Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
4 febrero 2011

EXAMEN DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ____________________

EJERCICIO 1.- Se sabe que la matriz de transición de una cadena de Markov viene dada por,

$$A := \begin{pmatrix} a & 1.5\,a \\ b & c \end{pmatrix}$$

1. Teniendo en cuenta que $(3,4)$ es un vector propio asociado al valor propio positivo estrictamente dominante, calcular los valores de $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.
2. Si el vector inicial es $\vec{X}(0) = (10, 20)$, encuentra de manera razonada el valor de $\vec{X}(t)$ para un t suficientemente grande.

EJERCICIO 2.- Sea y_t el número de individuos de una población en el año t. La evolución de dicha población viene determinada por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} + a\,y_{t+1} + c\,y_t = 3^t\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$$

1. Si la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_t^h = C_1\,3^t + C_2\,t\,3^t$, encontrar el valor de los parámetros a y b.
2. Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias completa.

EJERCICIO 3.- La dinámica de una determinada especie responde a la siguiente ecuación en diferencias no lineal:

$$y_{t+1} = 2\,y_t\,e^{1-y_t}\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$$

1. Calcular y clasificar los puntos fijos o de equilibrio del modelo.
2. Encontrar un valor particular del parámetro a para que la población a largo plazo desaparezca.

EJERCICIO 4.- En una piscifactoría se cosecha una cantidad constante h de peces por unidad de tiempo. La población en el tiempo t crece directamente proporcional a la cantidad que hay en cada momento con constante de proporcionalidad a y decrece directamente proporcional al número de individuos que hay en ese momento con constante de proporcionalidad b. Construir un modelo matemático y examinarlo tanto de forma cualitativa como analíticamente en el caso en que $a = 5$, $b = 1$, $h = 25/4$. Determinar si se extingue la población en un tiempo finito, en cuyo caso, calcular ese tiempo.

EJERCICIO 5.- Sea $y(t)$ el número de individuos de una población de aves en el día t. Se sabe que su evolución viene determinada por la ecuación diferencial ordinaria:

$$y'(t) = \mu\, y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right),$$

donde μ y K son números reales con $K > 0$.

1. Sabiendo que $y(0) < K$, determinar el signo del parámetro μ para que la población crezca.

2. Resolver la ecuación diferencial, sabiendo que la capacidad de carga del modelo es 27, $y(0) = 18$ y que $y'(0) = 3$.

EJERCICIO 6.- Un depósito contiene 40 litros de agua contaminada en los que están disueltos 300 gramos de contaminante. El agua contaminada empieza a fluir al depósito a una velocidad de 2 litros por minuto. La concentración del contaminante en esta corriente de entrada en el instante t es $c(t) = 3t$ gramos por litro. Al mismo tiempo, por otro grifo entra agua contaminada a razón de 2 litros por minuto con una concentración de 10 gramos por litro. La solución del depósito se mezcla uniformemente y el agua contaminada fluye hacia el exterior a una velocidad de 4 litros por minuto. Obtener un modelo matemático para esta situación y encontrar la cantidad de contaminante y(t) en el depósito en un minuto cualquiera t.

EJERCICIO 7.- Dos especies interaccionan de forma que sus respectivas poblaciones verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = (12 - 5x + 2y)x \\ y'(t) = (24 - 4x - 2y)y \end{cases}$$

Contestar de forma razonada a las siguientes preguntas:

1. En ausencia de la especie $y(t)$ la especie $x(t)$:

   (a) Se extingue

   (b) Crece ilimitadamente

   (c) Crece limitadamente.

2. La presencia de la especie $x(t)$:

   (a) Beneficia a la especie $y(t)$

   (b) Perjudica a la especie $y(t)$

   (c) Ninguna de las dos.

3. Haciendo uso de la matriz jacobiana, clasificar los puntos de equilibrio del modelo, qué puedes decir del comportamiento de ambas poblaciones?