
MODELOS DISCRETOS MATRICIALES

1.1 Objetivo

Vamos a usar las operaciones con matrices y la diagonalización de matrices cuadradas para analizar el comportamiento a largo plazo de diferentes modelos discretos matriciales. A continuación estudiaremos el modelo de *Leslie* y las tablas de vida.

1.2 Cadenas de Markov

Una de las aplicaciones clásicas de los modelos discretos matriciales es la siguiente:

EJEMPLO 1.1

- Un granjero tiene una gran población de flores cuyo color rojo, rosa y blanco viene determinado por los genotipos AA , Aa , y aa respectivamente. El granjero decide fertilizar todas las flores con un color rosa.
 - (a) Si inicialmente tiene 100 flores rojas, 200 rosas y 300 blancas. ¿Cuál será el número de flores de cada uno de los colores en la tercera generación?. ¿Y en la sexta?. ¿Y en la décima?. Analizar el comportamiento a largo plazo.
 - (b) Encontrar la expresión para la distribución de los genotipos a lo largo de las generaciones, para una distribución inicial de $X_1(0)$ flores rojas, $X_2(0)$ rosas y $X_3(0)$ blancas.

- (c) ¿Existe alguna distribución inicial de colores de tal forma que se mantenga invariante?
- Para $k = 0, 1, 2, \dots$, llamaremos:
 - La fracción de las plantas del genotipo AA que hay en la generación de orden k como $X_1(k)$.
 - La fracción de las plantas del genotipo Aa que hay en la generación de orden k como $X_2(k)$.
 - La fracción de las plantas del genotipo aa que hay en la generación de orden k como $X_3(k)$.

En consecuencia, $X_1(0)$, $X_2(0)$ y $X_3(0)$ representarán a la distribución inicial de los genotipos, y es evidente que $X_1(k) + X_2(k) + X_3(k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

La tabla que determina la distribución de los genotipos en cada generación, a partir de la distribución en la generación anterior es:

	$AA \times Aa$	$Aa \times Aa$	$aa \times Aa$
AA	1/2	1/4	0
Aa	1/2	1/2	1/2
aa	0	1/4	1/2

que nos permite encontrar las siguientes ecuaciones para $k = 1, 2, \dots$:

$$X_1(k) = \frac{1}{2}X_1(k-1) + \frac{1}{4}X_2(k-1)$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2}X_1(k-1) + \frac{1}{2}X_2(k-1) + \frac{1}{2}X_3(k-1)$$

$$X_3(k) = \frac{1}{4}X_2(k-1) + \frac{1}{2}X_3(k-1)$$

Estas ecuaciones podemos escribirlas de manera matricial

$$\vec{X}(k) = A\vec{X}(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

donde:

$$\vec{X}(k) = \begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(k-1) = \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ X_3(k-1) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como podemos apreciar, las tres columnas corresponden a las columnas de la tabla anterior. De la ecuación (1.1) deducimos,

$$\vec{X}(k) = A\vec{X}(k-1) = A^2\vec{X}(k-2) = \dots = A^k\vec{X}(0), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Realizamos, en primer lugar, la simulación con `Mathematica®`,

```
A := {{0.5, 0.25, 0}, {0.5, 0.5, 0.5}, {0, 0.25, 0.5}}
x0 := {{100}, {200}, {300}}
x1 = A.x0
```

```
{{100}, {300}, {200}}
```

```
x3 = MatrixPower[M, 3].x0
```

```
{{137.5}, {300}, {162.5}}
```

```
x6 = MatrixPower[M, 6].x0
```

```
{{148.437}, {300}, {151.562}}
```

```
x10 = MatrixPower[M, 10].x0
```

```
{{149.902}, {300}, {150.098}}
```

```
x100 = MatrixPower[M, 100].x0
```

```
{{150}, {300}, {150}}
```

Conclusión: A largo plazo tendremos 150 flores rojas, 300 rosas y 150 blancas.

También podemos llegar a la misma conclusión encontrando una expresión analítica para A^k . Primero se diagonaliza la matriz A , y para ello hay que buscar una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que

$$A = CDC^{-1}.$$

Multiplicando k veces

$$A^k = CD^kC^{-1}$$

En nuestro caso:

```
Eigenvalues[A]
```

```
{0, 1/2, 1}
```

Los valores propios asociados son,

```
Eigenvectors[A]
```

$\{\{1, -2, 1\}, \{-1, 0, 1\}, \{1, 2, 1\}\}$

Sustituyendo:

$$\vec{X}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\vec{X}(k) = \begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2(1/2)^k}{4} & 1/4 & \frac{1-2(1/2)^k}{4} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \frac{1-2(1/2)^k}{4} & 1/4 & \frac{1+2(1/2)^k}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}$$

Multiplicando estas matrices obtenemos,

$$\vec{X}(k) = \begin{pmatrix} 1/4 (X_1(0) + 2(1/2)^k X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) - 2(1/2)^k X_3(0)) \\ 1/2 (X_1(0) + X_2(0) + X_3(0)) \\ 1/4 (X_1(0) - 2(1/2)^k X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) + 2(1/2)^k X_3(0)) \end{pmatrix}$$

y como $X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) = 1$, se tiene para $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} X_1(k) &= 1/4 (1 + 2(1/2)^k X_1(0) - 2(1/2)^k X_3(0)) \\ X_2(k) &= 1/2 \\ X_3(k) &= 1/4 (1 - 2(1/2)^k X_1(0) + 2(1/2)^k X_3(0)) \end{aligned}$$

- Estas son las fórmulas explícitas que proporcionan las fracciones de los genotipos de la generación de plantas de orden k , expresadas en función de las fracciones de los genotipos iniciales. Como $(1/2)^k$ tiende a cero cuando k tiende a infinito, de estas ecuaciones se desprende que:

$$X_1(k) \rightarrow 1/4, \quad X_2(k) \rightarrow 1/2, \quad X_3(k) \rightarrow 1/4.$$

Es decir, en el límite, existen el mismo número de flores rojas y blancas y el doble de flores rosas.

- Respecto a la última de las cuestiones, efectivamente existe una distribución inicial de colores de tal manera que se mantiene invariante con el tiempo. Por ejemplo 100 rojas, 200 rosas y 100 blancas.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Y esto es cierto debido al hecho de que existe un valor propio que vale la unidad. Su vector propio asociado es del tipo $(\alpha, 2\alpha, \alpha)^T$. Cualquier combinación de flores cumpliendo que el número de flores rojas y blancas sean iguales y el número de flores rosas sea la suma de las anteriores, cumplirá con el requisito propuesto.

1.3 Segundo ejemplo

A continuación vamos a profundizar en el estudio de procesos que requieran el cálculo de potencias de matrices y a determinar en qué medida la evolución de los mismos está o no gobernada por los valores y vectores propios de la matriz en cuestión. Es decir, queremos conocer el papel de los valores y vectores propios en problemas lineales discretos que se puedan escribir en la forma $\vec{X}(k+1) = A\vec{X}(k)$.

EJEMPLO 1.2

- Supongamos que la dinámica de la situación geográfica de un animal en un plano se rige por las ecuaciones,

$$\left. \begin{aligned} X_1(k+1) &= 2 X_1(k) - 3 X_2(k) \\ X_2(k+1) &= \frac{1}{2} X_1(k) - \frac{1}{2} X_2(k) \end{aligned} \right\}$$

donde $(X_1(k), X_2(k))$ representan las coordenadas de la posición del animal en la k -ésima transición. Vamos a contestar a las siguientes cuestiones:

- Si en un instante determinado el animal ocupa la posición $(5/2, 3/2)$. ¿Cuál será su posición tres etapas después?, ¿y cinco?, ¿y diez?
 - Diagonalizar la matriz A del sistema.
 - Calcular A^{50} directamente y a través de la matriz diagonal.
 - Calcular la posición del animal para un instante k .
 - ¿Cuál será la evolución a largo plazo?
- Las respuestas al ejercicio la obtendremos haciendo uso del ordenador.

```
A := {{2, -3}, {1/2, -1/2}}
x0 := {{5/2}, {3/2}}
x3 = MatrixPower[A, 3].x0
x5 = MatrixPower[A, 5].x0
x10 = MatrixPower[A, 10].x0
```

```
{{-1}, {(1/4)}}
{{-(11/8)}, {(7/16)}}
{{-(383/256)}, {(255/512)}}}
```

- Diagonalización de la matriz A .

```
paso := Transpose[Eigenvectors[A]]
diagonal = Inverse[paso].A.paso
```

```
{{1/2, 0}, {0, 1}}
```

- Potencia de la matriz A .

$$\text{MatrixPower}[A, k]$$

$$\{\{3 - 2(1/2)^k, -6 + 6(1/2)^k\}, \{1 - (1/2)^k, -2 + 3(1/2)^k\}\}$$

O bien

$$\text{potencia} = \text{paso}.\{(1/2)^k, 0\}, \{0, 1\}\}.\text{Inverse}[\text{paso}]$$

$$\{\{3 - 2(1/2)^k, -6 + 6(1/2)^k\}, \{1 - (1/2)^k, -2 + 3(1/2)^k\}\}$$

- La posición en la etapa k con $k = 1, 2, 3, \dots$, será

$$X_1(k) = \left(3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) X_1(0) + \left(-6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) X_2(0)$$

$$X_2(k) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) X_1(0) + \left(-2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) X_2(0)$$

- Para saber el comportamiento a largo plazo de la partícula, hacemos que $k \rightarrow \infty$ en las ecuaciones anteriores,

$$\begin{aligned} X_1(k) &\rightarrow 3X_1(0) - 6X_2(0) \\ X_2(k) &\rightarrow X_1(0) - 2X_2(0), \end{aligned}$$

y como $(X_1(0), X_2(0)) = (5/2, 3/2)$ tenemos

$$X_1(k) \rightarrow -3/2, \quad X_2(k) \rightarrow -1/2.$$

EJEMPLO 1.3

Se pretende realizar el estudio de la contaminación de cierta región en la que se están produciendo vertidos industriales. Se han clasificado los terrenos en tres niveles de contaminación:

- Terrenos limpios.
- Terrenos con nivel de contaminación medio.
- Terrenos con nivel de contaminación alto.

Se comprueba que la evolución de la contaminación de un año para otro se ajusta a los siguientes datos:

- Cada año se contamina un 30% de los terrenos limpios de la siguiente manera: el 20 % con un nivel de contaminación medio y el 10 % con un nivel de contaminación alto.
- Anualmente el 30 % de los terrenos con nivel de contaminación media pasan a tener contaminación alta.

Ante esta situación, las autoridades emprenden un plan de recuperación de las zonas contaminadas. El plan actúa directamente sobre los terrenos más contaminados consiguiendo, por un lado, limpiar totalmente el 70% de los terrenos con contaminación alta, y por otro, reducir la contaminación de otro 10% de zona de alta contaminación que pasa a contaminación media.

El territorio estudiado tiene una extensión de 1000 hectáreas e inicialmente todas ellas estaban limpias. Se trata de resolver las siguientes cuestiones:

- (a) Estudiar la distribución de terrenos contaminados pasada una cantidad concreta de años. Por ejemplo, intentemos estudiar lo que sucede a los diez años.
- (b) Estudiar la tendencia pasado un número suficientemente grande de años.

1.4 Modelo de Leslie

Bernadelli consideró una especie de escarabajo que sólo vive tres años y se propaga en su tercer año. Dividió a la especie en tres grupos de edades: de 0 a 1 año, de 1 a 2 años y de 2 a 3 años. Observó que la probabilidad de supervivencia de las hembras del primer grupo era $1/2$ y las del segundo $1/3$, y que en el tercer grupo el promedio de hembras que nacen por cada hembra era de 6.

1.4.1 Primer caso

Vamos a plantearnos, en primer lugar, las siguientes cuestiones.

EJEMPLO 1.4

- Si inicialmente hay 3000 hembras en cada grupo de edad,
 - (a) ¿cuántas hembras habrá a los dos años?, ¿y a los tres?, ¿y a los cinco, a los seis y a los siete?.

- (b) calcular la distribución de las hembras para diferentes años y comprobar que su comportamiento es oscilatorio,
- (c) ¿cuál es la causa de tal oscilación?.
- Empezamos introduciendo los datos

```
L := {{0, 0, 6}, {1/2, 0, 0}, {0, 1/3, 0}}
inicial := {{3000}, {3000}, {3000}}
```

Calculamos las poblaciones en las sucesivas generaciones

```
x1 = MatrixPower[L, 1].inicial
x2 = MatrixPower[L, 2].inicial
x3 = MatrixPower[L, 3].inicial
x5 = MatrixPower[L, 5].inicial
x9 = MatrixPower[L, 9].inicial
```

obteniéndose como respuesta,

```
{{18000}, {1500}, {1000}}
{{6000}, {9000}, {500}}
{{3000}, {3000}, {3000}}
{{6000}, {9000}, {500}}
{{3000}, {3000}, {3000}}
```

- Es decir, la población tiene un comportamiento cíclico. Es fácil comprobar que L^3 es la matriz identidad I , entonces

$$\vec{X}(k) = L^k \vec{X}(0) = L^{3n+r} \vec{X}(0), \quad 0 \leq r \leq 2,$$

dando lugar a las siguientes situaciones:

$$\begin{aligned} \vec{X}(k) &= \vec{X}(0) & \text{si } r &= 0 \\ \vec{X}(k) &= \vec{X}(1) & \text{si } r &= 1 \\ \vec{X}(k) &= \vec{X}(2) & \text{si } r &= 2 \end{aligned}$$

Observemos que, al existir dos clases de edad no fértiles, no tenemos asegurada la existencia de un valor propio de L que sea estrictamente dominante.

1.4.2 Segundo caso

En un estudio demográfico de una población se obtuvieron los datos representados en la siguiente tabla,

Clases	a_i	b_i
[0, 15)	0	0.998937
[15, 30)	0.52952	0.999537
[30, 45)	0.403267	0.998807
[45, 60)	0.29	—

siendo a_i el promedio de hijas nacidas por mujer y b_i la tasa de supervivencia dentro del grupo de edad.

EJEMPLO 1.5

- Si $\vec{X}(k)$ es el vector de distribución de mujeres por grupos de edad en el instante k , queremos determinar el mismo vector en el instante $k + 1$. (Instantes que han de medirse en intervalos de 15 años). Supongamos que,

$$\vec{X}(0) = (267219, 284598, 233169, 270308)^T$$

es la distribución en 1967.

- Construir el modelo de *Leslie*.
 - ¿Cuál será la población femenina en 1982?. ¿Y en 2012?. (Suponiendo que las tasas de supervivencia y los promedios de natalidad de hijas se hubiesen mantenido constantes).
 - ¿Cuál será la población femenina en el año 2057?.
 - Comprobar que para k suficientemente grande, $\vec{X}(k) \approx \lambda_1 \vec{X}(k - 1)$.
 - Calcular la proporción de mujeres en cada una de las clases para valores de k suficientemente grandes.
- El modelo de *Leslie* que describe a la situación planteada es

$$\vec{X}(k+1) = \begin{pmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ X_3(k+1) \\ X_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.52952 & 0.403267 & 0.29 \\ 0.998937 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.999537 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.998807 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \end{pmatrix},$$

con $k = 0, 1, 2, \dots$.

- Para encontrar las poblaciones femeninas en los años 1982 y 2012 utilizamos el ordenador

$$\begin{aligned} L &:= \{ \{0, 0.52952, 0.403267, 0.29\}, \{0.998937, 0, 0, 0\}, \{0, 0.999537, 0, 0\}, \\ &\quad \{0, 0, 0.998807, 0\} \} \\ \mathbf{x0} &:= \{ \{267219\}, \{284598\}, \{233169\}, \{270308\} \} \end{aligned}$$

Población de mujeres en el año 1982 (un período de tiempo).

$$x_1 = \text{MatrixPower}[L, 1].x_0$$

$\{\{323119\}, \{266935\}, \{284466\}, \{232891\}\}$

Población de mujeres en el año 2012 (tres períodos de tiempo).

$$x_3 = \text{MatrixPower}[L, 3].x_0$$

$\{\{360909\}, \{323258\}, \{322626\}, \{266493\}\}$

- Población de mujeres en el año 2057 (seis períodos de tiempo).

$$x_6 = \text{MatrixPower}[L, 6].x_0$$

$\{\{439152\}, \{414213\}, \{377981\}, \{359929\}\}$

- Para estudiar la evolución de la población a largo plazo, encontramos los valores y vectores propios de la matriz de *Leslie*

Eigenvalues[L]
Eigenvectors[L]

$\{1.07438, -0.724172, -0.175103 + 0.584004 I, -0.175103 - 0.584004 I\}$

$\{-0.553897, -0.515004, -0.479128, -0.445427\}, \{-0.272938, 0.376497, -0.51965, 0.7167\},$
 $\{0.139396 - 0.116672 I, -0.2487 - 0.163868 I, -0.140232 + 0.467703 I, 0.7999 - 1.93462$
 $10^{-18} I\}, \{0.139396 + 0.116672 I, -0.2487 + 0.163868 I, -0.140232 - 0.467703 I, 0.7999$
 $+ 1.93462 10^{-18} I\}$

Al ser el valor propio estrictamente dominante $\lambda_1 = 1.07438$ la población crecerá en cada período de tiempo a un ritmo aproximado del 7.5%. Los porcentajes de hembras en cada una de las clases se estabilizarán y coincidirán con las componentes del vector propio asociado al valor propio λ_1 . Esto es:

$$\begin{aligned} &0.553897 / (0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427) \\ &0.515004 / (0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427) \\ &0.479128 / (0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427) \\ &0.445427 / (0.553897 + 0.515004 + 0.479128 + 0.445427) \end{aligned}$$

La conclusión es que a largo plazo, el 27.28% de las hembras se encontrarán en la primera clase, el 25.83% en la segunda, el 24% en la tercera y el 22.34% en la cuarta clase.

- Podemos comprobarlo con la generación de orden veinte

$$\mathbf{x}_{20} = \text{MatrixPower}[\mathbf{L}, 20].\mathbf{x}_0$$

$$\{\{1.20588 \cdot 10^6\}, \{1.12126 \cdot 10^6\}, \{1.04308 \cdot 10^6\}, \{969815.\}\}$$

Basta pasar a porcentajes y se obtiene el resultado deseado. Por ejemplo,

$$1.205887 / (1.20588 + 1.12126 + 1.04308 + 0.969815) = 0.277852.$$

Si encontramos el número de hembras en la generación 21 podemos comprobar que $\vec{X}(21) \approx \lambda_1 \vec{X}(20)$. En efecto,

$$\mathbf{x}_{21} = \text{MatrixPower}[\mathbf{L}, 21].\mathbf{x}_0$$

$$\{\{1.29561 \cdot 10^6\}, \{1.2046 \cdot 10^6\}, \{1.12074 \cdot 10^6\}, \{1.04183 \cdot 10^6\}\}$$

Dividiendo las componentes

$$\frac{1.29561}{1.20588} \approx \frac{1.2046}{1.12126} \approx \frac{1.12074}{1.04308} \approx \frac{1.04183}{0.969815} \approx 1.07438.$$

1.4.3 Tablas de vida y matrices de Leslie

Los datos siguientes fueron recogidos para la planta anual *Phlox drummondii*, donde la edad está expresada en días.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Edad	0 - 63	63 - 124	124 - 184	184 - 215	215 - 264	264 - 278	278 - 292	292 - 306	306 - 320	320 - 334	334 - 348	348 - 362	362 -
S(x)	996	668	295	190	176	172	167	159	154	147	105	22	0
b(x)	0	0	0	0	0	0	0	0.33	3.13	5.42	9.26	4.31	-

Observemos que la planta no se reproduce hasta la clase de edad que corresponde a los 292-306 días. Lo primero que necesitamos encontrar es la probabilidad de que la planta sobreviva desde el inicio hasta la clase de edad x , es decir $l(x)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l(x)	1.00	0.671	0.296	0.191	0.177	0.173	0.168	0.160	0.155	0.148	0.105	0.022	0.00

A continuación encontramos la mortalidad

$$q(x) = 1 - g(x) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)},$$

para ver en que punto de su historia de vida, la planta es más vulnerable.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q(x)	0.329	0.558	0.354	0.073	0.022	0.029	0.047	0.031	0.045	0.290	0.790	1	1

Podemos representar gráficamente estos datos

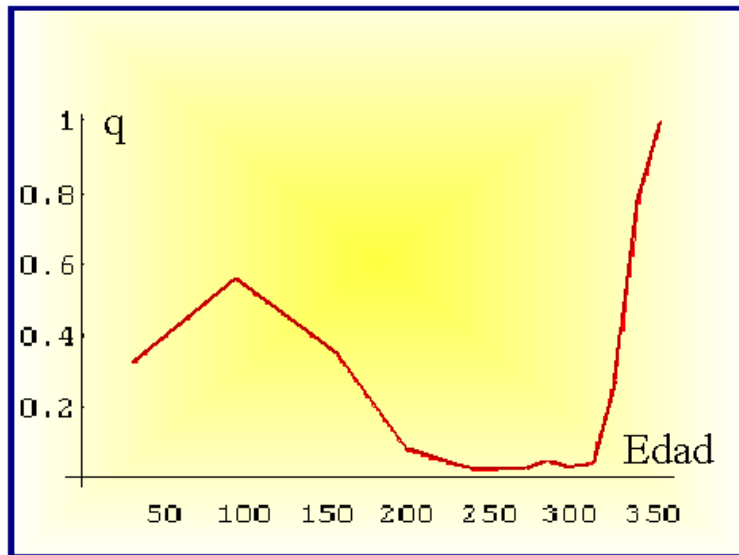


Figura 2.1

Se aprecia que los mayores niveles de mortalidad se da en la segunda clase de edad (63-124) y que aumenta de una forma considerable en la clase (320-334).

Necesitamos conocer para analizar la evolución de la población la tasa neta de reproducción

$$R_0 = \sum_{x=0}^{12} l(x)b(x) = 2.41,$$

y el tiempo de regeneración

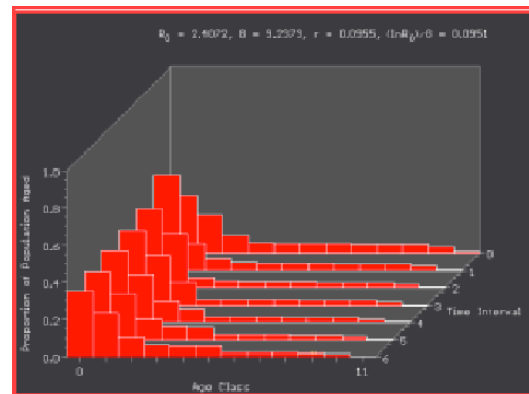
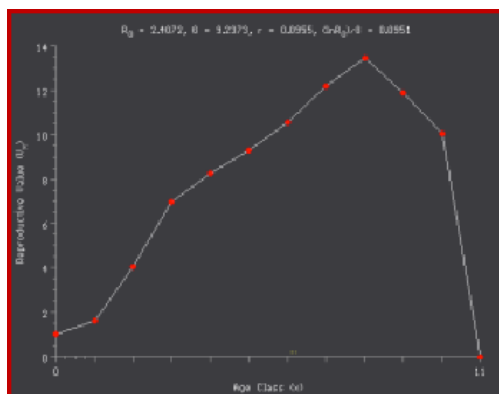
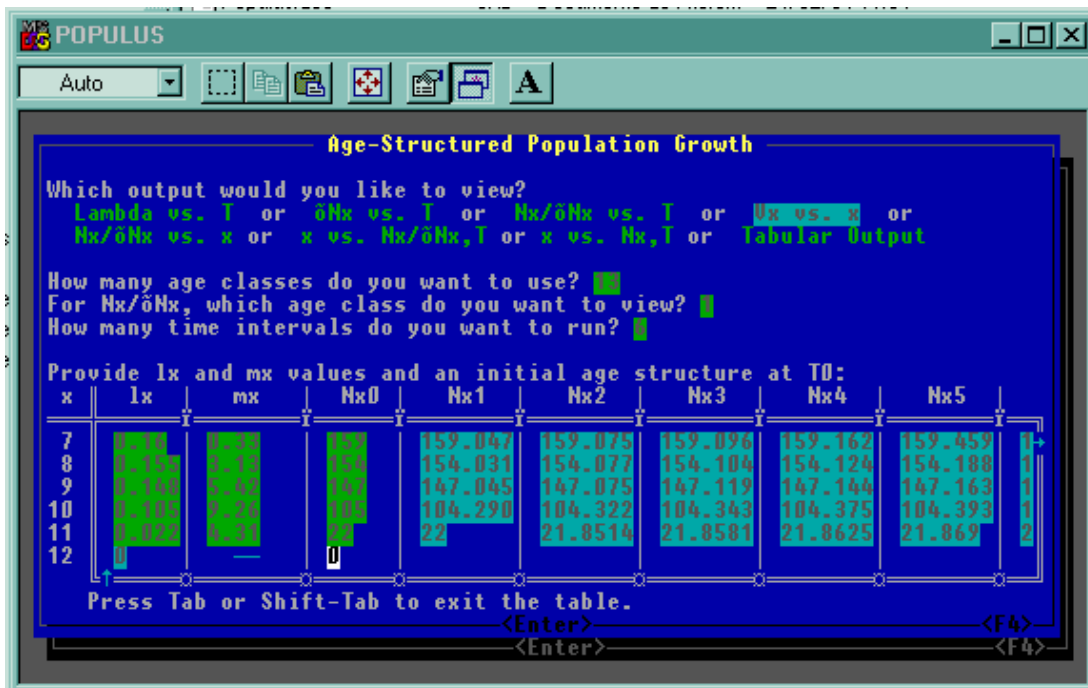
$$G = \frac{\sum_{x=0}^{12} l(x)b(x)x}{\sum_{x=0}^{12} kl(x)b(x)} = 9.21 \Rightarrow r \approx \frac{\ln R_0}{G} = 0.0955,$$

y en consecuencia

$$x(t) = x(0)e^{rt} = x(0)e^{0.0955t}.$$

Interpretación: Esta planta parece ser más vulnerable (si no tenemos en cuenta las viejas) en las primeras tres clases de edad, especialmente en la segunda. Si fuese necesario la conservación de esta especie deberíamos ser especialmente cuidadosos en las primeras fases de su desarrollo para asegurar el éxito de esta población. Al ser la tasa neta de reproducción 2.41, esto quiere decir que la población se incrementará. En consecuencia, en el momento de recogida de estos datos, la población no se encuentra en peligro de extinción.

El análisis posterior lo realizamos con el programa POPULUS®.



NOTAS COMPLEMENTARIAS

MODELOS DISCRETOS

2.1 Objetivo

En esta práctica vamos a usar la potencia de la recursión para experimentar con diferentes modelos discretos lineales y no lineales. Observaremos puntos de bifurcación y caos para el modelo de *Ricker* y el modelo logístico de *May*.

2.2 Introducción

Consideremos la siguiente ecuación $x = \cos x$. Cualquier solución de esta ecuación es la abscisa de la intersección de la recta $y = x$ con la gráfica de la función $y = \cos x$.

EJERCICIO 2.1 Dibuja las dos gráficas y comprueba que hay un punto de intersección en el intervalo $[0, 1]$.

En general, cualquier solución de la ecuación $f(x) = x$ se llama un punto fijo de la función f .

La fórmula de iteración $x_{k+1} = f(x_k)$ se llama **iteración funcional o iteración de punto fijo** y en muchos casos, dependiendo de la función f y del punto inicial x_0 , la sucesión $\{x_k\}$ converge al punto fijo.

Para poder construir estas sucesiones podemos utilizar las siguientes órdenes del programa Mathematica[®]

`Nest[f, x0, k]`: da el término k -ésimo de la sucesión.

`NestList[f,x0,k]` : da una lista con las iteraciones desde x_0 a k .

Las órdenes `FixedPoint[f,x0]` y `FixedPointListNest[f,x0]` son similares a las anteriores salvo que paran cuando encuentran dos iteraciones sucesivas iguales.

EJEMPLO 2.1

- Vamos a utilizar las ordenes anteriores para construir la sucesión de iteraciones que se obtiene para $f(x) = \cos x$ comenzando en $x_0 = 0$. Con `ListPlot[]` podemos ahora dibujar los puntos y hacer una interpretación gráfica de lo que ocurre.

Empezamos definiendo la función

```
f[x_]:=Cos[x]
```

A continuación, construimos los veinte primeros términos de su órbita

```
iters=NestList[f,0.,20]
```

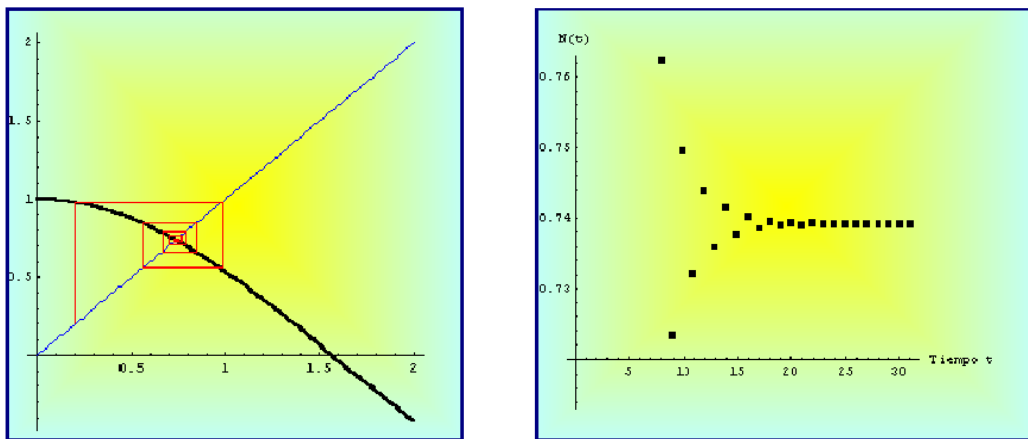


Figura 2.1 Diagrama de Cobweb para $f(x) = \cos x$

Dibujamos en primer lugar la función $f[x]$ y la bisectriz del primer cuadrante.

```
fg=Plot[{x,f[x]}, {x,0,1.5}, PlotStyle -> {RGBColor[1,0,0],
RGBColor[0,0,1]}, DisplayFunction -> Identity]
```

Trazamos la órbita

```
gi=ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[{iters, iters}]],2,1],
PlotJoined -> True,DisplayFunction -> Identity]
```

Finalmente, superponemos los dos gráficos.

```
Show[fg,gi,AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

- La conclusión es que existe un único punto de equilibrio $x_0 = 0.74$ que es estable.

EJERCICIO 2.2 Supongamos que nos encontramos en una árida isla cerca de la costa de un rico continente. Estamos interesados en un determinado tipo de gaviotas que viven en esta isla. Por desgracia, las condiciones medioambientales no son las más adecuadas, de tal forma que si se encontraran aisladas su población disminuiría según el siguiente modelo exponencial o de *Malthus*

$$N_{t+1} = 0.5N_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

donde N_t es la población de pájaros en el tiempo t .

Hay una gran colonia de gaviotas en el continente y cada año 100 de ellas emigran a nuestra isla.

- (a) Modifica el modelo (2.1) para tener en cuenta el factor de la emigración
- (b) Supongamos que inicialmente hay 30 gaviotas. Encontrar los primeros 10 términos de su órbita
- (c) Describir el comportamiento a “largo plazo” de la colonia de gaviotas
- (d) Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

Repetir el ejercicio suponiendo que ahora el modelo exponencial es:

$$N_{t+1} = 1.5N_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

El Teorema del Punto Fijo de *Brouwer* establece que toda función continua de un intervalo cerrado en sí mismo $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$.

En la próxima sección analizaremos el comportamiento de los términos de la iteración funcional con respecto a los puntos fijos.

Recordemos que si x^* es un punto fijo, entonces $f(x^*) = x^*$. Si la función f es derivable, y

$$|f'(x^*)| < 1,$$

entonces el punto x^* se llama **punto fijo atractor**. Cuando una iteración funcional comienza suficientemente cerca de él irremediabilmente cae dentro de su ámbito de influencia y la sucesión converge.

Por el contrario, si

$$|f'(x^*)| > 1$$

se trata de un **punto fijo repulsor**, y por muy cerca de él que se comience, la sucesión termina por alejarse.

2.3 Modelo de Ricker

Es un modelo discreto frecuentemente utilizado en dinámica de poblaciones para estudiar la evolución de una población y viene definido por la ecuación:

$$N_{t+1} = f(N_t) = N_t e^{r \left(1 - \frac{N_t}{k}\right)}, \quad r, k \in \mathbb{R}^+, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Nos proponemos encontrar y analizar los puntos de equilibrio no triviales.

Para este modelo discreto no lineal, la función que lo define es $f(x) = x e^{r(1 - \frac{x}{k})}$. Los puntos de equilibrio se obtienen al resolver la ecuación $f(x) = x$, cuyos valores son $x_1^* = 0$ y $x_2^* = k$. Para poder clasificarlos, es necesario encontrar la derivada de la función $f(x)$, es decir

$$f'(x) = e^{r(1 - \frac{x}{k})} \left(1 - \frac{xr}{k}\right).$$

Ahora debemos sustituir el punto de equilibrio no trivial en $f'(x)$. Al ser $f'(k) = 1 - r$, entonces el $x_2^* = k$ será un punto de equilibrio estable si $|1 - r| < 1$, y para ello $0 < r < 2$.

La siguiente cuestión importante es saber que le sucede al modelo cuando se pierde la estabilidad. Lo primero que podemos pensar es que la población se extinguirá. Para ver su comportamiento podríamos simular la dinámica de la población del modelo para diferentes valores del parámetro r .

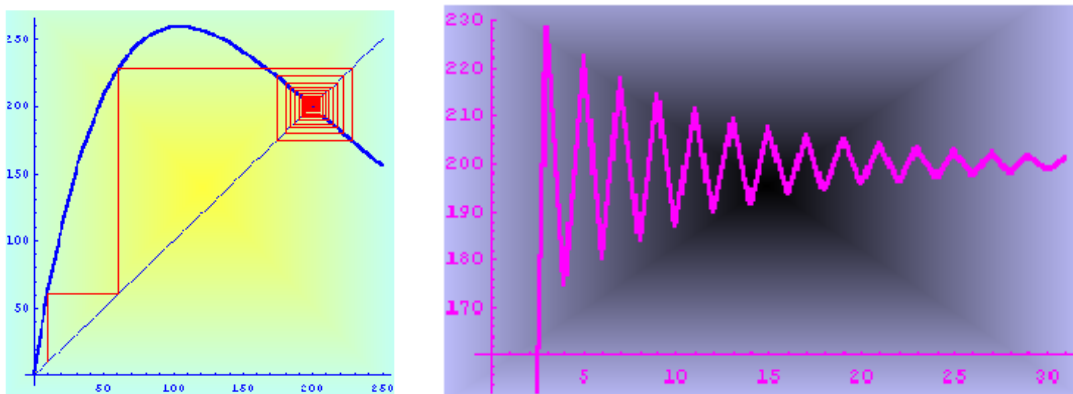


Figura 2.2 Modelo de Ricker $r=1.9$; $k=200$.

Tomamos como $k = 200$ y cambiamos el valor del parámetro r . La solución N_t tiende de forma monótona al punto de equilibrio si $r = 0.5$, o bien oscilando si $r = 1.9$.

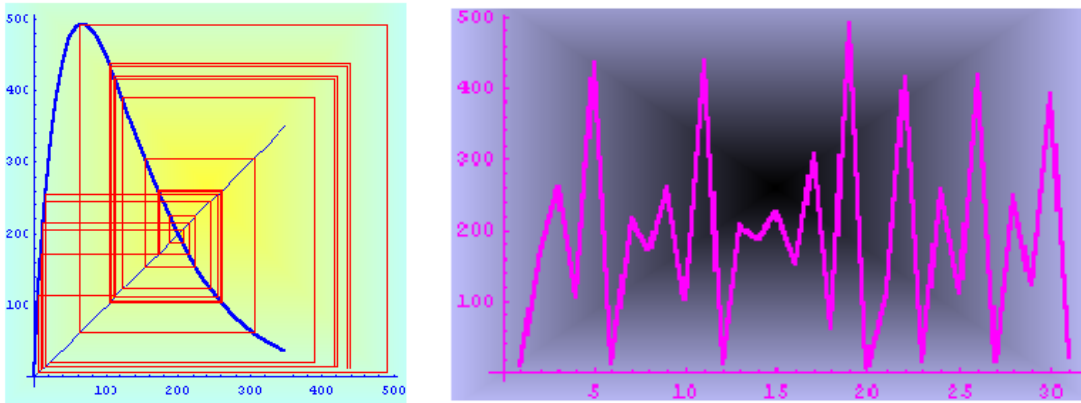


Figura 2.3 Modelo de *Ricker* $r=3$; $k=200$

También puede tender a un ciclo límite de periodo dos si $r = 2.3$ o bien tener un comportamiento caótico cuando $r = 3$. Por supuesto, en este caso podemos dibujar su diagrama de bifurcación, que presenta unas características muy parecidas al modelo logístico de *May*.

Si dibujamos N_{t+1} en función de N_t , observamos que para valores pequeños de la población, entonces ésta aumentará en el próximo año. Por el contrario, para niveles altos de población los mecanismos dependientes de la densidad (competencia) reducen el tamaño de la población en el año próximo.

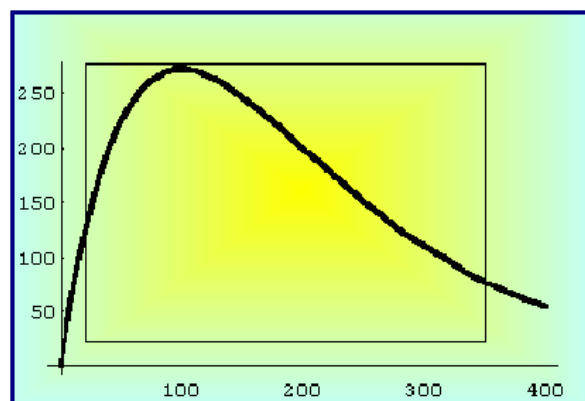


Figura 2.4 Gráfica de $N_{t+1} = f(N_t)$.

2.3.1 Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 0.5$

A continuación incluimos la simulación para diferentes valores del parámetro r utilizando el programa Mathematica®.

$$f[x_] := x * \text{Exp}[0.5 * (1 - x/200)]$$

- Cálculo de la órbita para el valor inicial $x_0 = 10$.

$$\text{iters} = \text{NestList}[f, 10, 20]$$

{10, 16.0801, 25.467, 39.3981, 58.8635, 83.769, 112.016, 139.575, 162.335, 178.36, 188.277, 193.87, 196.867, 198.415, 199.203, 199.6, 199.8, 199.9, 199.95, 199.97, 199.987, 199.994, 199.997, 199.998, 199.999, 200.}

- Para dibujar el diagrama de Cobweb empezamos construyendo la órbita

$$\text{gi} = \text{ListPlot}[\text{Partition}[\text{Flatten}[\text{Transpose}[\text{iters}, \text{iters}]], 2, 1], \text{PlotJoined} \rightarrow \text{True}, \text{DisplayFunction} \rightarrow \text{Identity}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{RGBColor}[1, 0, 0]]$$

y a continuación representamos la función $f(x)$ que nos define el modelo y la bisectriz del primer cuadrante.

$$\text{fg} = \text{Plot}[\{f[x], x\}, \{x, 0, 250\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\{\text{Thickness}[0.01], \text{Thickness}[0.01]\}, \{\text{RGBColor}[1, 0, 0], \text{RGBColor}[0, 0, 1]\}\}, \text{DisplayFunction} \rightarrow \text{Identity}]$$

Por último, superponemos los dos gráficos y construimos la función $N(t)$.

$$\text{grafica1} = \text{Show}[\text{fg}, \text{gi}, \text{AspectRatio} \rightarrow 1, \text{DisplayFunction} \rightarrow \text{\$DisplayFunction}, \text{Background} \rightarrow \text{RGBColor}[1, 1, 0]] \text{ListPlot}[\text{iters}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{PointSize}[0.02], \text{Background} \rightarrow \text{RGBColor}[1, 0.5, 0.2], \text{AspectRatio} \rightarrow 1, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"Tiempo t"}, \text{"N(t)}\}]$$

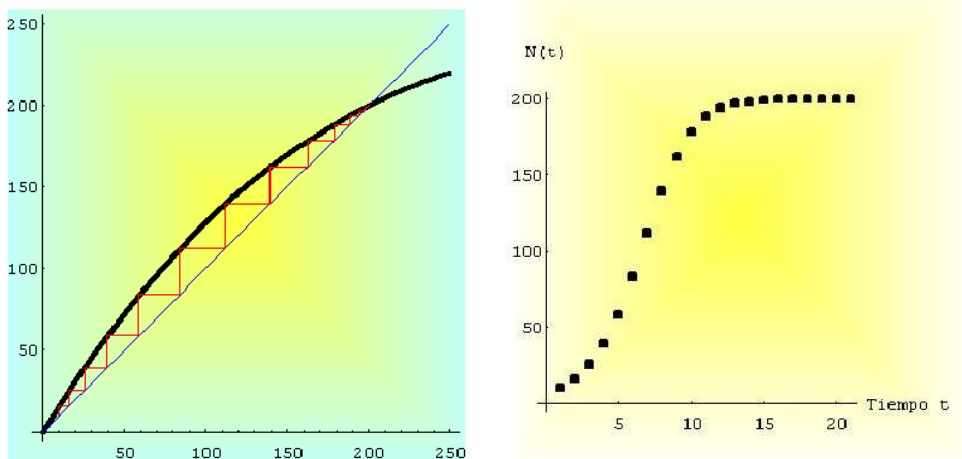


Figura 2.5 Diagrama de Cobweb y Evolución de la población.

- **Comentario:** La población tiende de manera monótona creciente al punto de equilibrio 200 cuando el tiempo tiende hacia infinito.

2.3.2 Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 1.9$

$$f[x_] := x * \text{Exp}[1.9 * (1 - x/200)]$$

- Cálculo de la órbita para el valor inicial $x_0 = 10$.

```
iters = NestList[f, 10, 20]
```

```
{ 10, 60.7997, 228.146, 174.617, 222.234, 179.919, 217.735, 183.975, 214.228,
187.144, 211.455, 189.652, 209.243, 191.653, 207.469, 193.258, 206.041, 194.549,
204.889, 195.591, 203.958 }
```

- Para dibujar el diagrama de Cobweb empezamos construyendo la órbita

```
gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[iters, iters]], 2, 1],
PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity, PlotStyle ->
RGBColor[1, 0, 0]]
```

y a continuación representamos la función $f(x)$ que nos define el modelo y la bisectriz del primer cuadrante.

```
fg = Plot[{f[x], x}, {x, 0, 250}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01],
Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}},
DisplayFunction -> Identity]
```

Por último, superponemos los dos gráficos y construimos la función $N(t)$.

```
grafica1 = Show[fg, gi, AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $Display
Function, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]ListPlot[iters,
PlotStyle -> PointSize[0.02], Background -> RGBColor[1, 0.5, 0.2],
AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"Tiempo t", "N(t)"}]
```

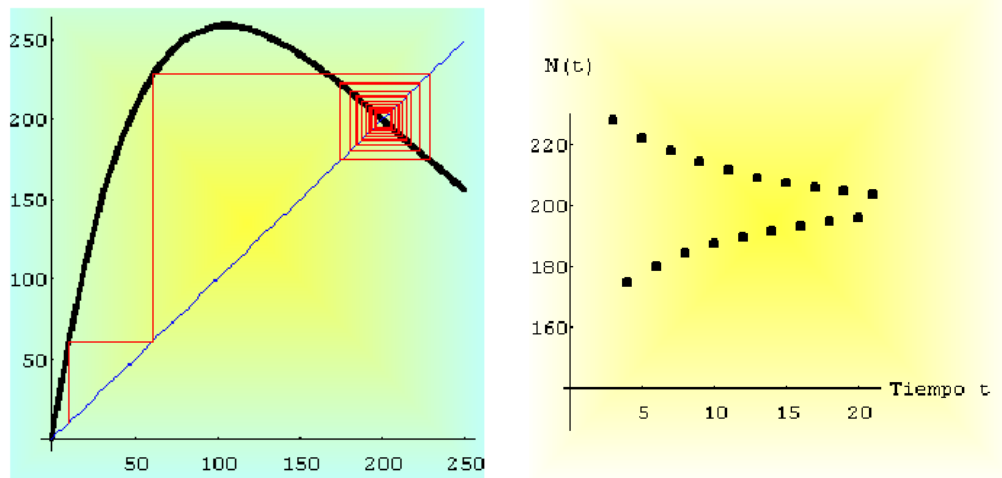


Figura 2.6 Diagrama de Cobweb y Evolución de la población.

- **Comentario:** La población tiende de una forma oscilatoria al punto de equilibrio 200 cuando el tiempo tiende hacia infinito.

2.3.3 Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 2.3$

$$f[x_] := x * \text{Exp}[2.3 * (1 - x/200)]$$

- Cálculo de la órbita para el valor inicial $x_0 = 10$.

```
iters = NestList[f, 10, 20]
```

```
{ 10, 88.9065, 318.99, 81.1884, 318.335, 81.6342, 318.447, 81.5583, 318.428,
81.5708, 318.431, 81.5687, 318.431, 81.5691, 318.431, 81.569, 318.431, 81.569,
318.431, 81.569, 318.431, 81.569, 318.431, 81.569, 318.431 }
```

- Diagrama Cobweb

```
gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[iters, iters]], 2, 1],
PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity, PlotStyle ->
RGBColor[1, 0, 0]]
fg = Plot[{f[x], x}, {x, 0, 350}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01],
Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}},
DisplayFunction -> Identity]
grafica1 = Show[fg, gi, AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $Display
Function, Background -> RGBColor[1, 1, 0]] ListPlot[iters,
PlotStyle -> PointSize[0.02], Background -> RGBColor[1, 0.5, 0.2],
AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"Tiempo t", "N(t)"}]
```

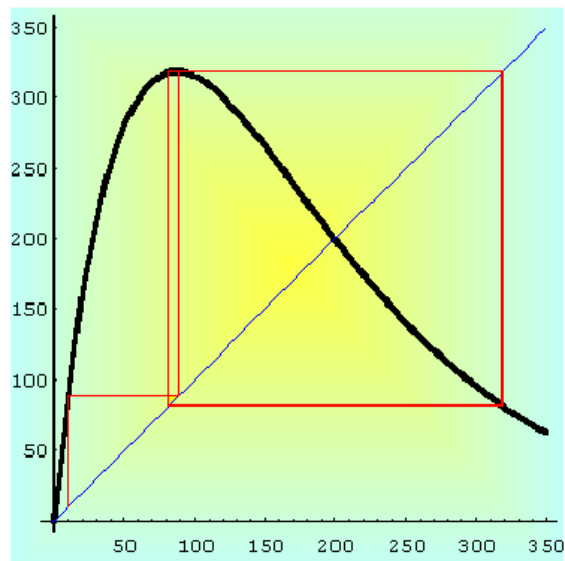


Figura 2.7 Diagrama de Cobweb y Evolución de la población.

- **Comentario:** La población tiene un comportamiento periódico de orden dos cuando el tiempo tiende hacia infinito.

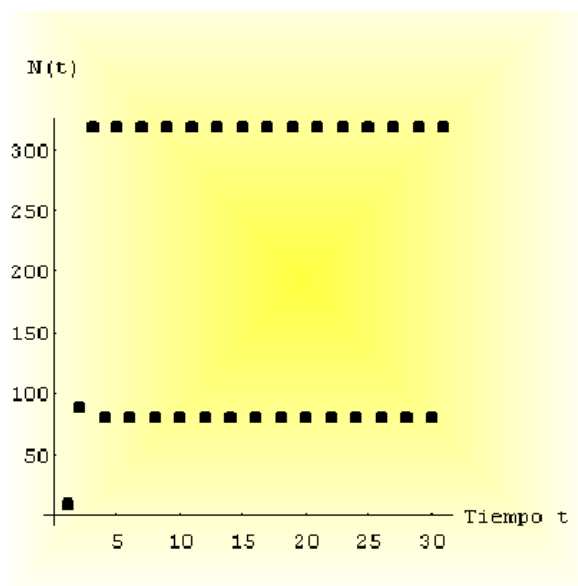


Figura 2.8

Podemos observar mejor el comportamiento periódico si unimos los puntos correspondientes a la población en el tiempo t .

```
grafica2 = ListPlot[iters, PlotJoined → True,
  Background → RGBColor[0.8, 1, 0], PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

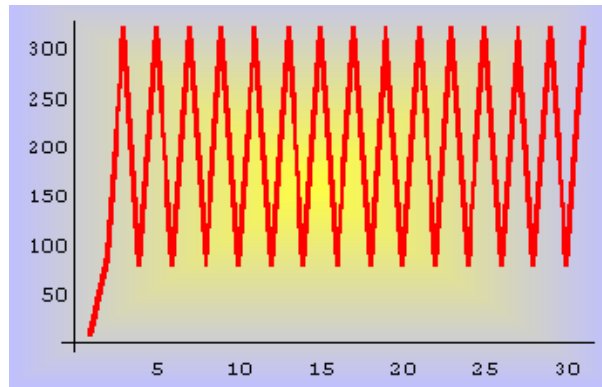


Figura 2.9

2.3.4 Puntos de equilibrio del modelo de Ricker con $r = 3$

$$f[x_] := x * \text{Exp}[3 * (1 - x/200)]$$

- Cálculo de la órbita para el valor inicial $x_0 = 10$.

```
iters = NestList[f, 10, 24]
```

```
{10., 172.878, 259.672, 106.096, 433.939, 12.9853, 214.656, 172.293, 261.072,
104.451, 437.885, 12.3504, 206.114, 188.052, 224.964, 154.699, 305.208, 62.9838,
491.824, 6.17657, 113.082, 416.498, 16.1903, 255.075 }
```

- Diagrama de Cobweb

```
gi = ListPlot[Partition[Flatten[Transpose[iters, iters]], 2, 1],
PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity, PlotStyle ->
RGBColor[1, 0, 0]]
fg = Plot[{p[x], x}, {x, 0, 350}, PlotStyle -> {{Thickness[0.01],
Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}},
DisplayFunction -> Identity]
grafica1 = Show[fg, gi, AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $Display
Function, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]ListPlot[iters,
PlotStyle -> PointSize[0.02], Background -> RGBColor[1, 0.5, 0.2],
AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"Tiempo t", "N(t)"}]
```

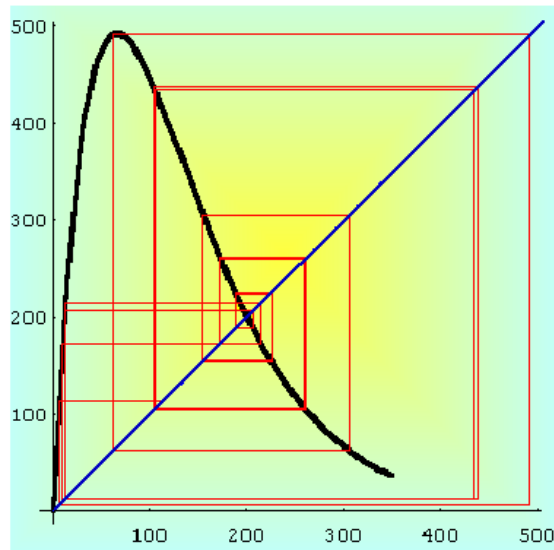



Figura 2.10 Diagrama de Cobweb y Evolución de la población.

- **Comentario:** La población tiene un comportamiento caótico, cuando el tiempo tiende hacia infinito.

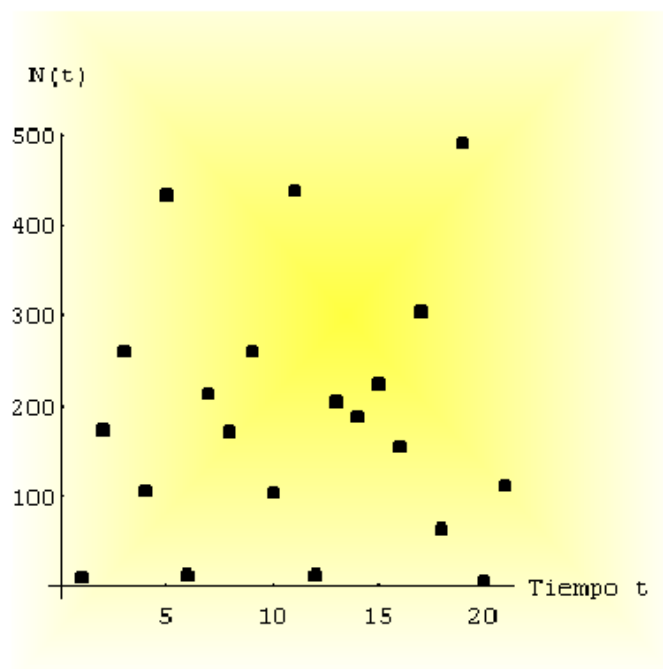


Figura 2.11

Podemos observar mejor el comportamiento caótico si unimos los puntos corres-

pondientes a la población en el tiempo t .

```
grafica2 = ListPlot[iters, PlotJoined → True,
Background → RGBColor[0.8, 1, 0], PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

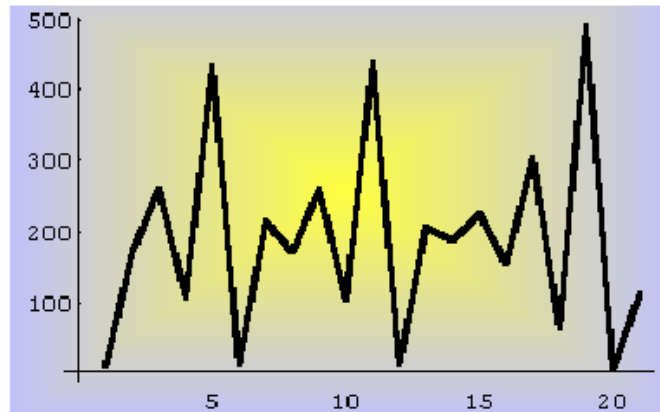


Figura 2.12

2.3.5 Diagrama de bifurcación del modelo de Ricker

Un método muy útil para entender el comportamiento cualitativo de las soluciones de un sistema dinámico discreto como el que estamos analizando, es construir su diagrama de bifurcación, ya que pueden sufrir cambios en la estructuras de sus órbitas cuando variamos los valores de los parámetros que intervienen en el modelo. Esas modificaciones dan lugar al nacimiento o a la muerte de puntos fijos y ciclos o transformaciones en el tipo de las órbitas. A estos cambios se le conocen con el nombre de bifurcaciones.

$$f[x_] := 3 * \text{Exp}[3 * (1 - x/200)]$$

Dibujamos la función que nos define nuestro modelo (en este caso, hemos tomado como valor del parámetro $r = 3$).

```
Plot[f[x], {x, 0, 250}, PlotStyle → {Thickness[0.01],
RGBColor[1, 0, 0]}, Background → RGBColor[1, 0.6, 0.3]]
```

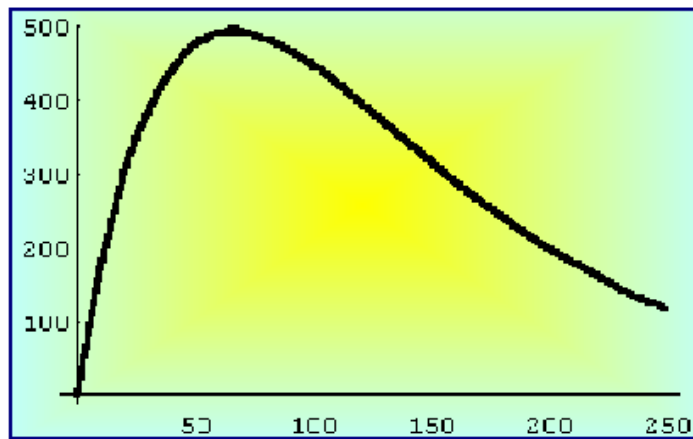


Figura 2.13

El diagrama es una gráfica (en el plano Oxy) de las líneas de fase cercanas a un valor de bifurcación, que nos permite ver los cambios experimentados por las líneas de fase, cuando el parámetro pasa por este valor.

```
logistic[n_Integer] := Module[{f, t, x}, f = Compile[{x, t},
  Evaluate[x * Exp[(3 + t/n) * (1 - x/200)]];
  FoldList[f, 0.223, Range[n]]
  Null
```

Además podemos escuchar el sonido de este estado caótico con la siguiente instrucción:

```
b = ListPlay[logistic[8000]];
```

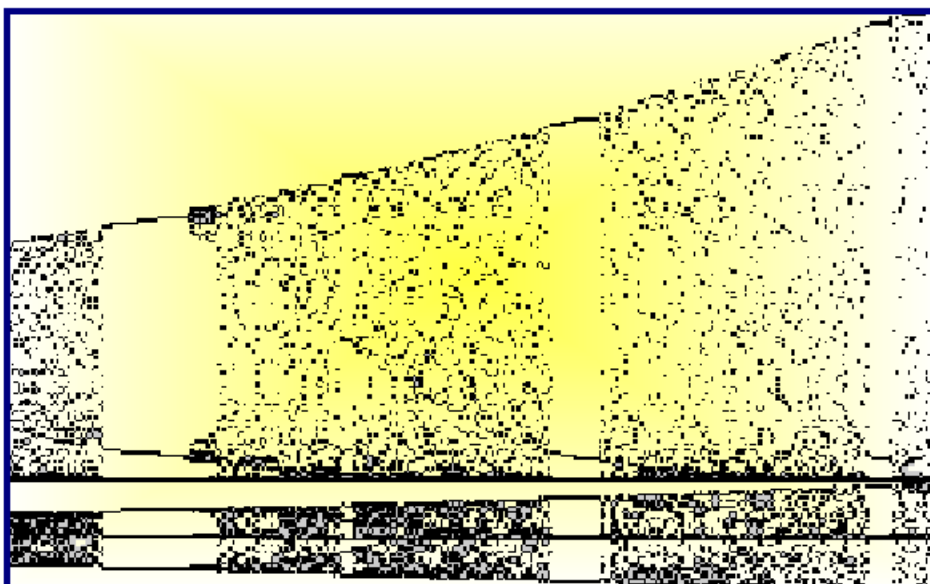


Figura 2.14 Diagrama de bifurcación de $f(x)$.

Nota: Para trazar el diagrama de bifurcación representamos en el eje de abscisas los diferentes valores del parámetro r . Vamos dando a r un número elevado de valores (no necesariamente números enteros) y dibujamos la línea de fase correspondiente para cada uno de los valores del parámetro. De esta manera obtenemos una línea paralela al eje de ordenadas que corta al eje de abscisas en el valor r . Si miramos el dibujo de izquierda a derecha, observamos como evoluciona la línea de fase a través de la bifurcación.

2.4 Modelo logístico de May

Suele utilizarse con mucha frecuencia para hacer ver como un modelo matemático determinista no lineal que depende de un parámetro, puede presentar múltiples comportamientos. Recordemos que el modelo discreto logístico viene dado por la familia de funciones

$$y_c(x) = cx(1 - x), \quad c \in \mathbb{R}^+, \quad x \in [0, 1],$$

donde x representa la fracción de la máxima población posible de una especie, por lo que sólo consideraremos valores de x comprendidos entre cero y uno.

EJEMPLO 2.2

- Consideremos la familia de parábolas

$$y = cx(1 - x), \quad c \in \mathbb{R}^+, \quad x \in [0, 1].$$

Empezamos definiendo una función (de c y x) para la familia anterior.

$$f[c_, x_] := c * x * (1 - x)$$

- ¿Cuáles son los puntos fijos en función de c ?
- Consideremos el caso $0 < c < 1$. ¿Cuáles son los puntos fijos?. ¿Son los puntos fijos atractores o repulsores?. Usar `NestList[]` para ver qué ocurre con la iteración funcional para distintas elecciones del punto inicial. Tomar, por ejemplo, $c = 0.5$ y comentar los resultados.
- Cuando $1 < c < 3$, ¿de qué tipo son los puntos fijos?. Comprobar gráficamente que para $c = 2$ la iteración funcional converge rápidamente al punto fijo 0.5
- Tomar $c = 3$ y usar `NestList[]`. Comprobar que después de algunas iteraciones, los términos sucesivos oscilan entre dos valores diferentes, y quedan atrapados en un bucle sin fin. Es lo que se llama un **ciclo periódico de orden 2**. ¿Qué ocurre cuando $c = 3.5$. ¿Hay un ciclo periódico?. ¿De qué orden?

Supongamos que ahora el valor del parámetro es $c = 3$.

```
g[x_] := f[3, x]
NestList[g, 0.45, 20]
NestList[g, 0.75, 20]
```

```
{0.45, 0.7425, 0.573581, 0.733757, 0.586072, 0.727775, 0.594356, 0.723291, 0.600424,
0.719745, 0.605136, 0.716839, 0.608942, 0.714395, 0.612105, 0.712298, 0.614789,
0.71047, 0.617107, 0.708858, 0.619135}
```

```
{ 0.75, 0.5625, 0.738281, 0.579666, 0.73096, 0.589973, 0.725715, 0.597158, 0.721681,
0.602573, 0.718436, 0.606857, 0.715745, 0.610362, 0.71346, 0.61330, 0.71148, 0.6158,
0.709757, 0.618006, 0.708224 }
```

Resultado 2: Ahora las órbitas tienden a los puntos 0.61 y 0.70. Es decir, presenta un comportamiento periódico de orden dos.

Si aumentamos el valor del parámetro $c = 3.5$.

```
g[x_] := f[3.5, x]
NestList[g, 0.15, 20]
NestList[g, 0.83, 20]
```

```
{ 0.15, 0.44625, 0.864888, 0.408998, 0.846015, 0.455957, 0.868211, 0.400473, 0.84033,
0.469614, 0.871768, 0.391259, 0.83361, 0.48545, 0.87426, 0.384754, 0.82851, 0.49727,
0.874974, 0.382881, 0.826991 }
```

```
{ 0.83, 0.49385, 0.874868, 0.38316, 0.827219, 0.500246, 0.875, 0.382813, 0.826935,
0.500897, 0.874997, 0.38282, 0.826941, 0.50088, 0.87499, 0.38282, 0.82694, 0.50088,
0.874997, 0.38282, 0.826941 }
```

Resultado 3. Ahora los valores se repiten cada cuatro veces. Si aumentamos el valor de c , podríamos ver que se repiten cada ocho, dieciséis, treinta y dos, ... veces. Este proceso donde cada periodo duplica al anterior, culmina hasta llegar a un valor de c que se conoce con el nombre de **constante de Feigenbaum** (aproximadamente $c = 3.5699456718\dots$).

A continuación repetiremos el proceso anterior, pero variando el valor del parámetro, que se inicia con $c = 0.223$.

```
logistic[n_Integer] := Module[{f, t, x}, f = Compile[{x, t},
Evaluate[(3 + t/n) * x * (1 - x)]];
FoldList[f, 0.223, Range[n]]]
```

La celda próxima representa de forma sonora el efecto del barrido del parámetro c . Puede oírse como el período del sonido va doblándose hasta llegar al caos.

```
ListPlay[logistic[8000]];
```

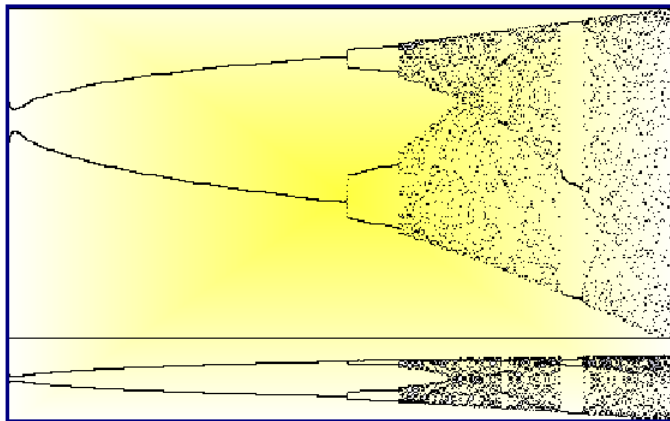


Figura 2.16 Diagrama de bifurcación de $f(x) = cx(1 - x)$.

NOTAS COMPLEMENTARIAS