

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 1.-** La tabla siguiente corresponde a la distribución en tres intervalos de edad de una población de ciervas de hasta 6 años en 2002 y 2004.

Edad	Núm. ciervas 2002	Núm crías 2002-2004	núm. ciervas 2004
[0, 2)	10	0	170
[2, 4)	20	80	5
[4, 6]	30	90	5

1. ¿Desaparecerá esta población a largo plazo?
2. Encontrar el número de ciervas para cada una de las clases en el año 2008.
3. Si disponemos de 260 ciervas y sacrificamos la clase de menor edad, ¿cuál es el importe de la venta si el precio de cada cierva joven es de 30 euros?

**EJERCICIO 2.-** Estamos interesados en un determinado tipo de aves que viven en una laguna. La dinámica de la población está gobernada por la siguiente ecuación en diferencias,

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} = -x_t + 3, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

siendo  $x_0 = 2$  y  $x_1 = \frac{11}{2}$ .

1. Encontrar la solución general de la ecuación (1), para conocer el valor de  $x_4$ .
2. ¿Aumentará esta población a largo plazo?

**EJERCICIO 3.-** La tasa de crecimiento de una población de bacterias  $y(t)$  es:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = ty + 3t,$$

donde el tiempo  $t$  viene expresado en minutos.

1. ¿Puede hacerse un estudio cualitativo del modelo?
2. Encontrar el número de bacterias después de 4 minutos, sabiendo que a población inicial es  $y(0) = 2$ .

**EJERCICIO 4.-** Las firmas farmacéuticas invierten mucho dinero con el fin de probar un nuevo medicamento. Sin embargo, lleva tiempo que los médicos acepten y hagan uso del medicamento. El uso tiende a un valor límite del 100 % o 1, después del tiempo  $t$ , en meses. Sea  $y(t)$  el porcentaje de médicos que utilizan un nuevo medicamento contra el cancer después de  $t$  meses.

**Es conocido que la razón de cambio del porcentaje es proporcional a la diferencia entre dicho porcentaje y su valor límite.** Si  $y(0) = 0.25$ , encontrar el porcentaje de médicos que aceptan el medicamento después de 3 meses, sabiendo que después de 1 mes el porcentaje es del 33 %. Trazar una gráfica aproximada de la función  $y(t)$ .

**EJERCICIO 5.-** Un depósito contiene inicialmente 3 kilos de sal disuelta en 100 litros de agua. Supongamos que se comienza a introducir en el depósito por un grifo salmunera que contiene  $\alpha$  kilos de sal por litro a una velocidad de 2 litros/minuto. Simultáneamente, se sacan del depósito 2 litros/minuto de la mezcla resultante.

1. Encuentra el valor de la concentración  $\alpha$  para que “a largo plazo” la cantidad de sal en el depósito sea de 10 kilos.
2. Calcular la cantidad de sal en el depósito después de 10 minutos.

**EJERCICIO 6.-** Dos poblaciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  evolucionan según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = 3x - y \end{cases}$$

1. Si los valores iniciales son  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 3$ , ¿cuál será el valor de  $x(3)$  y de  $y(3)$ ?
2. Haciendo uso de la matriz jacobiana, encontrar y clasificar los puntos de equilibrio.