Facultad de Ciencias Experimentales
Licenciatura en Biología
Modelos Matemáticos en Biología. Curso 2009/10

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

EJERCICIO 1.- Calcular los valores propios de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;;\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \;;\quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2.- Dada la matriz C del ejercicio anterior, determinar una base y las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio propio asociado al valor propio 5.

EJERCICIO 3.- Comprobar que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

EJERCICIO 4.- ¿Es diagonalizable la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$?

EJERCICIO 5.- Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calcular sus valores propios en función del parámetro t.
2. Estudiar para qué valores de t es diagonalizable.
3. Encontrar cuando sea posible las matrices D y P, diagonal y regular respectivamente, que verifican que $D = P^{-1}AP$.

EJERCICIO 6.- Estudiar para qué valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son diagonalizables:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \;;\quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 7.- Calcular A^{37} y B^{36} siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 8.- Calcular una base de $I\!R^3$ que sólo contenga vectores propios de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 9.- Comprobar que -7 es un valor propio de la matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ 4 & -5 & -6 \\ 4 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calcular las ecuaciones de su subespacio propio asociado.

EJERCICIO 10.- Comprobar que $\vec{v} = (1, 0, -1)$ es un vector propio de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Es posible encontrar otro vector propio que esté en el mismo subespacio propio que $\vec{v}$ y que no sea combinación lineal de éste?

EJERCICIO 11.- Calcular una matriz cuadrada de orden 3 que tenga a $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ como vectores propios asociados respectivamente a los valores propios $-1, 2$ y 4 siendo

$$\vec{v_1} = (1, 0, 1)\,; \quad \vec{v_2} = (0, 0, 1)\,, \quad \vec{v_3} = (1, 1, 0)$$

EJERCICIO 12.- Tras un estudio sobre las preferencias veraniegas (interior o costa) se sabe que el 80% de los que un año optan por veranear en el interior lo vuelven a hacer al año siguiente,mientras que el 90% de los que veranean en zonas de playa vuelven a la costa el año siguiente. Actualmente un millón veranea en el interior y 7 millones van a la costa.

1. Plantear un modelo matricial que permita calcular los veraneantes en el interior y en la costa para cada año a partir de los datos actuales.
2. ¿Cuántos veraneantes elegirán cada opción pasados 10 años?

EJERCICIO 13.- Al realizar un estudio anual sobre el consumo de aceite de oliva en una población,se ha llegado a que el 80% de los que consumen aceite de oliva un año continúan haciéndolo y que el 40% de los que no lo consumían comienzan a hacerlo.

1. Plantear un modelo matricial que permita saber cada año el porcentaje de la población que consume aceite de oliva.
2. Plantear qué operaciones habría que realizar para obtener el porcentaje de la población que consume aceite de oliva cuando transcurren 10 y 20 años.
3. Cuando se realizó este estudio había 14000 individuos que consumían aceite de oliva y 6000 individuos que no lo utilizaban. Utilizar el modelo anterior para determinar qué porcentaje de la población consume aceite de oliva cuando ha transcurrido 1 año desde el inicio de nuestro estudio.

EJERCICIO 14.- Al realizar un estudio de mercado,los directivos de una empresa llegan a la conclusión de que cuando transcurre cada año el 70% de sus clientes siguen siendo fieles, el 30% de sus clientes se pasan a la competencia, el 35% de los clientes de la competencia se pasan a su empresa, el 65% de los que no son clientes permanecen en la competencia. Plantear el modelo matricial pertinente y diagonalizar para resolver la siguientes cuestión: Si la empresa tiene 2123 clientes y la competencia 10302, calcular la cantidad de clientes de la empresa y la competencia tras 17 años.