Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
27 enero de 2012

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ______________________________

EJERCICIO 1.- Una epidemia se desarrolla en una población de 500 habitantes de una forma tal que, en cada momento del tiempo, la velocidad de desarrollo de la infección es directamente proporcional al número de personas enfermas por el número de personas sanas.

- Sabiendo que inicialmente el número de personas infectada es de 25 y que el momento en el que la epidémia se propaga con mayor rapidez es el cuarto día, ¿cuántas personas estarán infectadas a los diez días de iniciarse la epidémia?

EJERCICIO 2.- El ritmo al que cierto medicamento se absorbe en el sistema circulatorio está dado por $dy/dt = 2 - 0.25y$, donde $y(t)$ es la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en el tiempo t.

1. Supongamos que $y(0) = 0.15$, calcular la concentración $y(t)$ en cualquier momento t.
2. Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo. Dibujar, de forma aproximada, la curva solución para $y(0) = 0.3$
3. ¿Qué le sucede a $y(t)$ a "largo plazo"?

EJERCICIO 3.- Un tanque contiene 5 kilos de sal disueltas en 30 litros de agua. Supongamos que 2 litros de salmuera que contiene $c(t) = 2e^{0.1t}$ kilos de sal disuelta por litro fluyen hacia el tanque cada minuto y que la mezcla (que se mantiene uniforme al agitarla) sale del tanque al ritmo de 1 litro por minuto. Hallar una función $y(t)$ para saber la cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.

EJERCICIO 4.- Las funciones $x(t); y(t)$ representan los efectivos de dos especies de animales, inicialmente integradas por 200 y 100 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por:

$$\begin{cases} x'(t) = -x \\ y'(t) = 3x - 2y \end{cases}$$

medido el tiempo t en minutos.

1. Determinar los efectivos de las especies al cabo de 10 minutos
2. Encontrar el número de individuos a largo plazo.
3. Encuentra y clasifica el punto de equilibrio por medio de la matriz jacobiana. ¿Está el resultado obtenido de acuerdo con el calculado en el apartado anterior?

EJERCICIO 5.- Sean $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ las poblaciones de conejos, zorros y patos en un mes cualquiera t. Se sabe que mes tras mes se cumple:

- El número de conejos en un mes cualquiera es, la tercera parte de la población de zorros más el 50% de la población del conejos, del mes anterior.
- El número de zorros en un mes cualquiera es, el 50% de la población de conejos del mes anterior.
- La población de patos en un mes cualquiera es, las dos terceras partes de la población de zorros, más la población de patos, del mes anterior.

1. Construir el diagrama de estados de esta cadena de Markov y decir si es regular. Razonar la respuesta.
2. Analizar el compartimiento a largo plazo del modelo para conocer los porcentajes de cada uno de los estados. Si el número total de animales es de 500, ¿cuántos de ellos serán patos?

EJERCICIO 6.-

1. Sea la ecuación en diferencias $y_{t+2} - y_{t+1} = 0.5(y_{t+1} - y_t)$, donde y_t con $t = 0, 1, 2, 3, \cdots$ representa a la cantidad de individuos en el año t. Interpretar biológicamente la ecuación en diferencias anterior. Si el número inicial de individuos es 2 y al cabo de un año es 5, ¿cuál será el valor de la población al cabo de 10 años?
2. Encontrar la solución de la ecuación en diferencias $y_{t+2} - y_{t+1} = 0.5(y_{t+1} - y_t) + 6$.