

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: _____

EJERCICIO 1.- Se dice que una población crece de forma natural si su velocidad de crecimiento es directamente proporcional a la población existente en cada instante.

1. Encuentra y resuelve la ecuación diferencial que modeliza a esta situación.
2. Según un proverbio chino, la superficie cubierta por los lirios de un estanque crece de manera natural duplicándose cada día. Al final de un mes, de 30 días, la superficie de un estanque se halla totalmente cubierta por los lirios. ¿En qué momento estuvo cubierto al 75% del estanque?

EJERCICIO 2.- Para determinar el número de individuos que hay en una población de palomas a lo largo del tiempo consideramos a ecuación diferencial logística,

$$x'(t) = ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{b}\right)$$

donde a y b son dos números reales con $b > 0$. Además, $x(t)$ representa el número de millones de palomas de la población en el año t .

1. Sabiendo que $x(0) < b$, determinar el signo de a para que la población sea creciente.
2. Calcular los valores de a y b si se sabe que el número máximo admisible de individuos (capacidad de carga) de la población de palomas es igual a 27 millones, $x(0) = 18$ y $x'(0) = 3$.
3. Para los valores de los parámetros a y b encontrados en el apartado anterior. Dibuja un esbozo de la solución de la ecuación diferencial que cumple la condición inicial $x(0) = 18$.

EJERCICIO 3.- Acabada la cosecha de trigo en cierta localidad, un propietario llena su granero con una cantidad $y(0) = 1000$ kg. de trigo. Alrededor del granero vive una especie de roedores que se alimentará del trigo recién almacenado. Un estudio realizado sobre la cantidad de roedores $x(t)$ muestra que crecen con una velocidad constante igual a 2, siendo 10 el número inicial de roedores. Igualmente se ha concluido que, a causa de la presencia de los roedores, el ritmo de decrecimiento de la cantidad de trigo $y(t)$ es proporcional (con constante de proporcionalidad igual a -1) al producto entre la cantidad de roedores y la cantidad de trigo. Se pide:

- Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de roedores $x(t)$.
- Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de trigo en el instante t .
- ¿Cuánto tiempo tardarán los roedores en consumir la cuarta parte de la cantidad de trigo inicial?

EJERCICIO 4.- Las funciones $x(t); y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales inicialmente integradas por 20 y 10 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = & y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

medido el tiempo t en años. Encontrar el número de individuos para $t = 5$ años.

EJERCICIO 5.- Sea x_t el número de árboles de un bosque en el año t . Una compañía tala cada año un 5% de los árboles del bosque y planta 300 nuevos árboles.

1. Si en el momento inicial hay 10000 árboles en el bosque, determinar el número de árboles en cualquier año t .
2. ¿Cuántos árboles habrá en el bosque a largo plazo? Comprueba el resultado haciendo uso del diagrama de *Cobweb*.

EJERCICIO 6.- Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$5y_{t+2} - 6y_{t+1} + y_t = \left(\frac{1}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

siendo y_t el número de individuos en el año t . Encontrar el número de individuos en el quinto año, sabiendo que inicialmente eran 10 y al año siguiente 20.

EJERCICIO 7.- Estudiamos una población de aves (con el mismo número de machos que de hembras). Se sabe que un 12% de las nacidas en un año pasan a adultas al año siguiente y que todas las adultas mueren al año siguiente. Además, cada hembra adulta produce dos hembras cada año.

- Transcurridos unos años, determinar en que tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población.
- Después de unos años, se sabe que la población de hembras será de 1000, ¿cuántas de ellas serán adultas?
- Determinar cuál debe ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantenga estable.