

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: _____

EJERCICIO 1.- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que,

$$y_{t+1} - y_t = \frac{1}{2}y_t - 50, \quad (1)$$

siendo y_t el número de individuos en el año t .

1. Interpreta desde un punto de vista biológico la ecuación (1)
2. Encuentra y clasifica el punto de equilibrio del sistema dinámico $y_{t+1} = f(y_t)$ dado por la ecuación (1)
3. Comprueba el resultado anterior haciendo uso del diagrama de Cobweb.

EJERCICIO 2.- Un zoo decide programar las visitas según el siguiente método: si una semana se visitó el acuario, a la semana siguiente se visitará, dos de cada tres veces, el delfinario, y una de cada tres veces, el loro park. Si la semana pasada se visitó el loro park, dos de cada tres veces se visitará el acuario y una de cada tres el delfinario. Finalmente, si la semana pasada se visitó el delfinario, la semana siguiente se visitará el delfinario una de cada tres veces y el acuario dos de cada tres veces. Si inicialmente las cuotas de asistencia son el 50 % para el acuario, el 35% para el delfinario, y el 15 % para el loro park.

1. ¿Estamos ante una cadena de Markov regular?. Justifica la respuesta.
2. Comprueba que la matriz que representa al modelo tiene a $\lambda = 1$ como valor propio.
3. Analiza el comportamiento a largo plazo del modelo para contestar a la siguiente cuestión. Después de seguir este esquema durante un “largo plazo”, ¿se habrá cumplido con la condición que exige programar al mes el 25 % de visitas al delfinario?

EJERCICIO 3.- Dado el siguiente modelo de población

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.7 \left(1 - \frac{y(t)}{50} \right) \left(\frac{y(t)}{20} - 1 \right)$$

1. ¿Para qué valores de $y(t)$ la población permanece constante?
2. Estudia de forma cualitativa el modelo y dibuja, de forma aproximada, las soluciones de esta ecuación diferencial para los valores iniciales, $y(0) = 10$; $y(0) = 35$; $y(0) = 75$ individuos.

EJERCICIO 4.- La variación de temperatura de un cuerpo en contacto con el ambiente es, en cada instante, proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el ambiente.

Supongamos que encontramos el cadáver de un animal. En dicho momento, se toma la temperatura del mismo y resulta ser de 35°C . Una hora después se vuelve a tomar la temperatura y ésta es de 34.5°C . Suponiendo constante la temperatura ambiente e igual a 27°C , se pide calcular a qué hora se produjo la muerte del animal, sabiendo que la temperatura del animal en vida es de 36.5°C .

EJERCICIO 5.- Se disuelven inicialmente 10 kilos de sal en un tanque que contiene 100 litros de agua. Por un grifo A se inyecta salmuera al tanque a razón de 1 litro por minuto y por otro B se introduce agua pura a razón de 1 litro/minuto. La solución adecuadamente mezclada se bombea fuera del tanque a razón de 1 litro/minuto. Si la concentración de la solución que entra por el grifo A es de $0.2e^{0.1t}$ gramos/litro, determinar la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera t .

EJERCICIO 6.- Las funciones $x(t); y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales inicialmente integradas por 20 y 10 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = & y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

medido el tiempo t en años.

1. Encontrar el número de individuos para $t = 5$ años.
2. Hallar el número de individuos a largo plazo.
3. Encontrar y clasificar el punto de equilibrio por medio de la matriz jacobiana. Interpretar el resultado obtenido.