcciones, isoclinas, ...
- El marco algebraico. Separación de variables, ecuaciones exactas, ecuaciones diferenciales lineales, variación de constantes, coeficientes indeterminados, modelos y soluciones en series.
- El marco numérico. Método de Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta, análisis de errores.

Creemos que con la propuesta desarrollada, hemos presentado a los docentes una alternativa válida al enfocar el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, para especialidades técnicas. Esta propuesta intenta crear en las clases un ambiente de investigación que interese al alumno, provocando la reflexión e intentando que los conocimientos que se vienen impartiendo, maduren con los diferentes ejemplos prácticos y didácticos presentados, los que proporcionan una conexión de los conocimientos que no se había explotado antes, esta conexión estimula el uso dinámico de ellos, tanto en problemas de la asignatura, como de otras asignaturas.

Una primera actitud es precisamente la de mencionar que los ecuaciones diferenciales ordinarias nos sirven fundamentalmente para modelar problemas cuya esencia es objeto de estudio por una rama de la ingeniería o de las ciencias: física, química, economía, etc. La primera dificultad que se nos presenta, es que no se puede considerar el fenómeno en estudio exactamente como se presenta en la naturaleza, debido a la gran cantidad de aspectos que habría que tener en cuenta y a la consecuente necesidad de conocimientos matemáticos demasiados complejos, lo cual trae como consecuencia la idealización del problema en el cual no se consideran aquellos aspectos del fenómeno que no tienen gran

[17] Recomendamos [84].
[18] Para consultar la noción de marco y juego de marco, recomendamos [21].

influencia en el objeto de estudio aquí es importante la presencia de especialistas de la rama. Por ejemplo, si se quiere describir el movimiento de un péndulo, es posible que el peso de la cuerda sea insignificante en el proceso.

Una segunda actitud nos conduce a no abandonar el marco algebraico, sino por el contrario, complementarlo con los otros acercamientos para así tener una mayor riqueza (de conexiones) entre las representaciones y así poseer más herramientas al abordar el estudio de los modelos que están descritos mediante ecuaciones diferenciales, los cuales mayormente en el nivel al cual va dirigida nuestra propuesta, conducen a ecuaciones de variables separables y lineales (de primer y segundo orden).

A partir de estas premisas, nos centramos más en los métodos para resolver ecuaciones lineales de primer y segundo orden dentro del marco algebraico, tomando como estrategia partir de ecuaciones de variables separables, continuar con exactas y lineales, para desarrollar estas actividades puede utilizarse un sistema de tareas [26], lo cual a nuestro juicio tiene muchas ventajas y puede completar nuestra propuesta en el uso del software computacional dentro de este marco, fundamentalmente el de ayudar al cálculo de integrales, a la simplificación de expresiones algebraicas y tener estrategias (cuando esto sea posible) para articular la solución (algebraica) con su representación gráfica, para lo cual es factible el uso de los procesadores simbólicos como Derive, Mathematica y otros.

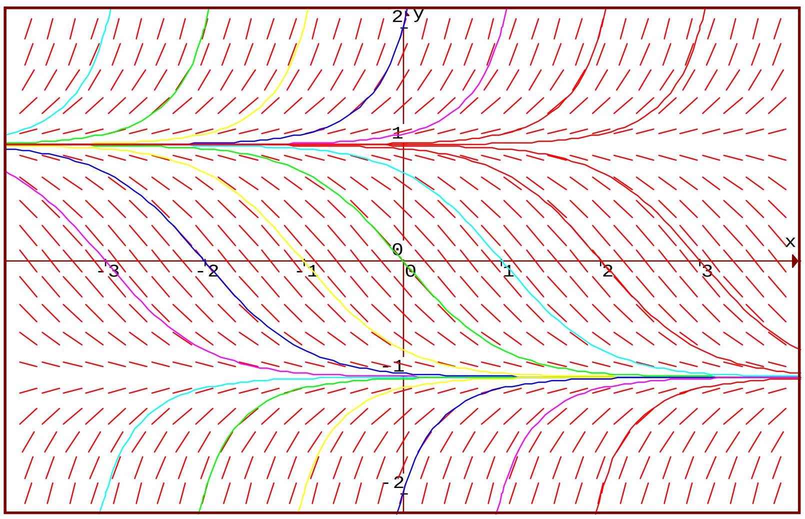
Una tercera actitud a asumir dentro de nuestra ingeniería es la implementación del marco geométrico desde el inicio, desarrollando actividades que permitan trazar el conjunto de curvas compatibles con el campo de pendientes, como sabemos esto siempre es posible en el caso de ecuaciones de primer orden y en algunas de segundo orden susceptibles de ser reducidas a ecuaciones de primer orden (v.g., la lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes), no olvidemos que un tratamiento geométrico de los puntos de reposo de sistemas lineales de segundo orden con coeficientes constnates en el plano, puede ser implementado fácilmente. En cuanto a la puesta en práctica de este acercamiento, se presentan dificultades por lo trabajoso que resulta el trazado del campo de pendientes, cuestión que se simplifica con la ayuda del software computacional y lo más delicado es el tratamiento gráfico que se da en los cursos tradicionales al concepto de función (recordemos que en este acercamiento, básicamente lo que tenemos que hacer es graficar funciones que vienen descritas en términos de su derivada). En esta dirección nos podemos auxiliar, al inicio, con una serie de ejercicios que permitan manejar gráficas sin el apoyo de su expresión análitica, en este aspecto nos podemos apoyar en los trabajos [35, 36] y [26].

El software computacional lo usaremos en forma interactiva, proporcionando campos de pendientes trazados con la ayuda de la microcomputadora, con el fin de que los estudiantes bosquejen sobre éste, el conjunto compatible de las curvas solución.

El acercamiento numérico que no forma parte del programa de estudio actual, cuando se exponen los libros de textos actuales se hacen de una forma muy descriptiva, o en algunos casos desarrollando programas en algún lenguaje de programación. Como analizamos antes, estos se pueden implementar de una forma efectiva mediante el uso de la hoja electrónica Excel. Dentro de nuestra propuesta, tal marco de resolución se puede adoptar desde un inicio como preludio del marco geométrico, ya que nos permite por un lado, pasar de la construcción (por medio de las quebradas de Euler) de una solución particular a la solución general, y por otro articular la representación tabular con la gráfica.

Por último, los algoritmos clásicos como el de Euler, Euler mejorado y el de Runge-Kutta, puede estar desde un inicio presente en cada tema, o bien al final.

Como vimos en el segundo epígrafe, desde el punto de vista histórico, el primer entorno donde se desarrolló la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias es el algebraico, multitud de intentos brindaron los métodos conocidos hoy, muchos de los cuales tienen unos cuantos años (ver [32]). Si a esto sumamos que en el año 1992 se cumplieron 100 años de la Teoría Cualitatva (cf. [61]), tendremos bien a las claras que un estudio cualitativo es siempre útil, máxime cuando el modelo analizado puede ser no lineal, en cuyo caso es imprescindible prácticamente. Por otra parte como hemos visto, el desarrollo de las modernas computadoras, ha hecho posible la implementación de métodos numéricos con una rapidez de convergencia sumamente elevada, de ahí la posibilidad de la utilización de los mismos.



Pudieramos citar como colofón otro ejemplo que ilustra a lo anterior, el caso de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$, que brinda insospechadas posibilidades al maestro. Si analizamos el marco algebraico, su solución es muy elemental, pues es una ecuación en variables separables y resoluble en cuadraturas, cuya solución se puede expresar por $y = \dfrac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}$, es claro que esta expresión a los estudiantes no les dice mucho sobre el comportamiento gráfico de las soluciones.

Sin embargo, analizando el marco geométrico y siguiendo el esquema de Brodetsky [11-12] tendremos:

1. Los lugares geométricos donde $f(t,x)=0$, son las rectas $x=1$ y $x=-1$.

2. El lugar geométrico donde $\dfrac{1}{f(t,x)} = 0$, no existe.

   Estos lugares dividen al plano en compartimentos donde $x'>0$ (en el ejemplo $x>1$ ó $x<-1$) y $x'<0$ ($-1<x<1$).

3. Al calcular x'' obtenemos $x''=2xx'$ y analizando la ecuación $x''=0$, resultan los lugares geométricos $x=0$, $x=1$, $x=-1$.

   Estos lugares determinan regiones en el plano, donde las curvas son cóncavas hacia arriba ($x>1$, $-1<x<0$) y cóncavas hacia abajo ($x<-1$, $0<x<1$).

4. Para completar el análisis trazamos un número de segmentos de tangentes en una cantidad conveniente de puntos, para trazar las curvas integrales compatibles con dicho campo.

Referencias

[1] Arnold, V. I. (1979): "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Editorial Nauka, Moscú (en ruso).

[2] Arquímedes (1986): "El Método", Alianza Editorial, Madrid, (traducción, introducción y notas: Luis Vega).

[3] Artigue, M. (1989): "Une recherche d´ingenierie didactique sur l´enseignement des equations differentielles en primer cycle universitarie", IREM, Université París 7, Cahierss du Séminarie de Didactique des mathématiques et de l´informatique, No.107, 284-309.

[4] Artigue, M.; L. Viennot and J. Menigaux (1990): "Some aspects of students´ conceptions and difficulties about differentials", Eur. J. Phys. 11, pp. 262-267.

[5] Ayres, F. (1969): "Ecuaciones Diferenciales", Serie Schaum´s Mc- Graw Hill, México.

[6] Baron, M. E. (1969): "The origins of the infinitesimal calculus", Pergamon-Press, Oxford-Edinburgh-New York.

[7] Berezin, I. S. and N.P. Zhidkov (1970): "Computing Methods", 2 Vols , Ediciones R, La Habana.

[8] Bibikov, Y. N. (1980): "Curso General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Universidad de Leningrado.

[9] Boudonov, N. (1980): "Teoría de Estabilidad de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Universidad de La Habana.

[10] Braun, M. (1976): "Differential Equations and their Applications", Springer-Verlag.

[11] Brodetsky, S. (1919): "The Graphical Treatment of Differential Equations", The Mathematical Gazette, Vol. IX, No. 142, 377-382, 3-8, 35-38.

[12] Brodetsky, S. (1920): "The Graphical Treatment of Differential Equations", The Mathematical Gazette, Vol. X, No. 146, 45-49.

[13] Cauchy, A. L.(1981): "Équations Différentiellis Ordinaries", Cours inédit, Fragment, Introduction Christian Gilain, Éditions Études Vivantes.

[14] Coughanowr, D. R. and L.B. Koppel (1969): "Process Systems Analysis and Control", Willey & Sons, New York.

[15] Darboux, G. (1913): "Eloge historique d'Henri Poincaré lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre 1913", Gauthier-Villars, París.

[16] Dedron, P. et J. Itard (1959): "Mathématiques et Mathématiciens", Magnard, París.

[17] Defares, S. and I. G. Sneddon (1963): "The Mathematics of Medicine and Biology", Academic Bess, New York.

[18] Díaz G., J. y M.C. Batanero (1994): "Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, No.3, pp.325-355.

[19] Dieudonné, J. (1950): "Deux exemples singuliers d´équations differentielles", Acta Sci. Math. 12B, pp. 38-403.

[20] Dieudonné, J. (1969): "Foundations of Modern Analysis", Academic Press, New York and London, p.290.

[21] Douady, R. (1986): "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, No. 2, 5-31.

[22] Edwards, C.H., Jr. (1979): "The historical development of the calculus", Springer-Verlag, New York.

[23] Euler, L. (1768-1770): "Institutiones Calculi Integralis, Ediderunt Friedrich Engel et Ludwing Schlesinger", Lipsiae et Berloni Typis et in aedibus B. G: Teubneri, MCMXIV.

[24] Ford, L. (1955): " Differential Equations", Second Edition, Mc-Graw Hill.

[25] Garciadiego D., A. (1997): "Pedagogía e historia de la ciencia ¿simbiosis innnata?", en "El velo y la trenza", F. Zalamea (ed.), Editorial Universidad Nacional, Colombia, 17-34,

[26] Garcés, W. (1997): "El Sistema de Tareas como Modelo de Actuación Didáctica en la Formación de Profesores de Matemática- Computación", Tesis de Maestría, ISPH.

[27] Grabiner, J. (1981): "The origins of Cauchy's Rigorous Calculus", Cambridge, MIT Press.

[28] Granville, W.A., L.F. Smith and W.R. Longley (1985): "Cálculo Diferencial e Integral", Limusa.

[29] Grigorian, A. T. (1992): “Lyapunov, Alexandr Mijailovich”, Dictionary of Scientific Biography 8, 559-563.

[30] Hartman, P. (1964): "Ordinary Differential Equations", Wiley & Sons.

[31] Hawkins, T. (1970): “Lesbesgue´s theory of integration. Its origins and development”, The University of Wisconsin Press, Madison, Wis-London.

[32] Hernández, R. A. (1994): “Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Algebraico y Gráfico en Relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”, Cuaderno de Investigación, No. 30, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

[33] Hersh, R. (1988): "Experiencia matemática", Barcelona: Labor.

[34] Hirsch, M. W. (1984): “The Dynamical Systems Approach to Differential Equations”, Bull, American Mathematical Society, Vol. 11 , No. 1.

[35] Hitt, F. (1992): “Intuición en Matemática, representación y uso de la microcomputadora”, Memorias de la sexta reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, 254-266.

[36] Hitt, F.(1995): “Intuición Primera Versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el paso de una Representación Gráfica a un Contexto real y Viceversa”, Revista Educación Matemática.

[37] Hurewicz, W. (1958): “Lectures on Ordinary Differential Equations”, MIT Press, Massachusetts and London.

[38] Ince, E. (1926): “Ordinary Differential Equations”, Dover, New York.

[39] Ince, E. (1939): ”Integración de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”, Ed. Dossat, Madrid.

[40] Kaplan, W. (1962): “Operational Methods for Linear Systems”, Addison-Wesley, Massachusetts and London.

[41] Kaplan, W. (1968): “Ordinary Differential Equations”, Edición Revolucionaria, La Habana.

[42] Kaplan, W. (1981): “Matemáticas Avanzadas para estudiantes de ingeniería”, SITESA.

[43] Kells, L. M. (1976): “Ecuaciones Diferenciales Elementales”, Ediciones del Castillo, Madrid.

[44] Kiseliov, A.I., M.L. Krasnov y G.I. Makarenko (1973): “Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”, Editorial Mir, Moscú.

[45] Kitcher, P. (1983): “The Nature of Mathematical Knowledge”, New York/Oxford: Oxford University Press.

[46] Kline, M. (1972): “Mathematical Thought from Ancient to Modern Times”, Oxford University Press.

[47] Kline, M. (1985): "Matemática. La pérdida de la certidumbre", Madrid: Siglo XXI.

[48] Knight, W. J. (1974): “Solutions of differential equations in Banach spaces”, Duke Math. J.,41(2).

[49] Knight, W. J. (1975): “A counter example to a theorem on differential equations in Hilbert spaces”, Proc. Amer. Math. Soc., 51(2), pp.378-380.

[50] Lakatos, I. (1970): ”Falsifications and methodology of scientific research programmes”, Cambridge.

[51] Lacroix, S. F. (1837): “Traité Elémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral”.

[52] Leibniz-Newton (1977): “El Cálculo Infinitesimal origen-polémica”, Editorial Universitaria de Buenos Aires.

[53] Lloyd, G.E.R. (1979): "Magic reason and experience. Studies in the origin and development of Greek science”, Cambridge, University Press.

[54] Matveev, N. M. (1963): “Método de Integración de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”, Escuela Superior, Moscú (en ruso).

[55] Mawhin, J. (1994): “The centennial legacy of Poincaré and Lyapunov in Ordinary Differential Equations”, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, N.34, 9-46.

[56] Maza G., C. (1996): "El dibujo del embaldosado: un ejemplo de matematización", SUMA, No.21, 89-96.

[57] Morris, M. y O.E. Brown (1972): “Ecuaciones Diferenciales”, Editorial Ciencia y Técnica, La Habana.

[58] Motz, L. y J. H.Weaver (1991): "Conquering Mathematics; From Arithmetic to Calculus", Plenum, New York and London.

[59] Nápoles, J.E. (1996): "De las cavernas a los fractales. Conferencias de historia de la Matemática", ISPH (Cuba), publicación interna.

[60] Nápoles, J.E. (1997a): "Ecuaciones Diferenciales y Contemporaneidad", dado a publicar.

[61] Nápoles, J.E. (1997b): "Cien años de Teoría Cualitativa. Algunas observaciones", dado a publicar.

[62] Nápoles, J.E. (1997c): "Las Ecuaciones Diferenciales como signos de los tiempos", dado a publicar.

[63] Nápoles, J.E. (1998): "El legado histórico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Consideraciones (auto) críticas", Boletín de Matemáticas (UNC), V, 53-79.

[64] Nápoles, J.E. y C. Negrón (1994): "De la Mecánica Analítica a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Algunos apuntes históricos", Revista Llull, Vol.17(No. 32), pp. 190-206.

[65] Nápoles, J.E. y C. Negrón (1999): "El papel de la historia en la integración de los marcos geométrico, algebraico y numérico en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", dado a publicar.

[66] Pastor, J. R. y J. Babini (1960): "Historia de la Matemática", Vol.I, Editorial Gedisa, Barcelona, p.62.

[67] Petrovski, I.G. (1958): "Ordinary Differential Equations", Academic Press, New York.

[68] Pontriaguin, L. S. (1981): "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

[69] Piskunov, N. (1969): " Cálculo Diferencial e Integral", Editorial Mir, Moscú, 2Vols.

[70] Sánchez F., C. (1987): "Conferencias sobre problemas filosóficos y metodológicos de la matemática", U.H.

[71] SMP (The School Mathematics Project) (1981): "Revised Advanced Mathematics", Book 3, caps.33 & 38, Cambridge University Press.

[72] Shubring, G. (1987): "On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbooks Author", For the Learninig of Mathematics 7, 3.

[73] Simmons, F. (1972): "Differential Equations with applications and Historical Notes", Mc-Graw Hill.

[74] Smirnov, V. I. (1992): "Biography of A. M. Lyapunov", Intern. J. Control 55, no.3, 775-784 el que contiene una traducción inglesa de su memoria de 1892.

[75] Smith, D. E. (1929): "A Source Book in Mathematics", New York, pp.619-626.

[76] Spiegel, M. R. (1965): " Ecuaciones Diferenciales Aplicadas", Montaner y Simons, Barcelona.

[77] Steiner, M. (1975): "Mathematical Knowledge", Ithaca: Cornell University Press.

[78] Tall, D. (1991): "Avanced Mathematical Thinking", Kluwer Academic Publishers.

[79] Thaler, G. J. And M.P. Pastel (1971): "Analysis and Design of Nonlinear Feedback Control Systems", Edición Revolucionaria, La Habana.

[80] Tiles, M. (1991): "Mathematics and the Image of Reason", London/New York: Routledge.

[81] Vega, L. (1996): "¿Está en crisis la idea clásica de demostración matemática?", Actas COMPUMAT'96, Universidad de Holguín, Septiembre.

[82] Vergnaud, G. (1990): "Epistemology and psychology of mathematics educations", en P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.): Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the International Group for the P.M.E., Cambridge University Press, Cambridge.

[83] Volkenshtein, M.V. (1985): "Biofísica", Mir, Moscú.

[84] Wilder, R.L. (1981): "Mathematics as a Cultural System", New York/Oxford: Pergamon Press.

[85] Zalamea, F. (1994): "La filosofía de Albert Lautman"**,** Mathesis 10, 273-289

[86] Zeldóvich, Ya. y I. Yaglom (1987): "Matemáticas Superiores para los físicos y técnicos principiantes", Editorial Mir, Moscú.

¿Comentarios? ¿Sugerencias?