

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: _____

EJERCICIO 1.- La tabla siguiente corresponde a la distribución en tres intervalos de edad de una población de ciervas de hasta 6 años en 2002 y 2004.

Edad	Núm. ciervas 2002	Núm crías 2002-2004	núm. ciervas 2004
[0, 2)	10	0	170
[2, 4)	20	80	5
[4, 6]	30	90	5

1. ¿Desaparecerá esta población a largo plazo?
2. Encontrar el número de ciervas para cada una de las clases en el año 2008.
3. Si disponemos de 260 ciervas y sacrificamos la clase de menor edad, ¿cuál es el importe de la venta si el precio de cada cierva joven es de 30 euros?

EJERCICIO 2.- Estamos interesados en un determinado tipo de aves que viven en una laguna. La dinámica de la población está gobernada por la siguiente ecuación en diferencias,

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} = -x_t + 3, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

siendo $x_0 = 2$ y $x_1 = \frac{11}{2}$.

1. Encontrar la solución general de la ecuación (1), para conocer el valor de x_4 .
2. ¿Aumentará esta población a largo plazo?

EJERCICIO 3.- La tasa de crecimiento de una población de bacterias $y(t)$ es:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = ty + 3t,$$

donde el tiempo t viene expresado en minutos.

1. ¿Puede hacerse un estudio cualitativo del modelo?
2. Encontrar el número de bacterias después de 4 minutos, sabiendo que a población inicial es $y(0) = 2$.

EJERCICIO 4.- Las firmas farmacéuticas invierten mucho dinero con el fin de probar un nuevo medicamento. Sin embargo, lleva tiempo que los médicos acepten y hagan uso del medicamento. El uso tiende a un valor límite del 100 % o 1, después del tiempo t , en meses. Sea $y(t)$ el porcentaje de médicos que utilizan un nuevo medicamento contra el cancer después de t meses.

Es conocido que la razón de cambio del porcentaje es proporcional a la diferencia entre dicho porcentaje y su valor límite. Si $y(0) = 0.25$, encontrar el porcentaje de médicos que aceptan el medicamento después de 3 meses, sabiendo que después de 1 mes el porcentaje es del 33 %. Trazar una gráfica aproximada de la función $y(t)$.

EJERCICIO 5.- Un depósito contiene inicialmente 3 kilos de sal disuelta en 100 litros de agua. Supongamos que se comienza a introducir en el depósito por un grifo salmunera que contiene α kilos de sal por litro a una velocidad de 2 litros/minuto. Simultáneamente, se sacan del depósito 2 litros/minuto de la mezcla resultante.

1. Encuentra el valor de la concentración α para que “a largo plazo” la cantidad de sal en el depósito sea de 10 kilos.
2. Calcular la cantidad de sal en el depósito después de 10 minutos.

EJERCICIO 6.- Dos poblaciones $x(t)$, $y(t)$ evolucionan según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = 3x - y \end{cases}$$

1. Si los valores iniciales son $x(0) = 1$, $y(0) = 3$, ¿cuál será el valor de $x(3)$ y de $y(3)$?
2. Haciendo uso de la matriz jacobiana, encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.